Conditions d’utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- Le Conservatoire numérique communément appelé le Cnum constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d’œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s’inscrit dans le cadre de la loi nº 78-753 du 17 juillet 1978 :

- **la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue (Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - http://cnum.cnam.fr)**
- **la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l’objet d’une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.**

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- **les reproductions de documents protégés par le droit d’auteur, uniquement consultables dans l’enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l’autorisation préalable du titulaire des droits.**

4- Pour obtenir la reproduction numérique d’un document du Cnum en haute définition, contacter cnum(at)cnam.fr

5- L’utilisateur s’engage à respecter les présentes conditions d’utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d’une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d’utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

Auteur(s)	**Belidor, Bernard Forest de (1697-1761)**
Titre	**Architecture hydraulique, ou l'art de conduire, d'élever, et de ménager les eaux pour les différents besoins de la vie. Première partie. Tome premier**
Adresse	**Paris : Firmin Didot, 1819**
Edition	**Nouvelle édition, avec des notes et additions par M. Navier, ingénieur du corps royal des Ponts-et-Chaussées**
Collation	**1 vol. (XIV-666-[2] p.-[55] pl. dépl.) ; 28 cm**
Nombre d'images	**746**
Cote	**CNAM-BIB 4 Di 4 Res**
Sujet(s)	**Génie hydraulique -- France -- 18e siècle Machines hydrauliques -- France -- 18e siècle**
Thématique(s)	**Construction**
Typologie	**Ouvrage**
Note	**Les pages 449 à 458 sont manquantes dans l'exemplaire du Cnam. Celles-ci ont été numérisées à partir de l'exemplaire de l'ENPC coté 4°1995 bis.**
Langue	**Français**
Date de mise en ligne	**13/06/2012**
Date de génération du PDF	**16/03/2021**
Permalien	**http://cnum.cnam.fr/redir?4RESDI4**

Cet ouvrage précieux a été tout récemment mutilé des pages 449 à 458 par un lecteur malhonnête, qui a commis un vol et un abus de confiance punis sévèrement par la loi. En rendant impossible la lecture de tout un passage important, le misérable, auteur de cette lacération s'est rendu coupable d'une faute aussi grave à l'égard de tous les lecteurs de la bibliothèque.

Paris, le 21 Juin 1928

Edmond Maurice Lévi

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ARCHITECTURE

HYDRAULIQUE,

OU

L'ART DE CONDUIRE, D'ÉLEVER, ET DE MÉNAGER LES EAUX
POUR LES DIFFÉRENTS BESOINS DE LA VIE.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT, IMPRIMEUR DU ROI.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ARCHITECTURE HYDRAULIQUE,

OU

L'ART DE CONDUIRE, D'ÉLEVER, ET DE MÉNAGER LES EAUX POUR LES DIFFÉRENTS BESOINS DE LA VIE.

PAR BÉLIDOR.

NOUVELLE ÉDITION,

AVEC DES NOTES ET ADDITIONS PAR M. NAVIER, INGÉNIEUR DU CORPS ROYAL DES PONTS-ET-CHAUSSÉES.

PREMIÈRE PARTIE. — TOME PREMIER.

A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, IMPRIMEUR DU ROI, ET DE L'INSTITUT,
LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE, ET LA MARINE,
RUE JACOB, N° 24.

1819.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

RAPPORT

Sur les corrections et additions faites par M. NAVIER, *ingénieur du corps royal des Ponts-et-Chaussées, et ancien élève de l'École Polytechnique, à une nouvelle édition du premier volume de l'Architecture Hydraulique de* BÉLIDOR.

Le Secrétaire perpétuel de l'académie pour les Sciences mathématiques certifie que ce qui suit est extrait du procès-verbal de la séance du lundi 17 mai 1819.

L'ACADÉMIE a chargé MM. Poisson, Girard, Fourier, et de Prony, de lui rendre compte d'une nouvelle édition du premier volume de l'Architecture hydraulique de Bélidor. Ce traité, dont la première édition porte la date de 1737, a joui, dès le moment où il a paru, d'une réputation aussi générale que méritée; et quoique la science et l'art des constructions aient fait beaucoup de progrès depuis la moitié du dernier siècle, il est encore recherché, et consulté par les ingénieurs, tant civils que militaires, malgré les imperfections qui tiennent à l'époque de sa composition, et même malgré les erreurs qu'on y rencontre.

M. Firmin Didot ayant formé le projet de le réimprimer, a prié M. Navier d'y faire les corrections et additions que l'état actuel des connaissances rend indispensables. Ce jeune savant, connu de l'académie par d'intéressants mémoires, et qui a déja prouvé en publiant *la Science des Ingénieurs* de Bélidor, et les œuvres posthumes de M. Gauthey, son oncle, combien il est capable d'améliorer et d'enrichir les ouvrages dont il est l'éditeur, s'est livré avec beaucoup d'ardeur à ce travail. Nous espérons prouver par l'analyse suivante qu'il y a mis autant de science et de talent que de zèle et de constance.

M. Navier a laissé l'ancien texte de Bélidor absolument intact, et sa nouvelle édition ne diffère de l'ancienne que par des notes nombreuses

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et extrêmement étendues. Ces notes se composent 1° d'observations critiques sur les passages défectueux et erronés du texte; 2° d'additions faites à ce texte. Il serait trop long d'indiquer toutes les fautes qui ont été rectifiées, et l'analyse suivante se rapporte principalement à la deuxième partie du travail, c'est-à-dire aux additions.

Le premier volume de l'Architecture hydraulique est divisé en deux livres, contenant respectivement les principes de la mécanique, et la description et le calcul de diverses espèces de moulins, et machines à élever l'eau.

Le premier livre contient trois chapitres, et le premier de ces chapitres renferme les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides. Les notes de M. Navier sur cette partie de l'ouvrage peuvent remplacer complètement, et sur-tout très-avantageusement, le texte lui-même. Laissant de côté les améliorations et corrections qu'il y a faites, nous citerons parmi les additions dans lesquelles il a tiré heureusement parti des nouvelles perfections données aux théories mécaniques, une démonstration élémentaire du principe des vîtesses virtuelles, diverses méthodes pratiques pour déterminer par approximation les aires, les volumes, et les centres de gravité; une théorie du choc, en ayant égard à la compression qui a lieu à la rencontre de deux corps.

Le commentateur établit en général l'existence du principe de la conservation des forces vives, et donne une démonstration très-simple du théorême de Carnot, relatif à la perte des forces vives qui a lieu dans un système des corps en mouvement, par suite d'un changement brusque de vîtesse. En appliquant ces considérations au cas d'un corps solide assujetti à se mouvoir autour d'un axe fixe, il établit les notions des centres d'oscillation et de percussion, du moment d'inertie et des axes principaux. Lorsqu'il en déduit ensuite les lois du choc des corps solides durs ou élastiques, il montre qu'on obtient le même résultat, soit qu'on suppose que, dans le choc de deux corps solides non élastiques, il se fasse un changement brusque de vîtesse; soit qu'on n'admette point ce changement brusque, mais qu'on ait égard aux forces intérieures développées par la percussion.

Dans le deuxième chapitre, intitulé: *du frottement*, M. Navier expose les lois du frottement des corps solides et de la roideur des cordes, telles qu'elles ont été établies par Coulomb, ainsi que leur application aux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

machines simples. Il donne dans des tableaux les résultats obtenus par ce célèbre physicien, et par d'autres savants, pour l'évaluation du rapport du frottement à la pression, dans les divers cas du glissement des corps solides et du roulement des voitures. Il rectifie une fausse théorie du frottement des pilons, qui se trouve dans le texte de Bélidor. Il expose une théorie nouvelle du frottement des engrenages, fondée sur la figure qu'il convient de donner aux dents, et qu'on leur donne effectivement dans les machines bien exécutées. Dans une note assez étendue, il établit sur la disposition des mécanismes diverses notions peu répandues parmi les mécaniciens, et propres à montrer quelle influence le placement judicieux des roues et pignons, et des points contre lesquels il s'exerce des percussions, peut avoir sur le succès et la solidité des machines. Dans une autre note, il démontre d'une manière courte et élémentaire la théorie des engrenages. Les calculs de diverses machines servent d'exemples pour rendre plus facile l'application des principes.

Le troisième chapitre contient les principes de l'hydraulique. M. Navier expose les lois de l'équilibre dans les fluides pesants, il démontre le principe connu pour l'écoulement d'un fluide hors d'un vase entretenu constamment plein, soit par un orifice très-petit, soit dans le cas où il faut avoir égard à l'étendue de l'orifice. Il donne une table des hauteurs dues aux vîtesses, calculée en mètres. Le principe pour l'écoulement des fluides par un orifice très-petit ne s'accordant avec l'expérience qu'autant que la paroi près de l'orifice est évasée, et que tous les filets de fluide en sortent avec des directions parallèles, l'auteur expose avec détail ce que la théorie et l'observation ont appris jusqu'à-présent sur les effets de la contraction de la veine fluide dans les diverses espèces d'orifices, et il se trouve conduit à distinguer l'influence de la grandeur absolue de l'orifice, et celle de sa hauteur comparée avec la grandeur de la charge. Il rapporte à cette occasion, et traduit en nouvelles mesures, les résultats des expériences de Mariotte, qui semblent avoir été négligées par les auteurs qui ont déja traité le même sujet. Il considère particulièrement le cas où l'orifice est formé par un petit tuyau additionnel, et donne la théorie de ce genre d'écoulement, et des phénomènes particuliers qu'il présente dans l'air et dans le vide. Il donne des formules commodes pour le calcul de la dépense par les orifices verticaux sur le sommet desquels il n'y a

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'une petite charge. Il expose ensuite une théorie nouvelle, fondée sur l'emploi du principe de la moindre action, de l'écoulement par un orifice vertical ouvert à sa partie supérieure, théorie qui se trouve confirmée par des expériences du docteur Robison, dont l'auteur a eu récemment connaissance. Le reste du chapitre est consacré à la théorie du choc des fluides, et de l'équilibre des corps flottants. L'auteur considère d'abord le choc d'une veine de fluide isolée contre un plan qu'elle rencontre directement ou obliquement. Il applique les résultats à la théorie des roues à aubes, et montre à cette occasion que les règles différentes données par Parent et par Borda pour la détermination de la vîtesse correspondante au maximum d'effet, règles qu'on avait regardées jusqu'ici comme contradictoires, ne le sont point, et que la règle de Parent convient à une roue mue par un courant d'une largeur indéfinie, et celle de Borda à une roue renfermée dans un coursier. L'auteur expose ensuite une théorie de la résistance pour un corps contenu dans une masse fluide d'une étendue indéfinie, et il observe que le rapprochement de toutes les expériences connues permet d'établir sur cette matière deux principes généraux, savoir : que la résistance est pour un même corps proportionnelle au quarré de la vîtesse, et, pour des corps semblables, au cube de leurs dimensions homologues; et il indique les modifications qu'on doit apporter à ces principes d'après diverses circonstances. Après ces notions générales, l'auteur rapporte les résultats des expériences connues pour l'évaluation absolue de la résistance de divers corps, tels les plans choqués directement ou obliquement, les prismes plus ou moins allongés, garnis de proues ou de poupes, les sphères, etc. Il montre, par l'application au hallage des bateaux exécuté par des hommes ou par des radeaux plongeurs, que les données qu'il a recueillies peuvent être utilement employées dans la pratique. L'auteur indique ensuite les divers procédés pour mesurer la vîtesse des courants d'eau, donne la théorie du mouvement que prennent les corps flottants entraînés par ces courants, et montre combien les principes sur lesquels était fondé l'emploi du tube de Pitot, sont erronés. Il explique enfin les principes de l'équilibre des corps plongés dans un fluide. M. Navier se réserve de traiter dans les volumes suivants les parties de l'hydraulique qui n'ont pu entrer dans ce chapitre.

Ce premier livre est terminé par une addition où l'auteur expose les principes du calcul et de l'établissement des machines et des moteurs.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il montre d'abord la nécessité d'admettre une mesure commune dans l'évaluation des travaux de tout genre exécutés par les machines, et que cette mesure doit être le travail nécessaire pour élever l'unité de poids à l'unité de hauteur. Il établit la relation numérique qui existe entre les quantités de travail que les forces agissant sur les machines peuvent exécuter, et les quantités de force vive qu'elles feraient naître si elles agissaient sur des corps qui leur cédassent librement. Il développe ensuite, comme conséquence du principe de la conservation des forces vives, les circonstances du mouvement d'une machine, soit quand ce mouvement est uniforme, soit quand la vîtesse croît et décroît alternativement; et en mettant en évidence l'influence que la masse de la machine a dans ce dernier cas sur le mouvement, il donne la théorie des volants, et des formules nouvelles pour calculer dans divers cas leurs dimensions, d'après la condition de maintenir les variations de la vîtesse entre des limites données. Il expose également la théorie du pendule conique, appareil qui forme le principe de divers régulateurs. Enfin il donne les principes d'après lesquels on doit régler l'action des moteurs, et un tableau détaillé des quantités d'action que l'homme et le cheval peuvent fournir dans les divers genres de travaux auxquels on les emploie.

Le deuxième livre contient quatre chapitres. Le premier traite des moulins à blé, et contient aussi la théorie des diverses roues hydrauliques mises en mouvement par un courant d'eau. L'auteur indique d'abord la manière de piquer les meules adoptée en Angleterre, et les recherches faites dans le même pays pour remplacer les pierres meulières par une composition artificielle. Après avoir donné quelques notions générales sur la moûture et sur ses produits, il établit par divers rapprochements la charge qu'il convient de faire porter aux meules, la vîtesse qu'il faut leur imprimer, et la quantité d'action qu'il faut employer pour moudre une quantité de blé donnée. Il expose ensuite successivement la théorie des roues à aubes mues par un courant d'une étendue indéfinie; des roues à augets recevant l'eau, soit en-dessus, soit par le côté, et des roues choquées en-dessous et contenues dans un coursier; des roues horizontales à palettes inclinées mues par le choc de l'eau; des roues horizontales à palettes courbes mues par la pression de l'eau; de la roue à réaction, de la Danaïde. La théorie de toutes ces roues est établie fort simplement au moyen du principe de la conservation des forces vives. Les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

résultats théoriques sont par-tout rapprochés de ceux de l'expérience, et l'auteur déduit de l'une et de l'autre les meilleures dispositions à adopter, pour faire produire à chaque roue le plus grand effet dont elle est susceptible. Il vérifie ses formules en les appliquant au calcul d'un assez grand nombre d'observations faites sur des moulins de diverses espèces, et recueillies dans les ouvrages français et étrangers. Enfin il donne pour l'emploi des roues hydrauliques à la construction des moulins à blé, des formules au moyen desquelles il ne reste à faire que des calculs très-simples, et il offre plusieurs exemples de calculs de ce genre. A l'occasion des moulins qui seraient mus par la marée, il décrit une machine de ce genre fort remarquable, construite sur la Tamise. Le chapitre est terminé par une addition qui offre des détails 1° sur les ressources que fournit la mécanique pour effectuer les diverses opérations qu'exige le service intérieur des moulins, sans employer la force des hommes; 2° sur divers régulateurs susceptibles d'être appliqués aux machines hydrauliques; 3° sur la forme et les dimensions à donner aux axes et à leurs tourillons. Ces derniers détails, précieux pour les constructeurs, sont extraits presque en entier des *Essays* de M. Robertson Buchanan.

Le chapitre second traite des moulins à scier le bois, le marbre, et à percer les tuyaux. M. Navier établit d'abord des notions exactes sur l'action que le moteur exerce dans les moulins où les scies ont un mouvement alternatif, objet sur lequel Bélidor s'était entièrement mépris, et évalue, d'après les observations, la quantité d'action nécessaire pour scier une quantité de bois donnée. Il rectifie en conséquence les calculs de l'ancien texte sur les moulins de cette espèce. Il donne également l'évaluation de la quantité d'action consommée par le sciage de la pierre et du marbre. Dans une addition placée à la suite de ce chapitre, il décrit les moulins à scies verticales et à mouvements alternatifs, construits à Woolwich par M. Brunel, et un autre moulin à scies horizontales pour couper les bois en travers; les moulins à scies circulaires pour le débit des bois en long employés par M. Brunel, et ceux pour le débit des bois en travers construits par le même mécanicien à Portsmouth; une nouvelle machine pour forer les tuyaux en bois au moyen d'une scie cylindrique; diverses machines exécutées en France et en Angleterre pour scier, polir, ou forer la pierre et le marbre. Ces descriptions, accompagnées de dessins, sont extraites en partie des encyclopédies anglaises ou

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du *Repertory of arts and manufactures.* L'auteur indique toujours, autant que les observations recueillies jusqu'à-présent lui permettent de le faire, comment on doit établir chaque machine, et proportionner la force qu'on emploiera au travail à exécuter.

Le chapitre troisième traite des moulins pour fabriquer la poudre à canon. En rectifiant les calculs du texte sur les machines de ce genre, M. Navier donne un exemple de l'évaluation des effets des chocs. Il indique les perfectionnements dont l'ancienne disposition des pilons est susceptible, et calcule l'épargne qui pourrait en résulter sur la quantité d'action que le moulin consomme.

Bélidor s'étant proposé dans ce deuxième livre de décrire et de soumettre au calcul les machines hydrauliques de l'utilité la plus générale, M. Navier a cru entrer dans l'esprit de cet auteur, en donnant ici la description et les dessins des moulins à battre le blé qui sont employés très-avantageusement en Angleterre, et sur-tout en Écosse, et qui n'ont encore été décrits avec les détails nécessaires dans aucun ouvrage français; il fait le rapprochement des quantités d'action que ce genre de travail consomme, suivant qu'il est exécuté à main d'hommes ou par ces moulins, auxquels on peut appliquer toute espèce de moteurs.

Le quatrième et dernier chapitre traite des machines à élever l'eau, à l'exclusion des pompes, et des machines où l'eau même est le seul moteur que comporte leur nature. Ce chapitre contient des détails fort étendus sur les chapelets verticaux et inclinés; sur les diverses espèces de norias, et particulièrement sur celle du sieur Gateau, employée depuis quelques années dans les travaux hydrauliques, avec des expériences nouvelles destinées à en fixer le produit; sur la machine de Véra, avec les observations faites par Deparcieux; sur les hollandaises, et autres moyens simples employés pour élever l'eau à force de bras, parmi lesquels l'auteur a compris ceux employés en Égypte; sur les roues à tympan; sur la pompe spirale, machine ingénieuse et utile négligée jusqu'à-présent par les auteurs français, et dont M. Navier a donné la théorie; sur les roues à godets; sur les roues à force centrifuge et autres roues horizontales; et enfin sur la vis d'Archimède, que l'auteur a considérée dans les diverses circonstances où elle pouvait être employée, en indiquant la manière dont on devait s'en servir pour lui faire élever la plus grande quantité d'eau possible. L'auteur a non-seulement donné la théorie mécanique de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ces diverses machines, fondée sur l'emploi du principe de la conservation des forces vives, comme il l'avait déja fait pour la plupart d'entre elles dans un mémoire qui a été approuvé il y a quelque temps par l'académie; mais il a rassemblé avec le plus grand soin les résultats des observations faites sur leur produit, en sorte que le lecteur acquerra dans cet ouvrage une connaissance complette des propriétés de chaque machine, et du produit qu'on peut en attendre, eu égard à la force qu'on y applique.

L'académie a pu juger par l'analyse que nous venons de lui présenter, combien M. Navier, en publiant le premier volume de l'Architecture hydraulique de Bélidor, se place au-dessus des éditeurs ordinaires, et même de la presque totalité des commentateurs. La composition de ces notes équivaut à celle d'un ouvrage considérable, et le mérite de ces mêmes notes lui donne des droits à la reconnaissance publique, et particulièrement à celle des ingénieurs, qui doivent vivement en desirer la continuation pour les volumes suivants.

Nous pensons en conséquence que son travail est digne des éloges et des suffrages de l'Académie.

Signé : Poisson, Gérard, Fourier, De Prony, rapporteur.

L'Académie approuve le rapport, et en adopte les conclusions.

Certifié conforme à l'original, le Secrétaire-perpétuel, chevalier des ordres royaux de Saint-Michel et de la Légion-d'honneur,

Signé : DELAMBRE.

Un rapport et des conclusions semblables ont été présentées au Conseil général des Ponts-et-Chaussées, au nom d'une commission nommée par M. Becquey, conseiller d'état, directeur-général des Ponts-et-Chaussées et des Mines, et composée de MM. de Prony et Liard, inspecteurs-généraux, et Bérigny, ingénieur en chef. Ces conclusions ont été adoptées par le Conseil. On n'a point imprimé ici le rapport, parce qu'il n'eût offert qu'une répétition de celui qui a été approuvé par l'Académie des sciences.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

AVERTISSEMENT

DE L'ÉDITEUR.

On trouve à la tête d'une nouvelle édition de *La Science des ingénieurs*, qui a paru en 1813 chez M. Firmin Didot, une notice historique sur Bélidor, et quelques détails bibliographiques sur ses ouvrages. Il serait inutile de revenir ici sur ces objets. A l'égard de la nouvelle édition de l'*Architecture hydraulique*, dont le premier volume se publie aujourd'hui, on a pu voir dans le rapport de MM. les commissaires de l'Académie des Sciences quel était l'objet que l'éditeur s'était proposé, et le travail auquel il s'était livré pour le remplir.

Quelques lecteurs, d'après la réputation que conservent encore les ouvrages de Bélidor, sur-tout chez les étrangers, verront peut-être avec surprise le nombre et la gravité des inexactitudes signalées dans le texte de ce volume. Quelques-unes de ces imperfections avaient néanmoins été déja reconnues. « Le premier volume de Bélidor, et je présume qu'il en est de même des autres, est rempli de fautes de théorie, » disait Bossut dans une note manuscrite que j'ai entre les mains. J'ai entendu M. Carnot affirmer publiquement que « Bélidor s'était trompé très-souvent. »

D'autres personnes, fatiguées des erreurs, de la prolixité, et du peu d'ordre qu'on observe dans son ouvrage, auraient peut-être desiré que la rédaction de l'auteur eût été entièrement abandonnée, et qu'on en eût fait une nouvelle, dans laquelle les corrections et additions eussent été insérées. Sans entrer ici dans le détail des considérations particulières qui s'opposaient à ce que ce parti fût adopté, on observera seulement que le libraire, en publiant cette nouvelle édition, a voulu qu'elle pût remplacer complètement les anciennes, auprès de toutes les classes de lecteurs. Ceux pour qui les détails dans lesquels entre Bélidor sont superflus, pourront les passer. Quelques-uns trouveront peut-être avantageux d'avoir les anciennes méthodes de l'auteur discutées et rectifiées d'après les connaissances actuelles. La nouvelle *Architecture hydraulique*, dont M. de Prony promet incessamment la continuation, offrira d'ailleurs les mêmes matières traitées avec toute l'exactitude, l'ordre, et la précision desirables.

Les notes, en très-petit nombre, qui appartiennent à l'auteur, sont marquées par des étoiles. Les notes de l'éditeur sont marquées d'abord par une seule, puis par deux lettres italiques dans l'ordre suivant : *a*, *b*, *c*,... *y*, *z*; *aa*, *ab*, *ac*,... *ay*, *az*; *ba*, *bb*, *bc*,... *by*, *bz*; *ca*, *cb*, *cc*,... *cy*, *cz*; etc.

Quoique les mesures du texte soient énoncées en pieds, pouces, etc., on a cru devoir adopter dans les notes et additions les nouvelles mesures admises présentement en France. On a même employé la division décimale du quart de cercle, en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sorte que les nombres de degrés donnés sans autre désignation indiquent des degrés décimaux. On trouvera ci-après des tables pour la réduction des anciennes mesures françaises en nouvelles, et d'autres tables pour la réduction des mesures anglaises.

Pour faciliter la lecture des notes, on a tâché de mettre de l'uniformité dans le langage et la notation.

La lettre π représente par-tout le rapport de la circonférence au diamètre $=3,1416$ (Log. $\pi=0,497150$.)

La lettre g exprime toujours la vîtesse que la pesanteur peut imprimer aux corps à Paris au niveau de la mer $=9^{m},808795$ (log. $g=0,991616$).

Les lettres P, Q, R,... X, Y, Z représentent les forces, quand par ce mot on entend un *effort* ou *pression*, lequel s'évalue en unités de poids.

Les lettres g, ν, ξ, η, ζ, représentent les forces, quand on entend par ce mot une *vîtesse* imprimée, laquelle s'évalue en unités de longueur, exprimant l'espace qui serait parcouru dans l'unité de temps en vertu de cette vîtesse.

On a évité d'introduire des dénominations nouvelles, et on a employé les dénominations connues dans le sens le plus généralement admis. La seule innovation qu'on se soit permise (si cela mérite d'être appelé ainsi), est dans la manière de noter les quantités de force employées à imprimer le mouvement aux machines. On peut voir à ce sujet la page 378.

Observations sur divers passages des notes et additions.

1. *Sur le choc des corps solides* (voyez pages 76 et 120). Quoique la composition intime des corps nous soit inconnue, les phénomènes qu'ils nous présentent nous font apercevoir avec certitude quelques-unes des circonstances de cette composition. D'après la faculté qu'ont les corps solides de se dilater par l'échauffement, de se resserrer par le refroidissement, et de changer de figure quand on exerce sur eux des efforts, on ne peut douter qu'ils ne soient composés de parties qui ne se touchent point, et qui sont maintenues en équilibre à de très-petites distances les unes des autres par les actions opposées de deux forces, dont l'une est une attraction inhérente à la nature de la matière, et l'autre une répulsion due au principe de la chaleur.

Lorsque deux corps viennent à se choquer, les déplacements qui tendent à se faire en vertu de ce choc dans les parties voisines des points de contact, ne peuvent avoir lieu sans mettre en jeu les forces d'attraction ou de répulsion auxquelles ces parties sont soumises. Elles opposent de la résistance à leur déplacement, il se fait dans les corps une *impression* plus ou moins grande; et, suivant la nature des corps, l'impression qui s'est formée subsiste après le choc en tout ou en partie, ou bien elle disparaît totalement, et les corps reprennent leur figure primitive. Nous ignorons d'ailleurs la nature des forces qui interviennent dans ces effets. La théorie donnée dans la note (x), dont la première idée paraît due à don George Juan (*Examen maritime*), est donc à cet égard hypothétique, et doit être rangée parmi les recherches dont l'objet est d'offrir une image des phénomènes naturels, au défaut des véritables lois qui les régissent; recherches dont les résultats peuvent d'ailleurs être très-utiles, quand on les emploie avec les précautions convenables.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En envisageant ainsi les phénomènes de la percussion, on est conduit à se former sur les pertes de force vive qui ont lieu par suite des changements brusques dans les mouvements des corps, des notions plus exactes que celles qu'on pourrait prendre à la simple lecture du § 8 de la note (*ai*). Le théorême de M. Carnot, démontré dans ce paragraphe, apprend qu'après de tels changements (qui sont toujours le résultat de chocs, soit entre les corps du système, soit contre des obstacles étrangers), la somme des forces vives a diminué, et évalue la diminution qu'elle a subie. Mais on ne doit point penser que cette perte de forces vives a lieu par la seule raison que les mouvements des corps ont changé brusquement, et que la variation instantanée des vîtesses en soit la cause. La force vive qui, par l'effet d'un choc, se trouve perdue pour le travail qu'une machine doit effectuer, a été détruite par les forces intérieures que le choc a développées, et qui ont produit le changement brusque des vîtesses. Si l'on tenait compte de ces forces, et qu'on fît entrer dans l'expression de $S.mv^2$ (page 112) les quantités d'action qu'elles impriment, cette expression donnerait exactement, dans toutes les circonstances, la valeur de la somme des forces vives du système. Il faut observer d'ailleurs que la nature des forces que les chocs développent, et qui agissent sur les systêmes pendant la durée très-petite de ces chocs, est inconnue. On ne pourrait donc juger des variations qu'elles apportent dans la force vive de ces systêmes, si l'on ne savait, par le théorême de M. Carnot, que, quelle que soit la nature de ces forces, pourvu que leur action s'exerce pendant un temps extrêmement petit, la force vive qu'elles font perdre peut s'estimer d'après les variations survenues dans les vîtesses.

2. *Sur la formule exprimant la vîtesse d'écoulement d'un fluide par l'orifice d'un vase* (voyez page 253). La formule $U=\sqrt{\frac{2gz}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}$, donnée pour exprimer la vîtesse d'écoulement d'un fluide par un orifice qui n'est pas très-petit, ne peut d'ailleurs convenir qu'au cas où l'orifice est sensiblement plus petit que la section supérieure du vase, dont l'aire est exprimée par O. Quand l'orifice égale ou surpasse cette section, le fluide n'y prend point une vîtesse uniforme, et sa vîtesse a une expression différente. Ces objets seront mis dans tout leur jour dans le volume suivant, où l'on considérera l'écoulement des fluides d'une manière plus générale. Cette remarque paraîtrait peut-être superflue, si l'on ne savait que quelques auteurs italiens et français voulant appliquer la formule précédente au cas où l'on aurait $\Omega=$ ou $>O$, cas auxquels cette formule ne convient nullement, et trouvant des résultats absurdes, ont cru devoir, par cette raison, rejeter toute la théorie du mouvement des fluides. Une lecture attentive de la cinquième section de l'Hydrodynamique de Daniel Bernouilly, qui a le premier établi cette théorie, les aurait empêchés de donner dans cette erreur.

3. *Sur l'écoulement des fluides par un orifice latéral et rectangulaire ouvert à sa partie supérieure* (voyez page 298). D'après la théorie donnée pour ce genre d'écoulement, la hauteur de la veine d'eau qui franchit l'orifice doit être les 0,7247 de la charge totale qui a lieu sur le fond de ce même orifice. Dubuat, qui à la vérité

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

n'avait point pris la mesure de cette hauteur, l'avait supposée égale à la moitié de la charge totale. Depuis l'impression de ce passage, l'éditeur a eu connaissance des résultats obtenus par le docteur Robison, qui a trouvé, par des mesures immédiates, que la hauteur dont il s'agit est très-près des $\frac{5}{7}$ de la charge totale (*The Edimburgh Encyclopœdia*, art. *Hydrodynamics*), ce qui s'accorde avec la théorie de la note (*cm*) aussi-bien qu'il fût possible de l'espérer.

L'éditeur a eu également connaissance de quelques expériences faites par Smeaton et Brindley (Dr Rees, *New Cyclopœdia*, art. *Water*), qui peuvent concourir avec celles de Dubuat pour fixer la réduction qu'éprouve le produit théorique lorsqu'il y a contraction sur le fond et les côtés de l'orifice. Les résultats de toutes ces expériences sont contenues dans le tableau suivant, où celles de Dubuat sont marquées par une étoile.

Charge d'eau sur le fond de l'orifice $= z$.	Largeur de l'orifice $= l$.	Volume d'eau dépensé par seconde.	Rapport de la dépense effective à la dépense théor.
mètre	mètre	mètre cube	
0,0254	0,1524	0,001298	0,833
0,0317	*id.*	0,001737	0,799
0,0347	*id.*	0,001921	0,772
0,0413	*id.*	0,002407	0,745
*0,0451	0,4670	0,008569	0,758
0,0587	0,1524	0,004073	0,744
0,0794	*id.*	0,006088	0,707
*0,0812	0,4670	0,019923	0,730
*0,1184	*id.*	0,035241	0,733
0,1270	0,1524	0,012317	0,707
0,1429	*id.*	0,013450	0,647
0,1651	*id.*	0,018877	0,731
*0,1714	0,4670	0,061699	0,737

La dernière colonne a été calculée en supposant la dépense théorique représentée par la formule $2,5261\, l z^{\frac{3}{2}}$, conformément à ce qui est dit dans la note (*cm*). Il paraît par ces expériences que quand la charge d'eau sur le fond de l'orifice ne surpasse point 2 à 3 centimètres, la contraction est moins sensible que quand cette charge est plus grande, ce qui peut provenir de l'épaisseur de la planche sur laquelle l'eau reversait (laquelle était de $0^m,025$), effet analogue à celui que produit un tuyau additionnel (voyez le § 4 de la note (*ck*)). Quand la charge est plus grande, il paraît que, pour avoir égard à la contraction, il faut prendre les 0,73 de la dépense calculée par la formule $2,5261\, l z^{\frac{3}{2}}$, au lieu des 0,74 indiqués dans la note (*cm*).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

REDUCTION

DES MESURES ANCIENNES EN NOUVELLES MESURES FRANÇAISES.

MESURES LINÉAIRES.

N.	Toises en mètres.	Pieds en mètres.	Pouces en mètres.	Lignes en mètres.
	m.	m.	m.	m.
1	1.94904	0.32484	0,02707	0.00226
2	3.89807	0.64968	0.05414	0.00451
3	5.84711	0.97452	0.08121	0.00677
4	7.79615	1.29936	0.10828	0.00902
5	9.74519	1.62420	0.13535	0.01128
6	11.69422	1,94904	0.16242	0.01354
7	13.64326	2.27388	0.18949	0.01579
8	15.59230	2.59872	0.21656	0.01805
9	17.54133	2.92356	0.24363	0.02030

Perche (de Paris) = 18 pi = 5 m, 84711.
Perche (eaux et forêts) = 22 pi = 7 m, 14647.
Aune (de Paris) = 3 pi 7 po 10 5/6 li = 1 m, 18845.
Lieue (de poste) = 2000 to = 3898 m.

MESURES SUPERFICIELLES.

N.	Toises q. en mètres q.	Pieds q. en mètres q.	Pouces q. en mètres q.	Lignes q. en mètres q.
	m. q.	m. q.	m. q.	m. q.
1	3.798744	0.105521	0.0007328	0.00000509
2	7.597487	0.211041	0.0014656	0.00001018
3	11.396231	0.316562	0.0021983	0.00001527
4	15.194975	0.422083	0.0029311	0.00002036
5	18.993718	0.527604	0.0036639	0.00002545
6	22.792462	0.633124	0.0043967	0.00003053
7	26.591205	0.738645	0.0051295	0.00003562
8	30.389949	0.844166	0.0058622	0.00004071
9	34.188693	0.949686	0.0065950	0.00004580

Perche quarrée (de Paris) = 484 pi q = 34 m q, 189.
Perche quarrée (eaux et forêts) = 324 pi q = 51 m q, 072.
Arpent (de Paris) = 100 perches q = 3418 m q, 9.
Arpent (eaux et forêts) = 100 perches q = 5107 m q, 2.

MESURES CUBIQUES.

N.	Toises c. en mètres cub.	Pieds c. en mètres cub.	Pouces c. en mètres cub.	Lignes c. en mètres cub.
	m. c.	m. c.	m. c.	m. c.
1	7.403890	0.0342773	0.000019836	0.00000001148
2	14.807781	0.0685545	0.00003967 3	0.00000002296
3	22.211671	0.102831 8	0.000059509	0.00000003444
4	29.615561	0.137109 0	0.000079346	0.00000004592
5	37.019452	0.171386 3	0.000099182	0.00000005740
6	44.423342	0.205663 6	0.000119018	0.00000006888
7	51.827232	0.239940 8	0.000138855	0.00000008036
8	59.231122	0.274218 1	0.000158691	0.00000009184
9	66.635013	0.308495 3	0.000178528	0.00000010332

Corde de bois (eaux et forêts) = 2 voies = 112 pi c = 3 m c, 83891.
Solive (charpente) = 3 pi c.

Pour les liquides (à Paris).
- Pinte = 2 chopines = 0 m c, 0009312.
- Velte = 8 pintes = 0 m c, 0074506.
- Muid = 288 pintes = 0 m c, 2682201.

Pour les matières sèches (à Paris).
- Litron = 0 m c, 000813.
- Boisseau = 16 litrons = 0 m c, 013008.
- Setier = 12 boisseaux = 0 m c, 1561.
- Muid = 12 setiers = 1 m c, 8732.

POIDS.

N.	Livres en kilogr.	Onces en kilogr.	Gros en kilogr.	Grains en kilogr.
	k.	k.	k.	k.
1	0.48951	0.03059	0.003824	0.0005311
2	0.97901	0.06119	0.007648	0.0001062
3	1.46852	0.09178	0.011472	0.0001593
4	1.95802	0.12238	0.015296	0.0002124
5	2.44753	0.15297	0.019120	0.0002655
6	2.93704	0.18356	0.022944	0.0003186
7	3.42654	0.21416	0.026768	0.0003717
8	3.91605	0.24475	0.030592	0.0004248
9	4.40555	0.27535	0.034416	0.0004779

Denier = 24 grains = 0 k, 001275.
Quintal = 100 liv. = 48 k, 951.
Tonneau = 20 quintaux = 979 k.

DISTRIBUTION DES EAUX.

Pouce de fontainier (560 pi c) = 19 m c, 19527 en 24 heures (voyez page 213).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

RÉDUCTION

DES MESURES ANGLAISES EN NOUVELLES MESURES FRANÇAISES.

MESURES LINÉAIRES.

N.	Pieds en mètres.	Pouces en mètres.	Lignes en mètres.
	m.	m.	m.
1	0.30480	0.02540	0.00212
2	0.60959	0.05080	0.00423
3	0.91439	0.07620	0.00635
4	1.21919	0.10160	0.00847
5	1.52398	0.12700	0.01058
6	1.82878	0.15240	0.01270
7	2.13357	0.17780	0.01482
8	2.43837	0.20320	0.01693
9	2.74316	0.22860	0.01905

L'*yard* ou verge = 3 pi. Le *fathom* = 6 pi.
Pole ou perche = $16\frac{1}{2}$ pi = $5^{m},029$.
Mile = 5280 pi = 1609^{m}.

MESURES SUPERFICIELLES.

N.	Pieds q. en mètres q.	Pouces q. en mètres q.	Lignes q. en mètres q.
	m. q.	m. q.	m. q.
1	0.092901	0.0006451	0.00000448
2	0.185801	0.0012903	0.00000896
3	0.278702	0.0019354	0.00001344
4	0.371602	0.0025806	0.00001792
5	0.464503	0.0032257	0.00002240
6	0.557404	0.0038709	0.00002688
7	0.650304	0.0045160	0.00003136
8	0.743205	0.0051612	0.00003584
9	0.836105	0.0058063	0.00004032

Pole ou perche q. = 272 $\frac{1}{4}$ pi q = 25^{m} q,292.
Acre ou arpent = 4 *roods* = 160 *poles* = 4047^{m}

MESURES CUBIQUES.

N.	Pieds cub. en mètres cub.	Pouces cub. en mètres cub.	Lignes cub. en mètres cub.
	m, c.	m. c.	m. c.
1	0.028316	0.000016387	0.000000009482
2	0.056631	0.000032773	0.000000018965
3	0.084947	0.000049159	0.000000028447
4	0.113263	0.000065546	0.000000037929
5	0.141579	0.000081932	0.000000047412
6	0.169894	0.000098318	0.000000056894
7	0.198210	0.000114705	0.000000066376
8	0.226526	0.000131092	0.000000075869
9	0.254842	0.000147478	0.000000085341

Pour les liquides.
Pint de vin = $28^{po}c,875 = 0^{mc},00047316$.
Gallon = 4 *quarts* = 8 *pints* = $0^{mc},0037853$.
Hogshead = 63 *gallons*... = $0^{mc},2385$.
Pint de bierre = $35^{po}c,25 = 0^{mc},00057762$.

Pour les matières sèches.
Gallon = $268^{po}c,803$ = ... $0^{mc},004405$.
Bushel de Winch. = 8 *gallons* = $0^{mc},035238$.
Boll ou *coomb* = 4 *bushels* = $0^{mc},14095$.
Scam ou *quarter* = 8 *bushels*... = $0^{mc},28190$.

POIDS.

N.	Livres *avoir-du-poize* en kilogr.	Onces *avoir-du-poize* en kilogr.	Drams *avoir-du-poize* en kilogr.
	k.	k.	k.
1	0.453439	0.028340	0.001771
2	0.906878	0.056680	0.003543
3	1.360317	0.085020	0.005314
4	1.813756	0.113360	0.007085
5	2.267195	0.141700	0.008856
6	2.720634	0.170040	0.010627
7	3.174073	0.198380	0.012399
8	3.627512	0.226720	0.014170
9	4.080951	0.255060	0.015941

Livre *troy* = 12 onces = $0^{k},372931$.
Once *troy* = 480 grains = $0^{k},031078$.
Grain *troy* = $0^{k},00006474$.
Hundred ou quintal = 4 *quarters* = 8 *ston*
= 112 livres *avoir du poize* = $50^{k},78517$.
Ton = 20 *hundreds* = 1016^{k}.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

PRÉFACE
DE L'AUTEUR.

QUAND on examine un peu sévèrement les différents travaux qui sont du ressort de la Mécanique, on est choqué du peu de précision qui règne dans leurs parties qu'on détermine presque toujours au hasard, sans suivre aucunes règles certaines par lesquelles on puisse approcher le plus près qu'il est possible de la perfection ; parce que, pour y arriver, il faudrait remonter aux principes des choses, et avoir un sentiment opposé à celui d'un préjugé assez général, que la pratique est préférable à la théorie. L'erreur de bien des gens sur ce point étant la principale cause des fautes qui se commettent, je vais essayer de la détruire, parce qu'ensuite je pourrai mieux insinuer la fin que je me suis proposée dans ce Traité.

Tout le monde conviendra que pour rendre un ouvrage accompli il faut qu'il soit construit solidement, qu'il réponde bien à son objet, et que la dépense soit tellement ménagée, qu'elle ne paraisse répandue que sur ce qui est indispensablement nécessaire.

Ces conditions sont si naturelles, qu'on serait porté à croire qu'il n'y a point d'apparence que les gens du métier s'en écartent jamais, si l'événement ne prouvait quelquefois le contraire. Mais comme elles sont bien plus difficiles à remplir qu'on ne pense, on n'est pas toujours en droit de leur en faire un reproche légitime : ils méritent au contraire bien plus d'excuse que de blâme, d'être parvenus à faire les choses aussi passables qu'elles le sont sans autre secours que celui qu'ils ont tiré des réflexions qu'une longue expérience leur a suggérées. Car il faut convenir qu'il se rencontre des praticiens qui trouvent dans la supériorité de leur génie des ressources merveilleuses, et qu'en général c'est aux personnes de ce

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

caractère que l'on est redevable de ce qu'il y a de plus heureusement imaginé dans les arts. Mais que l'on y prenne garde : lorsqu'on est capable de méditer un projet et de captiver long-temps son attention sur une même chose pour en développer toutes les faces, afin de ne se déterminer qu'en faveur du parti le plus avantageux, cette manière de penser est une vraie théorie à laquelle on doit le succès qui en est la suite. Alors, sans le savoir, on imite les Géomètres; on en a l'esprit et les vues, puisqu'on cherche à parvenir au même but. Toute la différence, c'est que les uns y arrivent sans s'égarer, par une voie dont ils connaissent la trace; au lieu que les autres, privés des lumières qui pourraient les guider, sont exposés à faire bien des faux pas. Quand il faut mesurer exactement des efforts dont les directions, les leviers, les appuis ne sont pas sensibles, ce sont toujours des recherches fort difficiles. Il se rencontre souvent des cas où les puissances dont on doit considérer l'action renferment des rapports si compliqués, qu'il n'est pas possible de les apercevoir sans le secours d'une théorie fort délicate, à laquelle on ne peut atteindre si l'on n'est pourvu d'un grand nombre de connaissances acquises par une étude suivie. Il est des choses essentielles à savoir, que l'expérience n'apprend point, et qu'on ne peut ignorer quand on veut voir clair à ce qu'on fait. Je m'en rapporte à la bonne foi de ceux qui font travailler depuis long-temps : il n'y en a pas qui n'aient senti dans mille occasions qu'il leur manquait certains principes dont ils auraient voulu être instruits. La plupart ont entamé une carrière qui n'était pas encore frayée, et ont même fourni aux savants de nouveaux sujets d'exercer leur sagacité. Il serait bien juste que ces derniers, à leur tour, leur donnassent des maximes pour agir plus exactement. Dans quelque classe que nous soyons placés, nous devons concourir unanimement au bien de la société; c'est un devoir indispensable qui doit faire la principale qualité d'un bon citoyen. Que si l'on était en droit d'accuser d'un peu de négligence ceux qui ont la conduite des ouvrages qui intéressent l'État, ce reproche devrait principalement regarder les jeunes gens qui, peu touchés des devoirs de l'état qu'ils ont embrassé, affectent

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'exalter la pratique au mépris de la théorie, espérant par-là autoriser leur peu de goût pour l'étude. Mais connaissent-ils cette pratique à laquelle ils veulent se borner ? Ils n'en peuvent avoir qu'un sentiment confus. Sans expérience et sans faire usage de leur jugement, savent-ils le parti qu'il faudra prendre dans les cas difficiles qui peuvent se présenter ? Occupés d'objets frivoles, ils s'entretiennent dans un état de médiocrité, sans se mettre en devoir d'acquérir de la distinction, et sans réfléchir qu'on s'instruit bien lentement quand on n'apprend les choses que lorsque la nécessité nous oblige de les considérer. D'ailleurs ce serait un grand abus de se prévaloir de l'exemple de leurs anciens, qui n'ont pas laissé de se rendre recommandables par un chemin si long. S'ils avaient eu les mêmes secours qu'aujourd'hui, il n'y a point de doute qu'ils n'en eussent fait un meilleur usage, et je n'en veux d'autre preuve que le mérite d'avoir presque tiré de leur propre fond ce qu'ils ont acquis.

Si bien des gens pensent que les Mathématiques sont d'une faible ressource pour rectifier la pratique, cela vient de deux causes. La première, de ce qu'ils veulent limiter l'étendue d'une science qu'ils ne connaissent pas. La seconde, de ce que les Mathématiciens n'ont point assez appliqué à la perfection des arts les conséquences qu'ils pourraient tirer de leurs principes. Car, excepté les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, où l'on trouve un grand nombre de recherches utiles sur toutes sortes de sujets, nos livres de Mathématiques sont d'une si grande sécheresse qu'il n'est pas surprenant que les praticiens n'y trouvent point assez d'attraits pour y puiser les connaissances qui leur seraient essentielles. Ils s'en tiennent ordinairement à quelques petits traités de Géométrie et de Mécanique ; et lorsqu'ils y ont appris l'usage qu'on peut faire de quelques propositions générales, ils s'imaginent en savoir assez. Pour l'Algèbre, elle n'est propre qu'à servir d'amusement à ceux qui ont assez de constance pour s'occuper de questions difficiles qui ne mènent à rien. Cependant, comme elle est absolument nécessaire pour résoudre une infinité de questions qui se présentent tous les jours dans la construction des travaux, c'est pour les désabuser d'une opinion si injuste,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et leur montrer la nécessité de la théorie, que j'ai entrepris d'écrire sur l'Architecture Hydraulique, qui en est beaucoup plus susceptible que la civile. Comme on n'ignore point l'importance d'un sujet qui intéresse autant les besoins de la vie, j'ai cru qu'en m'appliquant à le traiter avec exactitude, on me saurait gré d'employer aussi utilement les moments de loisir dont je puis disposer. Je crains seulement que ceux qui n'ont pas l'usage de l'algèbre, et qui se sont déja plaints de ce que j'en avais répandu dans mes autres ouvrages, ne murmurent d'en trouver beaucoup dans celui-ci. Mais comment veulent-ils qu'on fasse? elle est devenue la clef de toutes les découvertes; il n'est pas possible de s'en passer dès qu'on veut agir avec précision; ce n'est que par son moyen que l'on peut déduire des méthodes pour opérer sûrement dans la pratique. Le calcul littéral a cela d'avantageux, qu'il ménage la capacité de l'esprit, en lui présentant une infinité d'objets sous l'expression la plus simple. Sans être distrait par la complication de leurs rapports, il suffit de n'avoir attention qu'aux règles du calcul, et la plume seule conduit directement à la solution qu'on cherche, qui devient ensuite une formule générale pour toutes les questions semblables, sans avoir besoin d'autres démonstrations que celles qu'on tire de l'évidence du calcul même, dont les opérations sont fondées sur de simples axiômes. Souvent une seule expression littérale donne jour à une science entière, dont on développe sans peine toutes les conséquences les unes après les autres, comme on en pourra juger par la manière dont nous avons exprimé les règles du mouvement et celles de la mesure des eaux. Cependant mon dessein ayant été de faire en sorte que cet ouvrage devînt utile à tous ceux qui le liraient, j'ai eu soin d'exposer en forme de maximes toutes les règles que j'ai déduites de l'analyse ordinaire et des nouveaux calculs : j'ai même appliqué ces maximes à des exemples numériques, pour qu'on se les rendît plus familières, et qu'on s'en servît avec la même confiance que la plupart ont ordinairement pour les opérations de la géométrie-pratique, quoiqu'ils ignorent la théorie qui les a fournies.

J'étais à la veille de mettre au jour le Traité que j'avais promis

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en 1729, sur l'Architecture Hydraulique, qui ne devait embrasser (comme je l'ai annoncé alors) que les différents ouvrages de maçonnerie, charpente et fascinages qui se font dans l'eau, lorsque voulant faire le projet d'une machine pour élever l'eau, je fus fort surpris de ne savoir comment m'y prendre pour en déterminer exactement toutes les parties de manière à satisfaire un bon esprit qui m'aurait demandé compte de la disposition de chaque pièce, la raison de leurs dimensions, celle du degré de vîtesse qui pouvait leur convenir, combien il devait passer d'eau au réservoir, s'il n'était pas possible d'en faire monter davantage par l'action d'une puissance limitée en tenant compte des frottements, si on ne pouvait pas remplir le même objet avec plus de simplicité et à moins de frais : en un mot, si je pouvais me flatter de n'avoir rien à craindre de l'examen d'un juge éclairé, disposé à ne faire aucune grace.

Ne me sentant point capable de remplir toutes ces conditions, j'avouerai ingénument que je fus déconcerté de me trouver si dénué. J'avais cependant appris depuis long-temps les principes de la mécanique et du mouvement des eaux dans nos meilleurs auteurs, et même écrit sur ces matières, que je croyais posséder passablement. Mais souvent on s'imagine avoir dans l'esprit un enchaînement de connaissances, et lorsque l'occasion se présente d'en faire usage, on n'y trouve que des vestiges sans ordre et sans liaison. Il arrive même que la bonne opinion que nous avons de nos faibles lumières est un obstacle qui empêche d'en acquérir de plus étendues, parce que l'on croit savoir beaucoup, faute de connaître ce qui nous serait encore nécessaire. En supposant qu'on sente ce qui nous manque, cela ne suffit pas, il faut savoir où l'acquérir, et c'était là mon embarras, personne n'ayant écrit sur les machines dans le goût que je viens d'insinuer. C'est pourquoi je formai le dessein de m'y appliquer sérieusement, et de communiquer mes recherches à ceux qui seraient dans le même cas où je m'étais trouvé. Ainsi je ne songeai plus qu'à m'instruire, pour me mettre en état d'instruire les autres, ne pouvant me résoudre de laisser en arrière un sujet aussi intéressant, et qui manquait à mon Traité pour le rendre complet.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Je résolus donc d'embrasser généralement tout ce qui avait rapport à la manière de conduire, d'élever et de ménager les eaux, sans me mettre en peine de la longueur du travail, ni du mécontentement qu'allait causer le retardement de l'impression de mon ouvrage, persuadé que, quand il paraîtrait, on me saurait gré d'avoir fait mes efforts pour mériter la bonne opinion que le public marquait en avoir conçue par son impatience à le voir paraître. Au reste, pour ne point ennuyer par un plus long détail, on saura que je l'ai divisé en deux parties. Comme il n'est question présentement que de la première, comprise en quatre livres, en voici l'objet.

Le premier livre est une introduction à l'ouvrage entier. On a cru que pour l'intelligence de ceux qui ignoraient les principes de la mécanique, ou qui, les ayant appris, ne les avaient pas assez présents pour en sentir l'application, il convenait de commencer par leur en donner un Traité préliminaire, écrit de façon qu'ils pussent se former une idée juste des différents mouvements qui se rencontrent dans les machines composées, pour en calculer l'effet, quelles que soient les directions de la puissance et du poids. Ce Traité est accompagné de la théorie du mouvement et du choc des corps, afin d'en déduire les règles de l'Hydraulique par des voies plus courtes et plus claires que celles qu'on a suivies jusqu'ici.

On examine ensuite la résistance causée par le frottement, la manière d'en calculer l'effet dans toutes sortes de cas, pour y avoir égard dans la pratique. Ce sujet est traité à fond, et appliqué à des exemples propres à éclairer insensiblement l'esprit sur les avantages et les défauts de toutes les machines. On y a joint des maximes sur ce qu'il faut observer lorsqu'on veut faire un projet, afin de mettre le lecteur en état d'en faire par lui-même avec toute la perfection qu'il est possible d'atteindre. Pour qu'on sache à quoi peut se réduire la force des hommes et des chevaux, dans les différentes attitudes qu'il sont obligés de prendre pour mouvoir une machine, on a tiré du raisonnement et de l'expérience les règles convenables à ce sujet.

Pour remplir parfaitement l'objet de cet ouvrage, on a cru devoir

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

enseigner tout ce qu'on pouvait dire d'essentiel sur le mouvement des eaux : c'est aussi la partie que l'on trouvera travaillée avec le plus de soin. On y traite du niveau et de l'équilibre des liqueurs, de l'action de l'eau contre les parois des vaisseaux qui la contiennent, afin d'en tirer les règles pour en mesurer la poussée, et proportionner la résistance qu'on peut lui opposer de la part des batardeaux, digues, levées, écluses, etc. On montre ensuite la manière de mesurer la dépense des eaux qui coulent par des orifices ou pertuis, selon quelques directions que ce soit, comment on peut estimer le déchet causé par le frottement contre les bords, comment on doit calculer la force du choc des courants contre les surfaces opposées; enfin ce qui arrive aux corps plongés dans l'eau, soit qu'ils surnagent ou qu'ils descendent au fond.

L'eau étant de tous les agents celui dont on tire le plus d'avantage pour faire agir les machines, tout le second livre roule sur l'application qu'on en peut faire aux roues de différentes sortes de moulins, et sur la vîtesse qu'elles doivent avoir par rapport au courant qui les meut, afin que la machine soit capable du plus grand effet. On y donne la description de plusieurs sortes de moulins à blé fort ingénieux; la manière de découvrir par le calcul la force qu'il faut pour les mouvoir, le produit dont ils peuvent être capables relativement à la pesanteur et à la vîtesse de la meule. On fait entrer dans ces calculs la résistance causée par les frottements, et tout ce qu'il peut y avoir d'intéressant de théorie et de pratique dans ces sortes de machines. On fait voir aussi comment l'on peut se servir du flux et reflux de la mer, pour faire tourner des roues toujours du même sens; la manière de construire des moulins à bras, et d'autres mis en mouvement par des chevaux, à l'usage des places de guerre.

On décrit ensuite les moulins à scier, on fait l'analyse de toutes les parties qui entrent dans leur composition, et on en calcule l'effet selon la grosseur des pièces de bois que l'on veut débiter. On en rapporte aussi d'autres pour scier des blocs de pierre, d'autres pour percer des tuyaux de bois pour la conduite des eaux; d'autres

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

enfin pour pulvériser des matières, comme, par exemple, celles qui entrent dans la composition de la poudre à canon.

Toutes ces descriptions de moulins sont accompagnées de recherches sur ce qui peut les rendre parfaits, de calculs qui embrassent les frottements et tous les accidents inséparables de la pratique, qu'on a soumis à des règles si claires et si sensibles, qu'avec une médiocre attention le lecteur peut acquérir insensiblement des connaissances qui lui donneront un sentiment éclairé sur toutes sortes de machines.

Les moulins à chapelet étant regardés avec raison comme les machines les plus commodes pour les épuisements, on en a rapporté de toutes sortes d'espèces, avec les calculs de la force nécessaire pour les mettre en mouvement, et du produit dont ils peuvent être capables. Lorsqu'ils agissent sur des plans inclinés, on fait voir quel angle le plan doit former avec l'horizon, pour que le chapelet épuise le plus d'eau qu'il est possible dans un temps déterminé. On compare l'effet de ces chapelets avec celui de quelques autres machines employées au même usage, pour faire sentir sur lesquelles doit tomber la préférence. Enfin on décrit plusieurs sortes de roues à eau, soit pour les épuisements, soit pour l'élever dans un réservoir.

Le troisième livre commence par une dissertation fort étendue sur les propriétés de l'air. On y fait voir comment l'eau monte par aspiration; l'usage qu'on peut faire de la dilatation et de la condensation de l'air; la force que son ressort acquiert par la chaleur pour mouvoir les machines, le tout tiré des expériences faites en France et en Angleterre : ce qui peut servir d'introduction à la physique, et à expliquer les effets des pompes aspirantes, et des machines à élever l'eau par le moyen du feu. Cette dissertation est suivie de la manière de calculer la force du vent, de l'avantage qu'on en peut tirer pour dessécher un pays aquatique, ou pour arroser un terrain aride, dont on rapporte des exemples.

Ensuite l'on décrit les propriétés de toutes les pompes qui ont été imaginées jusqu'ici, on en fait voir les défauts et les avantages, et à quel degré de perfection on peut les porter. On est entré dans un

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

détail circonstancié sur toutes leurs parties, principalement sur les pistons et les soupapes, ce que l'on a fait avec d'autant plus de soin, qu'il paraît que ce sujet n'a pas encore été examiné sérieusement.

Après avoir considéré les pompes en elles-mêmes, on rapporte un grand nombre de machines pour les faire mouvoir : les unes à l'usage des particuliers, dans lesquelles je comprends celles dont on se sert aux incendies; les autres propres à entretenir les fontaines d'une ville. On donne pour exemple les plus belles qui soient actuellement exécutées en différents endroits de l'Europe, mises en mouvement par les animaux, le cours des rivières, et la force du feu. Ces dernières ont été inventées depuis peu par les Anglais, qui ont su tirer du feu l'agent le plus puissant qu'il y ait dans la nature, et le ménager avec tant d'art, qu'on peut regarder ce qu'ils ont fait là-dessus comme le chef-d'œuvre de l'esprit humain. Aussi n'ai-je épargné ni soins, ni dépenses pour en donner un détail exact, ayant été moi-même plusieurs fois sur les lieux, et reçu de la part de Messieurs de la Société Royale de Londres toutes les lumières que je pouvais desirer.

On donne dans le quatrième livre plusieurs moyens pour faire que l'eau d'une source s'élève d'elle-même beaucoup au-dessus de son niveau, pourvu qu'on ait une chute, en se servant de la force dont l'eau est capable par sa pression, sans employer aucune des parties qui entrent dans la composition ordinaire des machines; ce qui est une découverte importante faite depuis peu.

On trouvera ensuite une dissertation sur l'origine des fontaines, la manière de les découvrir, et d'en conduire les eaux, soit par des tranchées ou par des aquéducs; la construction des bassins, réservoirs et citernes pour les conserver; la manière de les distribuer aux fontaines d'une ville et aux particuliers : à quoi l'on joint plusieurs machines pour en tirer des puits fort profonds.

Comme rien n'est plus agréable à la vue pour la décoration des jardins que les eaux jaillissantes, on s'est fort étendu sur la manière de les diriger, en faisant voir comment, avec une petite quantité qu'on a l'art d'employer plusieurs fois, on peut, sans une grande dépense,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

offrir un spectacle des plus riants. On donne pour exemple ce qui a été exécuté dans ce genre à Versailles, Marly, Saint-Cloud, Chantilly, Sceaux, Liancourt, et dans les pays étrangers, afin que ceux qui seront dans le dessein d'embellir leurs jardins puissent trouver ce qui leur convient, eu égard à la dépense qu'ils ont envie de faire et à la situation des lieux, et qu'en général le lecteur puisse être en état de juger de la beauté des objets de cette espèce qui intéresseraient sa curiosité. Je ne dis rien ici des machines pour élever l'eau dans le réservoir qui doit donner l'ame à toutes ces choses, lorsqu'il n'y a point de source naturelle supérieure, parce qu'elles se trouvent comprises dans celles dont j'ai parlé précédemment, dont on pourra faire le choix.

Voilà en gros ce qui compose la première partie. A l'égard de la seconde, qui doit traiter de la manière de rendre les rivières navigables, et d'en faciliter la communication par les canaux; de la construction des ponts, aquéducs, écluses, bassins, carènes, quais, jetées, risbans, fanaux, et autres ouvrages qui se font aux places maritimes; je continue à y travailler pour la mettre sous la presse le plutôt qu'il me sera possible: j'instruirai le public du temps où elle pourra paraître.

La conformité du mérite de M. Frézier avec celui des grands hommes à qui j'ai consacré cette première partie de mon Architecture Hydraulique (MM. les membres de l'Académie Royale des Sciences), est trop généralement reconnue pour hésiter à le faire participer à mes sentiments de reconnaissance, puisque si l'on y trouve les matières traitées avec quelque méthode, c'est à ses conseils que j'en suis redevable. Le bel ouvrage qu'il vient de donner au public sur la Coupe des pierres, est un sûr garant des lumières qu'il est en état de communiquer. Il désapprouvera sans doute cette marque authentique de ma sensibilité, mais je suis intéressé à faire voir que l'ingratitude n'est pas mon défaut.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ARCHITECTURE HYDRAULIQUE,

OU

L'ART DE CONDUIRE, D'ÉLEVER, ET DE MÉNAGER LES EAUX POUR LES DIFFÉRENTS BESOINS DE LA VIE.

LIVRE PREMIER

SERVANT D'INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER

Contenant les principes de la Mécanique.

Définitions, axiômes, et remarques préliminaires.

1. La Mécanique est une science qui considère le rapport qui se rencontre entre les *forces* ou *puissances* qui agissent pour mouvoir les corps, et les *vîtesses* avec lesquelles ils seraient mus s'il ne se rencontrait point d'obstacles : le tout considéré dans l'état d'*équilibre*, c'est-à-dire dans l'état où se rencontrent deux ou plusieurs puissances qui, agissant les unes contre les autres autour d'un point *fixe*, demeurent en *repos*.

2. On nomme *direction* d'une puissance, la ligne droite selon laquelle cette puissance pousse ou tire un corps.

3. On appelle *effort*, *impression* ou *moment* d'une puissance, ce que la manière dont elle est appliquée à un corps ou à une machine, lui permet d'*action* contre l'obstacle à surmonter.

4. Quand on dira par la suite qu'un corps est mu sur un plan horizontal par une ou plusieurs puissances, on supposera, pour plus d'intelligence, que la force de chaque puissance est attribuée à une main qui pousse ce corps selon une ligne droite avec une force toujours *uniforme*,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pour lui faire parcourir des espaces égaux en temps égaux; c'est-à-dire que, si cette puissance en poussant le corps successivement lui faisait parcourir un espace de 6 pieds en 6 secondes de temps, elle lui ferait parcourir un pied par chaque seconde (*a*).

N'étant pas nécessaire qu'une puissance soit appliquée immédiatement à un corps pour le pousser, on peut supposer si l'on veut qu'elle se sert d'un *rayon solide*, comme on fait au *billard* lorsqu'on veut pousser une *bille* avec une force uniforme selon une même direction. Comme il s'en faut bien que la force que peut avoir la main qui pousse une bille soit totalement employée à la mouvoir, on fera attention que lorsque nous dirons qu'un corps est poussé ou tiré par une ou plusieurs puissances, on ne doit entendre par ces puissances que ce que chacune exerce de force pour tirer ou pousser ce corps, et non tout ce qu'elle en pourrait avoir.

5. Lorsque plusieurs puissances pousseront ou tireront un corps, il faudra considérer leurs directions comme étant renfermées dans un même plan; et lorsqu'elles seront appliquées à des cordes, on fera abstraction de la roideur et de la pesanteur de ces cordes.

6. Soit qu'une ou plusieurs puissances poussent ou tirent un corps,

---

Sur la nature du mouvement uniforme dans les machines.

(*a*) Sans m'arrêter sur la définition contenue dans l'art. 1, dont chacun peut sentir l'imperfection (puisque l'objet principal de la mécanique est de considérer les corps, et particulièrement les machines, en mouvement, et non en repos), je remarquerai sur l'énoncé de l'art. 4 qu'on ne peut pas supposer « une main qui, « poussant un corps avec une force uniforme, lui ferait parcourir des espaces « égaux en temps égaux. » L'effet d'une force agissant uniformément sur un corps, est de lui faire prendre un mouvement uniformément accéléré. Voy. la note suiv. (*b*).

Lorsqu'on voit dans une machine un point qui se meut d'un mouvement uniforme, et sur lequel agit une puissance constante, il ne faut point perdre de vue que cette puissance est alors employée toute entière à détruire l'effet des résistances qui tendent à arrêter le mouvement de la machine. Quand une machine commence à se mouvoir, la puissance l'emporte sur les résistances, et le mouvement, en partant du repos, s'accélère peu-à-peu. A mesure que la vîtesse augmente, il arrive toujours que la résistance s'accroît, et que la puissance diminue; et par conséquent elles acquièrent bientôt des valeurs respectives telles qu'elles peuvent se faire mutuellement équilibre au moyen de la machine. A partir de cet instant, la vîtesse de la machine devient constante, ainsi que la puissance et la résistance. Les forces qui agissent sur elle se détruisant réciproquement, elle est dans le même cas que si toute action avait cessé, et elle se meut uniformément en vertu de l'inertie de la matière, comme un corps qui, ayant été mis en mouvement par une force, conserve indéfiniment le mouvement qu'il avait acquis à l'instant où cette force a cessé d'agir sur lui. Ces notions seront développées dans la suite (voyez l'*addition* placée à la fin de ce premier livre).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les directions selon lesquelles elles agiront seront toujours marquées par celles des rayons solides ou des cordes auxquelles ces puissances sont appliquées. Ainsi l'on pourra regarder leur effort comme s'étendant également dans tous les points de leurs directions, sans se mettre en peine de la distance où ces puissances se trouvent du corps sur lequel elles agissent, le plus ou le moins de longueur des cordes ou des rayons ne pouvant causer aucune altération à leur effet.

7. On peut aussi recevoir comme incontestable que l'*action est égale à la réaction* : en effet l'*action* d'une force contre un corps ne peut être qu'égale à celle qu'a ce corps pour la repousser.

8. Comme il n'y a point de rapport, de quelque nature qu'en soient les termes, qu'on ne puisse exprimer par des lignes droites, nous nous en servirons pour désigner la force que nous attribuerons aux puissances ; ce qui suffira, pour peu qu'on ait d'intelligence, sans qu'il soit nécessaire de caractériser ces puissances par d'autres traits.

9. Quand une puissance est appliquée à une machine pour produire un certain effet, on la nomme *puissance motrice* ou *puissance agissante*, et l'on dit qu'elle agit avec une *force absolue*, lorsqu'elle emploie tout ce qu'elle peut exercer de force pour surmonter l'obstacle qui lui est opposé : on dit, au contraire, que cette puissance n'agit qu'avec une *force relative* ou *respective*, lorsqu'elle n'emploie qu'une partie seulement de sa force absolue (*b*).

(*b*) Les notions données dans le texte étant un peu vagues et confuses, je vais essayer d'en établir de plus nettes.

Notions générales sur le mouvement, la vitesse, et la force.

Un corps est en *mouvement* quand il occupe successivement diverses situations différentes. Le mouvement est *uniforme*, quand le corps parcourt des espaces égaux, en temps égaux. Le mouvement est *accéléré* ou *retardé*, quand les espaces parcourus dans un même temps vont en augmentant ou en diminuant.

La *vîtesse* d'un corps est le rapport de l'espace qu'il parcourt au temps employé à le parcourir. Quand le mouvement est uniforme, la vîtesse est constante, et elle s'exprime numériquement par l'espace parcouru dans l'unité de temps. Quand le mouvement est accéléré ou retardé, la vîtesse augmente ou diminue avec le temps, et sa valeur numérique, à un instant donné, est l'espace que le corps parcourrait dans l'unité de temps, si, à cet instant donné, son mouvement devenait uniforme. Quand la vîtesse croît ou décroît proportionnellement au temps, le mouvement est dit *uniformément accéléré* ou *uniformément retardé*.

Un corps en repos n'est point capable de se donner par lui-même du mouvement. Quand un corps a été mis en mouvement, et qu'aucune cause étrangère n'agit sur lui, le mouvement qu'il a reçu ne s'altère point, c'est-à-dire que le corps continue indéfiniment à se mouvoir dans la même direction et avec la même vîtesse. C'est l'effet de ce qu'on appelle l'*inertie* de la matière.

Une *force* est une cause capable d'imprimer du mouvement à un corps en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

10. Lorsqu'un mouvement résulte du concours de deux puissances, comme d'une seule qui serait formée de ce qu'elles y emploient d'action, on l'appelle *mouvement composé.*

---

repos, et de changer ou détruire le mouvement d'un corps qui se meut. Les effets de cette cause sont susceptibles, suivant les circonstances, de diverses modifications dont voici les deux principales. 1° Si une force agit sur un corps en repos susceptible de céder librement à son action, elle lui fait prendre un mouvement accéléré; et si la force est constante, le mouvement est uniformément accéléré. Si cette action vient à cesser, le mouvement devient à l'instant uniforme. 2° Si une force agit sur un corps maintenu en repos par un obstacle invincible, elle lui fait exercer contre cet obstacle un *effort* ou *pression*, laquelle demeure constante et n'augmente point avec le temps, si la force elle-même est constante.

Sur la pesanteur.

Parmi les diverses forces que présente la nature, celle dont l'emploi est le plus fréquent, et dont les effets nous sont le plus familiers, est la *pesanteur*. Cette force n'est pas constante; elle varie avec la distance des corps au centre de la terre et à l'équateur; mais dans les recherches de mécanique pratique, on peut la supposer invariable. Son mode d'action consiste en ce qu'elle pénètre en quelque sorte l'intérieur des corps, et anime également chaque particule de matière dont ils sont composés. En effet tout corps, quelles que soient sa grandeur et sa nature, qui cède librement à l'action de la pesanteur, prend un même mouvement uniformément accéléré; et si divers corps sont retenus par des obstacles, ils exercent contre eux, par l'action de la pesanteur, des efforts ou pressions qui sont proportionnels à leurs *masses*, c'est-à-dire à la quantité de matière qu'ils contiennent. Ces pressions ne sont autre chose que ce qu'on nomme ordinairement le *poids* des corps. On les compare entre elles, et on les évalue numériquement, en les rapportant à une unité de poids convenue.

Le poids d'un corps est égal au produit de sa masse par la vitesse que la pesanteur peut imprimer dans l'unité de temps.

Soit g l'accroissement constant que reçoit dans chaque unité de temps la vîtesse de tout corps qui cède librement à la pesanteur : g sera une quantité propre à caractériser cette force et à en donner la mesure. Soit P le *poids* d'un corps dont la masse est m, le rapport du poids à la masse, ou $\frac{P}{m}$, sera évidemment aussi une quantité propre à donner la mesure de la pesanteur. Mais deux quantités qui donnent la mesure d'une même cause sont nécessairement égales, ou du moins proportionnelles entre elles. On peut donc écrire $\frac{P}{m} = g$, ou $P = m\,g$, pourvu qu'ayant exprimé les quantités P et g d'après les unités ordinaires de poids et de longueur, on fixe l'unité de masse, laquelle est absolument arbitraire, de manière à satisfaire à cette équation.

Il y a encore dans la nature quelques forces agissant à la manière de la pesanteur, c'est-à-dire qui pénètrent comme elle l'intérieur des corps soumis à leur action, et auxquelles les considérations précédentes peuvent s'appliquer. Telles sont les forces qui produisent les attractions et répulsions électriques ou magnétiques. Mais l'action de toutes les autres forces employées dans les machines, par exemple des forces provenant des animaux ou de l'élasticité des gaz, est d'une autre na-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

11. Comme les mouvements de cette espèce se rencontrent fréquemment dans les machines, et qu'on en déduit le principe le plus fécond de la mécanique, nous commencerons par établir les propriétés du *parallélogramme des forces*, en supposant que *les effets sont toujours proportionnels à leurs causes*, proposition évidente et dont on ne peut douter.

Par exemple, comme les vîtesses uniformes d'un même corps, ou de corps égaux, ne peuvent être que dans la raison des forces motrices (*c*),

---

ture, et consiste uniquement dans un effort ou pression qui s'exerce extérieurement contre la surface des corps auxquels la force est appliquée. D'ailleurs, malgré cette différence dans la nature de ces forces, leur action peut toujours s'assimiler à celle de la pesanteur, et s'exprimer algébriquement et numériquement de la même manière. En effet, une pression produite par une force quelconque est toujours équivalente à un poids, lequel donne la mesure de cette pression. Si une force exerce contre un obstacle immobile une pression P', on en conclura, d'après ce qui précède, que son action, si elle était répartie sur toutes les particules de matière d'un corps dont la masse serait m, et qui lui céderait librement, lui imprimerait un mouvement uniformément accéléré, tel que la vîtesse acquise par ce corps dans chaque unité de temps serait $g'=\frac{P'}{m}$. Réciproquement, si l'on sait qu'un corps dont la masse est m, en cédant librement à l'action d'une force, acquiert dans chaque unité de temps une vîtesse g', on en conclut que cette force agissant contre un obstacle immobile, exercerait un effort $P'=mg'$.

De l'effort exercé par un corps animé d'une force accélératrice, contre un obstacle qui n'est point immobile.

Quand un corps dont la masse est m, soumis à l'action d'une force accélératrice capable de lui faire acquérir la vîtesse g dans l'unité de temps, est appliqué, non pas contre un corps immobile, mais contre un corps qui se meut, la pression qui s'exerce entre les deux corps dépend de la nature du mouvement qui a lieu. Si les deux corps se meuvent ensemble d'un mouvement uniforme, la pression est exprimée par mg, comme dans le cas où les deux corps sont en repos. Mais si le second corps fuit en quelque sorte devant le premier, et se meut d'un mouvement accéléré, tel que sa vîtesse s'accroisse de la quantité g' dans l'unité de temps, il ne se produit plus qu'une pression $=m(g-g')$; c'est-à-dire relative à l'excès de la vîtesse que la force accélératrice peut imprimer au premier corps dans un temps donné, sur celle que le second corps acquiert dans le même temps.

Sur la proportionnalité de la force à la vîtesse.

(*c*) La supposition de la force proportionnelle à la vîtesse, et par conséquent à l'espace parcouru, a donné lieu à des difficultés. D'Alembert les avait tranchées, en appelant *force* la quantité à laquelle la vîtesse acquise dans chaque élément du temps est proportionnelle (*Traité de Dynamique*, art. 22). M. Laplace a prouvé depuis la proportionnalité de la force à la vîtesse, en montrant qu'elle était une suite nécessaire d'un fait établi par l'observation, et qui consiste en ce que les mouvements relatifs de plusieurs corps emportés par un mouvement général et commun, sont absolument les mêmes que si ce mouvement commun n'existait point (*Mécanique céleste*, tome 1, page 15).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les espaces parcourus par ces corps, en temps égaux, seront aussi comme les forces motrices, ou les causes qui les auront produites; et lorsque les espaces parcourus d'un mouvement uniforme par un même corps, ou par des corps égaux, sont entre eux comme leurs vîtesses, ou comme les forces qui les ont produites, ces espaces sont parcourus en temps égaux.

12. Quel que soit le nombre des forces ou des puissances quelconques, dirigées comme on voudra, qui agissent à-la-fois sur un même corps, ou ce corps ne se remuera point du tout, ou il n'ira que par un seul chemin, et suivant une ligne qui sera la même que si, au lieu d'être ainsi poussé ou tiré par toutes ces puissances à-la-fois, ce corps ne l'était que suivant la même ligne, et en même sens, par une seule force ou puissance équivalente à celle qui résulterait du concours de toutes celles-là.

Propriétés du parallélogramme des forces.

PLANCHE I. FIGURE I.

13. Si l'on a deux puissances exprimées par les lignes AB et DB, que la première AB soit capable de faire parcourir au corps B le côté BC d'un parallélogramme, dans le même temps que la seconde DB ferait parcourir au même corps l'autre côté BE; ces deux forces agissant ensemble sur le corps B, lui feront parcourir la diagonale BF du même parallélogramme, dans un temps égal à celui que chaque puissance AB ou DB en particulier aurait employé à faire parcourir au corps B chaque côté BC ou BE.

Les deux forces AB, DB agissant ensemble sur le corps B selon les directions BC et BE, la direction du corps B sera composée de ces deux directions; or si l'on divise en un nombre d'instants égaux le temps que chaque force mettrait à faire parcourir au corps B le côté BC ou BE, il est clair que les deux forces agissant ensemble sur le corps B, la force AB tendra à lui faire parcourir le côté BC dans le même temps que la force DB tendra à lui faire parcourir le côté BE. Si l'on suppose que dans le premier instant la force AB fait parcourir au corps B l'espace BH, tandis que la force DB lui fait parcourir l'espace HI, le corps se trouvera au point I; et les espaces BH et HI, si petits qu'on puisse les imaginer, seront toujours comme les forces AB et DB, ou comme BC et BE (11). Ainsi, à cause des triangles semblables BHI, BCF, le corps étant en I sera dans un point de la diagonale BF: il l'aura même toujours suivi depuis B jusqu'en I. Si au second instant la force AB fait parcourir au corps B l'espace IK, dans le même temps que la force DB lui fait parcourir l'espace KL, le corps se trouvera encore au point L de la diagonale. Mais toutes les lignes comme BH, IK, depuis B jusqu'en F, sont prises ensemble égales à BC, et toutes celles comme HI, KL sont égales à BE. Donc le temps que le corps a mis à parcourir la diagonale

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

BF, par les deux forces agissant ensemble, sera égal au temps que chaque force en particulier aurait mis à faire parcourir au corps B le côté BC ou BE.

Première conséquence.

14. Puisque les forces AB et DB sont capables de faire parcourir au corps B les espaces BC et BE en des temps égaux, il suit que les effets étant proportionnels à leurs causes, on aura AB:DB :: BC:BE (11). Pl. I, Fig. I.

Seconde conséquence.

15. Si l'on achève le parallélogramme AD, que l'on prolonge la ligne FB jusqu'en G, la ligne BG sera la diagonale du parallélogramme AD. Comme les triangles BCF, GDB sont semblables, on aura BC : GD :: BF : GB; et AB étant égale à GD, il suit que l'espace BC est à la force GD, comme l'espace BF est à la force GB. Ce qui fait voir que la force exprimée par la diagonale GB fera parcourir au corps B l'espace BF, dans le même temps que la force AB ou GD fera parcourir au même corps l'espace BC (11). Or, comme on a encore BE : BD :: BF : GB, on peut conclure que la puissance GB a autant de force elle seule pour faire parcourir au corps B l'espace BF, que les deux forces AB et DB en ont, agissant ensemble selon les directions BC et BE, pour faire parcourir au corps B le même espace BF (*d*).

La force exprimée par la diagonale d'un parallélogramme, est égale à deux autres forces, lesquelles, agissant ensemble, seraient exprimées par les côtés du même parallélogramme.

(*d*) Cette manière d'établir le principe de la composition des forces est fondée 1° sur ce qu'un corps qu'on fait mouvoir uniformément à-la-fois suivant deux directions différentes, parcourt nécessairement la diagonale du parallélogramme dont il eût parcouru séparément les côtés en vertu de chacun de ces mouvements; 2° sur ce que les forces étant proportionnelles aux vîtesses qu'elles impriment à un même corps, ou aux espaces qu'elles leur font parcourir dans un même temps, le corps qui a parcouru la diagonale du parallélogramme est dans le même cas que s'il eût été mu par une force unique, dirigée suivant cette diagonale, et qui fût à chacune des deux autres forces comme la diagonale est au côté correspondant.

Sur le principe de la composition des forces.

Ces notions sont rigoureuses, et sur-tout elles s'établissent clairement dans l'esprit. On voit que la *résultante* de deux forces est la force capable d'imprimer le *mouvement résultant* des mouvements simultanés imprimés par ces forces. La notion de la résultante s'acquiert aussi d'une manière très-claire par une considération employée par M. Carnot. Soit un mobile placé en A, qu'une force rendrait capable de parcourir l'espace AB dans l'unité de temps, ou auquel une force imprimerait la vîtesse AB. Quand le corps sera parvenu de A en B, il n'aura parcouru dans le sens d'une ligne quelconque AC passant par le point A que l'espace AB′, déterminé par la perpendiculaire BB′, abaissée de B sur AC : AB′ est donc *l'espace ou la vîtesse AB estimée dans le sens AC*. Il est essentiel de se familiariser avec cette expression, qui revient à chaque instant, et on voit aisément que A′B′ = AB. cos. BAB′, et en général que *pour estimer suivant une ligne quelconque une vîtesse ou* Pl. A, Fig. I.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Troisième conséquence.

Pl. 1, Fig. 2. La force exprimée par la diagonale d'un parallélogramme, sou-

16. Prenant sur BF la partie BH égale à la diagonale BG, la force exprimée par BH, agissant de H en B selon la direction BG, sera capable

---

un espace parcouru, il faut les multiplier par le cosinus de l'angle que cette ligne forme avec leur direction. Cela posé, on nommera vîtesse résultante celle qui, estimée dans un sens quelconque, est égale à la somme des vîtesses composantes estimées dans le même sens. La construction suivante donnera sa valeur d'une manière très-

Pl. A, fig. 2. simple. Soit un mobile placé en A, qui tendrait à se mouvoir en même temps avec des vîtesses représentées en grandeur et en direction par les lignes AB, AC, AD, AE : construisons la portion de polygone AB*cde*, de manière que chacun des côtés soit égal et parallèle à l'une de ces lignes, savoir B*c* à AC, *cd* à AD, *de* à AE; la ligne A*e* joignant le point A avec l'extrémité du dernier côté du polygone, représentera en grandeur et en direction la vîtesse résultante cherchée. Il est facile de s'assurer en effet qu'elle remplit la condition énoncée ci-dessus (voyez les *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*, p. 16).

Dans le cas où il n'y a que deux vîtesses, cette construction donne la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui les représentent, conformément à

Pl. A, fig. 3. l'art. 13 du texte. Quand il y en a trois, AB, AC, AD, qui ne sont pas situées dans un même plan, elle donne la diagonale A*d* du parallélepipède construit sur ces mêmes lignes.

Dans les traités élémentaires de mécanique les plus récents, on démontre d'une autre manière le principe de la composition des forces, dans l'intention d'établir ce principe indépendamment de toute considération de mouvement. Mais indépendamment de ce que ces démonstrations ne sont pas absolument exemptes de ce genre de considérations (comme Lagrange l'a remarqué), il faut convenir qu'on fait perdre ainsi au principe beaucoup de sa clarté et de sa simplicité, et peut-être est-ce faire un trop grand sacrifice à l'ordre d'exposition qu'on s'est imposé. Il semble en effet que, quand on développe les principes d'une science, c'est peu de convaincre la raison si on ne l'éclaire pas, et le but qu'on doit se proposer dans une démonstration n'est peut-être pas moins de faire comprendre une proposition que de la prouver.

Relations entre la résultante de plusieurs forces et les angles qu'elles forment. Voici quelques résultats qui se déduisent du principe précédent, et dont l'usage est si fréquent dans les applications, qu'on doit les avoir toujours présents à la mémoire.

Ayant deux forces P, P′ appliquées à un même point et faisant entre elles un angle m, en nommant R leur résultante, on aura $R^2 = P^2 + P'^2 + 2PP' \cos. m$. Nommant n, n' les angles de cette résultante avec les forces P, P′, on aura $R = P \cos. n + P' \cos. n'$, et $\sin. n = \frac{P' \sin. m}{R}$, $\sin. n' = \frac{P \sin. m}{R}$.

Si les deux forces P, P′ font entre elles un angle droit, la première formule se réduit à $R^2 = P^2 + P'^2$, et n étant toujours l'angle de la force P avec la résultante, les autres deviennent $R = P \cos. n + P' \sin. n$, $\sin. n = \frac{P'}{R}$, $\cos. n = \frac{P}{R}$, d'où $P =$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'empêcher l'effet de la force GB agissant de G en B, et par conséquent la force BH pourra elle seule résister aux deux forces AB et DB, agissant ensemble selon les directions BC et BE. D'où il suit que le corps B demeurera dans un parfait repos, lorsque les trois forces AB, DB et BH agiront en même temps : c'est cette égalité d'action de forces agissant en sens contraire que nous avons nommée *équilibre* (1).

tient en équilibre l'action de deux puissances opposées qui seraient exprimées par les deux autres côtés.

R cos. n, $P' = R$ sin. n; ce qui donne le moyen de décomposer une force R suivant deux directions données, faisant entre elles un angle droit.

Si l'on voulait décomposer une force R en trois autres non comprises dans un même plan et faisant entre elles des angles droits, la ligne qui représente cette force étant alors la diagonale du parallélepipède rectangle dont les lignes qui représentent ses composantes sont les côtés; ces composantes, en nommant a, b, c les angles formés par la force R avec leurs directions, seraient exprimées respectivement par R cos. a, R cos. b, R cos. c.

Quand on a plus de deux forces appliquées à un même point, la manière la plus courte et la plus simple de déterminer la grandeur et la position de leur résultante, est de commencer par décomposer chacune de ces forces dans le sens de trois axes rectangulaires passant par le point. Toutes les composantes dans le sens d'un même axe s'ajoutent pour ne former qu'une seule force, de manière que le système est remplacé par trois forces rectangulaires, dont la résultante est facile à trouver.

Soient P, P', P'', etc. plusieurs forces appliquées à un même point; α, β, γ, les angles que la direction de la force P fait avec trois axes rectangulaires pris arbitrairement; α', β', γ', ceux que la direction de la force P' fait avec les mêmes axes; et ainsi des autres. La force P fournira dans le sens de chaque axe les composantes P cos. α, P cos. β, P cos. γ; la force P' les composantes P' cos. α', P' cos. β', P' cos. γ'; et ainsi de suite. Donc si l'on nomme X, Y, Z les sommes des forces agissant dans le sens de chaque axe, on aura

$$X = P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + \text{etc.},\quad Y = P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + \text{etc.},\quad Z = P\cos.\gamma + P'\cos.\gamma' + \text{etc.}$$

Mais la résultante cherchée R est la résultante des trois forces X, Y, Z. Donc si l'on nomme a, b, c les angles qu'elle forme avec les axes, on aura

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,\quad R\cos.a = X,\quad R\cos.b = Y,\quad R\cos.c = Z;$$

ce qui détermine entièrement la grandeur et la direction de la résultante.

Il est essentiel, en faisant usage de ces formules, d'avoir égard au signe de cosinus. Ils sont positifs quand la force tend à augmenter les coordonnées positives comptées sur l'axe avec lequel l'angle est formé, et négatifs dans le cas contraire.

Lorsque la résultante de plusieurs forces appliquées à un même point est nulle, ces forces se font mutuellement équilibre. En remarquant que la valeur de R^2 est la somme de trois quarrés, qui ne peut être nulle qu'autant que chaque quarré est séparément égal à zéro, on voit que l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un même point ne peut avoir lieu qu'autant que les trois équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ ont lieu en même temps.

Conditions d'équilibre de plusieurs forces appliquées à un point.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Quatrième conséquence.

17. Il est encore manifeste que les trois puissances qui se font équilibre sont proportionnelles aux côtés d'un parallélogramme fait sur leurs directions, et à la diagonale du même parallélogramme; puisque dans l'équilibre la puissance résistante est capable de produire les mêmes effets que les deux agissantes.

Cinquième conséquence.

Selon quelles directions doivent agir trois puissances pour être en équilibre.

18. On voit, par tout ce qui précède, que la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont proportionnels aux puissances actives, doit toujours être sur la ligne de direction de la puissance résistante, et les deux autres côtés sur celles des deux puissances agissantes.

Remarque.

19. Voilà la situation selon laquelle il faut considérer les puissances qui agissent en sens contraire, soit qu'elles poussent un corps avec des rayons solides, ou qu'étant appliquées à des cordes qui seraient attachées à ce corps, chacune le tire à elle. Ainsi quand nous avons supposé en premier lieu que ces puissances faisaient mouvoir le corps le long des côtés d'un parallélogramme ou de sa diagonale, ce n'a été que pour montrer de quelle manière l'équilibre se produisait, et quelle en était la nature (*e*).

Comment on passe de la composition des vitesses à la composition des pressions.

(*e*) A l'instant où l'on passe de la notion du mouvement, sur laquelle est fondée ci-dessus le principe de la composition des forces, à la notion de l'équilibre, il se fait dans les idées, quoique les mots demeurent les mêmes, un changement sur lequel il est nécessaire de s'arrêter, si l'on veut éclaircir complètement cette matière.

En effet, pour établir le principe dont on vient de parler, on a considéré une masse unique qui cédait librement à l'action de deux forces, et les lignes par lesquelles on représentait ces forces étaient censées exprimer en unités de longueur les vîtesses que les forces pouvaient imprimer à la masse dans l'unité de temps. Par leur résultante, on entendait la force capable d'imprimer à la même masse la vîtesse résultante des vîtesses qu'elle aurait prises par l'action des forces composantes.

Mais quand on considère des forces agissant sur un obstacle qui demeure immobile, les lignes par lesquelles on les représente sont censées exprimer en unités de poids les efforts ou pressions exercés par chaque force. On entend par leur résultante une pression qui, agissant comme toutes les autres pressions réunies, pourrait les remplacer. Or Bélidor passe de la *composition des vîtesses* à la *composition des pressions*, en disant que chaque force (c'est-à-dire chaque pression) est proportionnelle à la vîtesse qu'elle imprimerait. Cela est vrai si toutes les forces sont censées agir sur une même masse (voy. ci-dessus la note (*b*)): mais indépendamment de ce que cette condition n'est point énoncée, il est clair que cela ne conduit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Sixième conséquence.

20. On voit encore que l'on peut toujours trouver deux forces pour les substituer à la place d'une seule donnée, dès qu'on aura déterminé les directions de celles que l'on cherche. Par exemple, soit la force donnée GB, à la place de laquelle on en veut substituer deux autres qui agissent ensemble suivant les directions données BC et BE, il faut prolonger ces directions du côté de B, et faire le parallélogramme AD : on aura les forces AB et BD capables de produire ensemble le même effet sur le corps B que la seule GB, ce qui est évident par l'article 15.

Pl. 1, Fig. 2. Trouver deux forces, lesquelles, agissant ensemble, selon des directions données, fassent le même effet qu'une seule force donnée.

Septième conséquence.

21. Si deux forces que l'on veut substituer à la place d'une seule étaient données, mais que leurs directions ne le fussent pas, il faut que ces deux forces, prises ensemble, soient plus grandes que la troisième GB, afin de pouvoir décrire un triangle GBD : dont les côtés GD et DB soient égaux aux deux lignes qui expriment les forces données : alors achevant le parallélogramme AD, on n'aura qu'à prolonger les lignes AB et DB

Deux forces étant données, trouver leurs directions, pour qu'agissant ensemble, on puisse les substituer à la place d'une troisième force donnée.

---

point par exemple à la considération de l'équilibre de plusieurs poids, lesquels, s'ils cédaient librement à la force qui agit sur eux, c'est-à-dire à la pesanteur, prendraient tous une même vîtesse. Il y a donc ici une lacune dans le développement du principe.

Pour la remplir, et pour considérer la chose dans sa plus grande généralité, soient plusieurs forces appliquées contre un obstacle immobile, et nommons m, m', m'', etc. les masses sur lesquelles elles agissent, g, g', g'', etc., les vîtesses qu'elles tendent à leur communiquer dans l'unité de temps. Les pressions exercées par ces forces seront, d'après la note (b), exprimées par mg, $m'g'$, $m''g''$, etc. Mais on ne changera rien à l'effort qui s'exerce contre l'obstacle, si l'on remplace toutes les masses par une masse unique M, pourvu qu'on fasse agir sur cette masse des forces capables de lui imprimer dans l'unité de temps les vîtesses $\frac{mg}{M}$, $\frac{m'g'}{M}$, $\frac{m''g''}{M}$, etc. dans les directions des forces précédentes ; car toutes les pressions exercées contre l'obstacle sont remplacées par des pressions égales. On a maintenant une masse unique M, à laquelle sont imprimées diverses vîtesses, dont on trouvera la résultante par le principe ci-dessus : représentons-la par G. La pression résultante des diverses pressions souffertes par l'obstacle sera MG. Or si l'on fait attention qu'il y a même rapport entre la vîtesse résultante G et les vîtesses composantes $\frac{mg}{M}$, $\frac{m'g'}{M}$, $\frac{m''g''}{M}$, etc., qu'entre la pression résultante MG et les pressions composantes mg, $m'g'$, $m''g''$, etc., on en conclura rigoureusement que les pressions se composent suivant les mêmes lois que les vîtesses, et que les propriétés du parallélogramme des forces conviennent également aux pressions qui ont lieu dans le cas de l'équilibre, et aux vîtesses qui ont lieu dans le cas du mouvement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pour avoir les directions BC et BE selon lesquelles doivent agir les deux forces pour faire le même effet sur le corps B que la seule GB, ce qui est encore évident par l'article 15.

Remarque.

Pl. 1, Fig. 3. Pourquoi deux forces qui sont, prises ensemble, plus grandes qu'une troisième, peuvent être en équilibre avec cette troisième.

22. Quoique la somme des deux puissances agissantes soit plus grande que la résistante, cela n'empêche pas que cette dernière ne fasse équilibre aux deux autres, lorsque leurs directions font un angle d'une grandeur finie, parce qu'il y a une égalité de forces, de la part des deux puissances agissantes, qui se détruit. Je m'explique : si des points A et D l'on abaisse sur GB les perpendiculaires AL, DI, et qu'on fasse les parallélogrammes LM et IK, les forces exprimées par DK et KB agissant ensemble feront l'effet de la force DB, et les forces AM, MB feront le même effet que la force AB. Mais les forces BK et BM étant égales et parallèles aux perpendiculaires AL et ID, seront égales entre elles et perpendiculaires à la ligne GF : ainsi ces deux forces n'approcheront ni n'éloigneront le corps B des points G, F, et doivent être regardées comme nulles par rapport au point F. De plus IB ou DK est égale à GL, de même que AM est égale à LB : ainsi la force GB étant égale aux forces DK et AM prises ensemble, on voit que ce sont les seules parties des forces AB et DB qui font équilibre avec la puissance résistante BH = GB.

Huitième conséquence.

Figure 4. Quand une force agit selon une direction oblique à une surface, elle ne pousse, tire, ou choque cette surface qu'avec une force relative, exprimée par le sinus de l'angle d'incidence.

23. On peut conclure de ce qui précède, que si une puissance pousse ou tire une surface inflexible AB, selon une direction oblique DC, elle ne la pousse ou tire que par ce qu'elle peut avoir de perpendiculaire à cette surface. Si l'on prend la ligne DC pour exprimer la force absolue de cette puissance, que du point D on abaisse la perpendiculaire DE sur la surface AB, et qu'on achève le parallélogramme rectangle EF, il est constant que les puissances exprimées par EC et FC, qu'on suppose agir ensemble sur le point C selon les directions EC et FC, feront le même effet que la puissance DC. Mais la puissance EC étant parallèle à la surface AB, elle n'y fait nulle impression : il n'y a donc que la seule FC qui, étant directement opposée à la surface, la pousse ou la presse avec toute la force dont elle est capable. Prenant la ligne DC pour le sinus total, la ligne DE sera le sinus de l'angle DCE, d'où il suit que, lorsqu'une puissance pousse ou tire une surface selon une direction oblique, *la force absolue de cette puissance est à la force relative ou à son effet, comme le sinus total est au sinus de l'angle d'incidence*, c'est-à-dire de l'angle aigu qu'elle forme avec la surface.

24. L'article précédent montre que si un corps mu avec une certaine vîtesse, frappe un autre corps ou une surface opposée selon une direction

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

perpendiculaire, il fait toute l'impression qu'il peut jamais faire étant mu avec cette vîtesse; mais que si sa direction est oblique à la surface, il ne le frappera qu'avec une force relative, et que *le choc selon la direction perpendiculaire sera au choc selon la direction oblique, comme le sinus total est au sinus de l'angle d'incidence.*

Principe général de la Mécanique (f).

25. Si l'on a trois puissances P, Q, R appliquées à des cordes, et qu'elles soient en équilibre autour du point fixe F; je dis que les puissances agissantes P et Q seront dans la raison réciproque des perpendiculaires BG et BC, tirées d'un des points de la direction de la puissance résistante R sur les lignes de direction des puissances P et Q. Pl. 1, Fig. 5.

Pour le prouver, considérez que dans l'état d'équilibre la puissance R sera exprimée par la diagonale BF du parallélogramme ED, la puissance P par le côté EF, et la puissance Q par le côté DF ou BE (15): ainsi l'on aura dans le triangle EBF les côtés FE et EB qui seront dans la raison des puissances P et Q. Or, remarquez que la perpendiculaire BC est le sinus de l'angle EFB, et la perpendiculaire BG le sinus de l'angle BFD, ou de son alterne EBF. Ainsi, comme dans les triangles les sinus des angles sont dans la même raison que les côtés opposés, on aura EF : EB :: BG : BC, et si l'on prend P à la place de EF et Q à la place de EB, on aura P : Q :: BG : BC.

26. De même, comparant la puissance R avec la puissance P, elles seront dans la raison réciproque des perpendiculaires DC et DG, tirées d'un des points de la direction de la troisième puissance Q sur celles des deux précédentes. Figure 6.

Prenant BD à la place de EF, on aura le triangle BDF dont les côtés BF et BD seront dans la raison des puissances R et P; ainsi la perpendiculaire DG étant le sinus de l'angle BFD, et la perpendiculaire DC celui de l'angle BDF, ou de son supplément BDH = CFD, on aura encore BF : BD :: DC : DG, ou R : P :: DC : DG.

Les principes précédents n'étant qu'une préparation à la mécanique, nous allons, en faisant abstraction des frottements, les appliquer aux machines simples qui en font l'objet; c'est-à-dire au *levier*, au *tour* qui comprend la *roue avec son treuil*, à la *poulie*, au *plan incliné*, au *coin*

(f) Il aurait été plus exact de dire *Principe général de la Statique*, puisque ce principe n'exprime qu'une loi d'équilibre. Il a été donné pour la première fois d'une manière plus générale par Varignon, dans son *Projet d'une nouvelle Mécanique*, 1687. Ce n'est qu'une conséquence du principe de la composition des forces, mais qu'il est nécessaire d'établir quand on veut en déduire de la manière la plus simple et la plus rigoureuse les conditions de l'équilibre du levier. Sur le principe établi par Varignon.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et à la *vis*. Nous nous attacherons principalement aux propriétés du levier, parce qu'on y peut rapporter le calcul de toutes les autres machines : mais avant d'en venir là, voici quelques définitions dont il convient d'être prévenu.

17. On appelle *pesanteur* des corps une force qui tend à les mouvoir du haut en bas en ligne droite vers le centre de la terre, que l'on nomme aussi *centre des graves :* on prend souvent le poids des corps à la place de leur masse, sur-tout quand ils sont de différentes matières, et qu'il s'agit d'estimer leur quantité de mouvement (*g*).

28. On appelle *centre de gravité* ou *de pesanteur* d'un corps, le point par où ce corps étant suspendu demeure en repos dans toutes les situations où il se trouve : par exemple, il est constant que le centre de gravité d'une ligne droite est dans son milieu, de même que celui d'une règle ou d'une verge dont l'épaisseur est égale sur toute sa longueur, sera aussi au milieu; de sorte que si l'on suspend la règle et la verge par ce point, ou si elles reposent chacune sur un pivot, elles se maintiendront dans une situation horizontale, n'y ayant point de raison pour qu'une moitié emporte l'autre.

On peut faire abstraction de l'étendue d'un corps, et supposer sa pesanteur réunie au centre de gravité, pour considérer ce corps comme un point pesant.

29. On supposera par la suite que les pesanteurs de toutes les parties de la matière qui compose un corps sont réunies dans le centre de gravité de ce corps, et que l'on peut regarder les corps comme des *points pesants*; cette supposition n'ayant rien qui répugne, puisqu'il est évident que pour empêcher un corps de se mouvoir, il n'y a qu'à présenter un obstacle dans la ligne de direction que décrit son centre de gravité.

30. On supposera aussi que les directions des poids appliqués à une même machine sont parallèles, quoiqu'elles concourent au centre de la terre, à cause de la petitesse de la machine comparée à la grande distance qu'il y a de la superficie de la terre à son centre, qui est d'environ 1432 lieues.

31. On peut toujours mettre une puissance à la place d'un poids, dès que cette puissance aura la même direction qu'avait le poids; car la *force d'une puissance se mesure par le poids d'un corps pesant qui ferait le même*

Comment on peut prendre le poids d'un corps pour sa masse.

(*g*) On ne peut prendre le poids pour la masse qu'autant qu'il s'agit d'établir des rapports entre des quantités de mouvement, et non d'évaluer numériquement les valeurs absolues de ces quantités; c'est effectivement ce qui a presque toujours lieu dans les recherches de mécanique. D'après les notions établies dans la note (*b*), P étant le poids d'un corps, et *g* la vîtesse que les corps graves acquièrent dans une unité de temps par l'action de la pesanteur, la masse est exprimée par $\frac{P}{g}$. On remarquera que Bélidor parle ici de *quantité de mouvement*, expression dont il ne donne la définition qu'à l'art. 85.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

effet qu'elle : ainsi quand deux poids seront en équilibre autour d'un point fixe, on pourra prendre l'un des deux pour la puissance qui est en équilibre avec l'autre.

32. Pour démontrer les propriétés de l'équilibre dans les machines, il faudra supposer d'abord que les directions des trois puissances qui le produisent sont dans un même plan et concourent en un point, ce qui est le cas général d'où l'on descend aisément au cas particulier des trois directions parallèles; et on formera toujours le parallélogramme, de manière que la diagonale soit, comme on l'a déja dit, sur la direction de la puissance résistante qui se trouve entre les deux agissantes (18) (*h*).

Quand un nombre de puissances sont en équilibre autour d'un même point, on peut réduire toutes ces puissances à trois seulement.

33. S'il y avait plus de trois puissances qui agissent selon des directions différentes contre un corps ou un point, de manière qu'il demeure en repos ou en équilibre, il faudrait réduire toutes ces puissances à trois seulement, ce qui sera aisé par l'article 20, en faisant que deux se réduisent à une seule, ainsi des autres réduites toujours de deux à une.

34. On appelle *point fixe* ou *point d'appui* d'un levier, la résistance autour de laquelle plusieurs puissances se combattent; ainsi lorsque deux puissances sont en équilibre avec une troisième, on peut à la place de cette troisième substituer un appui qui fera le même effet, ce qui répond à ce que l'on a dit à la fin de l'article premier.

Définitions des trois espèces de leviers qui se rencontrent dans les machines.

35. L'on distingue trois genres ou espèces de levier : *le levier du premier genre* est celui qui a une puissance ou un poids à chacune de ses extrémités, ou un poids à l'une et une puissance à l'autre, et le point d'appui entre les deux ; *le levier du second genre* est celui dont le point d'appui est à une de ses extrémités, une puissance appliquée à l'autre, et le poids entre les deux ; *le levier du troisième genre* est celui dont le point d'appui est à une de ses extrémités, le poids à l'autre et la puissance entre deux.

Éclaircissements sur l'article 32 du texte.

(*h*) Cet article doit paraître à-peu-près inintelligible aux commençants. Pour débrouiller cette espèce d'énigme, il faut faire attention qu'ici Bélidor a particulièrement en vue le levier et les machines qui s'y rapportent, où l'on considère deux puissances qui se font mutuellement équilibre en agissant sur une verge inflexible dont un des points est fixe. Or, pour que l'équilibre ait lieu dans un système semblable, il faut d'abord que les directions des deux puissances agissant sur le levier soient situées dans un même plan, afin qu'elles puissent se composer en une force unique, et ensuite que la direction de cette force passe par le point fixe du levier, afin qu'elle se trouve détruite par la résistance de ce point, et qu'elle ne puisse imprimer aucun mouvement au système. Cette résultante est la troisième force dont parle Bélidor, et l'on voit que la diagonale du parallélogramme construit sur les deux autres forces, par laquelle leur résultante est représentée, se trouve toujours sur la ligne menée du point de concours de ces forces au point fixe du levier.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Propriété du Levier.

Pl. 1, Fig. 7.

36. *Ayant deux puissances P et Q appliquées aux extrémités d'un levier AB, je dis qu'elles seront en équilibre si elles sont dans la raison réciproque des perpendiculaires CE et CD, tirées du point d'appui C sur leurs lignes de directions.*

Comme les directions des puissances P, Q, R doivent concourir au même point selon l'article 32, si on les prolonge, elles se rencontreront en H; et si du point C l'on tire les lignes CF et CG parallèles aux directions opposées BH et AH, on aura le parallélogramme FG, dont le côté FH ou CG exprimera la puissance P, et le côté GH la puissance Q dans l'état d'équilibre : or, comme la perpendiculaire CE est le sinus de l'angle CHG, et la perpendiculaire CD le sinus de l'angle FHC, ou de son égal HCG, on aura, selon l'article 25, P : Q : : CE : CD.

Première conséquence.

37. Les directions des trois puissances qui se font équilibre étant renfermées dans un même plan vertical, si on les suppose prolongées jusqu'au centre de la terre, le point H y étant parvenu, celles des puissances P et Q pourront être regardées comme parallèles entre elles (30); ce qui ne pouvant arriver sans que l'angle DCE que formaient les perpendiculaires CE et CD ne s'ouvre jusqu'à approcher infiniment de valoir deux droits, les côtés de cet angle pourront être regardés comme ne formant qu'une seule ligne droite IK; ainsi on aura encore P:Q :: CK:CI.

Deuxième conséquence.

Figures 7 et 8. Deux puissances parallèles, appliquées aux extrémités d'un levier du premier genre, sont en équilibre lorsqu'elles sont entre elles dans la raison réciproque des bras du même levier.

38. Les lignes AB et IK se coupant au point C, entre les parallèles AM et BN, formeront les triangles semblables ICA et KCB, qui donnent CK : CI :: CB:CA. Or, si à la place de CK et de CI l'on met CB et CA dans l'analogie précédente (P:Q :: CK :: CI), on aura P:Q :: CB:CA; ce qui fait voir que lorsque trois puissances P, Q, R sont appliquées à un levier AB, et qu'elles agissent selon des directions parallèles entre elles, dans l'état d'équilibre les puissances P et Q sont dans la raison réciproque *des bras de levier* CB et CA qui leur répondent.

Troisième conséquence.

Figure 9.

39. De même quand le levier AB se trouve dans une situation horizontale, on a encore P:Q :: CB:CA, puisque les bras de levier exprimeront eux-mêmes les perpendiculaires tirées du point d'appui C sur les lignes de directions des puissances P et Q.

Quatrième conséquence.

40. Comme c'est la même chose à la puissance R de soutenir l'action des deux autres P et Q en tirant de C en R le point C, ou en le repous-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sant de D en C dans la même direction, il suit qu'à la place de la puissance R, l'on peut substituer un point d'appui E, autour duquel les puissances P et Q seront en équilibre (34) : alors AB sera un levier du premier genre (35).

Cinquième conséquence.

41. Si les extrémités A et B du levier AB, au lieu d'être tirées de haut en bas par deux puissances, l'étaient par deux poids qui fissent le même effet, il faudrait que ces poids ainsi que les puissances, pour être en équilibre, fussent dans la raison réciproque des bras du levier lorsque ce levier est horizontal, ou bien quand il est oblique dans la raison réciproque des perpendiculaires tirées du point d'appui sur les directions des poids.

On peut à la place des puissances supposer des poids appliqués aux extrémités des bras d'un levier.

Sixième conséquence.

42. Si le levier qui porte les poids P et Q faisait des angles en B et C, ou s'il était de figure courbe, comme ABCDH, il faudrait mener par son point d'appui G, la ligne horizontale EGF, perpendiculaire aux directions des poids; alors les parties GE et GF de cette ligne exprimant les distances naturelles du point d'appui G aux directions des poids P et Q, en seront les véritables bras de levier comme ci-devant (37).

Pl. 1, Fig. 10 et 11.

De quelque figure que soit un levier du premier genre, il peut toujours se réduire à un levier droit.

Septième conséquence.

43. L'on peut aussi supposer un poids suspendu à l'extrémité d'un des bras du levier, et une puissance appliquée à l'autre (31); alors la puissance sera au poids dans la raison réciproque des bras du levier, quand la direction de la puissance sera parallèle à celle du poids.

Une puissance et un poids appliqués à un levier, seront en équilibre lorsque la puissance et le poids seront dans la raison réciproque des bras du même levier.

Huitième conséquence.

44. Si la puissance Q agissait selon une direction BQ oblique au levier AB, cette puissance serait au poids comme le bras CA est à la perpendiculaire CE, laquelle étant considérée comme une verge inflexible, pourrait être prise pour le bras de levier de cette puissance; ce qui fait voir dans la figure 13 qu'un levier dont les deux bras feront un angle aura les mêmes propriétés que le précédent, puisque dans l'état d'équilibre la puissance et le poids seront encore dans la raison réciproque des bras du même levier, ou des perpendiculaires CD et CE (fig. 14) tirées du point d'appui C sur les directions du poids et de la puissance (36): cette espèce de levier que l'on nomme *coudé* ou *recourbé*, se rencontre fréquemment dans les machines.

Fig. 12, 13 et 14.

Un levier coudé ou recourbé, c'est-à-dire, qui fait un angle au point d'appui, a les mêmes propriétés qu'un levier droit.

Neuvième conséquence.

45. Il suit de tout ce que l'on vient de dire, qu'une puissance médiocre pourra soutenir en équilibre un poids considérable, pourvu qu'elle puisse gagner par la longueur de son levier l'avantage que le poids perdra

Une puissance médiocre peut soutenir en équilibre, à l'aide d'un levier, un poids immense.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par la petitesse du sien ; c'est-à-dire pourvu que le produit de la puissance par son bras de levier, soit égal à celui du poids par le sien ; car si P exprime la puissance, Q le poids, a le bras de levier de la puissance et b celui du poids, on aura dans l'état d'équilibre $P:Q :: b:a$; par conséquent $P \times a = Q \times b$: or comme le produit de la puissance par son bras de levier exprime le *moment* de cette puissance, par la même raison le produit du poids par son bras de levier exprimera le moment du poids (3).

46. On fera attention que quoiqu'une puissance d'une livre soit capable de soutenir un poids de 100 liv., si le bras de levier de cette puissance est cent fois aussi grand que celui du poids, le point d'appui ne porte jamais que la valeur réelle du poids et de la puissance, sans rien avoir de commun avec leur moment. Ainsi, dans cet exemple, le point d'appui ne sera pressé que par 101 liv. qu'on peut supposer réunies dans un seul poids suspendu au point d'appui, qui est le centre de gravité commun de ceux qui sont aux extrémités du levier.

Dixième conséquence.

47. Puisque dans l'état d'équilibre les moments de la puissance et du poids donnent toujours cette équation $P \times a = Q \times b$; que le levier soit droit ou coudé, l'on voit qu'on pourra toujours trouver quel terme on voudra des quatre P, Q, a, b, pourvu que l'on connaisse les trois autres ; puisque si l'on dégage chaque lettre de la même équation, on aura $P = \frac{Qb}{a}$, $Q = \frac{Pa}{b}$; $a = \frac{Qb}{P}$, $b = \frac{Pa}{Q}$, ce qui fait voir :

48. Que lorsque les deux bras du levier sont donnés ainsi que le poids, on trouvera la puissance en divisant le moment du poids par le bras du levier de la puissance ;

49. Que si les bras du levier sont donnés et la puissance, on trouvera le poids en divisant le moment de la puissance par le bras de levier du poids ;

Que si la puissance et le poids sont donnés avec le bras de levier du poids, on trouvera celui de la puissance en divisant le moment du poids par la puissance ;

50. Que si la puissance et le poids sont donnés, ainsi que le levier de la puissance, on trouvera celui du poids, en divisant le moment de la puissance par le poids.

51. On peut ajouter que lorsqu'on connaît le poids et la puissance, ainsi que la longueur totale du levier, on trouvera dans cette longueur l'endroit où doit être placé le point d'appui pour que la puissance et le poids soient en équilibre ; car l'analogie du levier donne $P:Q :: b:a$, ou en composant $P + Q . Q :: a + b : a$, d'où l'on tire $a = \frac{(a+b)Q}{P+Q}$, ce qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

montre que pour avoir le bras de levier de la puissance, il faut multiplier le poids par toute la longueur du levier, et diviser le produit par la somme du poids et de la puissance.

52. Lorsque les deux bras de levier seront donnés, ainsi que la somme de la puissance et du poids, on pourra aussi trouver la puissance et le poids chacun en particulier; car si l'on veut connaître le poids Q, l'analogie composée $P+Q:Q::a+b:a$, donnera $Q=\frac{a(P+Q)}{a+b}$; ce qui fait voir que pour trouver le poids, il faut multiplier la somme du poids et de la puissance par le bras de levier de la puissance, et diviser le produit par toute la longueur du levier.

53. Il est aisé de voir que dans le 5^{e} cas, lorsqu'on aura le bras de levier de la puissance, on aura celui du poids, et que dans le 6^{e}, lorsqu'on aura le poids, on aura la puissance.

Onzième conséquence.

54. Il suit de-là que pour trouver le point d'appui, ou le centre de gravité commun de plusieurs poids donnés F, G, I, K suspendus à une verge AB, dès qu'on connaîtra la distance des points de suspension C et E aux extrémités de la même verge, on cherchera d'abord le point d'appui L, autour duquel les poids F et K seraient en équilibre (51), pour considérer ces deux poids réunis en un seul M; on cherchera de même le point d'appui ou le centre de gravité N des poids G et I, que l'on supposera aussi réunis en un seul O; ensuite on cherchera encore le centre de gravité P des deux poids M et O, qui deviendrait commun aux quatre poids F, G, I, K si le levier n'avait pas de pesanteur : mais comme nous lui en supposons une uniforme dans toute sa longueur, il faudra le diviser en deux également au point D, et supposer que le poids H en exprime la pesanteur (28). Alors on n'aura plus qu'à chercher dans la longueur DP le centre de gravité des poids H et Q, qui sera par exemple le point R, autour duquel les poids F, G, H, I, K seront en équilibre (*i*).

Pl. 2, Fig. 15. Trouver le point d'appui, ou le centre de gravité commun de plusieurs poids suspendus à un levier.

(*i*) Il serait fort long dans la pratique de composer ainsi deux à deux plusieurs poids pour trouver leur centre de gravité commun. On emploie pour cet objet des moyens plus prompts que je vais exposer succinctement, en donnant plus d'extension et de généralité aux notions contenues dans le texte.

Sur la composition et l'équilibre de plusieurs forces appliquées à divers points d'un corps solide.

On a considéré dans la note (*d*) plusieurs forces appliquées à un seul point, et montré que dans ce cas les forces ont nécessairement une résultante unique appliquée à ce point; qu'il suffit, pour que cette résultante remplace entièrement les composantes, qu'estimée dans un sens quelconque, elle soit égale à la somme des composantes estimées dans le même sens; et enfin que le point sera nécessairement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Douzième conséquence.

55. De même si l'on a un levier AC dont le point d'appui soit dans le milieu D; qu'à l'un des bras l'on ait suspendu un nombre des poids P égaux entre eux, qu'on suppose tous en équilibre avec le seul poids Q : ce dernier pourra être considéré comme étant composé d'autant de parties

---

en équilibre si la résultante est nulle. On va passer maintenant à des cas plus composés.

§ 1. Si l'on a plusieurs forces parallèles appliquées à divers points d'un corps solide, on voit d'abord sur le champ qu'en composant les forces deux à deux par le principe du levier, on trouvera une résultante unique, parallèle à la direction des composantes, égale à la somme de celles qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire, et agissant dans le sens de la plus grande somme. La valeur et le sens d'action de la résultante étant ainsi déterminés, elle remplacera les composantes sous ce rapport qu'elle tendra à transporter le corps suivant une direction quelconque, de la même manière que ces composantes tendaient à le faire. Mais un corps qui a de l'étendue n'est pas comme un point unique qui ne peut qu'être transporté dans une certaine direction : ce corps peut encore, sans changer de place, tourner sur lui-même, et il faut que la résultante puisse aussi remplacer les composantes quant à la tendance qu'elles peuvent avoir à faire prendre au corps ce genre de mouvement. C'est de cette dernière considération que dépend proprement la situation de la résultante, qui est la seule chose qui reste à connaître.

Quand plusieurs forces sont appliquées à divers points d'un corps solide, elles tendent en général à lui faire prendre en même temps un mouvement de translation et un mouvement de rotation. Mais si l'on imagine qu'un quelconque des points du corps devienne fixe, tout mouvement de translation deviendra impossible, et le corps ne pourra plus que tourner autour d'axes quelconques passant par le point fixé. La résultante remplacera complètement les forces appliquées au corps, quant aux mouvements de rotation qu'elles peuvent imprimer, si, imaginant un axe quelconque supposé fixe autour duquel le corps soit assujéti à tourner, cette résultante tend à faire tourner le corps autour de cet axe de la même manière que les composantes tendraient elles-mêmes à le faire.

Or le principe du levier fait voir que deux forces, appliquées aux extrémités d'une verge assujétie à tourner autour d'un axe fixe perpendiculaire aux directions de ces forces, sont en équilibre quand les produits de chaque force par sa distance à l'axe sont égaux entre eux. Il suit de-là que le produit d'une force par sa distance à un axe qui lui est perpendiculaire, ou, suivant l'expression reçue, le *moment* de la force par rapport à cet axe, est proprement la mesure de l'énergie avec laquelle cette force tend à faire tourner le corps auquel elle est appliquée autour de l'axe; en sorte que, pour imprimer un mouvement de rotation à un corps, on pourrait substituer indifféremment une force à une autre, pourvu que leurs moments par rapport à l'axe de rotation fussent égaux. Il en résulte que, pour que la résultante de plusieurs forces puisse les remplacer quant aux mouvements

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

R, S, T, V qu'il y a de poids P. Alors on aura AD:DI :: P:R, AD:DK :: P:S, AD:DL :: P:T, AD:DM :: P:V.

Or comme toutes ces proportions sont les mêmes, puisqu'elles ont

---

de rotation qu'elles peuvent produire, il faut que son moment par rapport a un axe quelconque de rotation soit égal à la somme des moments de ces forces.

D'après cela, supposons que P, P′, P″, etc., représentent plusieurs forces parallèles appliquées à divers points M, M′, M″, etc. d'un même corps solide, et nommons R leur résultante : on saura d'abord que cette résultante leur est parallèle, et que $R = P + P' + P'' +$ etc. De plus si l'on conçoit un axe quelconque AB perpendiculaire aux directions des forces, et qu'on représente par x, x', x'', etc. leurs distances pq, $p'q'$, $p''q''$, etc. à cet axe, et par r la distance de la résultante, l'énergie avec laquelle ces forces tendraient à faire tourner le corps autour de AB étant représentée pour chacune par les moments Px, $P'x'$, $P''x''$, etc., et pour la résultante par le moment Rr, on aura, puisque ce moment doit être égal à la somme des moments des composantes, $Rr = Px + P'x' + P''x'' +$ etc. ; d'où l'on conclura la distance de la résultante à l'axe AB. En calculant de la même manière sa distance à un autre axe quelconque perpendiculaire aux directions des forces, et qui ne soit point parallèle au premier, la situation de cette résultante sera entièrement connue. Il est aisé d'ailleurs de se convaincre que la situation de la résultante étant ainsi déterminée de manière à remplacer les composantes quant aux mouvements de rotation autour de deux axes quelconques pris au hasard, elles les remplacera également pour tout autre axe qu'on voudrait imaginer. Pl. A, Fig. 4.

Si l'axe fixe AB a été choisi de manière que les directions des forces ne soient pas toutes situées d'un même côté par rapport à cet axe, alors les unes, telles que P et P″, tendent à faire tourner le corps dans un sens, et les autres, telles que P′, à le faire tourner en sens contraire. Il faut alors que le moment de la résultante soit égal à la somme des moments des composantes qui tendent à faire tourner dans un sens, moins la somme des moments des composantes qui tendent à faire tourner en sens contraire. On donnera donc dans les formules précédentes des signes contraires aux distances x, x', x'', etc. pour les forces situées de différents côtés de l'axe, de même qu'on donne des signes contraires aux forces mêmes P, P′, P″, etc. quand elles tirent en sens opposé ; et il est aisé de voir qu'une force pour laquelle P et x seraient tous deux négatifs, tend à faire tourner dans le même sens que celle pour laquelle ces deux quantités sont positives, et doit fournir un moment de même signe. Pl. A, Fig. 5.

Pour que l'équilibre existe entre des forces parallèles P, P′, P″, etc. appliquées à divers points d'un corps solide, il faut d'abord, pour que le corps ne puisse prendre de mouvement de translation, qu'on ait $P + P' + P'' +$ etc. $= 0$. De plus il faut également qu'il ne puisse prendre de mouvement de rotation autour d'aucun axe, ce qui arrivera s'il ne peut point en prendre autour de deux axes quelconques non parallèles entre eux ; en sorte que nommant x, x', x'', etc. les distances des forces à un axe perpendiculaire à leurs directions, et y, y', y'', etc. les distances de ces mêmes forces à un autre axe semblable, l'équilibre sera entièrement assuré

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

chacune deux termes communs, il y aura même raison de AD à DI + DK + DL + DM, que de P à R + S + T + V = Q : d'où il suit que quand on connaîtra le bras de levier avec un des poids P, on aura toujours le

---

si l'on a encore les deux équations $Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.} = 0$, et $Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.} = 0$.

Il est aisé de vérifier sur un cas très-simple qu'il ne suffit point, pour que l'équilibre ait lieu, que la somme des forces soit nulle ; c'est celui où l'on a seulement deux forces P, P′ égales entre elles, agissant en sens contraire, mais non directement opposées. Dans ce cas, on a $R = P - P' = 0$, et par conséquent $r = \infty$; en sorte que les deux forces ont une résultante nulle placée à une distance infinie, c'est-à-dire n'en ont point. Toutefois l'équilibre ne subsiste pas, et effectivement les équations ci-dessus des moments ne se trouveront point satisfaites, puisqu'il n'y a aucun axe autour duquel les deux forces puissent avoir des moments égaux et de signe contraire. Le système dont on vient de parler se nomme un *couple*. M. Poinsot a donné une théorie ingénieuse des couples, sur laquelle il a fondé presque entièrement les lois de l'équilibre et de la composition des forces.

S'il arrivait dans un cas particulier que la somme des moments $Rr = Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}$ fût nulle, et que la résultante $R = P + P' + P'' + \text{etc.}$ ne le fût point, il s'ensuivrait que $r = 0$; et cela signifierait que la direction de la résultante coupe l'axe de rotation à partir duquel les distances x, x', x'', etc. sont comptées. On voit donc que la somme des moments des forces est toujours nulle par rapport à un axe quelconque passant par la direction de la résultante, et réciproquement ; et cela doit être, car si, connaissant la direction de cette résultante, on venait à rendre fixe un de ses points, on empêcherait nécessairement tout mouvement ; ce qui suppose que les composantes se feraient équilibre autour de tout axe passant le point fixé, et ne pourraient imprimer au corps aucun mouvement de rotation autour de ce point.

On peut remarquer que les distances des forces P, P′, P″ à l'axe AB sont égales aux distances de leurs points d'application M, M′, M″ au plan passant par cet axe et parallèle aux directions des forces. C'est même d'après cette considération qu'il est d'usage d'énoncer les théorèmes précédents, en disant que le moment de la résultante par rapport à un plan quelconque parallèle aux directions des forces est égal à la somme des moments des composantes par rapport à ce même plan ; qu'un système de forces parallèles ne peut être en équilibre qu'autant que la somme de leurs moments par rapport à un plan quelconque parallèle à leurs directions est nulle ; et enfin que la somme des moments des forces est toujours nulle par rapport à un plan quelconque passant par la direction de la résultante. De cette manière l'énonciation des propositions est un peu plus simple, mais moins propre à en faire saisir l'esprit.

La question précédente est résolue quand on a la grandeur et la direction de la résultante. Son point d'application est véritablement indéterminé, et peut-être pris dans l'un quelconque des points de sa direction appartenant au corps. On peut remarquer néanmoins que si l'on composait deux à deux les forces parallèles appliquées au corps par le principe du levier, en supposant toujours le point d'applica-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

poids Q; et que quand on aura le poids Q avec les bras de levier, on aura un des poids P.

56. Les mêmes choses arriveraient encore si l'on avait un demi-cercle

---

tion de chaque résultante partielle dans la ligne qui joint les points d'application des deux forces qu'elle remplace, on trouverait ainsi un point d'application pour la résultante totale qu'on est convenu de nommer *centre des forces parallèles*. Il a cela de remarquable que sa situation est indépendante de la direction des forces, et demeure la même quand ces forces, sans changer de grandeur et sans cesser d'être parallèles entre elles, prennent des directions différentes; d'où il suit que quand les forces tournent autour de leurs points d'application, la résultante tourne autour du centre des forces parallèles, et passe constamment par ce point. On voit par-là que, quelle que soit la direction des forces, elles ne peuvent jamais faire prendre au corps de mouvement de rotation autour du centre des forces parallèles, supposé fixe. C'est le point que Bélidor nomme dans l'article 54 *centre de gravité*, en supposant, au lieu de forces appliquées au corps, des poids suspendus à ses points.

De plusieurs forces situées dans un même plan, et appliquées à divers points d'un corps solide.

§ 2. Considérons maintenant plusieurs forces situées dans un même plan et appliquées à divers points d'un même corps solide. Les considérations employées dans le § 1 se reproduisent encore ici : la résultante des forces dont il s'agit doit d'abord remplacer complètement les composantes quant aux mouvements de translation qu'elles peuvent imprimer au corps; c'est-à-dire qu'étant estimée dans un sens quelconque, elle doit être égale à la somme des composantes estimées dans le même sens. De plus elle doit être capable de faire tourner le corps autour d'un axe quelconque supposé fixe, comme les composantes le feraient elles-mêmes. D'après ces conditions, il est aisé de déterminer dans chaque cas la grandeur et la situation de la résultante.

Pl. A, Fig. 6.

En effet, soient P, P′, P″, etc. plusieurs forces données dirigées dans un même plan, et traçons dans ce plan deux axes perpendiculaires entre eux, AX, AY. Soient α, α', α'', etc. les angles formés par les forces avec l'axe AX; nommons R la résultante, et a l'angle qu'elle forme avec le même axe : en représentant par X et Y la somme des forces estimées dans le sens des axes AX et AY, on aura $X = P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + \text{etc.}$, $Y = P\sin.\alpha + P\sin.\alpha' + \text{etc.}$ Puisque la résultante estimée dans le sens de chaque axe doit être égale à la somme des composantes estimées dans le même sens, on a d'abord les deux équations $R\cos.a = X$, $R\sin.a = Y$; d'où l'on conclut $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, et $\text{tang.}\ a = \frac{Y}{X}$, ce qui détermine la grandeur de la résultante, et l'angle qu'elle fait avec l'axe AX. On remarquera que la grandeur et la direction de la résultante sont les mêmes que si toutes les forces avaient été transportées parallèlement à elles-mêmes et appliquées à un seul point.

Pour trouver ensuite sa situation, il faut avoir égard comme dans le § 1 aux mouvements de rotation que les forces peuvent produire. Or si l'on imagine que le plan dans lequel les forces agissent, soit traversé dans un point quelconque tel que A par un axe fixe perpendiculaire à ce plan, les forces ne tendront plus qu'à faire tourner le corps autour de cet axe, et l'énergie de chacune pour opérer ce mouvement sera mesurée par le produit de la force par sa distance au point A, c'est-à-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pl. 3, Fig. 17. ABC situé verticalement, pouvant se balancer sur le centre D. Car si l'on divise le quart de cercle BC en un nombre de parties égales, pour sus-

---

dire par son moment pris par rapport à ce point. Le moment de la résultante, pris par rapport au même point, devra donc être égal à la somme de ceux des composantes; d'où il suit qu'en nommant p, p', p'', etc. les distances Ap, Ap', Ap'', etc. des forces au point A, et r la distance de la résultante au même point, on aura l'équation $Rr = Pp + P'p' + \text{etc.}$, laquelle servira à déterminer la distance à laquelle cette force doit passer du point A, et achevera de la faire entièrement connaître. On démontrerait d'ailleurs que cette équation ayant lieu par rapport au point quelconque A, a lieu aussi par rapport à tout autre point du plan qu'on voudrait choisir.

Dans ces dernières formules, les forces sont censées n'avoir point de signe. On fait les cosinus et les sinus positifs quand les forces tendent à augmenter les ordonnées positives, et négatifs dans les cas contraires. On donne aux distances p, p', p'', etc. des signes contraires pour les forces qui tendent à faire tourner le corps en sens contraire autour de l'axe fixe.

Pour que l'équilibre existe entre les forces qu'on vient de considérer, il faut d'abord qu'elles ne puissent communiquer au corps aucun mouvement de translation, ou que leur résultante soit nulle. Mais la condition $R = 0$ ne peut avoir lieu qu'autant qu'on a séparément $X = 0$ et $Y = 0$. L'existence de l'équilibre comporte donc d'abord celle des deux équations $P \cos. \alpha + P' \cos. \alpha' + \text{etc.} = 0$, $P' \sin. \alpha + P' \sin. \alpha' + \text{etc.} = 0$. Elles ne suffisent point pour l'assurer, puisqu'elles subsisteraient aussi dans le cas où les deux grouppes de composantes parallèles à chaque axe se réduiraient à deux couples, cas auquel l'équilibre n'a pas lieu en général. Il faut encore, pour établir complètement l'équilibre, que les forces ne puissent procurer aucun mouvemeut de rotation au corps autour d'un axe quelconque perpendiculaire au plan dans lequel elles sont situées, ce qu'on exprime par l'équation $Pp + P'p' + \text{etc.} = 0$, laquelle, réunie aux deux précédentes, assure l'existence de l'équilibre, lors même que les deux grouppes de forces se réduisent à deux couples.

On peut remarquer ici, comme dans le § 1, que l'équation $Rr = Pp + P'p' + \text{etc.} = 0$, peut avoir lieu sans que R soit nul. Il faut en conclure alors que $r = 0$, ou que la résultante passe par le point par rapport auquel on a pris les moments. On voit donc que la somme des moments des forces est nulle par rapport à un point quelconque pris sur la direction de la résultante, ou que les forces se font équilibre autour d'un quelconque de ces points supposé fixe, comme cela doit être effectivement.

De plusieurs forces dirigées d'une manière quelconque, et appliquées à divers points d'un corps solide.

§ 3. A l'égard du cas le plus général, celui où l'on aurait plusieurs forces dirigées d'une manière quelconque et appliquées à divers points d'un corps solide, je renverrai aux traités élémentaires de mécanique pour la démonstration des formules servant à la détermination de la résultante, et à l'expression des conditions d'équilibre. Je remarquerai seulement ici que la question dont il s'agit se ramène aisément aux deux précédentes. En effet, une force pouvant toujours être censée appliquée en un point quelconque de sa direction, on peut imaginer toutes les forces prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent un même plan qu'on supposera lié avec le corps sur

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pendre à chaque point de division E, F, G, H des poids égaux, qu'on suppose en équilibre avec le poids Q; les lignes DI, DK, DL, DM exprimeront les bras de levier qui répondent aux poids P : mais ces bras de levier sont égaux aux sinus EN, FO, GX, HY des arcs BE, BF, BG, BH; l'on peut donc dire qu'il y a même raison du sinus total DA à la somme des sinus des arcs à l'extrémité desquels les poids P sont suspendus, que d'un des poids P à la puissance Q qui les soutient en équilibre.

Treizième conséquence.

Pl. 2, fig. 17. Prenant le diamètre d'un cercle pour un levier dont le point d'appui serait au centre, trouver le rapport de la puissance au poids exprimé par un quart de la circonférence.

57. Si l'on attribue une pesanteur uniforme au quart de circonférence BC, et qu'on le suppose divisé en des arcs égaux infiniment petits, chacun de ces arcs pourra être pris comme un poids qui aurait pour bras de levier le sinus qui lui répond : d'un autre côté la puissance Q pourra être considérée comme composée d'autant de petites puissances qu'il y a de points pesants dans le quart de circonférence BC, et chacune de ces puissances aura toujours pour bras de levier le rayon DA; par conséquent, on aura autant de bras de levier égaux au rayon qu'il y a de points dans le demi-diamètre DB, qui répondront à autant de sinus dans le quart de cercle DBC. Or, prenant la somme des bras de levier de part et d'autre, celle des poids et des puissances qui leur font équilibre, *il y aura même raison du quarré du rayon* AD *à la somme de tous les sinus, c'est-à-dire à la superficie du quart de cercle* BDC, *que de la pesanteur du quart de circonférence* BFC *à la puissance* Q.

58. Comme la puissance Q fait le même effet que ferait la pesanteur du quart de circonférence BFC réuni à l'extrémité C du rayon DC, il suit que lorsqu'on aura un poids suspendu à l'extrémité d'un diamètre, et un autre poids égal répandu uniformément sur le quart de cercle adjacent, *la puissance qui soutiendra le premier sera à celle qui sou-*

---

lequel elles agissent, et prendre pour leurs points d'application ceux où elles coupent ce plan. On les décomposera ensuite chacune à ces points suivant deux droites, l'une perpendiculaire au plan, et l'autre qui sera la projection de la force sur ce plan. Les forces données se trouveront alors remplacées par un grouppe de forces parallèles entre elles, et un autre grouppe de forces agissant toutes dans un même plan. On déterminera par le § 1 la résultante ou les conditions d'équilibre du premier grouppe, et par le § 2 la résultante ou les conditions d'équilibre du second. Si les résultantes des deux grouppes se rencontrent, on pourra ensuite les composer en une force unique, laquelle sera la résultante des forces données. Si elles ne se rencontrent point, alors les forces données ne pourront être remplacées par une résultante unique, et se trouveront seulement réduites à deux forces ayant des directions perpendiculaires entre elles. L'équilibre ne pourra exister entre les forces données qu'autant qu'il existera séparément dans chacun des grouppes par lesquels on les aura remplacées.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tiendra le second, comme le quarré du rayon est à la superficie du quart de cercle, ou comme 14 *est à* 11. Si le poids dont nous parlons, au lieu d'être répandu sur un quart de circonférence, l'était sur une demi-circonférence BCZ dont le diamètre fût vertical, il en serait de même (*k*).

Pl. 2, Fig. 18. Propriété du levier du second genre.

59. Si l'on a un levier AB dont le point d'appui soit à l'extrémité A, et que de deux puissances appliquées aux points D et B, l'une tire selon la direction DQ et l'autre selon la direction BP en sens contraire, ces deux puissances seront en équilibre si elles sont en raison réciproque des perpendiculaires AG et AH tirées du point d'appui A sur leurs lignes de direction : faisant le parallélogramme EF, le côté CF exprimera la force de la puissance P, et la diagonale CD celle de la puissance Q dans l'état d'équilibre ; et comme dans le triangle CFD, les côtés CF et CD sont dans la raison des sinus de leurs angles opposés CDF = ACH, et DFC = ACG, on aura CF : CD :: AH : AG, ou bien P : Q :: AH : AG.

Si le point C s'éloignait de plus en plus à l'infini des points D et B, ensorte que les lignes de direction BC et CH pussent être regardées comme parallèles entre elles, ainsi que dans l'article 37, les puissances P et Q restant en équilibre seront toujours dans la raison réciproque des perpendiculaires AH et AG ; et lorsque les directions de ces puissances

Figures 18 et 19. seront perpendiculaires au levier, AG devenant égale à AB et AH égale à AD, on aura encore (dans la figure 19) P : Q :: AD : AB.

Figure 20. Par conséquent si la puissance P soutient un poids Q à l'aide d'un levier AB *du second genre* que je suppose horizontal, et que le poids soit dans le milieu D, cette puissance ne soutiendra que la moitié du poids, puisque AD est la moitié de AB.

Donc si le poids, au lieu d'être dans le milieu du levier, était au point

---

Rectification de l'art. 57.

(*k*) Cette conséquence et l'analogie de l'art. 57 sur laquelle elle est fondée sont fausses, et ne sont point déduites exactement de ce qui précède. Pour rectifier ce passage, je remarquerai qu'il est démontré dans tous les traités élémentaires de mécanique qu'en nommant r le rayon d'un cercle, c la corde d'un arc et s la longueur de cet arc, la distance de son centre de gravité au centre du cercle est exprimée par $\frac{rc}{s}$ (voy. ci-dessous l'art. 107 et la note (*o*)), ou en observant que le sinus est la moitié de la corde de l'arc double, par $\frac{r.\sin.s}{s}$. Par conséquent si dans

Pl. 2, Fig. 17. la fig. 17 on veut suspendre en A un poids qui fasse équilibre autour du centre D au poids d'un arc quelconque compté à partir du point C, il faudra que ce poids soit à celui de l'arc :: $\frac{r\sin.s}{s} : r$, ou :: sin. $s : s$; d'où l'on voit que le sinus d'un arc suspendu à une extrémité A du diamètre fait équilibre à l'arc même compté à partir de l'autre extrémité C. On conclut de-là que le poids du quart de circonférence BFC est au poids Q qui lui ferait équilibre en A, comme la longueur de ce quart de circonférence est au rayon, proportion plus simple que celle de Bélidor, et avec laquelle la sienne ne s'accorde point.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

C plus près de A que de B, la puissance sera moins chargée que dans le cas précédent, puisque AC est moindre que la moitié de AB.

60. Quand on a un levier AB auquel est suspendu un poids E en un point C, et qu'on a quelque raison pour le réduire à un autre point D, il faut le multiplier par le bras de levier AC qui répond au point d'appui A, et diviser le produit par la distance AD : le quotient donnera la valeur du poids F, qui fera le même effet en D par rapport à la puissance P que le poids E faisait en C; parce que le *moment* de la puissance qui soutiendra l'extrémité A du levier sera toujours le même, puisqu'ayant supposé $\frac{AC \times E}{AD} = F$, on aura $P \times AB = AC \times E = AD \times F$. Ainsi on pourra quand on voudra réunir en un même point plusieurs poids séparés, en multipliant chacun de ces poids par sa distance à une même extrémité du levier, et en divisant la somme des produits par la distance qu'il y a du point donné à la même extrémité.

Pl. 2, Fig. 21. Un poids étant suspendu à un levier, on pourra le réduire pour être placé à telle distance que l'on voudra du point d'appui.

61. Si la puissance était appliquée à un point quelconque D du levier AB, et que le poids fût à l'extrémité B, on aurait *un levier du troisième genre* auquel on peut appliquer tout ce que nous venons de dire dans les articles 59 et 60, en nommant *puissance* ce que nous avons nommé *poids*, et en nommant *poids* ce que nous avons nommé *puissance*.

Figure 22. Propriété du levier du troisième genre.

62. Comme c'est la même chose qu'un levier AB auquel est suspendu un poids G soit soutenu par deux puissances appliquées à ses extrémités, ou par deux appuis C et D; il suit que la partie du poids qui pressera l'appui C sera à celle qui pressera l'appui D comme EB est à EA, et que ces deux appuis seront autant pressés ensemble que le serait un plan horizontal qui soutiendrait le poids G.

Figure 23. Un levier posé sur deux appuis presse ces mêmes appuis par tout le poids dont ils sont chargés.

Si l'on veut avoir égard à la pesanteur du levier, il faudra la supposer réunie en un poids H suspendu à son centre de gravité F (28); et supposant que le poids G soit réuni au poids H pour n'en composer qu'un seul I, il sera encore vrai de dire que la somme des deux pressions sur les appuis C et D causées par la pesanteur du poids et celle du levier, sera la même que celle que pourrait causer le poids I posé sur un plan horizontal.

63. Si le levier AB soutenu par les appuis C et D était croisé par un second levier FG, à un point quelconque E de la longueur AB, et qu'aux extrémités F et G il y eût deux poids P et Q en équilibre, les appuis C et D seraient autant chargés que si l'on avait suspendu au même point E du levier AB un poids H, égal à la somme des poids P et Q jointe à la pesanteur du levier FG. Par conséquent la pression qui sera partagée sur les deux appuis sera égale à celle que pourrait causer sur un plan horizontal un poids égal à la pesanteur de tout ce que ces deux appuis portent ensemble; ce qui serait toujours vrai quand le levier AB, au lieu

Figure 24.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'être croisé par un seul EG, le serait par un aussi grand nombre que l'on voudra.

Des Leviers composés.

Les rouets et les lanternes dans les machines faisant naître des *leviers composés*, il convient de les faire connaître, pour l'intelligence de ce que nous donnerons par la suite.

Pl. 2, Fig. 25.

64. AB est une verge à laquelle sont attachées deux branches AC et BD, formant des angles droits CAB et DBA renfermés dans un même plan, que nous supposerons horizontal; c'est l'assemblage de plusieurs verges inflexibles, comme AC et BD, unies à une seule AB, que je nomme *levier composé*, dont on aura le point d'appui E en tirant une ligne droite de C en D (*l*).

Si l'on a deux poids suspendus aux extrémités C et D, ou deux puissances P et Q qui appuyent de haut en bas sur les mêmes extrémités selon des directions verticales, je dis que ces puissances seront en équilibre autour du point E, si elles sont dans la raison réciproque des bras de levier AC et BD.

Tout levier composé peut se réduire à un levier simple; ainsi l'analogie de l'un et de l'autre est la même.

Pour le prouver, considérez qu'on peut regarder les puissances P et Q comme agissant sur les extrémités de la ligne CD, laquelle pouvant être prise pour un levier simple du premier genre, on aura dans l'état d'équilibre P : Q :: ED : EC. Or comme les triangles semblables ACE et BDE donnent ED : EC :: BD : AC, mettant dans la proportion précédente BD et AC à la place de ED et EC, on aura P : Q :: BD : AC.

Figure 27.

Si les bras AC et BD, que je suppose toujours renfermés dans un même plan horizontal, au lieu de former des angles droits avec la verge AB, font des angles quelconques CAB et ABD, il faudra, des extrémités

---

Éclaircissement sur l'article 64 du texte.

(*l*) Les commençants peuvent ne pas voir d'abord pourquoi l'auteur veut que le point d'appui du levier soit en E. Il faut faire attention que l'existence de l'équilibre tient à ce que la résultante des deux poids suspendus en C et D passe par le point d'appui du système, et soit détruite par la résistance de ce point. Mais la résultante de deux forces parallèles est située dans le plan des directions de ces forces, et par conséquent ici dans le plan vertical passant par la ligne CD. Donc il faut nécessairement que le point d'appui soit situé sur cette ligne. Comme il faut ensuite que ce point soit situé sur AB, il sera nécessaire que les valeurs des poids P et Q soient réciproques aux distances CE et DE, ou AC et BD.

Sur ce que l'auteur nomme *leviers composés*.

Les appareils que l'auteur considère dans cet article, et qu'il nomme *leviers composés*, sont formés par plusieurs verges assujéties solidement entre elles, et qui ne peuvent que tourner autour d'un axe fixe. Les systèmes de ce genre se rencontrant continuellement dans les machines, j'ai cru qu'il était utile d'en présenter la théorie d'une manière plus simple, plus générale, et plus complette que l'auteur ne l'a fait: on la trouvera dans la note suivante.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

C et D, abaisser les perpendiculaires CF et DG; on aura encore les triangles semblables CFE et DGE, qui réduisent le levier composé CABD à un levier simple CD. Pl. 2, Fig. 27.

Les poids ou puissances qui agissent aux extrémités C et D pouvant être considérés comme appliqués au levier CD, il suit que dans les premier et second cas le point d'appui E sera chargé d'un poids égal à ces deux puissances, qu'on pourra par conséquent supposer réunies à leur centre de gravité commun qui est en ce point.

65. Si la verge AB était accompagnée de trois branches AC, FG, BD, aux extrémités desquelles il y aurait trois puissances R, P, Q, et qu'on voulût avoir le point E autour duquel elles seraient en équilibre, il faudrait tirer les lignes CD et CG pour avoir les points M et N, dont le premier sera l'appui du levier composé CAFG, ou du simple CG, et le second N l'appui du levier composé CABD, ou du simple CD. Figure 26.

Comme la puissance R soutient elle seule l'action des deux autres P et Q, il faut la supposer divisée en deux parties x et y: on aura dans l'état d'équilibre $x:P::FG:AC$, et $y:Q::BD:AC$; ces deux analogies serviront pour trouver la puissance R, lorsque les deux autres P et Q seront données ainsi que les bras de levier, ou pour trouver les puissances P et Q lorsque la troisième R sera donnée. Comme il est aisé d'avoir les valeurs de x et de y, on aura par conséquent les puissances qui agiraient aux extrémités des leviers simples CG et CD, ainsi que les poids K et L qui expriment la somme de ces puissances réunies à leurs centres de gravité M et N. Comme on connaîtra aussi la ligne MN, elle pourra être considérée comme un levier, dont on aura le point d'appui E par l'article 51.

66. Si l'on prolonge dans les trois figures précédentes les extrémités de la verge AB prise pour *axe*, afin d'avoir AS et BT que nous regarderons comme des *tourillons* posés sur les appuis H, I; ces appuis tiendront lieu de celui que nous avons supposé au point E, et partageront entre eux la pression que peut causer la somme des poids et des puissances appliqués au levier, parce que l'axe AB peut être regardé comme un levier croisé par plusieurs autres, ainsi que dans l'article 63. Fig. 25, 26 et 27.

Les appuis qui soutiennent les tourillons d'un arbre ou essieu, partagent entre eux la pression que peuvent causer les poids suspendus à l'essieu.

Nous venons de supposer que les parties des leviers composés étaient renfermées dans un plan horizontal, mais tout ce que nous avons dit subsistera encore si ce plan est vertical, pourvu que les puissances qui sont appliquées aux extrémités des leviers agissent selon des directions perpendiculaires au même plan : dans ce cas la pression que soutiendront les appuis se fera selon une direction horizontale.

67. On fera attention qu'un levier composé renfermé dans un plan horizontal ou vertical, pouvant toujours se réduire à un levier simple CD, on peut supposer que ce dernier, au lieu d'être oblique à l'axe AB, Figure 25.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le coupe à angles droits, comme fait OX. Car pourvu que les bras EO et EX soient dans le rapport de AC et de BD, et que les puissances qui sont appliquées aux extrémités O et X soient les mêmes que P et Q, elles seront encore en équilibre autour du point E, parce qu'il est indifférent qu'elles agissent sur un levier dont les bras soient séparés ou placés sur un même alignement. C'est pourquoi, dans le calcul des machines, on pourra toujours regarder un levier composé comme s'il était simple; alors, au lieu de deux appuis, on n'en supposera qu'un, où serait réunie la pression que cause la somme des puissances.

Examen de la pression causée par un levier situé verticalement.
Planche 3.
Figure 29.

68. Par exemple je suppose que MCDN représente le profil d'un *palier* ou d'une *boîte*, dans laquelle tourne un tourillon appartenant à un levier AB situé verticalement, dont les bras, qui pourraient être séparés et répondre à un axe, sont supposés sur un même alignement. Il est constant que si ce levier est poussé par deux puissances P et Q en équilibre entre elles, et qui agissent selon des directions perpendiculaires, leur appui commun sera au point C; c'est-à-dire que le palier sera pressé selon une direction horizontale DC par une force égale à la somme des deux puissances. D'autre part, cette boîte sera aussi pressée de haut en bas selon une direction verticale, par la pesanteur propre du levier et de tout ce que porte le palier. On fera attention que cette seconde pression n'est point diminuée par la première, parce que l'action des puissances P et Q ne détruit en rien celle du poids du levier. Pour en être convaincu, remarquez que si un corps dur et inflexible est pressé entre deux surfaces verticales fort polies, et que cette pression se fasse selon une direction horizontale passant par le centre de gravité du corps, il n'est pas possible d'empêcher que ce corps ne tombe, quand même la pression serait infinie; car l'action étant égale à la réaction (7), ces deux surfaces se repousseront mutuellement avec des forces égales qui se détruiront, et la pesanteur du corps ne rencontrant rien qui lui soit opposé, il descendra avec la même liberté que s'il était isolé.

Ce que l'on vient de voir s'applique de soi-même aux roues verticales qui donnent le mouvement aux machines, lorsque l'arbre de ces sortes de roues sert d'essieu à un *rouet*. Alors le courant peut être pris pour la puissance Q, et le rayon de la roue pour son bras de levier. De même l'effort que les dents du rouet font contre les *fuseaux* de la *lanterne* pourra être pris pour la puissance P, et le rayon du rouet pour son bras de levier: pour cela il faut que la lanterne réponde au sommet du rouet, afin que les deux puissances soient dans un même plan. Ainsi l'on voit que la puissance Q aura non-seulement à surmonter la résistance que lui opposent les fuseaux de la lanterne, mais encore le *frottement* qui naîtra de la pression qui se fera aux points C et E: aussi je ne parle présentement de ces sortes de pressions que pour mettre le lecteur en état

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'entendre ce que j'enseignerai dans le second chapitre sur la manière de calculer les frottements.

69. Lorsque le cercle d'un rouet ou d'une lanterne est situé horizontalement, il faut de nécessité que l'arbre LN qui lui sert d'essieu soit vertical et qu'il y ait deux pivots, l'un qui tourne en bas dans une crapaudine N, et l'autre en haut dans un collier K. Le premier a deux pressions qui agissent à-la-fois : l'une qui est causée par le poids de l'arbre, se fait au fond de la crapaudine; et l'autre vient de ce que la puissance motrice et celle qui résiste tendent à écarter de la verticale l'arbre qui sert d'essieu, et l'écarteraient en effet si le bord de la crapaudine et celui du collier ne retenaient les pivots.

Manière de considérer les leviers composés, pour le rapporter au calcul des machines. PLANCHE 3. FIGURE 28.

Si l'on suppose l'arbre LM croisé par un levier AB, poussé à ses extrémités par deux puissances P et Q selon des directions perpendiculaires et horizontales, ou par une seule puissance R qui les vaudrait toutes deux, les appuis de l'arbre seront pressés selon une direction horizontale RC, avec toute la force dont la puissance R sera capable. On pourra regarder cette pression comme étant réunie contre le bord de la crapaudine pour n'en considérer qu'une seule, qui sera toujours la même, soit que le bras de levier de la puissance P se rencontre sur l'alignement de la puissance Q, ou plus haut, ou plus bas, comme est ici GD, pourvu qu'il soit dans le même plan vertical (67).

Prenant le bras de levier GD pour le rayon d'une roue à la circonférence de laquelle serait appliquée la puissance P, qu'on suppose agir sans bouger de sa place pour faire tourner cette roue, on pourra regarder le bras de levier CB comme le rayon d'un rouet, dont les dents s'engrènent au point B avec les fuseaux d'une lanterne : alors la puissance Q exprimera la résistance que les fuseaux de la lanterne opposeront aux dents du rouet.

70. Si l'on avait un autre levier EF poussé à son extrémité F par une puissance T, selon une direction horizontale et perpendiculaire TF, et que ce levier fût repoussé par une seconde puissance S, selon une direction opposée SI, parallèle à TF; il faudrait nécessairement, pour que ces deux puissances fussent en équilibre, qu'il y eût un point d'appui en E tenant lieu d'une troisième puissance V, qui pousserait l'extrémité E du levier selon une direction VE, opposée à SI et parallèle à TF. Alors, comme il s'agit d'un levier du second genre, ces puissances seront dans la raison réciproque de FE à EI (59). Ainsi il sera aisé d'avoir la puissance V, ou la pression qui se fera contre le bord de la crapaudine.

Si le bras de levier OY était égal à EI, et que la puissance S agît à l'extrémité Y de la même façon qu'elle fait en I, ce que nous venons de dire subsisterait également. Alors on pourra prendre le levier OY pour le rayon d'une roue qui s'engrène au point Y avec une lanterne, et la puis-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sance S pour la résistance que cette lanterne opposera aux dents du rouet. En ce cas, le bras de levier EF pourra exprimer le rayon d'un autre rouet, à la circonférence duquel serait appliquée, sans bouger de sa place, la puissance motrice.

Remarque sur la situation la plus avantageuse des lanternes dont l'axe est vertical.

PLANCHE 3. FIGURE 28.

71. Nous avons supposé dans le premier cas que les bras de levier ou rayons CB ou GD étaient renfermés dans le même plan, afin que l'arbre se trouvât entre les deux puissances P et Q; et dans le second cas, que les puissances S et T agissaient aussi sur le même plan, sans que l'arbre fût entre deux: sur quoi il est à remarquer que, quand de part et d'autre, les résistances que nous avons supposées en B et I seraient égales entre elles, de même que les puissances P et T, la puissance R serait toujours plus grande que la puissance V. D'où il suit que dans le second cas la pression ou le frottement contre les bords de la crapaudine sera toujours moindre que dans le premier, et qu'il y a plus d'avantage à placer la lanterne qu'on a supposée en B du côté de A, ou de la puissance P, que si l'arbre était entre deux.

A quoi se réduit la pression causée par deux puissances qui n'agissent pas dans le même plan vertical.

FIGURE 30.

72. Il nous reste un troisième cas, qui est lorsque les bras de levier de la puissance et du poids ne sont pas dans le même plan vertical, et qu'ils composent ensemble un angle ABC qui aboutit au centre du cercle B, que nous supposerons être celui de l'arbre LM. Si les puissances P, Q agissent selon des directions perpendiculaires et parallèles à l'horizon sur les extrémités A et C des bras du levier recourbé ABC, la première en poussant de P en A, et la seconde de Q en C, elles tendront l'une et l'autre à attirer le cercle B selon une direction composée BR. Ainsi on peut supposer que les puissances P et Q agissent immédiatement sur le centre du cercle B, en conservant leurs mêmes directions, et qu'elles forment l'angle DBE égal à CBA. Prenant donc DB pour exprimer la puissance P, et EB pour exprimer la puissance Q, et achevant le parallélogramme DE, la diagonale BF exprimera une troisième puissance égale au résultat du concours des deux précédentes, et par conséquent la pression contre le bord de la crapaudine; sur quoi j'ajouterai que tout ce que nous venons de dire pour ce troisième cas aura encore lieu quoique les bras de levier soient séparés, et que l'arbre soit horizontal au lieu d'être vertical (*m*).

De plusieurs forces appliquées à un corps solide qui ne peut que tourner autour d'un axe fixe.

(*m*) J'ai exposé dans la note (*i*) les lois de l'équilibre et de la composition des forces appliquées à un corps solide entièrement libre: je vais considérer ici des forces appliquées à un corps solide qui serait assujéti à une ligne ou axe fixe, en sorte qu'il ne pourrait se mouvoir qu'en tournant autour de cet axe, et examiner successivement les cas qui peuvent se présenter relativement aux directions des forces par rapport à l'axe fixe.

Les forces sont

§ 1. Supposons d'abord les forces parallèles à l'axe fixe AB auquel le corps est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Des leviers contigus qui agissent les uns sur les autres.

73. La communication du mouvement dans les machines se faisant par une répétition de leviers qui agissent successivement les uns sur les

---

assujéti. Si les forces appliquées à ce corps se font mutuellement équilibre, l'axe AB ne supportera aucun effort. Si ces mêmes forces ne se font pas équilibre entre elles, l'équilibre ne pourra subsister qu'en vertu des efforts qui auront lieu contre l'axe fixe. Dans ce cas, les forces auront une résultante R égale à leur somme, et parallèle à AB (voy. la note (*i*), § 1). S'il arrivait que la force R se confondît avec AB, alors son unique effet serait de tirer le corps dans le sens de cet axe, et si le mouvement ne peut avoir lieu, l'obstacle qui s'y oppose souffre une pression égale à R.

parallèles à l'axe fixe.
Pl. A, fig. 7.

Si la résultante R ne se confond point avec AB, non-seulement elle tire le corps dans le sens de l'axe fixe, mais de plus elle tend à faire pencher cet axe du côté où elle est située; de manière que si on considère l'axe comme une verge retenue dans deux anneaux placés aux points A et B, ces anneaux supporteront des pressions équivalentes à des forces telles que μ, ν, perpendiculaires à AB, et situées dans le plan passant par AB et par la force R. Il s'agit, connaissant la résultante R, de déterminer la pression qui a lieu dans le sens de l'axe, que je représenterai par λ, aussi bien que les pressions μ et ν supportées par les points A et B perpendiculairement à l'axe.

Pour y parvenir, on remarquera qu'en appliquant au système des forces égales et directement opposées aux forces λ, μ et ν, lesquelles détruiront les pressions qui ont lieu contre les points fixes, on pourra, sans altérer l'équilibre, cesser de considérer ces points comme fixes, et on n'aura plus qu'un corps entièrement libre soumis à l'action des quatre forces R, λ, μ et ν, toutes situées dans un même plan. Appliquant donc ici les règles du § 2 de la note (*i*), on verra d'abord que les quatre forces estimées suivant une direction quelconque devant faire une somme nulle, on a $\lambda = R$, $\mu = \nu$; en sorte que l'effort exercé en D dans le sens AB est encore ici égal à R, et que les pressions souffertes par les points A et B sont toujours égales entre elles, quelles que soient les positions de ces points. De plus la somme des moments des forces par rapport à un point quelconque pris dans leur plan, au point B par exemple, doit être nulle; ce qui donne $R.Cr = \mu.AB$, d'où $\mu = \nu = R.\frac{Cr}{AB}$, d'où il suit que les pressions exercées en A et B sont à la force R, comme la distance de cette force à l'axe est à l'intervalle AB.

§ 2. Supposons maintenant les forces dirigées dans un même plan perpendiculaire à l'axe fixe : soit AB cet axe qui passe dans deux anneaux aux points A et B, et MN le plan dans lequel les forces agissent suivant des directions quelconques, qui est perpendiculaire à l'axe, et qui le coupe au point C. Dans le cas dont il s'agit, les forces ne tendent plus à transporter le corps dans le sens de l'axe, mais seulement à le faire tourner autour de cet axe. Comme l'axe n'oppose aucune résistance à ce mouvement, l'équilibre, d'après ce qu'on a vu dans le § 2 de la note (*i*), ne pourra subsister qu'autant que la somme des moments des forces pris

Les forces sont dans un même plan perpendiculaire à l'axe fixe.
Pl. A, fig. 8.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

autres, nous allons établir une règle générale qui nous servira par la suite à faciliter le calcul de toutes les machines composées de roues et de lanternes.

---

par rapport au point C sera nulle, ou que leur résultante passera par ce point. Soit R cette résultante, qu'on pourra déterminer en supposant toutes les forces appliquées parallèlement à elles-mêmes au point C. L'effort qu'elle exercera sur l'axe se partagera entre les points A et B, de manière que ces points souffriront des pressions équivalentes à des forces μ, ν, parallèles à R; et comme on peut les considérer comme deux forces parallèles agissant aux extrémités d'un levier, dont la résultante serait la force R, on aura d'après le principe du levier $\mu = R.\frac{CB}{AB}$, $\nu = R.\frac{CA}{AB}$.

Si la résultante R des forces appliquées dans le plan MN était nulle, l'axe fixe ne supporterait aucun effort. C'est ce qui arrive toutes les fois que les forces sont distribuées symétriquement deux à deux autour de cet axe.

Les forces sont situées dans des plans différents, tous perpendiculaires à l'axe fixe. Pl. A, fig. 9.

§ 3. Si les forces, sans cesser d'être perpendiculaires à l'axe fixe, sont situées dans des plans différents, il n'y aura, comme dans le cas précédent, aucun effort exercé dans le sens de l'axe fixe, et les forces tendront uniquement à faire tourner le corps autour de lui. Pour qu'elles se fassent équilibre, il faut encore et il suffit que la somme de leurs moments pris par rapport à l'axe soit nulle. Pour vérifier si cette condition est remplie, on pourra supposer que tous les plans perpendiculaires à l'axe qui contient les forces, sont transportés parallèlement à eux-mêmes de manière à se confondre en un seul qui contiendra toutes les forces. Déterminant alors leur résultante, comme dans le § précédent, si elle passe par l'axe, on sera certain que l'équilibre avait lieu avant que les forces n'eussent été transportées de cette manière, et réciproquement, si l'équilibre avait lieu, la résultante obtenue ainsi passera nécessairement par l'axe.

A l'égard des pressions souffertes par les deux points fixes dans lesquels l'axe est arrêté, la manière la plus simple de les déterminer est d'imaginer qu'ayant fait passer par ces points fixes A et B deux plans MM, NN, perpendiculaires à l'axe et parallèles aux directions des forces, chacune de ces forces a été remplacée par deux autres dirigées suivant ses projections sur les plans MM et NN: on n'aura plus alors dans le système que des forces agissant dans les plans MM et NN, et prenant dans chacun de ces plans leurs résultantes, on connaîtra les pressions que les points A et B supportent. En représentant par P, P', P'', etc. les forces données, par x, x', x'', etc. les distances au point A des plans dans lesquels elles sont situées, et par l l'intervalle AB, on voit d'abord par le principe du levier que les composantes des forces dans le plan MM seront respectivement $P\frac{l-x}{l}$, $P'\frac{l-x'}{l}$, etc., et que les composantes dans le plan NN seront $P\frac{x}{l}$, $P'\frac{x'}{l}$, etc. De plus, si l'on représente par α, α', α'', etc. les angles que les forces P, P', P'', etc. ou leurs composantes forment avec un certain plan fixe passant par l'axe AB; par μ la pression supportée par le point A, et par a l'angle qu'elle forme avec le même plan fixe; par ν la pres-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Voici plusieurs leviers droits ou coudés BCA, AED, DGF, qui ont leurs appuis aux points C, E, G placés dans un plan vertical, et dont les bras contigus GD et DE, EA et AC se conviennent en lignes droites et Pl. 3, Fig. 31.

---

sion supportée par le point B, et par b l'angle qu'elle forme avec ce plan; on aura, en appliquant ici les règles du § 2 de la note (*i*) pour la composition des forces situées dans un plan,

$$\mu \cos. a = P\frac{l-x}{l}\cos.\alpha + P'\frac{l-x'}{l}\cos.\alpha' + \text{etc.} \qquad \nu \cos. b = P\frac{x}{l}\cos.\alpha + P'\frac{x'}{l}\cos.\alpha' + \text{etc.}$$

$$\mu \sin. a = P\frac{l-x}{l}\sin.\alpha + P'\frac{l-x'}{l}\sin.\alpha' + \text{etc.} \qquad \nu \sin. b = P\frac{x}{l}\sin.\alpha + P'\frac{x'}{l}\sin.\alpha' + \text{etc.}$$

équations au moyen desquelles on déterminera les pressions μ et ν, et leurs directions. On peut remarquer qu'en général les angles a et b seront différents, ou que les directions des pressions μ et ν ne seront point parallèles entre elles. Quand elles le seront, cela indiquera que les forces appliquées au corps peuvent être composées en une résultante unique, ce qui n'aurait pas lieu dans le cas contraire.

Il arrive assez souvent dans le calcul des machines qu'il n'est pas nécessaire de connaître séparément les pressions μ et ν exercées sur les deux points fixes, mais seulement la somme de ces pressions, ou leur résultante, si elles ne sont point parallèles. On y parviendra de la manière la plus simple en supposant toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes, et appliquées en un même point : leur résultante sera la pression cherchée.

Les forces sont dirigées d'une manière quelconque par rapport à l'axe fixe.

§ 4. Supposons enfin les forces dirigées d'une manière quelconque par rapport à l'axe fixe. Ce cas général se ramène aux deux précédents, en remarquant que chaque force peut être décomposée à son point d'application en deux autres, l'une parallèle à l'axe fixe, qui tend seulement à mouvoir ce corps dans le sens de cet axe, et l'autre agissant dans un plan perpendiculaire à l'axe fixe, suivant la projection de la force faite sur ce plan, laquelle tend seulement à faire tourner le corps autour de cet axe. Les pressions longitudinales et transversales provenant du grouppe de forces parallèles à l'axe se détermineront séparément comme on l'a vu § 1, et celles résultant du grouppe de forces perpendiculaires à l'axe comme on l'a vu dans le § précédent. On les composera ensuite pour connaître les pressions résultantes.

On a supposé ci-dessus que l'axe n'était assujéti qu'en deux de ses points, ce qui suffit effectivement pour le rendre fixe. S'il était assujéti en un plus grand nombre de points, les données de la question ne suffiraient plus pour déterminer la pression que chacun d'eux supporterait. Seulement ces pressions devraient être telles, qu'en les composant en deux forces appliquées à deux des points d'appui, ces deux forces fussent égales aux pressions qu'on trouverait d'après les règles précédentes pour ces deux mêmes points d'appui supposés seuls.

D'un corps assujéti à un point fixe.

§ 5. En supposant maintenant le corps assujéti à un seul point fixe, il suffira, pour que les forces qui agissent sur lui se fassent équilibre, que leur résultante passe par ce point, ou, ce qui est la même chose, qu'elles ne puissent faire tourner le corps autour d'aucun axe passant par ce point. C'est ce qui arrivera si elles ne peuvent pas le faire tourner autour de trois axes quelconques passant par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pl. 3, Fig. 31. agissent perpendiculairement à la ligne LM. A l'extrémité F est une puissance P en équilibre avec le poids Q, l'un et l'autre ayant leurs directions perpendiculaires aux bras CB et GF; car si elles ne l'étaient pas, il faudrait mener de l'appui C ou G la perpendiculaire GH pour tenir lieu du bras FG.

Pour trouver le rapport qui est entre la puissance et le poids, il faut multiplier cette puissance par le bras GH, et diviser le produit par GD; on aura $\frac{P \times GH}{GD}$ pour l'effort qu'elle fait au point D (49); qui étant multiplié par ED et le produit divisé par EA, donne $\frac{P \times GH \times ED}{GD \times EA}$ pour la résistance que le poids oppose au point A; qui étant multiplié par le bras CA et le produit divisé par le bras CB, donnera au quotient $\frac{P \times GH \times ED \times CA}{GD \times EA \times CB}$ $= Q$. En faisant évanouir la fraction, on aura $P \times GH \times ED \times CA = Q \times GD \times EA \times CB$: si l'on réduit cette équation en proportion, on a $P : Q :: GD \times EA \times CB : GH \times ED \times CA$, ce qui fait voir que la puissance est au poids comme le produit continuel des bras de levier GD, EA, CB, est au produit des autres bras GH, ED, CA.

Règle générale pour connaître le rapport de la puissance au poids dans les machines composées.

74. On remarquera que dans cette machine, de même que dans toute autre où le mouvement se communique par une répétition de leviers, les bras de ces leviers sont toujours en nombre pair et répondent alternativement à la puissance et au poids. Par exemple ici, on a entre la puissance et le poids six bras de leviers, dont le premier GH, le troisième DE et le cinquième AC peuvent être considérés comme répondants à la puissance, et le deuxième GD, le quatrième EA et le sixième CB, comme répondants au poids. Or pour avoir tout-d'un-coup une proportion qui marque le rapport de la puissance au poids, *il n'y a qu'à multiplier de suite les bras de levier qui répondent au poids et ceux qui répondent à la puissance, et considérer que la puissance est au poids dans la raison réciproque de ces deux produits.*

Il sera aisé de distinguer le produit des bras qui répondent au poids

---

le point donné. Ainsi prenant arbitrairement un axe de rotation, on décomposera chaque force en deux autres, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à cet axe, et on exprimera que la somme des moments de ces dernières composantes prises par rapport à l'axe est nulle. La même opération étant faite pour deux autres axes de rotation, on aura trois équations qui exprimeront les conditions auxquelles les forces données devront satisfaire pour se faire équilibre.

A l'égard de l'effort qui aura lieu sur le point fixe, il est le même que si chaque force avait été transportée parallèlement à elle-même et appliquée à ce point. On le trouvera donc en supposant que toutes les forces aient été ainsi transportées, et déterminant leur résultante par les formules de la note (*d*).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'avec celui des bras qui répondent à la puissance, en faisant attention que le premier comprend le bras auquel est effectivement appliqué le poids, et le second le bras auquel est appliquée la puissance.

Analogie des roues dentées.

75. Il suit de l'article précédent que lorsqu'on veut élever un poids à l'aide de plusieurs roues dentées qui s'engrènent dans des pignons ou lanternes (prenant les rayons des roues pour les bras de levier qui répondent à la puissance, et les rayons des pignons pour les bras de levier qui répondent au poids), *dans l'état d'équilibre, il y aura même raison de la puissance au poids que du produit des rayons des pignons à celui des rayons des roues.*

Pl. 3, Fig. 32. Examen des deux leviers composés, qui agissent l'un sur l'autre, et qui forment ensemble le mécanisme des moulins ordinaires, servant à moudre le bled.

76. AB représente un arbre horizontal accompagné des bras de levier CD et EF, IK un arbre vertical accompagné des bras GH et LM, disposés de façon que le bout F du bras EF se trouve derrière celui du bras HG et immédiatement appliqués l'un contre l'autre. A l'extrémité du bras CD est une puissance P, qui agit de P en D selon une direction horizontale pour faire tourner l'arbre AB sur ses tourillons, ce qui ne peut arriver sans que l'extrémité F du bras EF ne pousse de F en R l'extrémité du bras G pour faire tourner l'arbre IK, qui tournerait en effet s'il n'en était empêché par une puissance Q qui repousse de Q en M l'extrémité M du bras LM selon une direction perpendiculaire.

Pour savoir, dans l'état d'équilibre, le rapport de la puissance P à la résistance Q, que nous regardons comme un poids, il faut multiplier le premier bras de levier CD par le troisième GH, et le second EF par le quatrième LM (74) : on aura $P : Q :: EF \times LM : CD \times HG$; c'est-à-dire que *la puissance est au poids réciproquement comme le produit des bras de leviers qui répondent au poids est à celui des bras de levier qui répondent à la puissance.*

On peut regarder la puissance P comme l'action d'un *courant* qui frapperait les *aubes* d'une roue, EF comme le rayon d'un rouet FO qui agirait contre les fuseaux d'une lanterne GT qui aurait pour rayon HG; et le poids Q exprimera, si l'on veut, la résistance que le blé oppose à une meule de moulin SM, en supposant cette résistance réunie à l'extrémité du rayon de la meule.

Propriété de la roue, des poulies, du plan incliné, du coin et de la vis.

Analogie de la roue et de son essieu. Figure 33.

77. Quand une puissance appliquée à la circonférence *d'une roue* soutient un poids suspendu au *treuil* d'une même roue, cette puissance se trouve dans le même cas que si elle se servait d'un levier AB *du premier genre*, dont le bras CA de la puissance serait égal au rayon de la roue, et le bras CB du poids égal au rayon du treuil : car le point d'appui ou les tourillons répondant au centre C, on aura P:Q :: CB:CA; ce qui fait

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

voir que dans cette machine *la puissance est au poids comme le rayon du treuil est au rayon de la roue*, lorsque la puissance agit selon une direction tangente à la roue.

Si la direction de la puissance n'était point parallèle à celle du poids, mais qu'elle fût toujours tangente à la roue comme DF, l'analogie serait encore la même, puisqu'alors on aurait un levier coudé DCB.

Pl. 3, Fig. 34.

Une poulie fixe ne soulage point une puissance qui élève un poids par son moyen.

78. L'analogie des *poulies* pouvant aussi se rapporter à celle du levier, il convient d'en faire mention, en considérant que quand une poulie est attachée à un point *fixe*, son diamètre AB est encore un levier du premier genre qui a un poids Q suspendu à une de ses extrémités, la puissance P appliquée à l'autre, et le point d'appui C dans le milieu, ce qui donne P:Q :: CA:CB. Or comme on a CA = CB, puisque ce sont des rayons du même cercle, on aura par conséquent P = Q, d'où l'on voit que les *poulies fixes ne donnent point d'avantage à la puissance*, et ne font que diminuer le frottement qui serait considérable si la poulie ne tournant point avec la corde, cette corde était obligée de glisser dessus comme sur un cylindre immobile.

Quand une poulie est attachée au poids qu'on veut élever, la puissance ne soutient que la moitié de ce poids.

Figure 35.

79. Il n'en est pas de même des poulies qui doivent être enlevées avec le poids auquel elles sont attachées. Par exemple si l'on suppose une poulie AB au-dessous de laquelle passe une corde dont l'un des bouts soit attaché à un endroit fixe G, la puissance P appliquée à l'autre bout AE ne soutiendra que la moitié du poids. Le diamètre AB de la poulie pouvant être regardé comme un *levier du second genre*, dont le point d'appui est à l'extrémité B, la puissance à l'extrémité A, et le poids dans le milieu, on aura dans l'état d'équilibre P : Q :: CB : AB (59) : mais le rayon CB est la moitié du diamètre AB, donc *la puissance sera la moitié du poids Q*. Si l'on fait passer le bout de la corde AE au-dessus d'une poulie DE à chape immobile, la puissance étant en H et tirant de haut en bas agira plus commodément, mais sans en tirer aucun autre avantage.

Examen de la situation des corps par rapport à leurs lignes de direction.

Figure 36.

80. Si un corps CDE, posé sur un plan horizontal AB, est situé de façon que la ligne de direction FG tirée de son centre de gravité F passe par sa base CE, le corps demeurera en repos, parce que le centre de gravité ne pourra tomber d'aucun côté, étant soutenu par le plan, lequel sera pressé avec la pesanteur absolue du corps, c'est-à-dire avec toute l'action dont il peut être capable lorsqu'il est en repos.

Figure 37.

Mais si le corps est situé comme HIK, de manière que la ligne de direction LM tirée de son centre de gravité L tombe hors de sa base HK, il faut nécessairement qu'il renverse tout-à-fait du côté M, parce que le centre de gravité L n'étant point soutenu par le plan, agira pour descendre vers le centre des graves.

Figure 38.

81. Il arrivera la même chose à un corps ECF posé sur un *plan incliné*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

AB; car si la ligne GH tombe hors de la base EF, son centre de gravité G pouvant descendre par rapport au plan incliné et à l'horizontal, ce corps roulera, parce que son centre de gravité l'emportera vers celui des graves. PLANCHE 3. FIGURE 38.

Si la ligne de direction NO du corps IKM passe par sa base IM, ce corps, au lieu de rouler, ne fera que glisser, parce que son centre de gravité ne pourra descendre que par rapport à l'horizon seulement : alors le plan ne sera pressé que par une pesanteur relative.

Le *plan incliné*, que l'on admet au nombre des machines simples, sert à élever un poids à une certaine hauteur : voici les principales analogies qu'on en tire.

82. Si une puissance P soutient un poids Q par une ligne de direction parallèle au plan incliné AB, *la puissance sera au poids comme la hauteur BC du plan est à sa longueur BA*. Car prenons la ligne verticale DE pour représenter le poids Q, et DG pour représenter la puissance P, la résultante de la puissance et du poids sera représentée par la diagonale DF du parallélogramme EG; mais il faut pour l'équilibre que cette résultante soit détruite par la résistance du plan incliné : donc la ligne DF devra être perpendiculaire à AB, et par conséquent le triangle DEF étant semblable au triangle ABC, on aura EF:ED::BC:BA, ou bien P:Q::BC:BA (17). Analogies des plans inclinés. PLANCHE 4. FIGURE 39.

83. Si la ligne de direction de la puissance est parallèle à la base AC du plan incliné, *cette puissance sera au poids comme la hauteur du plan est à la longueur de sa base;* puisque la ligne DF perpendiculaire sur AB exprimera encore la résultante de la puissance et du poids, et on aura P:Q::DG (ou EF):ED (17); et le triangle DEF étant semblable au triangle ACB, on aura FE:ED::BC:CA, ou bien P:Q::BC:CA. FIGURE 40.

Enfin si la ligne de direction de la puissance n'était parallèle ni au plan incliné, ni à sa base; alors, dans l'état d'équilibre, *la puissance et le poids seront dans la raison réciproque des perpendiculaires* FL, FE (25). FIGURE 41.

84. Le *coin* est une machine de fer ou de bois servant à élever des corps à une petite hauteur; dans ce cas ses analogies sont les mêmes que celles du plan incliné, eu égard à la direction de la puissance agissante. Mais lorsque le coin sert à fendre du bois, ce qui est son principal usage, sa figure est un triangle isoscèle, et la force qui chasse le coin est à la résistance du bois comme la moitié de la tête du coin est à la longueur d'un de ses côtés. Comme cette analogie n'a pas lieu dans les machines dont nous parlerons, il serait assez inutile d'en donner la démonstration : c'est pourquoi nous la passerons sous silence. Analogie du coin

Quant à la *vis*, que la plupart des auteurs mettent au rang des machines simples quoiqu'elle soit composée d'un levier et d'un plan incliné, je n'en ferai pas non plus mention présentement, me réservant d'en parler

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans le chapitre second, en examinant quel est le frottement qui se rencontre dans l'usage de cette machine.

Principe de Descartes pour la mécanique.

L'objet de la mécanique étant de mettre les corps en mouvement, nous les avons suffisamment considérés en repos autour d'un point fixe : il nous reste à démontrer dans quel rapport sont les vîtesses avec lesquelles ces corps sont disposés à se mouvoir, ou se mouvraient en effet, si l'un d'eux ayant tant soit peu d'avantage sur l'autre venait à rompre l'équilibre.

En quoi consiste la force des corps, et comment on peut l'estimer.

85. Mais auparavant il faut faire réflexion qu'un corps n'a de force qu'autant qu'il est en mouvement, et que cette force sera d'autant plus grande qu'il aura en même temps plus de *masse* et plus de *vîtesse*, ainsi qu'un rectangle a d'autant plus de superficie qu'il a une plus grande *base* et une plus grande *hauteur*. Or comme cette superficie s'exprime par le produit de ces deux dimensions, de même la force d'un corps, qu'on nomme aussi sa *quantité de mouvement*, doit s'exprimer *par le produit de sa masse et de sa vîtesse*.

86. Comme deux rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont leurs bases en raison réciproque de leurs hauteurs, de même *deux corps inégaux en masse et en vîtesse auront des quantités de mouvement égales lorsque leurs masses seront en raison réciproque de leurs vîtesses*.

87. De plus, si ces deux corps sont disposés de manière que l'un ne puisse exercer sa force sans surmonter celle de l'autre, ils demeureront tous deux immobiles, quoique avec une tendance au mouvement; parce qu'une force égale n'en peut surmonter une égale.

88. Il suit de-là que la même quantité de mouvement en général peut être formée d'une infinité de manières; car pourvu que le produit de la masse d'un corps par sa vîtesse demeure le même, ces deux grandeurs peuvent varier entre elles à l'infini.

Manière de démontrer l'équilibre, indépendamment du parallélogramme des forces.

PLANCHE 4. FIGURE 42.

89. Si l'on a un levier horizontal AB, dont le point d'appui est en C, autour duquel sont en équilibre la puissance P et le poids Q; augmentant tant soit peu la force de cette puissance, afin qu'elle enlève le poids et emmène le levier dans la situation DE, la verticale FD exprimera de combien la puissance P est descendue, et la verticale EG de combien le poids Q est monté dans le même temps. Or, comme les triangles semblables CDF et CEG donnent CG:CF :: EG:FD; *dans le cas de l'équilibre, la puissance sera au poids dans la raison réciproque du chemin que fera le poids à celui que fera la puissance dans le même temps*.

Les effets étant proportionnels à leurs causes, la vîtesse de la puissance sera à celle du poids dans la raison des espaces que l'un et l'autre auront parcourus dans le même temps : d'où il suit que si à la place des espaces

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on prend les vîtesses, *dans l'état d'équilibre*, *la puissance et le poids seront dans la raison réciproque de leur vîtesse;* et alors la quantité de mouvement de la puissance sera égale à celle du poids (86).

Application du principe général à l'analogie de la roue.

90. Quand une puissance élève un poids à l'aide d'une *roue et d'un treuil*, la circonférence de la roue exprime la vîtesse de la puissance, et la circonférence du treuil celle du poids; car lorsque la puissance a fait faire un tour à la roue, le poids est monté d'une hauteur égale à la circonférence du treuil. Alors, dans l'état d'équilibre, *la puissance et le poids seront encore dans la raison réciproque de leurs vîtesses*, puisque les circonférences des cercles qui expriment ces vîtesses sont entre elles comme leurs rayons, que nous avons pris ci-devant pour les bras de levier de la puissance et du poids (77).

Application du même principe aux poulies fixes.

Planche 3. Figures 34 et 35.

91. De même, si une puissance et un poids sont appliqués à une corde qui passe sur une poulie accrochée à un point *fixe*, on verra (comme dans l'article 78) que dans l'état de l'équilibre *la puissance sera égale au poids, parce que leurs vîtesses de part et d'autre seront les mêmes;* car si la puissance, en tirant de haut en bas, fait descendre la corde d'une certaine longueur, cela ne pourra arriver sans que le poids ne monte d'autant.

Application du même principe aux poulies mobiles.

Figure 35.

92. Mais si la puissance veut élever un poids Q à l'aide d'une poulie *mobile* (comme dans l'article 79), elle ne pourra le faire monter d'un pied sans que chaque brin de corde GB et EA soit raccourci d'un pied, et sans que la puissance P ne descende de deux dans le même temps; ainsi, dans le cas d'équilibre, le chemin de la puissance étant double de celui du poids, le poids sera double de la puissance (89).

Analogie des poulies mouflées.

Planche 4. Figure 44.

93. Quand plusieurs poulies sont assemblées dans une même *chape* ou *moufle*, on les nomme *poulies mouflées*, lesquelles servent à élever de très-gros fardeaux avec une puissance médiocre. Par exemple, soit HG la moufle d'en haut, qui doit être fixe, et DK la moufle d'en bas à laquelle est attaché le poids Q que l'on veut élever : lorsque la puissance P tire la corde pour faire monter le poids, il faut que cette puissance fasse un chemin double de celui de chaque poulie d'en bas; et comme nous en supposons ici trois, le poids ne pourra monter d'un pied sans que la puissance ne descende de six. Ce qui fait voir que *dans l'état d'équilibre, la puissance sera au poids comme l'unité est au nombre des brins de cordes qui soutiennent le poids, ou comme l'unité est au double du nombre des poulies d'en bas.*

Application du principe précédent au plan incliné.

Figure 43.

94. Enfin considérez que si une puissance P tire le corps Q *parallèlement au plan incliné* AB, et qu'elle l'ait fait aller de D en H; abaissant du point E la perpendiculaire EI sur la ligne de direction HL du poids, la ligne DH, ou son égale EK, exprimera le chemin de la puissance, et la ligne IK la hauteur à laquelle le poids se sera élevé dans le même temps. Ainsi l'on aura, dans l'état d'équilibre, P:Q::IK:KE; et les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

triangles semblables EKI, ABC donnant KI:KE::BC:BA, on aura (comme dans l'article 82) P:Q::BC:BA.

PLANCHE 4. FIGURE 46.

95. Si la puissance tirait le corps selon une direction DP *parallèle à la base du plan*, ou qu'elle le poussât de M en D selon la même direction, et qu'elle l'eût fait monter de D en H; abaissant du point N la perpendiculaire NI sur la direction HL, la ligne NI exprimera la vîtesse de la puissance, et la ligne IX celle du poids, ou la hauteur dont il sera monté dans le même temps. Ainsi on aura, dans l'état d'équilibre, P:Q::IX:IN; ou, à cause des triangles semblables, P:Q::BC:CA (comme dans l'art. 83).

Examen des manivelles appliquées à un treuil.

FIGURE 45.

96. L'usage le plus ordinaire des *manivelles simples* est d'être appliquées à l'axe d'un cylindre ou *treuil* FB posé sur deux *chevalets*, pour élever un poids Q; chaque manivelle est composée d'un levier *coudé* formant une double équerre BACD et FGHI, disposé dans un même plan avec l'axe GA; en sorte que les *coudes* AC et GH soient dans un sens opposé, afin que les puissances P, appliquées aux *poignées* CD et HI, s'inclinent et se relèvent alternativement, en décrivant une circonférence par un mouvement dont la direction lui soit toujours tangente.

Comme le poids montera d'une hauteur égale à la circonférence du treuil à chaque tour que fera la manivelle, cette circonférence exprimera la vîtesse du poids, et celle de la manivelle la vîtesse de la puissance. Ce qui fait voir que l'analogie de cette machine est la même que celle de la roue avec son essieu (77), en supposant que les puissances appliquées à chaque manivelle, et qui partagent le poids, sont réunies à la même poignée CD.

Il n'y a aucun avantage de courber le coude des manivelles.

97. On remarquera qu'il est indifférent que le coude AC ou GH soit droit ou courbé, puisque la distance de l'axe GA aux points C et H, sera toujours exprimée par le rayon GH du cercle que décrit la puissance; et c'est en quoi se trompent la plupart de ceux qui n'ont que la pratique, s'imaginant que cette puissance aura plus d'avantage dans le second cas que dans le premier. Il y a aussi plusieurs praticiens qui, pour sauver l'inégalité des puissances appliquées aux manivelles, y ajoutent des *ailes* ou *volées* TX et YV qui portent des poids à leur extrémité. Il faut avouer que quand le treuil est mu avec beaucoup de vîtesse, les volées ayant acquis cette vîtesse aident à passer plus doucement les endroits difficiles, c'est-à-dire les endroits où les puissances dans leurs révolutions n'agissent pas selon une direction tangente au cercle qu'elles décrivent; ce qui diminue d'autant plus leurs bras de levier que le sinus de l'angle que forme la direction oblique avec le coude est plus petit que le sinus total; mais cet avantage est affaibli par l'augmentation du frottement que cause le poids des volées, lesquelles n'augmentent ni ne diminuent en rien la puissance, comme la plupart se l'imaginent.

Je ne m'arrêterai pas à donner un plus grand nombre d'exemples, pour

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

faire voir que quand une puissance élève un poids à l'aide d'une machine, soit simple ou composée, *dans l'état d'équilibre, la puissance et le poids sont toujours dans la raison réciproque de leurs vîtesses ou des espaces qu'ils parcourent dans le même temps* (89); ce que l'on verra par la suite étant une application presque continuelle de ce principe, qui est le plus simple et le plus commode que l'on puisse desirer pour le calcul des machines les plus composées. Pour se le rendre encore plus familier, il convient de lire avec attention les remarques suivantes.

La résistance d'un corps au mouvement est proportionnée à la vîtesse dont on veut le mouvoir.

98. Il suit des articles 85 et 89, que la résistance d'un corps au mouvement est d'autant plus grande qu'il a plus de masse, et qu'un mouvement plus prompt étant un plus grand mouvement, la résistance de ce corps sera proportionnée à la vîtesse dont on veut le mouvoir : ainsi lorsqu'un corps est mu, la force qui le meut doit être d'autant plus grande que ce corps doit prendre une plus grande quantité de mouvement.

99. Il suit encore (88) qu'une puissance de 25 liv. par exemple, pourra, à l'aide d'une machine, élever un poids de 500 livres, si le poids ne fait qu'un pied de chemin dans le temps que la puissance en fera 20; ou bien un poids de 50 livres en élevera un de 500, si ce poids se meut avec une vîtesse dix fois plus grande que celle du poids de 500 livres. Il en sera de même de tous les autres produits égaux à 500, puisqu'il faut toujours trouver 500 livres de force, de quelque façon qu'on les prenne. C'est là une loi générale de la nature, qui ne laisse à l'art que le choix des différentes combinaisons, toute l'industrie humaine ne pouvant jamais rendre une petite force égale ou supérieure à une plus grande. Ainsi quand il semble qu'une puissance de 25 livres, pour être en équilibre avec un poids de 500, se multiplie et s'élève, pour ainsi dire, au-dessus d'elle-même, c'est une illusion qui disparaît quand on fait attention aux 20 degrés de vîtesse qu'il lui faut donner de plus qu'au poids de 500 liv.; car cette vîtesse est une force réelle, quoique insensible aux yeux (*n*).

Éclaircissements sur les art. 85 et suivants.

(*n*) Il y a dans ce paragraphe, commençant à l'art. 85, beaucoup de confusion dans les idées, et d'inexactitude. L'auteur l'intitule *Principe de Descartes pour la mécanique* : cependant c'est seulement à l'article 99 qu'on trouve quelque chose qui rappelle ce principe d'une manière fort détournée. Le commencement du paragraphe semble annoncer qu'on va considérer les machines en mouvement: mais il est important de prendre garde au contraire qu'il ne s'agit encore ici essentiellement que d'une loi d'équilibre. Comme il serait fort long de faire voir en détail tout ce que le texte offre de défectueux, je me contenterai de poser en peu de mots les notions exactes que l'auteur peut être censé avoir voulu établir ici.

Ayant déduit du principe de la composition des forces les lois de l'équilibre des machines simples, on s'aperçoit facilement que, dans ces machines, la puissance et le poids sont toujours entre eux en raison inverse des petits espaces qu'ils parcour-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Manière de trouver le centre de gravité d'un triangle et d'un demi-cercle.

Comme nous aurons besoin par la suite de connaître le centre de gravité d'un triangle et celui d'un demi-cercle, voici la manière de les trouver.

---

raient dans le sens de leurs directions si la machine se dérangeait infiniment peu de la situation d'équilibre. C'est ce que Bélidor fait voir depuis l'art. 89 jusqu'à l'art. 95. Il en résulte que si l'on multipliait chaque force par l'espace correspondant, et qu'on ajoutât les produits en donnant le signe + aux espaces parcourus dans le sens de l'action de la force, et le signe — à ceux parcourus en sens contraire de cette action, la somme de ces produits serait nulle. Ce résultat a lieu non-seulement dans les machines simples, mais encore dans tout système ou assemblage de points assujétis entre eux d'une manière quelconque. Et pour s'en former clairement l'idée, que l'on conçoive un système semblable dans une situation déterminée, sans qu'aucune force lui soit appliquée. Supposons qu'on fasse prendre à l'un de ses points un mouvement quelconque infiniment petit : ce mouvement se transmettra à tous les autres, et tous auront parcouru des espaces infiniment petits, dont les directions et les grandeurs respectives seront la conséquence de la composition ou de la nature de ce système, et de sa situation actuelle, et pourront être déterminées quand cette composition et cette situation seront connues. On est convenu d'appeler les espaces infiniment petits ainsi parcourus par les points du système ou de la machine, les *vitesses virtuelles* de ces points; et il est essentiel de remarquer que la notion des vîtesses virtuelles est entièrement géométrique, et tout-à-fait indépendante de l'idée des forces qui peuvent être appliquées à la machine, ou du vrai mouvement qu'elle prend quand elle travaille. On est également convenu d'appeler *moment* de chaque force, *le produit de cette force par la vîtesse virtuelle de son point d'application estimée suivant sa direction*, en prenant ici le mot *moment* dans un sens qui paraît d'abord fort différent de celui qui lui a été donné dans les notes (*i*) et (*m*), mais qui, dans le fond, s'en éloigne peu. Cela posé, le résultat ci-dessus peut s'énoncer généralement comme il suit : *Lorsque plusieurs forces sont appliquées à des points assujétis entre eux d'une manière quelconque, retenus ou non par des obstacles, ces forces se font équilibre si la somme de leurs moments, c'est-à-dire de leurs produits par les vîtesses virtuelles de leurs points d'application estimées suivant la direction des forces, est nulle, et réciproquement; en regardant comme positives les vîtesses virtuelles des points qui, dans un petit dérangement du système, se mouvraient dans le sens de l'action des forces qui leur sont appliquées, et comme négatives les vîtesses virtuelles des points qui se mouvraient en sens contraire de cette action.* On trouvera plus bas une démonstration élémentaire et générale de ce principe.

Cette notion du principe des vîtesses virtuelles, principe qui fournit en général dans la pratique la manière la plus commode de fixer par le calcul les rapports des forces qui doivent se faire équilibre dans une machine donnée, est la seule chose qu'il y ait à voir et à retenir dans ce paragraphe. Il faut considérer ce qui est dit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

100. Pour avoir *le centre de gravité* d'un triangle ABC, il faut diviser deux de ses côtés AC et AB en deux également, tirer des angles opposés les lignes BD, CE; et le point G où ces deux lignes se couperont sera celui que l'on demande.

Manière de trouver le centre de gravité d'un triangle.

PLANCHE 4. FIGURE 47.

---

des *quantités de mouvement* dans les art. 85 et suivants comme hors-d'œuvre et sans rapport avec le reste. La dernière phrase de l'art. 89 est sur-tout absolument erronée : on ne sait pas ce que l'auteur peut entendre par « la quantité de mouvement « de la puissance qui sera égale à celle du poids ». Car une quantité de mouvement est le produit de la masse d'un corps par sa vîtesse, et un poids ni une puissance ne sont point des *masses*, mais des *pressions*, et leurs produits par les vîtesses de leurs points d'application (lesquels produits doivent être égaux dans le cas de l'équilibre) ne peuvent former des quantités de mouvement. Ces produits forment des quantités d'un ordre et d'une nature différente, comme on le verra dans la suite.

Quand au principe de Descartes, il consiste, tel qu'on le trouve énoncé dans ses lettres et dans sa Mécanique, en ce que « il faut la même force pour élever un poids « à une certaine hauteur que pour élever un poids plus grand à une hauteur d'au- « tant moindre, ou un poids moindre à une hauteur d'autant plus grande »; c'est-à-dire en d'autres termes que la force nécessaire pour élever un poids d'une certaine hauteur est proportionnelle au produit du poids et de la hauteur. Ce principe est le fondement de la théorie des machines considérées non-point dans l'état d'équilibre, mais en mouvement et fonctionnant. Dans son énoncé le mot *force* est pris dans un sens particulier, et *la force qui élève un poids* est autre chose que les *puissances*, *poids* ou *pressions* qui se font mutuellement équilibre dans une machine en repos (Voyez l'addition placée à la fin de ce premier livre).

Du principe de Descartes.

Démonstration élémentaire du principe des vîtesses virtuelles.

On a exposé dans les notes (*i*) et (*m*) les conditions auxquelles seraient assujéties plusieurs forces qui devraient se faire équilibre en agissant sur un corps solide. Ce qui caractérise ce genre de système, est que les points d'application des forces se trouvent assujétis entre eux, de manière que leurs distances mutuelles sont toutes invariables et que la figure du système ne peut pas changer. Il s'agit maintenant de rechercher les conditions de l'équilibre pour un assemblage de points formant un système analogue aux machines, c'est-à-dire dans lequel il n'y a qu'une partie des distances mutuelles des points qui soient invariables, en sorte que le système peut prendre successivement diverses figures. On doit imaginer les points dont les distances sont invariables attachés les uns aux autres par des fils inextensibles et raides, qui ne peuvent ni s'allonger ni s'accourcir, et par le moyen desquels les forces appliquées à chaque point se transmettent mutuellement leurs actions. La démonstration, ou plutôt l'explication qui va suivre (car il suffit de faire voir clairement ce qui se passe dans un tel système en équilibre pour établir la vérité du principe des vîtesses virtuelles), est fondée sur les deux propositions suivantes :

PL. A, FIG. 10.

1° Ayant plusieurs forces P, P′, P″, etc. appliquées à un même point M, dont R est la résultante, si ce point éprouve un petit déplacement quelconque par lequel il soit transporté en N, MN sera sa vîtesse virtuelle, et abaissant du point N sur

Quand plusieurs forces sont appliquées à un même point, le moment

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour le prouver, remarquez que le triangle ABC peut être considéré comme composé d'une infinité d'éléments ou lignes parallèles au côté AC, qui seront toutes divisées en deux également par BD; ainsi le centre de

---

de la résultante est égal à la somme des moments des composantes.

les directions des forces les perpendiculaires Np, Np', Np'', ... Nr, les distances Mp, Mp', Mp'', ... Mr représenteront la vîtesse virtuelle MN estimée suivant les directions des forces P, P', P'', ... R. Or il résulte du principe de la composition des forces, que le moment R. Mr de la résultante est toujours égal à la somme P. Mp + P'. Mp' + P''. Mp'' + etc., en prenant négativement les vîtesses telles que Mp'', qui se trouvent dirigées en sens contraire de l'action des forces. En effet, d'après la note (d), si l'on représente par α, α', α'',... les angles des directions des forces avec MN, et par a celui de la résultante, on a, puisque la résultante R estimée suivant une ligne quelconque MN est égale à la somme des composantes estimées suivant la même ligne, l'équation R cos. a = P cos. α + P' cos. α' + etc., ou en multipliant tous les termes par MN que je représenterai par v, R. v cos. a = P. v cos. α + P'. v cos. α' + etc. Or les quantités v cos. a, v cos. α, v cos. α', etc., représentent précisément les vîtesses virtuelles Mr, Mp, Mp', etc.; donc l'équation précédente exprime la proposition énoncée.

Pl. A, Fig. 11. Quand une ligne droite se déplace infiniment peu, ses deux extrémités parcourent des espaces égaux dans le sens de cette ligne.

2° Ayant une ligne droite MM' qui, sans changer de longueur, éprouve un déplacement quelconque infiniment petit qui la transporte dans la position voisine NN', et les espaces infiniment petits MN, M'N', parcourus par ses deux extrémités ayant été projetés en MP, M'P' sur la direction primitive de la ligne, ces deux projections MP, M'P', qui représentent les espaces MN, M'N' estimés suivant la direction primitive MN, seront toujours égales entre elles. En effet, quel que soit le déplacement éprouvé par la ligne, on peut toujours imaginer qu'elle s'est d'abord transportée parallèlement à elle-même en NO, et ensuite qu'elle a tourné sur son extrémité N pour prendre la situation NN'. Or, il est évident d'abord que les projections MP, M'Q des espaces MN et M'O, sont égales entre elles. De plus, l'arc ON' étant par hypothèse infiniment petit, l'espace QP' se trouve être le sinus verse d'un arc infiniment petit, et par conséquent infiniment petit du second ordre. On doit donc le négliger par rapport aux espaces M'P' ou M'Q, qui sont infiniment petits du premier ordre, et par conséquent considérer ces espaces, dont il est la différence, comme égaux entre eux et à MP.

Ces deux lemmes étant admis, je remarquerai que parmi les divers points du système il peut y en avoir qui soient entièrement fixes; d'autres qui soient assujétis à se mouvoir dans une ligne donnée, comme serait l'extrémité d'un levier tournant autour d'un axe fixe, qui ne peut que décrire une circonférence de cercle; d'autres qui soient assujétis à se mouvoir dans une surface donnée, comme serait une extrémité d'un fil dont l'autre extrémité serait attachée à un point fixe, qui ne peut que se mouvoir dans la surface sphérique dont le point fixe est le centre; d'autres enfin qui soient entièrement libres de tout obstacle et attachés seulement aux autres points mobiles du système. Or, si l'on veut appliquer aux divers points des forces qui se fassent mutuellement équilibre, on verra, 1° qu'à un point entièrement fixe on peut appliquer des forces quelconques, puisqu'elles seront détruites par la résistance du point fixe; 2° qu'à un point assujéti à se mouvoir dans

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

gravité commun à toutes ces parallèles doit être à un des points de la ligne BD. Par le même raisonnement, on voit qu'il se trouvera aussi dans la ligne CE : il faut donc qu'il soit nécessairement au point G.

---

une ligne donnée ou dans une surface donnée, on pourra appliquer des forces quelconques dirigées suivant la normale à la ligne ou à la surface, puisqu'elles seront détruites par leur résistance; 3° qu'enfin on pourra appliquer aux deux extrémités d'un même fil, et dans la direction de ce fil, des forces quelconques, pourvu qu'elles soient égales et contraires, puisqu'elles se détruiront réciproquement. Ayant appliqué de telles forces au système, l'équilibre y existera nécessairement; et réciproquement, si l'équilibre existe, cela suppose nécessairement que si l'on remplaçait les forces appliquées aux points mobiles par leurs composantes dans le sens des normales aux surfaces ou lignes dans lesquelles ces points sont obligés de rester, et des fils qui y aboutissent, chaque fil se trouverait tiré à ses deux extrémités par deux composantes égales et contraires; car les forces appliquées au système ne peuvent être détruites que par la résistance des obstacles fixes, ou par l'égalité entre les actions exercées en sens contraire aux extrémités de chaque fil libre.

En concevant donc ainsi les forces appliquées aux divers points du système remplacées par leurs composantes dans le sens des normales aux surfaces ou aux lignes où les points sont retenus, et des fils tendus d'un point à un autre, il est aisé de voir que le principe des vîtesses virtuelles, tel qu'il est énoncé ci-dessus, a nécessairement lieu dans le système. En effet, si l'on dérange infiniment peu ce système de sa situation actuelle pour lui faire prendre la situation voisine, sans violer les conditions de la liaison des points, c'est-à-dire sans que les points sortent des surfaces ou des lignes où ils doivent rester, et sans que les fils qui les unissent changent de longueur; on voit 1° que les points d'application des composantes dirigées suivant les normales aux surfaces ou aux lignes fixes décriront des espaces nuls suivant les directions de ces composantes; 2° que les points d'application des deux composantes égales et contraires agissant aux extrémités d'un même fil décriront (par la 2^{e} des propositions ci-dessus) des espaces égaux suivant les directions de ces forces, l'un dans le sens de l'action de la composante, l'autre en sens contraire de cette action. Donc si l'on fait la somme des produits de chaque composante par l'espace parcouru par son point d'application suivant sa direction, en prenant négativement les espaces parcourus en sens contraire de l'action des forces, on trouvera une somme nulle.

Remettons maintenant les forces appliquées au système à la place de leurs composantes : sachant (par la 1re proposition ci-dessus) que le moment de chaque force est toujours égal à la somme des moments de ses composantes, on conclura que, dès que la somme des moments de toutes les composantes doit être nulle pour que l'équilibre ait lieu dans le système, la somme des moments des forces que ces composantes remplacent doit l'être également; ce qui est le principe qu'il s'agissait de démontrer.

La somme des moments des forces appliquées à un système est nulle dans le cas de l'équilibre, et réciproquement.

On a supposé ci-dessus que les points d'application des forces étaient arrêtés aux extrémités des fils : pour embrasser les systèmes dans toute leur généralité, il faut admettre aussi qu'il y ait des points qui puissent glisser le long des fils, comme

1re remarque, sur le cas où les forces sont appliquées à des anneaux qui peuvent glisser le long des fils.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Si du point D on mène DF parallèle à CE, on verra, à cause des triangles semblables AFD et AEC, que AD étant moitié AC, AF sera aussi moitié de AE; par conséquent FE sera moitié de EB, ou le tiers de BF. Or comme on a encore les triangles semblables BEG, BFD, il suit que la partie EF étant le tiers de la ligne BF, la partie GD sera le tiers de ED. On peut donc conclure *que le centre de gravité d'un triangle se rencontre aux deux tiers de la ligne tirée d'un angle sur le milieu du côté opposé.*

---

cela aurait lieu si les fils passaient dans des anneaux auxquels les forces seraient appliquées. Or pour qu'un tel fil soit en équilibre, il faut évidemment que les forces appliquées à ses deux extrémités et à chacun des anneaux fournissent dans le sens de chaque partie du fil des composantes toutes égales entre elles et directement opposées deux à deux, puisque chacune de ces composantes représente la tension du fil, laquelle doit être constante dans toute son étendue. Cet état de choses étant établi, on voit facilement que, si le système vient à prendre un mouvement quelconque infiniment petit, sans que la longueur totale du fil varie, les points d'application de toutes les forces égales agissant dans le sens de ce fil, auront décrit, quel que soit ce mouvement, des espaces égaux deux à deux, l'un dans le sens d'une des forces, et l'autre en sens contraire; d'où il suit qu'en faisant la somme des moments des composantes agissant le long du fil, on trouvera encore ici une quantité nulle.

Pour comprendre dans la démonstration précédente tous les systèmes possibles formés avec des corps solides, il faut encore examiner ce qui a lieu quand quelques-uns des fils joignant les points sont élastiques. Pour cela, concevons d'abord les points du système assemblés par un certain nombre de fils inextensibles et inflexibles, comme il est dit ci-dessus, et des forces appliquées à ces points qui se font mutuellement équilibre. Si l'on vient à placer un fil élastique entre deux points, ce sera la même chose que si l'on appliquait à ces points deux forces égales et contraires dirigées suivant ce fil. Il faudra donc, pour maintenir l'équilibre, appliquer à ces mêmes points des forces capables de détruire celle-ci. Maintenant, si le système prend un mouvement quelconque infiniment petit, la somme des moments des forces qui se font équilibre au moyen des fils raides et inextensibles sera nulle d'après ce qu'on a vu ci-dessus, puisqu'il suffit pour cela que ces fils conservent leurs longueurs respectives. De plus la somme des moments des forces provenant de l'élasticité des fils et des forces qui les détruisent sera nulle aussi, puisque ces forces sont deux à deux égales, contraires et appliquées à un même point. Donc, pour que l'équilibre ait lieu, il faut que la somme des moments de toutes les forces, y compris celles introduites par l'élasticité des fils, soit égale à zéro.

On déduit des notions précédentes les expressions analytiques générales des forces qui peuvent se faire équilibre sur un système dont la nature et les conditions de la liaison des points ont été exprimées par des équations. On peut voir sur cette matière dont l'étude est aussi intéressante qu'utile, un beau mémoire de M. Poinsot dans le 13^{e} cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et la 1re partie de la *Méeanique analytique* de Lagrange.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

101. Un *secteur de cercle* ABC dont l'angle serait infiniment petit, pouvant être considéré comme un triangle isoscèle, il suit que son centre de gravité E sera à l'extrémité des deux tiers AE du rayon AD qui partage le secteur en deux parties égales. PLANCHE 4. FIGURE 48.

Un demi-cercle ABC étant composé d'une infinité de secteurs, si l'on décrit la demi-circonférence EFG, dont le rayon DE soit les deux tiers de DB, cette circonférence passera par le centre de gravité de tous les secteurs; et si l'on conçoit la pesanteur de chaque secteur réunie à son centre de gravité, on pourra regarder celle du demi-cercle ABC comme également distribuée sur la circonférence EFG. Ainsi l'on voit que le centre de gravité de la superficie du demi-cercle ABC est le même que celui de la demi-circonférence EFG. FIGURE 49. Manière de trouver le centre de gravité d'un demi-cercle.

102. Pour déterminer le centre de gravité d'une demi-circonférence, et pour faciliter d'autant plus l'intelligence de ce que nous verrons par la suite, considérez la circonférence ACBD, dont les diamètres AB et CD se coupent à angles droits. Concevant cette circonférence divisée en un nombre infini de parties égales, comme *ab* et *cd*, à chacune desquelles nous attribuerons une même pesanteur; il est constant que tirant les lignes EF parallèles au diamètre CD, à une égale distance du centre L, ces lignes, qui seront divisées en deux également par le diamètre AB, pourront être regardées comme des leviers aux extrémités desquels sont suspendues en équilibre les petites parties pesantes *ab*, qui auront pour centre de gravité commun le point K, auquel on peut les supposer réunies. Tirant les lignes GH comme on a fait les précédentes, on pourra aussi les prendre pour des leviers, aux extrémités desquels sont en équilibre les petites parties pesantes *cd*, qu'on supposera encore réunies à leur centre de gravité commun I. Si l'on fait le même raisonnement pour toutes les petites parties de la circonférence, on pourra regarder le diamètre AB comme un levier, le long des bras duquel sont suspendus tous les petits poids répandus dans les demi-circonférences CAD, CBD, qui seront en équilibre autour du point L. FIGURE 50. Sentiment que l'on doit avoir du centre de gravité d'une demi-circonférence de cercle.

Il suit de-là que pour réunir aux points M des rayons LA et LB, les poids qu'on y a supposés suspendus, pour n'en avoir que deux appliqués aux extrémités du levier MM, dont le point d'appui est dans le milieu L, il faut que la somme infinie de tous les produits de chaque $2ab$ ou $2cd$, par sa distance LK ou LI du centre L à sa ligne de direction, soit égal au seul produit de LM par le poids de chaque demi-cercle. Alors on pourra regarder le rayon LA ou LB comme un levier séparé dont le point d'appui sera en M, puisque les poids suspendus à ces leviers y seront réunis comme à leur centre de gravité commun, qui sera en même temps celui du demi-cercle où il est renfermé.

103. Dans un demi-cercle, je dis qu'il y aura même raison de la demi- Analogie pour

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trouver le centre de gravité d'une demi-circonférence.

circonférence ABC au diamètre AC, que du rayon DB à la distance DE du centre D au centre de gravité E de cette demi-circonférence.

PLANCHE 4. FIGURE 51.

Pour le prouver, il faut diviser les quarts de cercle AB et BC en deux également, et tirer les cordes AF, FB, BG, GC : divisant ces cordes également aux points I, H, K, L, chacun de ces points sera le centre de gravité de la ligne qui lui répond. Si l'on tire les lignes HI et KL, qu'on les divise aussi également, menant la ligne MN, le point E où elle est coupée par le rayon DB en deux également, sera le centre de gravité commun des quatre cordes.

Considérez que les triangles semblables COG, DLN donnent CG:CO :: DL:DN; ou, en doublant les deux premiers termes, CG+GB:CB :: DL :DN.

De même, les triangles semblables BCD, DEN donnent CB:CD :: DN :DE; or si à la place des conséquents CB et DN, dans la seconde proportion, on met les conséquents CD et DE de la troisième, on aura CG+GB : CD :: DL:DE, dont les deux premiers termes étant multipliés par deux, donnent 2CG+2GB : 2CD :: DL : DE, ou CG+GB+BF+FA:AC :: DL:DE.

On aura la même proportion en divisant le demi-cercle en un aussi grand nombre de parties égales pairement paires que l'on voudra; car la somme de toutes les cordes, si petites qu'on puisse les imaginer, sera toujours au diamètre AC, comme la perpendiculaire DL, tirée du centre D sur une de ces cordes, est à l'intervalle DE.

Comme la perpendiculaire DL approchera d'autant plus d'égaler le rayon DC que la corde GC sera plus petite, il suit que prenant le cercle pour un polygone d'une infinité de côtés, *la demi-circonférence sera à son diamètre comme le rayon est à l'intervalle* DE *du centre* D *au centre de gravité* E *de la demi-circonférence.*

104. Si l'on prend la moitié des deux premiers termes de la proportion précédente, on verra que *le quart de la circonférence est au rayon, comme le rayon est à l'intervalle du centre du demi-cercle à son centre de gravité :* ainsi nommant c la demi-circonférence, et r le rayon, on aura $\frac{2r^2}{c}$ = DE.

Pratique abrégée pour trouver le centre de gravité d'une demi-circonférence.

105. Si le rayon d'un cercle était la sixième partie de sa circonférence, l'intervalle du centre d'un demi-cerle à son centre de gravité serait les deux tiers du rayon (par l'art. précédent), parce que le rayon serait lui-même les deux tiers du quart de la circonférenee : mais comme, selon la proportion commune, la circonférence est plus grande que le triple du diamètre de la septième partie du même diamètre, il s'en faut la 33^e partie du rayon que l'intervalle du centre d'un demi-cercle à son centre de gravité ne soit les deux tiers du rayon. Or comme il y a des cas où l'on peut n'avoir point égard à une aussi petite difference, et où il est même avan-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tageux d'éloigner le centre de gravité un peu plus qu'il ne devrait être de celui du demi-cercle, *on peut le supposer aux deux tiers du rayon;* principalement quand il s'agit de calculer l'effet d'une manivelle, ou de quelque autre machine où le centre de gravité dont nous parlons a lieu.

106. Il suit de l'article 104, que la demi-circonférence du cercle qui aurait pour rayon DE, est égale au diamètre AC; car les rayons des cercles étant comme leurs demi-circonférences, on aura $DC(r) : DE\left(\frac{2r^2}{c}\right) :: c : \frac{2cr^2}{cr} = 2r = AC$.

Ayant vu (article 101) que le centre de gravité H d'un demi-cercle ABC, était le même que celui de la demi-circonférence EFG, décrite par les deux tiers du rayon DB, il suit que pour avoir le point H de ce centre, on n'aura qu'à faire DH quatrième proportionnelle à la demi-circonférence EFG, au diamètre EG, et au rayon DE.

Analogie pour trouver le centre de gravité de la superficie d'un demi-cercle.

PLANCHE 4. FIGURE 49.

Comme on peut, à la place de la demi-circonférence EFG et du diamètre EG, prendre la demi-circonférence ABC et le diamètre AC, on voit qu'on aura encore le point H en faisant DH quatrième proportionnelle à la demi-circonférence ABC, au diamètre AC, et à la ligne DF qui est les deux tiers de DB.

107. On trouvera de même le centre de gravité d'un *arc de cercle* ABC, en faisant DE quatrième proportionnelle à cet arc, à sa corde AC et au rayon DB. Pour en être convaincu, il n'y a qu'à appliquer à la figure 52 tout ce qu'on a dit dans l'article 103, observant seulement de changer le nom de *demi-cercle*, ou de demi-circonférence, en celui *d'arc de cercle*, et le nom de *diamètre* en celui de *corde;* toutes les conséquences que nous avons tirées dans cet article se tireront de même ici.

Trouver le centre de gravité d'un arc de cercle.

FIGURE 52.

Il y a des méthodes générales et fort commodes, qui dépendent du *calcul intégral*, pour découvrir les centres de gravité des lignes, des plans et des solides; mais je n'ai point voulu m'en servir, afin d'être entendu de ceux qui n'ont point la connaissance de ce calcul (*o*). Au reste, voici

---

(*o*) Les formules générales que fournit le calcul intégral pour la détermination des centres de gravité des lignes, des aires et des volumes étant actuellement exposées dans tous les traités élémentaires de mécanique, je ne crois point devoir les copier ici, d'autant mieux qu'elles sont de peu d'usage dans le genre d'applications qui fait l'objet de ce livre, et que la difficulté des intégrations ou la complication des formules oblige presque toujours à recourir à quelque méthode d'approximation, telle que celles qui suivent.

Centre de gravité des lignes courbes.

Ayant une courbe tracée sur un plan, on la partage en un grand nombre de parties assez petites pour être considérées comme des lignes droites, et pour que leur centre de gravité puisse être supposé sans erreur sensible en leur milieu. On cherche le centre de gravité commun de toutes ces parties, en calculant sa distance à deux lignes tracées dans le plan de la courbe par les formules du § 1 de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

une application de ce que nous venons d'exposer sur la manière de trouver le centre de gravité d'une demi-circonférence de cercle.

---

note (*i*). Pour une recherche de ce genre, il est utile de connaître exactement la longueur de la courbe : on peut employer à cet effet la formule suivante due à

Pl. A, fig. 12. Lambert. Soit une portion de courbe quelconque ABC, dont l'amplitude (c'est-à-dire l'angle formé par les normales à ses extrémités) ne surpasse point le $\frac{1}{3}$ d'un angle droit, AD, CD étant les tangentes à ses deux extrémités, la longueur de la portion de courbe $= \frac{1}{3}(AD + 2\,AC + CD)$.

Pl. A, fig. 13. Pour mener une tangente à une courbe dont on n'a point l'équation, on peut se servir d'un procédé indiqué par M. de Prony (*Mémoire sur le jaugeage des eaux courantes*, p. 23). Soit A le point de la courbe où la tangente doit être menée : on tire par ce point une ligne droite quelconque indéfinie, sur laquelle on porte les parties égales AP, PP′, et on élève les ordonnées PM, P′M′, en prenant garde que l'arc AM′ n'ait trop d'amplitude. La distance P*m* du point où la tangente cherchée coupe la première ordonnée est $Pm = 2\,PM - \frac{1}{2}P'M'$. Il faut, pour plus d'exactitude, prendre le double de cette valeur, et le porter sur la seconde ordonnée.

S'il s'agissait d'une courbe à double courbure, il faudrait également la diviser en un grand nombre de petites parties, et calculer successivement, de la manière indiquée ci-dessus, la distance de leur centre de gravité commun à trois plans rectangulaires.

Centre de gravité des aires planes.

Pl. A, fig. 14. Ayant une aire plane comprise entre deux lignes courbes quelconques MN, *mn*, on aura la valeur de cette aire de la manière suivante. On tracera dans le sens de sa plus grande longueur la ligne droite AB, que l'on partagera en un nombre pair de parties égales : on élevera par chaque point de division des ordonnées perpendiculaires à cette ligne, terminées de part et d'autre aux deux courbes, et dont les longueurs seront désignées par $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$, le numéro n étant impair. En représentant par h l'intervalle commun des ordonnées, l'aire MN*mn* sera exprimée par $\frac{1}{3}h(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + \ldots + y_n)$. On voit que dans la parenthèse les deux ordonnées extrêmes sont multipliées par l'unité, les autres ordonnées de numéros impairs par 2, et celles de numéros pairs par 4. Si dans la figure les ordonnées extrêmes, ou toute autre, se trouvaient nulles, il faudrait également leur donner leur numéro, et elles fourniraient dans la formule un terme nul. Lorsque les courbes ne sont pas très-irrégulières et qu'elles ne serpentent point, il suffit de prendre trois ou cinq ordonnées au plus.

La distance du centre de gravité de l'aire MN*nm* à la première ordonnée MA*m* est égale à $\frac{h(0y_1 + 1.4y_2 + 2.2y_3 + 3.4y_4 + 4.2y_5 + \ldots + (n-1)y_n)}{y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + \ldots y_n}$. Le dénominateur est la quantité comprise dans la parenthèse de la formule précédente. La parenthèse du numérateur est égale au dénominateur dont tous les termes auraient été multipliés successivement par 0, 1, 2, 3, 4.... $(n-1)$. Le premier terme donne un produit nul : on l'a écrit seulement pour la régularité de la formule.

Indication d'une méthode pour le calcul des intégrales.

On peut voir les démonstrations de ces formules dans la *Nouvelle Architecture hydraulique*, t. 1, p. 93, ou dans le *Traité de la Construction des Ponts*, t. 1, p. 336. Je remarquerai que la première fournit un procédé très-précieux et suscep-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Examen des Manivelles simples et composées.

108. Si l'on a un poids Q suspendu à une *manivelle* BCDEFG qui

---

tible d'une application fréquente pour le calcul des intégrales définies qui dépendent d'une seule variable. En effet, soit $\int X dx$ une intégrale de ce genre, dans laquelle X est une fonction quelconque de x, et dont on demande la valeur entre les deux limites $x=a$, et $x=a'$. Cette question revient, comme on sait, à trouver l'aire de la portion de courbe dont l'équation serait $y=X$, comprise entre les ordonnées correspondantes à $x=a$ et $x=a'$. On supposera donc l'intervalle $a'-a$ partagé en un nombre pair de parties, par exemple en quatre, et dans l'équation $y=X$ faisant successivement $x=a$, $x=a+\frac{1}{4}(a'-a)$, $x=a+\frac{1}{2}(a'-a)$, $x=a+\frac{3}{4}(a'-a)$, $x=a'$, on aura autant de valeurs correspondantes de y, que l'on désignera par y_1, y_2, y_3, y_4, y_5. La valeur approchée de l'aire de la courbe, ou de l'intégrale donnée, sera exprimée par $\frac{1}{3}\cdot\frac{a'-a}{4}(y_1+4y_2+2y_3+4y_4+y_5)$.

Centre de gravité des corps solides.

S'il s'agit d'un solide de révolution, on voit en premier lieu que $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ étant les ordonnées de la courbe génératrice menées à chaque point de division de l'axe, et nommant h la distance de ces ordonnées, et π le rapport de la circonférence au diamètre, le volume du solide se trouvera représenté par l'aire de la courbe dont les ordonnées seraient $\pi y_1^2, \pi y_2^2, \pi y_3^2, \ldots \pi y_n^2$. L'expression de ce volume est donc $\frac{\pi h}{3}(y_1^2+4y_2^2+2y_3^2+\ldots+y_n^2)$.

Si le solide n'est pas de révolution, son volume est exprimé par la formule donnée ci-dessus pour les aires planes, en supposant que $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ y représentent les aires des sections faites par les plans perpendiculaires à l'axe, et passant par chacun de ses points de division.

La distance du centre de gravité du solide de révolution sera exprimée par $\frac{h(0.y_1^2+1.4y_2^2+2.2y_3^2+\ldots+(n-1)y_n^2)}{y_1^2+4y_2^2+2y_3^2+\ldots+y_n^2}$, y_1, y_2, y_3, etc. y_n étant les ordonnées de la courbe génératrice.

Celle du centre de gravité d'un solide quelconque le sera par la même formule que pour les aires planes, en supposant que $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$, y représentent les aires des sections faites dans le solide par une suite de plans parallèles passant par les points de division d'un axe quelconque mené dans ce solide, et partagé en un nombre pair de parties égales.

Centre de gravité du trapèze, de l'arc, du segment, et du secteur de cercle.

J'ajoute ici la note de quelques centres de gravité dont on a fréquemment besoin.

La distance du centre de gravité d'un trapèze à la plus petite base est

$$\frac{h(b+2b')}{3(b+b')}$$

b la plus petite des deux bases parallèles.
b' la plus grande de ces bases.
h leur distance mutuelle.

Les distances au centre d'un cercle des centres de gravité de l'arc, du segment et du secteur sont respectivement

$$\frac{rc}{s},\quad \frac{1}{12}\cdot\frac{c^2}{A},\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{rc}{s}$$

r le rayon du cercle.
c la corde de l'arc.
s la longueur de l'arc.
A l'aire du segment.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

PLANCHE 4. FIGURE 53. tourne sur deux appuis H et I, la puissance motrice P qui serait appliquée à la circonférence d'une roue KL ayant pour essieu la ligne AG, et qui agirait selon une direction MP ou LP tangente à la roue, variera continuellement, parce que la ligne qui exprimera la distance de la direction NQ du poids à l'axe AG sera plus grande ou plus petite, selon que le coude CD de la manivelle approchera d'être horizontal ou vertical.

FIGURE 54. Pour rendre ceci plus sensible, considérez la figure 54, qui est un profil de la même machine coupée perpendiculairement à l'axe de la manivelle : le cercle MN représente la roue, et la circonférence OD celle que décrira le coude de la manivelle.

Lorsque la poignée se trouvera au point E, la ligne de direction EQ du poids se rencontrant dans la verticale CL, le poids sera dans le même cas que s'il était suspendu au centre C : ainsi la puissance P n'en soutiendra aucune partie. Mais lorsque la roue sera poussée selon la direction PL, le moment du poids ira toujours en croissant, à mesure que le point E décrira le quart de cercle ED. Ensuite il décroîtra dans la même raison, à mesure que le même point s'éloignera de l'extrémité D pour s'approcher de B, où étant parvenu, le poids se trouvant encore dans la verticale, la puissance sera nulle comme au commencement. Ainsi ce n'est que dans l'instant où la manivelle se trouve horizontale, que l'on a $CD \times Q = CL \times P$ pour le plus grand moment de la puissance ou du poids : au lieu que quand la manivelle se rencontrera dans la situation CA, on aura $CF \times Q = CL \times P$, ce qui fait voir que le rayon CL de la roue et le poids Q étant des grandeurs constantes, la puissance P doit augmenter ou diminuer dans la même proportion que la perpendiculaire CF, tirée du centre C sur la ligne de direction du poids.

Manière de trouver la vitesse moyenne d'une manivelle simple. 109. Si la puissance P était un courant qui vînt frapper les aubes LG de la roue MN, lorsque la manivelle est dans une situation horizontale, et si la résistance du poids Q était égale à la force absolue du courant contre l'aube LG, la roue demeurerait immobile. Mais si l'impulsion du courant est tant soit peu au-dessus de la résistance du poids, la roue tournera doucement d'abord, et à mesure que le poids montera la ligne CF allant toujours en diminuant, le courant trouvant moins d'obstacles à surmonter, donnera à la roue une vîtesse qui ira toujours en croissant, à mesure que la résistance du poids deviendra moindre. Ainsi l'on voit que ce poids montera de la hauteur CB en moins de temps que s'il avait toujours eu une *vîtesse uniforme*, égale à celle qu'il aurait en partant du point D : il est question de savoir quelle devrait être sa *vîtesse moyenne* pour monter d'un mouvement uniforme à la hauteur CB, dans le même temps qu'il y serait enlevé avec une vîtesse *accélérée*, comme celle que lui donne la manivelle.

Supposant le demi-cercle EDB divisé en un nombre de parties égales

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

infiniment petites Aa, dont chacune soit prise pour le poids Q, afin qu'elles puissent exprimer ce poids à chaque point de la circonférence du demi-cercle où se trouvera la manivelle en montant de E en B; cherchant le centre de gravité I de cette demi-circonférence (103), la ligne CI sera *le bras de levier moyen* du poids, c'est-à-dire qu'elle tiendra un milieu entre toutes les perpendiculaires CF, ce qui est bien évident par l'article 102. Car la somme de tous les moments infinis de CF par Aa sera égale au moment de CI par Aa, répété autant de fois qu'il y aura de parties égales Aa dans la demi-circonférence BDE; par conséquent la somme de tous les efforts du poids Q contre la puissance P, tandis que le bras de la manivelle monte de C en B, sera précisément la même que si ce poids avait été attaché à une corde qui filât sur un treuil XTIV. D'où il suit que la somme de toutes les vîtesses du poids *retardées* et *accélérées* est égale à la vîtesse *uniforme* qu'aurait ce poids, si, étant suspendu au treuil, il montait dans le même temps d'une hauteur égale à la demi-circonférence TIV, ou au diamètre BE du demi-cercle BDE (105).

Trouver l'action moyenne d'un courant contre les aubes d'une roue, dont la vitesse n'est pas uniforme.

110. On voit que pour juger de l'*action moyenne du courant* contre l'aube LG, on n'aura qu'à dégager P dans l'équation $Q \times CI = P \times CL$; et que si l'on veut comparer la somme des *vîtesses retardées et accélérées* de la roue et du poids dans le temps qu'il monte de E en B, on n'aura qu'à prendre le diamètre BE pour exprimer la vîtesse uniforme du poids, et la demi-circonférence de la roue pour représenter celle du courant. Alors on aura pour la quantité de mouvement du poids et de la puissance $Q \times BE = P \times KNL$ (*p*).

Suite de l'art. des manivelles.

La hauteur où l'on peut élever un poids suspendu à une manivelle, ne pouvant excéder le double de son coude, cette machine serait de peu d'effet si l'on voulait s'en servir pour élever des corps pesants; aussi ne l'emploie-t-on que pour donner le mouvement aux *pistons des pompes*, encore n'est-ce pas sans inconvénient.

Pl. 4, Fig. 54.

Par exemple, si le poids Q représentait un piston qui fît monter l'eau en refoulant de bas en haut, la manivelle étant parvenue au point B, il faudra, pour ramener le piston d'où il était parti, qu'elle décrive le demi-cercle BOE; et le poids du piston suffisant pour le faire descendre, sans qu'il soit besoin que la puissance motrice y ait part, on voit que cette

---

Effort moyen de la puissance dans la manivelle simple.

(*p*) Le résultat exact du calcul précédent est qu'en nommant r le rayon ou coude de la manivelle simple, le moment du poids Q varie entre zéro et $r.Q$, et que la valeur moyenne de ce moment est $\frac{2r}{\pi}.Q$ (π étant le rapport de la circonférence au diamètre), ou 0,6366. rQ. Par conséquent l'effort moyen de la puissance est un peu moins des $\frac{2}{3}$ de son plus grand effort.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

puissance ne fera monter l'eau que par intervalles, et que le temps que le piston mettra à descendre sera employé en pure perte, eu égard au produit de la pompe. Cependant, comme on ne peut guère se passer des manivelles dans la plupart des machines hydrauliques, on a tâché de les rectifier en les multipliant, afin qu'il n'y eût point de temps perdu dans leur action, et que cette action fût la plus uniforme qu'il est possible; c'est ce qu'on va voir dans l'examen des manivelles *doubles*, *triples*, *et quadruples*.

Examen de la manivelle double. Pl. 5, Fig. 55.

111. Pour commencer par la manivelle *double* ABCDEFGHI qui a pour axe KL, tournant sur les appuis M, N, considérez que les coudes ou bras de cette manivelle étant dans un même plan, les pistons P et Q suspendus aux poignées CD et FG, monteront et descendront alternativement. Ainsi, tandis que le premier agira pour faire passer l'eau dans le réservoir, le second descendra par sa propre pesanteur, après quoi ce dernier fera monter l'eau à son tour, et l'autre P descendra sans agir.

Il y aura donc toujours une des deux manivelles dans le cas de celle de l'article 109, par conséquent point de temps de perdu, puisque l'eau passera continuellement dans le réservoir. Il est vrai que chaque piston montera encore avec une vîtesse inégale, mais que l'on considérera comme uniforme en le supposant appliqué aux deux tiers du coude de sa manivelle (109), afin d'avoir le moment du poids; faisant attention, en calculant la machine, que la puissance se trouvera dans le même cas que s'il n'y avait qu'un corps de pompe, dont le piston fît monter l'eau sans interruption.

Examen de la manivelle triple. Figure 56.

112. La manivelle *triple*, que l'on nomme aussi manivelle *à tiers-point*, est composée de trois coudes ou bras AB, AC, AD qui partagent en trois parties égales la circonférence d'un cercle dont le centre est dans l'axe; cette manivelle est sujette à moins d'inégalité dans son mouvement que la précédente, parce qu'il n'arrive jamais que l'action de la puissance soit nulle.

Pour juger du plus grand et du moindre effort de la puissance à chaque révolution, il faut chercher quelle est la situation de la manivelle dans ces deux cas, en supposant qu'on a suspendu à chaque bras un poids égal, lequel n'oppose de résistance que lorsqu'en montant il se trouve renfermé dans le demi-cercle GEH, et qu'aussitôt qu'il commence à descendre dans le demi-cercle GIH, sa pesanteur devient nulle; c'est ce qui convient aux pistons qui n'agissent qu'en montant.

Lorsqu'un des bras AB se rencontre dans une situation horizontale IE, les deux autres AC, AD forment avec le rayon AE chacun un angle CAE, DAE de 60 degrés. Tirant les lignes CE, ED, on aura les triangles équilatéraux ACE, DAE dont la base commune AE sera divisée en deux également par les directions des poids suspendus aux points C, D

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui se rencontrent dans un même plan vertical. Par conséquent ces deux poids ayant pour bras de levier commun la perpendiculaire AF, moitié du rayon AE, n'opposeront ensemble à la puissance P que la résistance dont chacun d'eux serait capable s'il était suspendu à l'extrémité E du rayon AE.

Il suit de-là que lorsque la manivelle en tournant se rencontre dans une situation opposée à la précédente, le poids Q, suspendu à l'extrémité du coude horizontal AB, oppose à la puissance la même résistance qu'elle soutenait dans le cas précédent, puisque la pesanteur des deux autres qui répondent au demi-cercle GIH, est regardée comme nulle. Pl. 5, Fig. 57

Quand le bras AB est vertical, la direction du poids qui répond à ce bras se trouvant dans l'axe, n'oppose aucune résistance à la puissance; il n'y a plus que le seul poids suspendu au bras AD que la puissance doit soutenir. Fig. 58 et 59

L'angle LAD étant de 60 degrés, le triangle ALD sera équilatéral; par conséquent le quarré de la perpendiculaire AF sera les trois quarts du quarré du rayon AD. Ainsi, supposant ce rayon divisé en huit parties égales, son quarré sera 64, celui de AF 48, dont la racine est environ 7; ce qui fait voir que le rapport de AE à AF est à-peu-près comme 8 à 7.

Les poids suspendus aux bras de manivelles étant égaux, il suit que lorsqu'ils se rencontreront dans le demi-cercle GEH, leurs moments seront dans la raison des perpendiculaires tirées du centre sur leurs lignes de direction, puisque ces perpendiculaires expriment leurs bras de levier: si celui de la puissance l'est toujours par une ligne constante AO, cette puissance variera dans le rapport des mêmes perpendiculaires. Ainsi, quand un des coudes de la manivelle se trouvera dans une situation horizontale, la puissance pourra être exprimée par le rayon AE; et quand le même coude deviendra vertical, elle le sera par la perpendiculaire AF.

113. Pour peu que l'on y fasse attention, on verra que le moindre effort de la puissance sera exprimé par AF, et le plus grand par AE; car dans la figure 58, lorsque le point D approche de G, le point B ayant le même mouvement pour s'approcher de E, la puissance ira en croissant jusqu'à l'instant où la perpendiculaire AF deviendra leur bras de levier commun comme dans la figure 56. On voit aussi (dans la figure 59) qu'à mesure que le point D s'approchera de E, la puissance croîtra avec la perpendiculaire AF jusqu'au moment où le bras AD deviendra horizontal (comme dans la figure 57), et décroîtra à mesure qu'il s'élevera au-dessus de l'horizon, tant qu'il soit parvenu à former avec le rayon AE un angle de 30 degrés (comme dans la figure 58). Ce qui fait voir que les inégalités de la puissance sont renfermées dans un arc de cercle de 60 degrés, et que le bras de levier moyen doit être exprimé, comme ci-devant, par l'intervalle du centre A au centre de gravité R de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'arc LED; que l'on trouvera en faisant AR quatrième proportionnelle à l'arc LED, à la corde LD et au rayon AE, ou troisième proportionnelle au même arc et à son rayon, parce que cet arc étant de 60 degrés, la corde est égale au rayon.

114. Supposant que les bras de la manivelle triple soient de même longueur que ceux de la manivelle double; nommant l'un et l'autre r, et c la demi-circonférence qu'ils décrivent, on aura $\frac{2r^2}{c}$ pour le bras de levier moyen de la manivelle double (104), et $\frac{3r^2}{c}$ pour celui de la manivelle triple. Ce qui fait voir que si les poids suspendus à ces manivelles sont les mêmes, ainsi que les bras de levier des puissances qui les élèvent, ces puissances seront comme 2 est à 3.

Si l'on cherche en nombres le rapport du coude de la manivelle triple à son bras de levier moyen, on verra qu'il est, à peu de chose près, comme 16 est à 15. Ainsi, dans les machines où cette manivelle est employée, il faudra diviser la longueur d'un des bras en 16 parties égales, en prendre 15 pour le bras de levier moyen, ou pour le rayon du cercle dont la circonférence exprimera la vîtesse uniforme du poids; faire le calcul de la machine comme si l'on n'avait qu'un seul corps de pompe dont le piston refoulât l'eau sans interruption, et le reste selon les lois ordinaires de la mécanique (q).

Examen de la manivelle quadruple.

115. Quoiqu'il ne soit guère d'usage de faire des manivelles *quadruples*, par la difficulté de les rendre assez solides pour n'être pas sujettes à se rompre souvent, nous ne laisserons pas d'en examiner l'effet pour faire remarquer en passant, contre toute apparence, que cette manivelle a plus d'inégalité dans son mouvement que la triple.

Pl. 5, Fig. 60.

Si l'on imagine que des quatre bras AB, AC, AD, AE, qui forment entre eux des angles droits, il y en ait deux dans une situation *horizontale*, les deux autres étant dans la *verticale*, la puissance n'aura à soutenir que le seul poids suspendu à l'extrémité E (112); et lorsque les

---

Effort moyen de la puissance dans la manivelle triple.

(q) Le résultat énoncé par l'auteur n'est pas tout-à-fait exact: le voici rectifié. Dans le cas d'une manivelle triple, la plus petite valeur du moment de la puissance est, en nommant q l'angle droit, $r.\cos.\frac{q}{3}.Q$, ou $0{,}866.r.Q$: elle a lieu dans le cas des fig. 58 et 59. La plus grande valeur de ce moment est $r.Q$, et a lieu dans le cas des fig. 56 et 57. Le bras de levier moyen est la distance du centre de gravité de l'arc correspondant à l'angle $\frac{q}{3}$. La valeur moyenne du moment du poids est donc $\frac{r\sin.\frac{q}{3}}{\frac{1}{12}.2\pi}.Q$, π étant toujours le rapport de la circonférence au diamètre, ou $0{,}9548.r.Q$. L'effort moyen de la puissance ne diffère de son plus grand effort que de $\frac{1}{22}$ environ, et non pas de $\frac{1}{16}$ comme le dit l'auteur.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

bras de cette manivelle formeront avec l'horizon des angles de 45 degrés, les directions des poids suspendus aux points F et G se trouvant dans un même plan vertical, auront pour bras de levier commun la perpendiculaire AH, dont le rapport avec le rayon AE sera le même que celui du côté d'un quarré à sa diagonale, c'est-à-dire à-peu-près comme 5 est à 7. Si l'on double le nombre 5 à cause qu'il y a deux poids qui répondent au point H, le rapport de la plus petite à la plus grande force de la puissance sera comme 7 est à 10.

Si l'on prolonge AE pour faire AL double de AH, et qu'on décrive de l'intervalle AL le quart de cercle KLM, le rayon AE sera le plus petit, et AL le plus grand bras de levier du poids; par conséquent, le bras de levier moyen sera exprimé par l'intervalle du centre A au centre de gravité N de l'arc KLM.

Le triangle AEK étant rectangle et isoscèle, nommant encore le rayon AE r, et la demi-circonférence CED c, la corde KM sera $2r$; le rayon AK ou AL, $r\sqrt{2}$, et le quart de circonférence KLM, $\frac{1}{2}c\sqrt{2}$. Cela posé, si l'on cherche une quatrième proportionnelle à l'arc KLM $= \frac{1}{2}c\sqrt{2}$, à la corde KM $= 2r$, et au rayon AL $= r\sqrt{2}$, on aura AN $= \frac{2r^2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}c\sqrt{2}} = \frac{4r^2}{c}$; d'où l'on tire $c : 2r :: 2r : AN$, ce qui fait voir que le bras de levier moyen sera troisième proportionnelle à la demi-circonférence que décrit la manivelle, et au double d'un de ses bras.

116. Ayant trouvé (114) $\frac{2r^2}{c}$ pour l'expression de la puissance moyenne qui fait agir la manivelle double, $\frac{3r^2}{c}$ à très-peu-près pour celle de la manivelle triple, et $\frac{4r^2}{c}$ pour celle de la manivelle quadruple (115), on voit que ces puissances suivent la proportion du nombre des bras des manivelles, ou des pistons qui refoulent l'eau.

Comme dans la manivelle quadruple le bras de levier moyen entre 7 et 10 est à-peu-près 9; il faut dire, si 7 donne 9, combien donnera la longueur d'un des bras de la manivelle pour le bras de levier moyen qu'on cherche; la circonférence qui aura pour rayon cette ligne exprimera la vîtesse du poids. Alors, dans le calcul de la machine, on supposera qu'elle n'est composée que d'un corps de pompe dont le piston, suspendu à l'extrémité du bras de levier moyen, agirait sans interruption (r).

(r) Dans la manivelle quadruple dont le rayon est r, la plus petite valeur du moment de la puissance est $r.Q$, et la plus grande $\sqrt{2}.r.Q = 1{,}4142.r.Q$. Le bras de levier moyen du poids étant la distance du centre de gravité d'un quart de

Effort moyen de la puissance dans la manivelle quadruple.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Je pourrais encore rapporter des choses assez curieuses sur les manivelles plus composées; mais comme il n'y a point d'apparence qu'on en fasse jamais usage, je ne m'y arrêterai pas.

Voici quelques principes sur la force des animaux propres à mouvoir les machines, c'est-à-dire sur celle des hommes et des chevaux, extraits des raisonnements et expériences faites sur ce sujet par MM. *de la Hire*, *Sauveur* et *Parent*. Dans la suite nous en ferons l'application à la manœuvre de plusieurs machines essentielles à la vie.

Manière d'estimer la force d'un homme qui élève ou qui porte un fardeau.

117. La force de l'homme et de tout autre animal qu'on emploie à mouvoir des fardeaux, dépend des muscles qui jouent, et de la position où est son corps; et ce n'est que par l'expérience qu'on peut connaître la force des différents muscles.

Un homme d'une taille médiocre et d'une force ordinaire, pèse autour de 140 livres : comme cet homme, étant à genoux, peut se relever en s'appuyant seulement sur la pointe des pieds, et qu'alors les seuls muscles des jambes et des cuisses élevent le poids de tout son corps, il est évident que ces muscles ont la force de 140 livres.

On voit aussi par expérience qu'un homme ayant les jarrets un peu pliés, peut se redresser, quoique chargé d'un poids de 150 liv. auquel ajoutant celui de son corps de 140, la force des muscles des jambes et des cuisses peut donc élever un poids de 290 livres, pourvu que l'élévation ne soit que de deux ou trois pouces au plus.

Un homme peut élever un poids de 100 livres qu'il aurait entre les jambes, ployant seulement le corps pour prendre ce poids avec les mains comme avec deux crochets, et se redressant ensuite; d'où il suit que les seuls muscles des lombes ont la force d'élever un poids de 170 livres; car ils élèvent non-seulement le poids de cent livres, mais encore toute la partie supérieure de son corps, depuis la ceinture qu'on estime peser 70 liv., et qu'il avait penchée pour prendre le poids.

Un homme en se servant d'une poulie fixe, ne peut enlever un poids au-dessus de sa pesanteur propre.

118. A l'égard de la force des bras pour tirer et pour élever un fardeau, elle peut être évaluée à 160 livres. Si l'on a une corde qui passe sur une poulie, qu'à l'un des bouts il y ait un poids de 140 liv., l'homme que nous avons supposé avoir cette pesanteur étant appliqué à l'autre bout de la corde, il ne pourra enlever ce poids, parce qu'il sera en équilibre avec lui, et *qu'on ne peut enlever au-delà de sa pesanteur propre*,

---

cercle dont le rayon $= \sqrt{2}.r$, la valeur moyenne de ce moment est $\frac{\sqrt{2}.r.2r}{\frac{1}{2}\sqrt{2}.r.\pi}.Q = \frac{4r}{\pi}.Q = 1{,}2732.r.Q$: d'où il suit que l'effort moyen de la puissance diffère de $\frac{1}{10}$ environ de son plus grand effort. On voit aussi que dans le calcul indiqué dans le texte, il faut employer le rapport 1 : 1,2732 au lieu de celui 7 : 9.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quelque secousse que l'on se donne, parce que la force des muscles des bras et des épaules ne peut être employée pour soutenir un fardeau plus pesant que le corps, qu'autant qu'on a un point d'appui qu'on ne quitte pas; ce qui ne peut arriver dans le cas dont nous parlons, où l'on ne peut faire agir tout le poids du corps sans perdre terre.

La force d'un homme appliquée à une manivelle, pour la faire tourner, n'est au plus que de 27 livres en agissant avec une vitesse de 1000 toises par heure.

119. M. *de la Hire*, après avoir établi ce que nous venons d'exposer, considère l'effort de l'homme pour tirer ou pour pousser horizontalement; pour cela il le suppose appliqué à la manivelle d'un treuil dont le rayon serait égal au coude de la manivelle, afin d'estimer la force de l'homme, sans qu'il tire avantage de la machine.

Si le coude de la manivelle est placé horizontalement à la hauteur des genoux, l'effort de l'homme qui la relève peut élever en même temps un poids de 150 livres qui serait attaché à l'extrémité de la corde appliquée au treuil, en prenant tous les avantages possibles, puisqu'il sera dans le même cas que ci-devant pour élever ce poids; mais si au contraire il veut abaisser la manivelle, son effort ne peut être que de 140 livres, ne pouvant appuyer que du poids de tout son corps.

Si le coude de la manivelle est placé verticalement, et que la poignée soit à la hauteur des épaules, il est certain qu'un homme ne pourra faire aucun effort pour la faire tourner, en tirant ou en poussant avec la main, si ses deux pieds sont l'un contre l'autre, et que le corps soit droit, puisque, dans cette position, ni la force de tout le corps ou de ses parties, ni sa pesanteur, ne peuvent faire aucun effort pour pousser ou pour tirer.

Mais si la manivelle est plus haute ou plus basse que la hauteur des épaules, l'homme pourra avoir quelque force pour pousser ou pour tirer, et cette force dépend de la seule pesanteur de son corps que l'on doit considérer comme réunie dans son centre de gravité, qui est à-peu-près à la hauteur du nombril, pour déterminer l'équilibre; car l'effort des muscles des jambes et des cuisses ne sert que pour conserver cet équilibre en marchant.

120. Il n'y a donc que lorsque le corps est incliné, qu'un homme peut pousser horizontalement avec le bras; et l'inclinaison la plus commode pour agir, est de faire un angle de 60 degrés avec l'horizon. Alors la force de l'homme se réduit seulement à 27 livres pour pousser horizontalement avec les bras, ou pour tirer une corde en marchant, le corps incliné en-devant, la corde attachée vers les épaules, ou au milieu du corps.

Ceux qui n'ont point examiné de près la force d'un homme, dans la situation que nous venons de supposer, ne sauraient se persuader qu'elle se réduise seulement à 27 livres; cependant on est sûr qu'à peine elle va jusques-là, puisque, selon les expériences qu'a faites M. *Sauveur*, il a

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trouvé que la force d'un homme appliquée à une manivelle, ou qui tire une corde horizontalement, ne pouvait être estimée que de 24 à 25 livres. Pour en juger, il a attaché une poulie au-dessus d'un puits, à une hauteur convenable, a accroché différents poids à un des bouts de la corde qui était dans le puits, et l'autre bout était tiré horizontalement par l'homme qui faisait monter le poids.

121. Il convient de remarquer que quand on réduit la force d'un homme à 25 livres, lorsqu'il agit de la façon que nous venons de dire, on le considère en état de soutenir un travail modéré d'une ou deux heures de suite; encore faut-il avoir égard à sa *vitesse*, qui ne peut guère s'étendre au-delà de *mille toises par heure*, soit qu'il marche ou qu'il manœuvre circulairement.

122. Il suit que *l'effet d'une machine mue par un homme, ne peut jamais être au-dessus de l'effet naturel, c'est-à-dire au-dessus du produit de mille toises en une heure par 25 livres*, de quelque manière que ce produit soit formé par le poids et par la vîtesse, puisqu'on aura toujours la même quantité de mouvement (*s*). Ainsi, un homme faisant mille toises en une heure, peut élever un poids de 25000 livres, pourvu que ce poids ne fasse qu'une toise de chemin dans le même temps. Il en sera de même de toutes les autres machines à l'infini où peut être formé le produit de 25000 livres : l'effet d'une machine a donc nécessairement pour bornes l'effet naturel de la puissance qui meut cette machine, puisqu'il est impossible de tirer du néant une nouvelle force.

La force d'un cheval qui tire est équivalente à celle de sept hommes, ou d'environ 175 liv. avec une vîtesse de 1800 toises par heure.

123. Il reste à comparer la force des hommes à celle des chevaux pour tirer; mais comme elle ne dépend pas entièrement de leur pesanteur, comme celle des hommes, mais principalement des muscles de leur corps, et de la disposition générale de ses parties qui ont un très-grand avantage pour pousser en avant, on doit se contenter de l'expérience commune, par laquelle *on sait qu'un cheval tire horizontalement autant que sept hommes*, c'est-à-dire environ 180 livres, ce qui est peu de chose par rapport à l'idée que l'on a de la force de cet animal : mais cela vient de ce qu'on la considère ordinairement appliquée à quelque machine à roue, laquelle roulant sur un plan horizontal, il ne faut guère au cheval qu'autant de force qu'il en est nécessaire pour vaincre le frottement des essieux.

124. M. *Sauveur* ayant aussi fait des expériences sur la force moyenne d'un cheval, a trouvé qu'il tirait d'un puits un poids d'environ 175 livres,

---

Remarque sur une expression de l'art. 122.

(*s*) On remarquera encore ici que, pour être exact, il fallait dire *de quelque manière que ce produit soit formé par le poids et par l'espace parcouru*, et que le produit d'un poids et d'une vîtesse ne forme pas une quantité de mouvement. Voy. ci-dessus la note (*n*), et l'addition à la fin du livre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

avec une vîtesse de 1800 toises par heure. Ainsi l'on peut encore dire que *quelque art qu'on emploie à composer une machine mue par un cheval, son effet sera toujours moindre, à cause des frottements, que le produit de* 170 *livres par* 1800 *toises de vîtesse en une heure;* puisque ce produit limite nécessairement la quantité de mouvement du poids. Cependant il m'a paru, par nombre d'observations que j'ai faites sur les machines mues par des chevaux, que la vîtesse d'un cheval ordinaire attelé, et qui travaillait pendant deux heures et demie ou trois heures de suite, pouvait aller à deux mille toises par heure (*t*).

Règles du mouvement et du choc des corps en général.

La théorie des eaux ne pouvant être traitée avec exactitude sans le secours des règles du mouvement, voici ce qu'il convient d'en savoir pour l'intelligence de l'architecture hydraulique.

125. Les règles du mouvement dépendent de six choses principales; 1° de *la force motrice* qui est appliquée aux corps; 2° de *la masse* des mêmes corps; 3° de *la vîtesse* avec laquelle ils sont mus; 4° du *temps* ou *de la durée* du mouvement; 5° de l'*espace* parcouru pendant ce temps; 6° de *la force du choc* dont ces mêmes corps sont capables.

Pour rendre plus simples les expressions des règles que nous allons établir, nous supposerons, comme on le fait ordinairement, que *les masses des corps sont proportionnelles à leur poids;* c'est pourquoi nous ne ferons mention que de leurs masses.

126. On appelle force *simplement motrice*, celle qui n'est appliquée à un corps qu'autant de temps qu'il en faut pour lui imprimer un certain degré de vîtesse, après quoi le corps se sépare de la force motrice : alors son mouvement est *uniforme*, c'est-à-dire qu'il parcourt des espaces égaux en des temps égaux.

127. On nomme *force accélératrice* celle qui, étant toujours appliquée au corps, renouvelle sans cesse son impression, augmente dans le second instant l'effet du premier, dans le troisième l'effet du second, et ainsi de suite; de sorte que la vîtesse va toujours en croissant.

128. Il est évident que l'effet de la force motrice simple est un certain espace parcouru en un certain temps, pendant lequel le corps est mu, et que cette force sera d'autant plus grande que l'espace sera plus

---

(*t*) Quoique la connaissance qu'on a présentement des forces de l'homme et du cheval ne soit pas à beaucoup près aussi complette qu'il serait à souhaiter, il y aurait cependant plusieurs choses utiles à ajouter ici. Mais pour qu'elles soient plus profitables au lecteur, j'ai cru devoir les réunir aux notions sur l'établissement et le calcul des machines qu'on trouvera à la fin de ce premier livre.

On renvoie à l'addition placée à la fin du 1^er^ livre pour les notions sur la force de l'homme et du cheval.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

grand et le temps plus court : *donc sa mesure ou son expression, sera l'espace divisé par le temps employé à le parcourir* (*u*).

Manière d'exprimer la vîtesse, l'espace, le temps, la masse et la force d'un corps mu d'un mouvement uniforme.

129. Comme l'espace n'aura été parcouru qu'en vertu de la vîtesse que la force motrice aura imprimée au corps, il suit que plus cet espace sera grand et le temps petit, plus la vîtesse sera grande; et que sa mesure, ou son expression, sera encore l'*espace divisé par le temps*. Ainsi, nommant V la vîtesse, E l'espace, et T le temps, on aura $V = \frac{E}{T}$, donc $VT = E$, $T = \frac{E}{V}$; qui fait voir qu'on pourra toujours exprimer l'espace qu'un corps parcourt d'un mouvement uniforme, *par le produit de sa vîtesse et du temps qu'il a mis à le parcourir*, et qu'on pourra exprimer le temps *par l'espace divisé par la vîtesse*.

130. Quant à la force ou quantité de mouvement dont un corps peut être capable pour choquer une surface ou un autre corps qui lui serait opposé, il est constant, comme nous l'avons dit ailleurs (85), qu'elle doit être exprimée *par le produit de sa masse et de sa vîtesse*. Ainsi, nommant F la force ou quantité de mouvement, M la masse, et V la vîtesse, on aura $F = MV$; donc $\frac{F}{V} = M$, et $\frac{F}{M} = V$, *qui fait voir qu'on aura toujours la masse d'un corps en divisant sa force ou sa quantité de mouvement par sa vîtesse, et qu'on aura sa vîtesse en divisant sa force ou sa quantité de mouvement par sa masse.*

Pour estimer l'action d'un corps contre une surface, il faut avoir égard à la direction selon laquelle ce corps est mu.

131. Lorsqu'un corps mu avec une certaine vîtesse frappe perpendiculairement une surface ou un corps en repos, il fait toute l'impression qu'il peut jamais faire étant mu avec cette vîtesse; mais s'il les frappe obliquement avec la même vîtesse, l'impression sera moindre : c'est pourquoi il faut toujours considérer selon quel angle, ou quelle direction, agit la force appliquée au corps.

Quand deux forces agissent *pleinement*, c'est-à-dire selon des directions perpendiculaires, leurs effets ou impulsions sont dans la raison composée de leurs masses et de leurs vîtesses; mais quand ces deux forces ont leur action diminuée par les circonstances, les effets sont proportionnels aux forces ou causes modifiées comme elles doivent l'être. Par exemple, *si de deux corps différents l'un donne un choc perpendiculaire,*

Sur la mesure de la force motrice.

(*u*) Cet article n'est point exact. On ne peut pas dire que l'effet d'une force motrice est « un certain espace parcouru en un certain temps ». Cet effet est *un espace parcouru en un certain temps par un corps donné, ou une vîtesse imprimée à un corps donné*. La force nécessaire pour imprimer une vîtesse est en raison de cette vîtesse et de la masse du corps qui la reçoit. Ainsi la mesure de la force motrice est le produit de la masse du corps par sa vîtesse, c'est-à-dire la *quantité de mouvement* imprimée au corps.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'autre un oblique, les deux impressions seront comme la masse du premier multipliée par sa vîtesse, et le produit encore par le sinus total est à la masse du second multipliée par sa vîtesse, et le produit par le sinus de l'angle d'incidence (24).

132. Il suit que si les masses et les vîtesses sont égales, les chocs seront comme les sinus correspondants; et que si les masses sont égales et les vîtesses différentes, ainsi que les directions, les chocs seront dans la raison composée des vîtesses et des sinus correspondants des angles d'inclinaison.

Règle générale du choc des corps.

133. Tout le monde convient que dans les corps *sans ressort* le mouvement se perd par un mouvement contraire, c'est-à-dire par celui d'un corps qui va d'un sens directement opposé; d'où il suit que *si deux corps allant d'un sens opposé, et avec des quantités de mouvement égales, viennent à se rencontrer directement, ils s'arrêteront tous deux, et demeureront en repos après le choc* (*v*); parce que chaque quantité de mouvement détruira l'autre qui lui est égale et contraire (87).

134. *Si un corps en mouvement rencontre un autre en repos, la quantité de mouvement subsistera entière après le choc*, puisqu'il n'y en a point de contraire qui la détruise; mais elle sera partagée entre les deux corps, c'est-à-dire qu'il arrivera la même chose que si la masse du corps mu était augmentée de celle du corps en repos, et que sa vîtesse fût diminuée à proportion de l'augmentation de la masse; ainsi *divisant la quantité de mouvement qu'avait le corps mu par la somme des deux masses, on aura la vîtesse avec laquelle les deux corps iront ensemble du même côté* (130).

135. *Si les deux corps se choquent selon des directions opposées avec des quantités de mouvement inégales, le corps qui en aura le plus détruira totalement la quantité de mouvement du corps qui en aura le moins; et il ne restera, pour toute quantité de mouvement, que l'excès de ce que l'un avait au-dessus de l'autre;* alors il arrivera la même chose que si le plus fort, avec ce qui lui reste de force, avait rencontré l'autre en repos.

136. Enfin, *si deux corps allant d'un même côté, en suivant la même direction, viennent à se rencontrer avec des vîtesses inégales, leurs quantités de mouvement demeureront entières après le choc*, puisqu'elles n'ont

---

(*v*) On a long-temps admis cette proposition importante comme un axiôme. D'Alembert a le premier jugé nécessaire de la démontrer par un raisonnement. C'est ce qu'il a fait dans sa *Dynamique*, et il a été imité dans les traités de mécanique qui ont paru après le sien. M. de Prony pense que ce raisonnement renferme une pétition de principe, et que l'égalité d'action de deux corps qui possèdent des quantités de mouvement égales doit être admise comme une suite nécessaire des notions établies sur la nature des forces. Voy. les *Leçons de mécanique analytique*, t. II, p. 63.

Sur l'égalité d'action de deux corps dont les quantités de mouvement sont égales.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rien de contraire l'une à l'autre : il arrivera la même chose que si ces deux corps n'en faisaient plus qu'un ; c'est pourquoi on aura leurs vîtesses communes, en divisant la somme de leurs quantités de mouvement par la somme de leurs masses (130) (*x*).

Sur la théorie du choc des corps solides.

(*x*) La théorie du choc des corps étant susceptible de diverses applications importantes à la pratique, et la considération du choc des corps élastiques, dont Bélidor ne parle point, étant indispensable pour l'intelligence complète de la théorie des machines, j'ai cru devoir suppléer à ce que le texte laisse à desirer ici, en traitant ce sujet d'une manière abrégée, mais plus complète qu'il ne l'est dans les traités élémentaires de mécanique. Il a été indispensable à cette occasion d'employer des notions qui ne seront exposées que dans les notes suivantes.

Des circonstances du choc.

§ 1. Soient deux corps solides animés d'une certaine vîtesse qui viennent à se rencontrer, et admettons, pour plus de simplicité, que ces corps se meuvent dans le même sens, suivant une ligne droite passant par leurs centres de gravité, et perpendiculaire à leurs surfaces au point de contact. Il sera aisé d'appliquer les raisonnements et les formules au cas où les corps se mouvraient en sens contraire, en changeant le signe de la vîtesse de l'un d'eux. L'effet du choc sera de déplacer les molécules des deux corps au point de contact et dans les points voisins, et il se

De l'impression.

formera à leur surface un enfoncement, ou *impression*. Par suite de la résistance que les molécules opposent à leur déplacement, le mouvement des deux corps changera ; celui qui se meut le plus vîte perdra de sa vîtesse, tandis que l'autre en gagnera, en sorte qu'au bout d'un certain temps les vîtesses des deux corps seront égales, et alors l'impression aura acquis sa plus grande valeur. Après ce moment, si les corps sont dépourvus d'élasticité, en sorte que l'impression demeure telle qu'elle a été faite, ils cesseront d'avoir aucune action l'un sur l'autre, et se mouvront en contact d'un mouvement commun. Mais si les corps sont élastiques, c'est-à-dire si leurs molécules déplacées tendent à reprendre leurs premières situations, en sorte que les impressions formées doivent disparaître en tout ou en partie, les corps s'éloigneront l'un de l'autre jusqu'à ce que ces impressions aient été détruites autant qu'elles doivent l'être, et qu'ils cessent d'exercer l'un contre l'autre aucun effort. Après cela ils se mouvront avec des vîtesses différentes, celle du corps choquant étant plus petite, et celle du corps choqué plus grande qu'au moment où l'impression avait atteint son *maximum*.

De la force de percussion.

L'action que les corps exercent l'un sur l'autre pendant la durée du choc est ce qu'on nomme la *force de percussion*, en entendant par-là le poids dont il faudrait charger l'un des corps pour qu'étant posé sur l'autre, sans être animé d'aucune vîtesse, il se produisît des effets égaux à ceux qui résultent du choc. La grandeur de la force de percussion varie en général pendant la durée du choc, mais on doit admettre qu'à un instant donné, elle est d'autant plus grande 1° que dans chaque corps l'étendue en surface sur laquelle les molécules sont déplacées est plus grande ; 2° que les résistances opposées par ces molécules à leur déplacement est plus considérable. Par conséquent en nommant s, s' *l'amplitude de l'impression* dans les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

137. Pour établir les règles générales du mouvement uniforme, j'avertis une fois pour toutes que nous continuerons à nommer V la vîtesse d'un

---

deux corps, et ρ, ρ' les résistances dont on vient de parler, qu'on nommera pour abréger la *dureté* des corps, la force de percussion, qu'on représentera par P, devra être proportionnelle au produit $\rho s . \rho' s'$. Il faut remarquer de plus que, si la dureté ρ de l'un des corps était infinie, et que l'impression qui s'y ferait pût être considérée comme nulle, il faudrait que la valeur de P se réduisît alors à $\rho' s'$, et réciproquement. On doit donc représenter P par une fonction qui satisfasse à cette condition, et c'est à quoi on parviendra, de la manière la plus simple, en posant $P = \frac{\rho s . \rho' s'}{\rho s + \rho' s'}$.

Mouvement des corps pendant le choc.

§ 2. Nommons m, m' les masses des deux corps; V et V′ leurs vîtesses respectives à l'instant où le choc commence, V étant censée plus grande que V′; t le temps compté à partir du commencement du choc; e, e' les espaces parcourus par chaque corps au bout du temps t; x, x' les profondeurs des impressions qui ont lieu au bout du même temps, mesurées sur la ligne du mouvement des corps; v, v' les vîtesses variables des deux corps qui ont lieu au bout du temps t pendant la durée du choc.

On aura d'abord la relation $e = e' + x + x'$, ou $e - e' = x + x'$; et on peut observer que, si les corps sont parfaitement élastiques, cas auquel la profondeur de l'impression est nulle à la fin du choc, on a dans cet instant $e - e' = 0$, ce qui fait voir que deux corps de cette espèce parcourent des espaces égaux pendant la durée totale du choc. On remarquera ensuite que les volumes des impressions élémentaires qui se forment dans un même instant dans chaque corps, lesquels sont représentés respectivement par $s\,dx$, $s'\,dx'$, doivent être nécessairement en raison inverse des duretés ρ et ρ' de chaque corps, ce qui fournit la relation $\rho s\,dx - \rho' s'\,dx' = 0$. Enfin on observera que, lorsque les impressions formées dans les corps ont atteint leur *maximum*, ce qui arrive quand ces corps n'exercent plus aucune pression l'un contre l'autre, leurs vîtesses v, v' étant alors égales, on a dans cet instant $v - v' = 0$.

Cela posé, on aura une première relation entre v et v' en remarquant que d'après le principe de d'Alembert (voy. le § 7 de la note (ai)), les quantités de mouvement $m\,dv$, $-m'\,dv'$ que les corps perdent respectivement dans chaque élément du temps doivent être égales; ce qui donne $m\,dv + m'\,dv' = 0$, ou, en intégrant et déterminant la constante par la condition qu'on ait en même temps $v = V$ et $v' = V'$, $m\,(v - V) + m'\,(v' - V') = 0$. (A)

On observera ensuite que la force de percussion P doit être considérée pendant la durée du choc comme une force accélératrice appliquée en sens contraire à chacun des corps, et qui leur imprime dans l'instant dt les quantités d'actions $-P\,de$, $P\,de'$; en sorte que l'équation du principe de la conservation des forces vives, établie dans le § 7 de la note (ai), donnera ici $mv^2 + m'v'^2 = const. + 2\int(-P\,de + P\,de')$, ou, en mettant pour de la valeur qui résulte de la relation entre e, e', x, x'

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mobile, M sa masse, F sa force ou quantité de mouvement, E l'espace parcouru, et T le temps employé à le parcourir, et que nous nomme-

---

établie ci-dessus, $m'v^2 + m'v'^2 = const. - 2\int(P\,dx + P\,dx')$. En substituant dans cette équation pour dx' sa valeur $\frac{\rho s}{\rho' s'}dx$, et pour P la sienne, elle prendra la forme $mv^2 + m'v'^2 = const. - 2\int\rho\,s\,dx$. La constante se déterminera en remarquant qu'à l'instant où le choc commence, on a $v = V$, $v' = V'$, $\int\rho\,s\,dx = 0$, et l'équation deviendra $mv^2 + m'v'^2 = mV^2 + m'V'^2 - 2\int\rho\,s\,dx$. (B)

Eliminant v' entre cette dernière équation et la précédente, on trouve pour la valeur de v, $v = \frac{mV + m'V'}{m+m'} \pm \frac{m'}{m+m'}\sqrt{(V-V')^2 - \frac{2(m+m')}{mm'}\int\rho\,s\,dx}$. (C)

Expression générale de la vîtesse à un instant quelconque du choc.

Le signe supérieur doit être employé avant que l'impression ait atteint son *maximum*, et le signe inférieur après le *maximum*, et quand l'impression est décroissante. Cette dernière circonstance n'a lieu que dans le choc des corps élastiques.

La formule (C) donne la valeur de la vîtesse v en fonction de l'intégrale $\int\rho s\,dx$, dont on ne pourrait fixer la valeur qu'autant qu'on connaîtrait la loi de la variation de la dureté du corps pendant le choc, et l'amplitude de l'impression dans un instant donné du choc. On peut supposer la dureté ρ constante pendant toute la durée du choc. Alors l'intégrale se réduit à $\int s\,dx$ qui représente le volume de l'impression qui s'est faite à un instant quelconque du choc. La vîtesse v étant connue, on calculera celle v' au moyen de l'équation (A).

Les vîtesses des deux corps qu'il est sur-tout important de connaître, sont celles qui ont lieu à la fin du choc. Dans les corps durs, le choc finit à l'instant où l'impression a atteint son *maximum*, et où l'on a $v = v'$. L'équation (A) donne alors immédiatement $v = v' = \frac{mV + m'V'}{m+m'}$, expression qui s'accorde avec les règles contenues dans les art. 135 et 136 du texte.

Vîtesses des corps non élastiques après le choc.

A l'égard des corps parfaitement élastiques, le choc finit à l'instant où l'impression, après avoir augmenté jusqu'à son *maximum*, a diminué jusqu'à redevenir nulle. Alors on a $\int\rho\,s\,dx = 0$, et comme il faut prendre le signe — devant le radical, la formule (C) donne $v = \frac{(m-m')V + 2m'V'}{m+m'}$. En cherchant la valeur correspondante de v' au moyen de l'équation (A), on trouve $v' = \frac{(m-m')V' + 2mV}{m+m'}$.

Vîtesses des corps parfaitement élastiques après le choc.

Enfin, si les corps qui se choquent n'ont qu'une élasticité imparfaite, l'impression, dont $\int s\,dx$ représente le volume, ne sera pas entièrement anéantie à la fin du choc, et les vîtesses des corps dépendront de la valeur plus ou moins grande qu'elle conservera. L'hypothèse la plus naturelle qu'on puisse adopter à ce sujet consiste à supposer que la grandeur de l'impression à la fin du choc est proportionnelle à la plus grande valeur qu'elle a prise. Or on verra dans le § suivant que le volume de l'impression est à son *maximum* égal à $\frac{mm'}{2\rho(m+m')}(V-V')^2$. Supposant donc que le volume de l'impression à la fin du choc est exprimé par $(1-n^2)\frac{mm'}{2\rho(m+m')}(V-V')^2$, en représentant par n un nombre fractionnaire

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rons aussi par les lettres semblables v, m, f, e, t, la vîtesse, la masse, la force, l'espace et le temps appartenant à l'action d'un autre mobile.

138. Selon ce qui a été dit ci-devant (129 et 130), on aura $V = \frac{E}{T}$, Formules générales d'où l'on tire

---

constant pour chaque nature de corps, lequel sera $= 0$ quand l'élasticité sera nulle et $= 1$ quand elle sera parfaite, et mettant cette quantité à la place de $\int s\,dx$ dans l'équation (C), on trouvera $v = \frac{(m - nm')V + (1+n)m'V'}{m+m'}$, $v' = \frac{(m-nm')V' + (1+n)mV}{m+m'}$. Ces formules, comme cela doit être, redonnent celles obtenues pour les corps non élastiques en faisant $n = 0$, et pour les corps parfaitement élastiques, en faisant $n = 1$. La constante n est proprement la mesure du degré d'élasticité des corps : et effectivement en représentant par n la portion de la vîtesse perdue par le choc que la force d'élasticité restitue aux corps, on parvient également aux expressions ci-dessus. Voy. le § 15 de la note (*ai*). Vîtesses des corps imparfaitement élastiques après le choc.

On remarquera que les expressions précédentes des vîtesses qui ont lieu à la fin du choc sont indépendantes de toute hypothèse sur la dureté.

§ 3. La dureté ρ étant supposée constante, on déduit de l'équation (B) pour la valeur variable du volume de l'impression faite dans le corps m, l'expression $\int s dx = \frac{1}{2\rho}(mv^2 + m'v'^2 - mV^2 - m'V'^2)$. On a vu ci-dessus qu'à l'instant où l'impression était parvenue à son *maximum*, on avait $v = v' = \frac{mV + m'V'}{m+m'}$. En introduisant cette supposition dans la formule précédente, et représentant par I le volume de la plus grande impression qui ait lieu, on aura $I = \frac{mm'}{2\rho(m+m')}(V - V')^2$. En cherchant de la même manière le volume de la plus grande impression faite dans le corps choqué, on trouvera $I' = \frac{mm'}{2\rho'(m+m')}(V - V')^2$. Du volume de l'impression.

Si le corps choqué était immobile, et sa masse très-grande par rapport à celle du corps choquant, il faudrait faire $V' = 0$ et négliger m par rapport à m' : alors le volume de l'impression faite dans le corps choqué deviendrait $I' = \frac{m}{2\rho'}V^2$.

§ 4. La force de percussion est nulle à l'instant où le choc commence, et augmente progressivement jnsqu'au moment où l'impression atteint son *maximum* : c'est à cet instant qu'il est utile de la connaître. En mettant dans son expression, établie à la fin du § 1, pour ρ' la valeur $\frac{\rho I}{I'}$, elle deviendra $P = \frac{\rho s . I s'}{sI' + s'I}$. Substituant dans cette formule pour ρ la valeur qu'on tirerait de l'expression de I du § 3, il viendra pour l'expression cherchée $P = \frac{mm'}{2(m+m')} \cdot \frac{ss'}{sI' + s'I}(V - V')^2$. Valeur de la force de percussion.

Si le corps choqué était immobile et sa masse très-grande par rapport à celle du corps choquant, on aurait alors pour la valeur de la force de percussion, $P = \frac{1}{2} m \frac{ss'}{sI' + s'I} V^2$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

toutes les règles du mouvement uniforme.

$v = \frac{e}{t}$, $F = MV$, $f = mv$; par conséquent $F : f :: MV : mv$, mettant à la place des vîtesses leurs valeurs, il vient $F : f :: \frac{ME}{T} : \frac{me}{t}$; par conséquent $\frac{Fme}{t} = \frac{fME}{T}$; ou, en faisant évanouir les fractions, $FTme = ftME$, dont on pourrait se servir pour règle générale des mouvements uniformes (γ).

Si de plus l'impression faite dans le corps choquant pouvait être censée nulle par rapport à celle faite dans le corps choqué, on aurait $P = \frac{1}{2} m \frac{s'}{I'} V^2$.

Rapport de la force de percussion à la pesanteur.

On peut remarquer qu'en nommant g la force accélératrice de la pesanteur, et H la hauteur due à la vîtesse V (voy. la note (ab)), ce qui donne $V^2 = 2gH$, cette dernière formule peut être mise sous la forme $P = mg \frac{s'}{I'} H$. Or mg étant le poids du corps choquant (voy. la note (b)), on voit que la force de percussion est égale à ce poids multiplié par la quantité $\frac{s' H}{I'}$: c'est ce qu'on nomme le *rapport de la force de percussion à la pesanteur.*

Ces formules supposent la dureté constante pendant toute la durée du choc. Le peu d'observations qu'on a recueillies sur cette matière s'accordant assez bien avec elles (voyez l'*Examen Maritime de D. G. Juan, traduit par Lévêque*, tom. 1, p. 141 et suiv., ou la *Nouv. Arch. hydr. de M. de Prony*, t. 1, p. 219), il paraît que cette hypothèse peut être admise dans beaucoup de cas sans erreur sensible.

Durée du choc.

A l'égard de la durée du choc, on ne peut la connaître exactement, mais on s'assure facilement qu'elle est en général extrêmement courte, et peut être regardée comme inappréciable (voyez les ouvrages cités). On remarquera aussi que l'analyse précédente suppose seulement les corps animés à l'instant du choc des vîtesses V et V' : il pourrait arriver qu'ils fussent en outre soumis à l'action de quelque force accélératrice, dont il faudrait tenir compte dans les formules. Mais dans tous les cas qui peuvent se présenter dans les applications, on peut se dispenser d'y avoir égard, la durée du choc étant assez courte pour que l'action des forces accélératrices ne puisse apporter aucune modification sensible aux phénomènes qu'il présente.

On peut négliger les forces accélératrices agissant sur les corps qui se choquent.

Équation générale du mouvement uniforme.

(γ) La relation $V = \frac{E}{t}$, ou $E = Vt$, qui exprime en fonction du temps l'espace parcouru par un corps depuis l'origine du mouvement, est ce qu'on nomme l'*équation du mouvement uniforme.* On peut l'écrire d'une manière plus générale, en supposant qu'au commencement du mouvement le corps se trouvait à une distance E' du point fixe à partir duquel on compte les espaces. On a alors $E = E' + Vt$.

Son usage pour trouver le lieu et le temps de la rencontre de deux mobiles.

On aura de même pour un autre corps $e = e' + vt$. La combinaison de ces équations conduit à quelques formules qu'il peut être utile d'avoir sous les yeux.

Quand les mobiles sont à une distance ε l'un de l'autre, on a $t = \frac{e' - E' \pm \varepsilon}{V - v}$ (les signes + et — ont lieu suivant que les corps sont à la distance ε avant ou après leur rencontre).

Quand ils se rencontrent, on a $t = \frac{e' - E'}{V - v}$, $E = e \frac{Ve' - vE'}{V - v}$.

On suppose $V > v$ et $E' < e'$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

139. Ayant aussi $V:v::\frac{E}{T}:\frac{e}{t}$, on tirera de même $\frac{Ve}{t}=\frac{vE}{T}$, ou $VTe=vtE$ pour une seconde règle qui comprend les vîtesses.

140. Enfin puisqu'on a $F:f::MV:mv$, on en tirera encore $Fmv=fMV$ pour une troisième règle. Ces trois règles comprennent si généralement tout ce qui regarde les mouvements uniformes, qu'on les peut appliquer à toutes les hypothèses imaginables.

Application de la première règle ou formule à différentes hypothèses.

141. On pourra tirer de la première règle (138) $FTme=ftME$ autant d'analogies qu'elle comprend de racines, en prenant d'abord les grandeurs de même espèce : en voici une pour exemple, $F:f::ME t:me T$, c'est-à-dire que *les forces sont dans la raison composée des produits des masses et des espaces directement, par les temps réciproquement.* On énoncera les autres de la même manière.

142. Pour tirer de la même règle d'autres analogies plus simples, on fera autant de suppositions que l'équation comprend de racines différentes. Par exemple, si l'on suppose $F=f$, on aura $Tme=tME$, d'où l'on tire, 1° $T:t::ME:me$, 2° $M:m::Te:tE$, 3° $E:e::Tm:tM$; c'est-à-dire que, lorsque les forces sont égales, 1° les temps sont comme les produits des masses par les espaces, 2° les masses sont comme les produits des temps pris directement par les espaces réciproquement, 3° les espaces sont comme les produits des temps directement par les masses réciproquement.

143. De même, supposant $M=m$, on aura, 1° $F:f::Et:eT$, 2° $T:t::Ef:eF$, 3° $E:e::TF:tf$: c'est-à-dire que, si les masses sont égales, 1° les forces sont dans la raison composée des espaces directement et des temps réciproquement, 2° les temps sont entre eux dans la raison composée des espaces directement et des forces réciproquement, 3° les espaces sont entre eux dans la raison composée des temps et des forces, l'un et l'autre pris directement.

144. Si $T=t$, on aura 1° $F:f::ME:me$, 2° $M:m::Fe:fE$, 3° $E:e::Fm:fM$: c'est-à-dire que, si les temps sont égaux, 1° les forces seront dans la raison composée des masses et des espaces, l'un et l'autre pris directement; 2° les masses sont entre elles dans la raison composée des forces directement et des espaces réciproquement; 3° les espaces seront dans la raison composée des forces directement et des masses réciproquement.

145. Enfin si $E=e$, on aura 1° $F:f::tM:Tm$, 2° $M:m::FT:ft$, 3° $T:t::Mf:mF$; c'est-à-dire que, si les espaces sont égaux, 1° les forces seront dans la raison composée des masses directement et des temps réciproquement; 2° les masses seront entre elles dans la raison composée des forces et des temps, l'un et l'autre pris directement; 3° les temps seront

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

entre eux dans la raison composée des masses directement et des forces réciproquement.

Application de la seconde règle.

146. La seconde règle $VTe = vtE$ donnera aussi autant d'analogies qu'elle a de racines, 1° $E:e::VT:vt$, 2° $V:v::Et:eT$, 3° $T:t::Ev:eV$. La première montre que les espaces parcourus sont dans la raison composée des vîtesses et des temps; la seconde, que les vîtesses sont entre elles dans la raison composée des espaces directement et des temps réciproquement; la troisième, que les temps sont entre eux dans la raison composée des espaces directement et des vîtesses réciproquement.

147. On tirera encore de la même règle autant d'analogies qu'on peut faire de suppositions différentes. Ainsi $T = t$ donnera $V:v::E:e$, qui fait voir que lorsque les temps sont égaux, les vîtesses sont comme les espaces parcourus.

148. De même $V = v$ donne $E:e::T:t$; c'est-à-dire que lorsque les vîtesses seront égales, les espaces parcourus seront comme les temps.

Si $E = e$, on aura $V:v::t:T$, c'est-à-dire que si les espaces sont égaux, les vîtesses seront en raison réciproque des temps.

Application de la troisième.

149. Enfin, l'on déduira encore de la troisième règle $Fmv = fMV$ plusieurs conséquences, comme l'on a fait à l'égard des deux autres. Car on aura d'abord $F:f::MV:mv$, $M:m::Fv:fV$, $V:v::mF:Mf$. La première montre, comme on l'a déja dit, que les forces sont dans la raison composée des masses des corps et de leurs vîtesses; la seconde, que les masses sont dans la raison composée des forces directement et des vîtesses réciproquement; la troisième, que les vîtesses sont dans la raison composée des forces directement et des masses réciproquement.

150. Si l'on suppose $V = v$, on aura $F:f::M:m$, c'est-à-dire que si les vîtesses sont égales, les forces seront comme les masses.

151. De même, si $M = m$, on aura $F:f::V:v$, qui montre que si les masses sont égales, les forces seront comme les vîtesses.

152. Enfin, si $F = f$, on aura $M:m::v:V$, qui fait voir que lorsque les forces sont égales, les vîtesses sont en raison réciproque des masses.

Du mouvement accéléré.

153. L'expérience montre que la vîtesse d'un corps pesant qui tombe, augmente incessamment, ou qu'il parcourt un plus grand espace dans le deuxième instant que dans le premier; un plus grand dans le troisième que dans le deuxième, ainsi de suite.

Principe de Galilée sur la chûte des corps.

154. *Galilée*, en regardant *la pesanteur* comme une *force accélératrice* (127), et faisant abstraction de la résistance de l'air, a assuré le premier *qu'un corps reçoit à chaque instant de la durée de sa chûte un degré égal de vîtesse, et que ce degré de vîtesse se conserve entier dans les instants suivants, pendant lesquels il en acquiert toujours de nouveaux;* ou, ce

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui revient au même, que *l'action de la pesanteur agit également sur un corps dans tous les instants de sa chûte*, c'est-à-dire que si l'on partage la durée de la chûte en un nombre d'instants égaux infiniment petits, le premier degré de vîtesse s'acquerra depuis le repos jusqu'à la fin du premier instant, et demeurera entier dans les autres instants suivants: pendant le deuxième instant, le corps acquerra un second degré égal au premier, lequel sera tout acquis à la fin du second instant, où le corps aura acquis deux degrés de vîtesse: de même le troisième degré s'acquerra pendant le troisième instant, et sera tout acquis à la fin de ce troisième instant; alors le corps aura trois degrés de vîtesse, et ainsi de suite: c'est de quoi tous les savants conviennent.

Les vîtesses acquises sont dans la raison des temps écoulés.

155. Puisque les degrés de vîtesse d'un corps qui tombe croissent comme les instants écoulés depuis le repos, il suit que *les vîtesses acquises à la fin de deux temps différents seront entre elles dans la raison des mêmes temps*; c'est-à-dire, par exemple, que si un corps dans le temps T a acquis la vîtesse V, et que dans un autre temps t, il ait acquis la vîtesse v, l'on aura $V:v::T:t$, par conséquent $Vt=vT$.

156. Si l'on fait attention que la suite des instants qui s'écoulent en commençant depuis le premier, composent une progression arithmétique, on verra que la suite des vîtesses qui leur répondent doit composer aussi une progression arithmétique dont le plus petit terme peut être regardé comme zéro, et dont le plus grand sera la vîtesse acquise à la fin du temps total. Or, comme entre la plus petite et la plus grande vîtesse, il y en a une *moyenne* avec laquelle le corps étant mu d'un mouvement uniforme parcourrait dans le même temps le même espace que le corps a parcouru d'un mouvement accéléré, il suit que *multipliant cette vîtesse moyenne par le temps total, le produit exprimera l'espace parcouru* (129).

Comme les éléments d'un triangle, en commençant depuis le sommet, composent une progression arithmétique infinie dont la moitié de la base, ou du plus grand terme, est égale au terme moyen, il suit que les vîtesses qu'un corps acquiert en tombant depuis le repos, croissant dans le même ordre que les éléments d'un triangle, *la vîtesse moyenne sera égale à la moitié de la vîtesse acquise à la fin du temps total.* Si V exprime la vîtesse acquise à la fin du temps T, $\frac{1}{2}$ V exprimera exactement la vîtesse moyenne, par conséquent $\frac{1}{2}$ TV exprimera l'espace parcouru d'un mouvement accéléré.

157. Il suit que *l'espace qu'un corps parcourt en accélérant depuis son repos, dans un temps déterminé T, est la moitié de l'espace que ce corps parcourrait dans le même temps, d'un mouvement uniforme, avec la vîtesse V acquise à la fin du dernier instant de sa chûte*; car si le mouvement est uniforme, l'espace sera exprimé par TV (129), au lieu qu'il ne l'est que par $\frac{1}{2}$ TV quand le mouvement est accéléré (156). Par conséquent,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

si un corps pesant étant descendu depuis le repos pendant un temps T, a parcouru l'espace E, et qu'il ait acquis à la fin de sa chûte la vîtesse V, il parcourra d'un mouvement uniforme, avec cette même vîtesse acquise, un espace 2E dans le même temps T.

Manière de réduire le mouvement accéléré au mouvement uniforme.

158. On tire de l'article précédent le moyen de réduire le mouvement accéléré au mouvement uniforme; pour cela, *il faut prendre la vîtesse du mouvement accéléré toute acquise, et la concevoir comme demeurant uniforme; et si l'on prend le même temps, il faudra doubler l'espace parcouru d'un mouvement accéléré, et regarder cet espace double comme ayant été parcouru d'un mouvement uniforme avec la dernière vîtesse acquise.*

159. Il suit que si un mobile a parcouru en accélérant depuis le repos les espaces E, e, en deux temps différents T, t, et qu'il ait acquis à la fin des mêmes espaces les vîtesses V, v, on aura 2E pour l'espace qu'il parcourra avec la vîtesse V d'un mouvement uniforme dans le temps T, et $2e$ pour l'espace que parcourra le même mobile avec la vîtesse v, aussi d'un mouvement uniforme dans le temps t; alors si $T = t$, on aura $V : v :: 2E : 2e$ (147).

160. Si l'on veut regarder l'espace parcouru d'un mouvement accéléré, comme ayant été parcouru d'un mouvement uniforme avec la vîtesse acquise à la fin de sa chûte, il faudra prendre la moitié du temps, et regarder $\frac{1}{2}T$ comme le temps que le corps a employé à parcourir l'espace E avec la vîtesse uniforme V; car l'espace sera toujours le même, soit qu'il ait été parcouru dans le temps $\frac{1}{2}T$ avec la vîtesse V d'un mouvement uniforme, ou qu'il ait été parcouru dans le temps entier T, avec la vîtesse $\frac{1}{2}V$ prise aussi pour uniforme, comme dans l'article 157; puisque dans l'un et l'autre cas on aura toujours $\frac{1}{2}TV = E$, d'où l'on tire $\frac{1}{2}V = \frac{E}{T}$.

Un corps qui est repoussé de bas en haut avec la vîtesse qu'il a acquise en tombant, doit remonter à la hauteur d'où il est tombé.

161. On remarquera que *si un corps, après être tombé d'une certaine hauteur est repoussé de bas en haut avec la vîtesse acquise à la fin de sa chûte, il remontera d'où il était parti dans un temps égal à celui de sa chûte, et perdra dans des instants égaux les degrés égaux de vîtesse qu'il avait acquis en descendant*, parce que l'action de sa pesanteur fera diminuer sa vîtesse en montant dans la même proportion qu'elle l'avait augmentée en descendant, et cette vîtesse sera totalement détruite à l'instant qu'il sera parvenu au point d'où il était parti : c'est là ce qu'on nomme *mouvement retardé*.

Les espaces parcourus sont entre eux comme les quarrés des temps.

162. Puisque dans le mouvement uniformément accéléré les vîtesses acquises à la fin de deux temps différents sont entre elles dans la raison des mêmes temps (155), on a $V : v :: T : t$, ou $\frac{1}{2}V : \frac{1}{2}v :: T : t$. Mais comme $\frac{1}{2}V = \frac{E}{T}$, et $\frac{1}{2}v = \frac{e}{t}$ (156), on aura $\frac{E}{T} : \frac{e}{t} :: T : t$; ou en faisant évanouir les fractions $E : e :: T^2 : t^2$; ce qui fait voir en général que, *dans le mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus par un mobile depuis le repos*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en deux temps différents, sont entre eux comme les quarrés des mêmes temps.

163. Donc si un mobile tombant librement depuis le repos A, parcourt AB pendant une seconde, AC pendant deux secondes, AD pendant trois secondes, et AE pendant quatre secondes, on aura AB:AC :: 1:4; de même AC:AD :: 4:9; de même AD:BE :: 9:16; AC:AE :: 4:16; ainsi des autres. PLANCHE 5. FIGURE 61.

164. Si l'on prend séparément l'espace parcouru dans chaque seconde, celui de la première sera 1, de la seconde 3, de la troisième 5, de la quatrième 7, de la cinquième 9; ainsi de suite selon l'ordre des nombres impairs, 1, 3, 5, 7, 9, etc.

165. Un mobile ayant parcouru les espaces FG et FI dans les temps t, T, si l'on veut connaître le rapport de ces temps, ou des vîtesses v, V acquises aux points G, I, il faut décrire le demi-cercle FHI, élever la perpendiculaire GH afin d'avoir la ligne FH moyenne proportionnelle entre FG et FI, et le rapport de FG à FH sera le même que celui de t à T, ou de v à V. Car les trois lignes FG, FH, FI, étant en proportion continue, donnent $FG:FI :: \overline{FG}^2:\overline{FH}^2$. Et comme on a aussi $FG:FI :: t^2:T^2$, on aura donc $\overline{FG}^2:\overline{FH}^2 :: t^2:T^2$, ou $FG:FH :: t:T$; par conséquent $FG:FH :: v:V$. FIGURE 62.

166. L'action de la pesanteur, ou les forces accélératrices qui poussent les corps vers le centre de la terre, allant toujours en croissant comme les vîtesses dont elles sont les causes, on aura $F:f :: V:v$, d'où l'on tire $Fv = fV$, qui étant multipliée par $Et^2 = eT^2$, donne $FvEt^2 = fVeT^2$, qu'on peut regarder comme une première règle générale du mouvement accéléré, qui comprend les forces, les vîtesses, les espaces, et les quarrés des temps (*z*). Règle ou formule générale pour le mouvement accéléré.

167. Puisque $F:f :: V:v$ (166); on aura aussi $F:f :: T:t$, par conséquent

(*z*) Les expressions de l'auteur, dans cet article, sont très-inexactes, et prêtent beaucoup à l'équivoque. Il est très-faux que « l'action de la pesanteur aille en croissant avec la vîtesse : » cette action est au contraire constante et indépendante de la vîtesse. C'est parce qu'elle est toujours la même qu'elle imprime continuellement aux corps des degrés égaux de vîtesse, et que leur mouvement s'accélère proportionnellement au temps. Il faut bien se garder de croire, comme les expressions du texte l'insinueraient, que les lettres F, f représentent ici des efforts variables et proportionnels aux vîtesses, que la pesanteur exercerait sur les corps aux différentes époques de leur chûte. Ces lettres représentent les forces avec lesquelles les corps, en raison des vîtesses qu'ils auraient acquises, viendraient frapper des obstacles. Ces forces ne sont autre chose que leurs quantités de mouvement, lesquelles sont proportionnelles aux vîtesses si les masses des deux corps sont censées égales, comme il faut admettre que l'auteur le fait ici, quoiqu'il n'en parle point. Éclaircissements sur l'art. 166.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$Ft = fT$, qui étant multipliée par $Vt = vT$, donne $FVt^2 = fvT^2$, qui est une seconde règle générale dont nous nous servirons par la suite, ainsi que de la précédente, pour découvrir tout ce qui peut appartenir aux corps qui roulent sur des plans inclinés.

168. Ayant $V : v :: T : t$, on aura aussi $V^2 : v^2 :: T^2 : t^2$; or si dans la proportion précédente $E : e :: T^2 : t^2$, on met les quarrés des vîtesses à la place de ceux des temps, on aura $E : e :: V^2 : v^2$, qui fait voir que *les espaces parcourus sont entre eux comme les quarrés des vîtesses acquises à la fin des mêmes espaces.*

Les vîtesses acquises sont dans la raison des racines quarrées des espaces parcourus.

169. Si l'on extrait la racine quarrée de la proportion $E : e :: V^2 : v^2$, l'on aura $\sqrt{E} : \sqrt{e} :: V : v$; qui fait voir que *dans le mouvement uniformément accéléré, on peut exprimer les vîtesses acquises par les racines quarrées des espaces parcourus à la fin de deux hauteurs différentes.*

170. Puisque dans le mouvement uniformément accéléré, les vîtesses depuis le commencement de la chûte sont entre elles comme les temps, on aura $T : t :: \sqrt{E} : \sqrt{e}$.

171. La force ou la quantité de mouvement de deux corps différents devant être exprimée par le produit de leurs masses M, m, et de leurs vîtesses V, v (85), il suit que si ces vîtesses ont été acquises d'un mouvement accéléré, en parcourant depuis le repos les espaces E, e, puisque $\sqrt{E} : \sqrt{e} :: V : v$, on aura $M\sqrt{E} : m\sqrt{e} :: MV : mv$; ce qui fait voir que *lorsque deux corps sont tombés de deux hauteurs différentes, on aura le rapport des forces de ces deux corps, ou de leurs quantités de mouvement, en multipliant la masse de chacun par la racine de la hauteur d'où il sera tombé.*

Expériences faites pour connaître l'espace qu'un corps parcourt depuis le repos dans une seconde.

172. Plusieurs célèbres mathématiciens ont fait un grand nombre d'expériences pour savoir quelle hauteur un corps parcourait depuis le repos, dans un temps déterminé, en tombant librement dans l'air. Galilée a trouvé qu'une balle de plomb parcourait douze pieds dans la première seconde. Le père Sébastien et M. Mariotte ont trouvé que cette balle en parcourait treize. M. de la Hire prétend, par les expériences qu'il a faites à l'Observatoire, qu'elle en parcourt quatorze. Enfin M. Huyghens prétend par les siennes que *la balle parcourt quinze pieds dans la première seconde.* C'est aussi le sentiment du célèbre Newton (*), et qui paraît le plus généralement suivi. En effet, c'est celui qui cadre le mieux avec la théorie, comme je le démontrerai à la fin de ce chapitre; c'est pourquoi nous compterons là-dessus, comme sur un principe certain, pour tous les calculs qui se rapporteront à la chûte des corps. Ainsi *on pourra*

(*) La résistance de l'air, qui peut être plus ou moins forte en raison de son plus ou moins de densité, de sa tranquillité ou de son agitation, peut avoir donné lieu aux différences que l'on observe dans les expériences faites par ces grands hommes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

regarder une vîtesse uniforme de trente pieds par seconde, comme ayant été acquise à la fin de la chûte d'un corps qui serait tombé de quinze pieds de hauteur (158) (*aa*).

173. La plupart de ceux qui ne jugent des choses que par les sens, s'imaginent que de deux corps inégaux en poids, qu'on laisse tomber librement d'un même point de repos, celui qui a le plus de masse doit aller plus vîte que l'autre, par la seule raison qu'il est plus pesant. Quoiqu'il soit facile de prouver par le raisonnement que ce sentiment n'est pas juste, il me suffira de dire que l'expérience y est contraire, ayant éprouvé nombre de fois que laissant tomber dans le même instant de la hauteur de dix ou douze toises une balle de fusil et un boulet de canon de vingt-quatre livres, ils arrivaient à terre sensiblement dans le même temps : c'est de quoi tous les savants conviennent. Il est bien vrai que si on laisse tomber d'un même point un globe *de liége* et un autre *de plomb* de même diamètre, le premier descendra moins vîte que l'autre, parce qu'ayant plus de surface, eu égard à sa masse, que le second n'en a eu égard à la sienne, le globe de liége trouvera plus de résistance de la part de l'air que le globe de plomb : mais dans le vide ils doivent tomber avec la même vîtesse. Des expériences faites avec un très-grand soin par le grand Newton, ont fait voir que le moindre brin de duvet se précipite de haut en bas d'un long récipient, vide d'air, avec autant de vîtesse qu'une balle de plomb. Ainsi, en faisant abstraction de la résistance de l'air, on peut dire que la force accélératrice est la même dans tous les corps.

174. Prévenu qu'un corps parcourt 15 pieds dans la première seconde, et que les espaces sont entre eux comme les quarrés des temps (162), si l'on voulait connaître celui que le même corps parcourra en 5 secondes, Application des règles du mouvement accéléré à plusieurs exemples.

(*aa*) D'après les résultats adoptés pour l'établissement du nouveau système de mesures, la hauteur dont les corps pesants tomberaient pendant la durée d'une seconde, dans le vide, à la latitude de Paris et au niveau de la mer, est exactement de 4,904398 mètres, qui revient à 15,0979 pieds. La vîtesse que la pesanteur imprime aux corps dans chaque seconde de leur chûte, qu'on représente ordinairement dans les calculs par la lettre g, étant le double de cette hauteur, on a $g = 9{,}808795$ mètres. Valeur exacte de la vîtesse imprimée aux corps dans une seconde par la pesanteur.

Pour connaître ensuite les valeurs que prend la quantité g à diverses latitudes, on a la formule $g = 9{,}77980 + 0{,}05174 \sin.^2 L$, dans laquelle L exprime la latitude du lieu comptée en degrés décimaux à partir de l'équateur.

Enfin si l'on veut calculer la diminution que la valeur de g éprouve quand on s'élève à différentes hauteurs au-dessus du niveau de la mer, il faut se rappeler que cette diminution a lieu en raison inverse des carrés des distances au centre de la terre. La valeur moyenne du rayon terrestre est de 6366198 mètres. Les deux rayons terrestres à l'équateur et au pôle sont entre eux comme 336 : 335.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

il faudra dire : Si le quarré d'une seconde donne quinze pieds pour l'espace parcouru, que donnera le quarré de 5 secondes pour l'espace que l'on cherche. On le trouvera de 375 pieds.

175. De même, voulant savoir le temps qu'un corps mettra à parcourir 240 pieds de hauteur depuis son repos, on dira : Comme l'espace 15 est à l'espace 240, ainsi le quarré d'une seconde est au quarré du temps que l'on cherche, qu'on trouvera de 16, dont la racine quarrée montre que le corps mettra 4 secondes à parcourir l'espace donné.

176. Si l'on veut connaître la vîtesse uniforme d'un corps par seconde, après avoir acquis cette vîtesse en tombant d'une hauteur de 6 pieds, on fera attention qu'un corps est capable de parcourir d'un mouvement uniforme, avec une vîtesse acquise en tombant d'une certaine hauteur, un espace double de celui qu'il a parcouru dans le même temps pour acquérir cette vîtesse (158); que par conséquent si un corps parcourt 15 pieds dans une seconde, d'un mouvement accéléré, il en parcourra 30 dans le même temps d'un mouvement uniforme (172). Or comme les vîtesses acquises sont entre elles dans la raison des racines des espaces parcourus (169), nommant x l'espace que nous cherchons, on aura cette proportion $\sqrt{15} : 30 :: \sqrt{6} : x$, dont on fera évanouir les signes radicaux en quarrant les termes pour avoir $15 : 900 :: 6 : x^2$, qui donne 360 pour le quatrième terme; dont extrayant la racine quarrée, on la trouvera de 18 pieds 11 pouces 7 lignes 8 points pour le chemin que le corps parcourra dans chaque seconde d'un mouvement uniforme, avec la vîtesse acquise en tombant d'une hauteur de 6 pieds.

177. Supposant qu'un corps parcourt 10 pieds par seconde d'une vîtesse uniforme, on demande de quelle hauteur il aurait dû tomber pour avoir acquis cette vîtesse à la fin de sa chûte.

Une vîtesse uniforme de 30 pieds par seconde, pouvant avoir été acquise par une chûte de 15 pieds de hauteur (172), et les vîtesses uniformes étant entre elles (quand les temps sont égaux), dans la raison des racines quarrées des hauteurs qu'un corps aurait parcourues pour acquérir ces mêmes vîtesses (169 et 170), si l'on nomme x la hauteur que l'on cherche, on aura $30 : \sqrt{15} :: 10 : \sqrt{x}$, dont quarrant les quatre termes, il vient $900 : 15 :: 100 : x$, qui donne un pied huit pouces pour la hauteur que l'on cherche (*ab*)

Formules générales du mouvement uniformément varié.

(*ab*) Ce paragraphe est destiné à faire connaître les lois du mouvement des corps qui cèdent librement à l'action de la pesanteur, ou du *mouvement uniformément varié* : mais la forme sous laquelle l'auteur les présente, en les faisant sortir des diverses proportions qu'il établit entre les éléments de la question, en rend l'application très-peu commode dans la pratique. Il est bien préférable de les réduire en formules comme il suit.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

De la descente des corps pesants sur des plans inclinés.

178. Quand des corps pesants roulent sur des plans inclinés pour aller dans un lieu plus bas, ils descendent d'un mouvement uniformément

---

La nature du mouvement uniformément varié consiste en ce que la force qui agit constamment sur le corps fait croître ou décroître sa vîtesse de quantités égales dans des temps égaux. Soit v' la vîtesse du corps à l'instant où on commence à compter le temps t, g la quantité dont cette vîtesse doit croître dans chaque unité de temps (qu'on nomme ordinairement la *force accélératrice*), v la valeur que la vîtesse a prise au bout du temps t. On aura d'abord $v = v' + gt$.

Soit de l'espace parcouru dans un instant infiniment petit dt. Au commencement de cet instant la vîtesse est v; elle croît uniformément pendant sa durée, et à la fin elle est devenue $v + gdt$. Sa valeur moyenne a été $v + \frac{1}{2}gdt$, et par conséquent, puisque l'espace égale la vîtesse multipliée par le temps, on a $de = (v + \frac{1}{2}gdt)\,dt$, ou, en négligeant les quantités du second ordre, $de = vdt$. Mettant pour v la valeur ci-dessus, et intégrant, il viendra $e = e' + v't + \frac{1}{2}gt^2$. e' est la constante introduite par l'intégration, et indique à quelle distance le corps se trouvait du point fixe à partir duquel on compte les espaces, à l'instant où l'on a commencé à compter le temps.

L'équation précédente est l'équation la plus générale du mouvement uniformément varié. On doit y donner à v' et à g le signe —, si l'une ou l'autre de ces vîtesses tendent à rapprocher le corps du point fixe à partir duquel on compte les espaces. Si l'on compte les espaces à partir du point où le corps se trouvait quand on a commencé à compter le temps, on a $e' = 0$, et l'équation se réduit à

$$e = v't + \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Dans le cas où le corps n'avait point de vîtesse à l'instant où on a commencé à compter le temps, on a simplement $v = gt$,
et parconséquent $e = \frac{1}{2}gt^2$.
En éliminant t entre ces deux équations, il vient $v = \sqrt{2ge}$.
Ces trois formules contiennent toutes les règles données par Bélidor.

De la vîtesse due à une hauteur, et de la hauteur due à une vîtesse.

Quand il s'agit des mouvement des corps pesants, g a la valeur numérique indiquée dans la note (*aa*). La vîtesse $v = \sqrt{2ge}$ acquise par un corps après qu'il a parcouru verticalement l'espace e, est ce qu'on nomme *la vîtesse due à la hauteur* e, et réciproquement la hauteur $e = \frac{v^2}{2g}$ se nomme la *hauteur due à la vîtesse* v. On trouvera plus loin des tables des vîtesses dues à diverses hauteurs, la considération de ces vîtesses revenant fréquemment dans les applications, et particulièrement dans celles de l'hydrodynamique.

Comment on exprime la quantité de mouvement qu'une force peut imprimer dans l'élément du temps.

Je remarquerai ici qu'en nommant m la masse d'un corps soumis à l'action de la pesanteur, on a mg pour la quantité de mouvement qu'il acquiert au bout d'une unité de temps en cédant librement à cette action, et $mgdt = mdv$ pour la quantité de mouvement qu'il acquiert à chaque élément du temps. Mais on a vu dans la note (*b*) que P étant le poids d'un corps, on avait la relation $P = mg$. La quantité Pdt exprimera donc aussi la quantité de mouvement que l'action de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

accéléré, mais avec moins de vîtesse que s'ils tombaient librement dans l'air; parce que l'action de leur pesanteur, ou celle des forces qui les poussent, est moindre que s'ils tombaient perpendiculairement, dans la raison de leur pesanteur absolue à leur pesanteur relative.

PLANCHE 5. FIGURE 63. Par exemple, soit un corps sphérique P posé sur un plan incliné AC. En faisant le parallélogramme rectangle LM, et supposant que la diagonale IK exprime la pesanteur absolue du corps, ou la force qui le pousse selon sa direction naturelle, les côtés IL et IM exprimeront deux forces qui, agissant ensemble, feront le même effet que la seule IK. Or cette dernière étant une force *accélératrice*, les deux autres seront aussi accélératrices. Mais comme il y en a une IL dont la direction étant perpendiculaire au plan n'en peut surmonter la résistance, il n'y aura que la seule IM qui a sa direction parallèle au plan, qui fera descendre le corps d'un mouvement accéléré, *avec une vîtesse qui sera moindre à chaque instant de la descente que si sa direction était verticale, dans la raison de* IM *à* IK, *ou de* AB *à* AC (94); *et ce rapport sera toujours le même, à quelque point que le corps se trouve de sa descente.*

FIG. 63, 64 et 65. Ayant le plan incliné ABC, nous nommerons H sa hauteur, E sa longueur ou l'espace parcouru par le corps, T le temps employé à le parcourir, V la vîtesse que le corps a à la fin de cet espace, F sa force absolue; ainsi on aura $\frac{FH}{E}$ pour sa force relative.

Nous nommerons encore par des lettres semblables h, e, t, v, f, la hauteur, la longueur d'un autre plan incliné DGI, le temps, la vîtesse et la force absolue qui répondent au corps Q. Sa force relative sera $\frac{fh}{e}$.

179. La première et la seconde équations générales (articles 166 et 167) sont $Fv E t^2 = f V e T^2$, et $F V t^2 = f v T^2$: ayant $Fv = fV$ (166), il faut les transposer de membre, pour que E et e ne se détruisent point en substituant les valeurs de F et f. Alors faisant la substitution, et effaçant $Fv = fV$, il viendra $hE^2t^2 = He^2T^2$.

Pour avoir la seconde équation, il faut substituer les valeurs de F et f dans la formule $FVt^2 = fvT^2$; et après avoir effacé $Ft = fT$ (167), on transposera $Vt = vT$ pour avoir $hVEt = Hvet$.

On fera le même usage de ces deux règles que l'on a fait de celle du mouvement uniforme; c'est-à-dire qu'on commencera par en tirer autant d'analogies générales qu'elles comprennent de racines, et qu'ensuite on

---

pesanteur pourrait imprimer à ce corps dans un élément du temps; et, en généralisant cette remarque, on voit que toutes les fois qu'une force agissant sur un corps serait capable de lui faire exercer contre un obstacle immobile une pression P, elle serait aussi capable, si le corps lui cédait librement, de lui imprimer dans chaque instant une quantité de mouvement $= Pdt$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en tirera autant d'autres particulières que l'on peut faire de suppositions différentes.

180. Première règle $hE^2t^2 = He^2T^2$. Seconde règle $hVEt = Hve T$.

Les analogies générales de la première règle sont, 1° $H:h :: E^2t^2 : e^2T^2$, 2° $\sqrt{H}:\sqrt{h} :: Et:eT$, 3° $E:e :: T\sqrt{H} : t\sqrt{h}$, 4° $T:t :: E\sqrt{h} : e\sqrt{H}$.

C'est-à-dire que, dans les chûtes des corps qui roulent le long des plans inclinés quelconques, on a pour la première analogie que les hauteurs de ces plans, ou les chûtes, sont toujours dans la raison composée des quarrés des espaces, ou des longueurs des plans pris directement, et des quarrés des temps pris réciproquement. On énoncera les autres de la même façon.

181. Les analogies générales de la seconde règle sont 1° $H:h :: VEt:veT$, 2° $E:e :: HTv:htV$, 3° $T:t :: EVh:evH$, 4° $V:v :: HTe:htE$.

C'est-à-dire, pour la première, que les hauteurs des plans sont dans la raison composée des espaces et des vîtesses directement, et des temps réciproquement. Je passe encore sous silence l'énoncé des autres.

182. Quant aux analogies particulières, si l'on suppose dans la première règle $H=h$, on aura $E^2t^2=e^2T^2$, ou $Et=eT$, en extrayant les racines de part et d'autre, d'où l'on tire $T:t :: E:e$: ce qui fait voir que *lorsque deux plans* AC *et* AI *ont la même hauteur, les temps sont dans la raison des longueurs des plans parcourus dans ces mêmes temps.*

Comme cette conséquence est générale, quelle que soit la longueur des plans, on voit que si le premier AC était beaucoup plus roide, comme est AK ou AB, l'analogie serait encore la même; c'est-à-dire que les temps de la descente de A en B et de A en I seront encore comme AB est à AI. PLANCHE 5. FIGURES 65 et 66.

183. *Il suit de-là que lorsqu'on n'a qu'un seul plan, le temps de la descente suivant sa hauteur, est au temps de sa descente suivant sa longueur, comme sa hauteur* FH *est à sa longueur* FG.

184. Si $T=t$ dans la première règle, on aura $H:h :: E^2:e^2$, ou $\sqrt{H}:\sqrt{h} :: E:e$; ce qui fait voir que lorsque les temps des chûtes sont égaux, les hauteurs des plans sont comme les quarrés de leurs longueurs, ou que les racines quarrées des hauteurs sont comme les longueurs des plans. Donc lorsque l'une ou l'autre de ces deux analogies se rencontrent, les temps sont égaux.

185. Si $E=e$ dans la même règle, on aura $H:h :: t^2:T^2$, ou $T:t :: \sqrt{h}:\sqrt{H}$; c'est-à-dire que lorsque les longueurs parcourues sont égales, les hauteurs des plans sont en raison réciproque des quarrés des temps, et que les temps sont en raison réciproque des racines quarrées des hauteurs.

186. De même dans la seconde règle, si $T=t$, on aura $H:h :: VE:ve$, et comme on a eu ci-devant (184) $H:h :: E^2:e^2$, on aura $VE:ve :: E^2:e^2$, ou $V:v :: E:e$; c'est-à-dire que lorsque les temps sont égaux, les vîtesses

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sont dans la raison des longueurs parcourues, quelle que soit la hauteur des plans.

187. Si l'on suppose aussi dans la seconde règle $H=h$, on aura $VEt=veT$, et comme nous avons eu (art. 182) $Et=eT$, en supposant de même $H=h$, effaçant de l'équation $VEt=veT$ les grandeurs égales Et et eT, il restera $V=v$; *ce qui fait voir que lorsque deux plans* AC *et* AI *ont la même hauteur* AB, *les vitesses dernières acquises le long de ces plans sont égales.*

PLANCHE 5. 188. Comme cette conséquence est générale pour tous les plans qui ont
FIGURES 65 et 66. la même hauteur quelles que soient leurs longueurs, si l'on suppose, comme dans l'art. 182, que le plan AC se raccourcisse de plus en plus et devienne égal à la verticale AB, il arrivera encore que la dernière vîtesse d'un mobile acquise en tombant de A en B sera égale à celle qu'il acquerra en roulant de A en I: d'où il suit que *la dernière vîtesse qu'un corps acquiert le long d'un plan incliné* PG *est égale à celle qu'il acquerrait en tombant de la hauteur* FH *ou* KG *du même plan.* Mais nous avons vu (169) que la dernière vîtesse d'un corps qui tombait librement pouvait s'exprimer par la racine quarrée de l'espace parcouru : donc la vîtesse qu'un corps aura acquise en roulant de F en G, le long d'un plan incliné, sera $\sqrt{FH}$, ou $\sqrt{KG}$.

189. Si $E=e$ dans la seconde règle, on aura $H:h::Vt:vT$; mais comme nous avons eu (dans l'art. 185) $H:h::t^2:T^2$, on aura donc $Vt:uT::t^2:T^2$; ou $V:v::t:T$; c'est-à-dire que lorsque les longueurs des plans sont égales, les vîtesses dernières sont toujours en raison réciproque des temps, quelle que soit la hauteur des plans.

FIGURES 63 et 64. 190. Si les deux plans AC et DI répondent à des triangles semblables, on aura $H:h::E:e$, par conséquent $He=hE$; et si l'on retranche de la première formule ces deux grandeurs égales, il restera $Et^2=eT^2$, d'où l'on tire $E:e::T^2:t^2$, qui fait voir que lorsque les hauteurs des plans sont comme leurs longueurs, les espaces parcourus sont comme les quarrés des temps.

191. Si l'on fait la même supposition pour la seconde formule, elle se changera en celle-ci $Vt=vT$, qui donne $T:t::V:v$; ou $T^2:t^2::V^2:v^2$, ou $E:e::V^2:v^2$, qui fait voir que quand les hauteurs des plans sont comme leurs longueurs, les espaces parcourus sont aussi comme les quarrés des dernières vîtesses.

FIGURE 67. 192. Il suit de-là qu'un corps qui roule sur *un plan incliné parcourt des espaces* FG *et* FI *qui sont entre eux dans la raison des quarrés des temps qui ont été employés à les parcourir, ou des quarrés des vîtesses acquises aux points* G *et* I, puisque les espaces ne sont autre chose que les longueurs des plans FG, FI, dont les hauteurs FM et FN leur sont proportionnelles; ce qui fait voir que le mouvement d'un corps qui roule

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sur un plan incliné donne la même analogie que s'il tombait librement dans l'air (162).

193. Par conséquent si l'on décrit le demi-cercle FHI, qu'on élève la perpendiculaire GH, et qu'on tire les lignes FH, HI, la première FH étant moyenne proportionnelle entre FG et FI (par la propriété du triangle rectangle), les lignes FG et FH seront dans le rapport des temps employés à parcourir les espaces FG et FI, ou des vîtesses acquises aux points G et I (165).

194. Si l'on nomme t et T les temps par FG et par FI, et θ la différence de ces temps, ou le temps que le corps emploie à parcourir GI, on aura $t:\theta :: FG:FH-FG$, et $T:\theta :: FH:FH-FG$, et en réunissant ces deux proportions $t:T:\theta :: FG:FH:FH-FG$.

195. *Si un corps, en tombant librement du point de repos* F, *parcourt en descendant un espace* FI *troisième proportionnelle à la hauteur* FG *d'un plan incliné et à sa longueur* FH, *je dis que le temps de la descente selon la verticale* FI, *sera égal au temps de la descente le long du plan incliné* FH. PLANCHE 5. FIGURE 62.

Considérez que si FH est moyenne proportionnelle entre FG et FI, les lignes FG, FH pourront exprimer les temps que le mobile mettra à parcourir les espaces FG et FH (193). Or comme le temps de la descente d'un corps suivant la hauteur d'un plan incliné est au temps de la descente suivant sa longueur, comme la hauteur du même plan est à sa longueur (183), on voit que FG ne pourra exprimer le temps de la descente selon la hauteur du plan, sans que FH n'exprime celui de la descente selon sa longueur; que par conséquent les temps de la descente selon le plan incliné FH et selon la verticale FI seront égaux.

196. La ligne FH ne pouvant être moyenne proportionnelle entre FG et FI, sans qu'elle ne vienne aboutir au point H de la circonférence d'un demi-cercle dont FI doit être le diamètre, on voit que *si une corde* FH, *tirée d'une des extrémités du diamètre, représente un plan incliné, tandis que le diamètre représentera un plan vertical, le temps de la descente d'un corps le long de la corde* FH *sera égal au temps de la descente le long du diamètre* FI. Propriété singulière du cercle.

197. Comme cette propriété du cercle est générale par toutes les cordes FA, FB, FC, FD, FH qui représenteraient des plans inclinés venant aboutir à l'extrémité F du diamètre vertical FI, il suit que *le temps de la descente d'un corps le long de chacun de ces plans sera le même que le temps de la descente le long du diamètre, et que par conséquent les temps des chûtes le long de tous ces plans seront tous égaux.* FIGURE 63.

Il suit encore que si par l'autre extrémité I du diamètre, on tire autant de lignes que l'on voudra IA, IB, IC, IH, ID, *les corps qui partiraient dans le même instant des points* D, H, F, A, B, C, *en roulant le long des*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cordes précédentes prises pour des plans, se rencontreront tous dans le même instant au point I (*ac*).

Il nous reste à examiner ce qui doit arriver aux corps qui tombent le long de plusieurs plans contigus et inclinés, afin d'en tirer des connaissances qui nous serviront à traiter, avec plus de précision qu'on n'a encore fait, certains cas qui appartiennent au mouvement des eaux.

Planches 5 et 6. Figures 69 et 78. Examen du mouvement des corps qui tombent le long de plusieurs plans contigus.

198. On suppose que les lignes AB et BC représentent deux plans contigus, le long desquels tombe un corps en partant du point A ; *il s'agit de déterminer la vîtesse qu'il aura au point* C, *par rapport à celle qu'il aurait s'il tombait librement suivant la verticale* AG.

Menant du point A la ligne horizontale AF qui aille rencontrer le plan CB prolongé jusqu'en F, on décrira sur BF comme diamètre le demi-cercle FNB. Ensuite on prolongera le plan BA jusqu'à la rencontre

---

Formules générales du mouvement d'un corps pesant le long d'un plan incliné.

(*ac*) On peut faire ici une observation semblable à celle faite dans la note précédente : les règles du mouvement des corps pesants glissant le long d'un plan incliné s'expriment d'une manière très-simple en les réduisant en formules. Soit h la hauteur du plan, l sa longueur, α l'angle qu'il forme avec la verticale. Pour estimer l'action de la pesanteur dans le sens du plan, il faudra la diminuer dans le rapport $\frac{h}{l}$, ou $\frac{\cos.\,\alpha}{1}$. Or les vîtesses imprimées par les forces accélératrices étant proportionnelles à ces forces, si g est la vîtesse acquise dans chaque unité de temps par un corps qui tombe verticalement, $g\frac{h}{l}$, ou $g\cos.\,\alpha$, sera la vîtesse acquise dans le même temps par le corps glissant le long du plan incliné. Les circonstances du mouvement de ce corps s'exprimeront donc par les formules de la note (*ab*), en y mettant $g\frac{h}{l}$, ou $g\cos.\,\alpha$, à la place de g. Ainsi on aura

$$v = g\frac{h}{l}.t, \qquad \text{ou} \qquad v = g\cos.\,\alpha.\,t,$$

$$e = \tfrac{1}{2}g\frac{h}{l}.t^2 \qquad\qquad e = \tfrac{1}{2}g\cos.\,\alpha.\,t^2$$

$$v = \sqrt{2g\frac{h}{l}.e} \qquad\qquad v = \sqrt{2g\cos.\,\alpha.\,e}.$$

Quand le corps sera arrivé au bas du plan, on aura $e = l$, et $v = \sqrt{2gh}$; ainsi la vîtesse acquise à cette époque est indépendante de l'inclinaison du plan et due à sa hauteur, ce qui s'accorde avec l'art. 188.

Le temps employé par le corps à parvenir au bas du plan incliné est $t = \sqrt{\frac{2}{g}.\frac{l^2}{h}}$. Dans la fig. 62, $FH = l$, $FG = h$, et en faisant $FI = d$, on a $l^2 = dh$. La valeur de t devient donc $t = \sqrt{\frac{2}{g}.d}$, quantité indépendante de l'inclinaison de la corde FH. Ainsi un corps emploie le même temps à descendre par toutes les cordes aboutissant aux extrémités du diamètre vertical d'un cercle, ce qui s'accorde avec l'art. 197.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la circonférence au point N, duquel on abaissera la perpendiculaire NE, et l'on fera les parallélogrammes rectangles et semblables EM, LD.

Prenant la diagonale BK pour exprimer la vîtesse que le corps acquerra au point B en tombant de A en B, il est constant que cette vîtesse sera la même que si elle venait du concours de deux forces qui agissant ensemble sur ce corps au point B, l'une fût capable de lui imprimer la vîtesse BD selon la direction EB, et l'autre la vîtesse BL selon la direction MB. Mais cette dernière force agissant selon une direction perpendiculaire au plan, n'en pourra surmonter la résistance : il ne restera donc à ce corps que l'impression de la force capable de la vîtesse BD selon la direction EB. Ainsi la vîtesse qu'il acquerra au point B, en tombant de A en B pour suivre la direction BK, est à ce que lui en laissera la rencontre du plan BC selon la direction EC, comme BK est à BD, ou comme BN est à BE (178).

La ligne FA étant horizontale, la vîtesse que le corps acquerra en tombant de F en B, suivant la direction du plan incliné FB, sera égale à celle qu'il acquerra en tombant de A en B, puisque ces deux plans ont la même hauteur (187); ainsi ces deux vîtesses pourront être exprimées par la même ligne BK.

La ligne NB étant moyenne entre FB et EB, si le corps en partant des points de repos F, E, parcourt en des temps différents les espaces FB et EB, les lignes BN et EB seront entre elles dans le rapport des mêmes temps (193 et 194). Et comme on a BN:BE :: BK:BD, il suit que si le corps doit parcourir l'espace FB pour acquérir la vîtesse BK, il faudra qu'il parcourre l'espace EB pour acquérir la vîtesse BD. Ce qui fait voir que la vîtesse qui lui restera au point B pour suivre la direction BC, après être tombé de A en B, est égale à celle qu'il aurait acquise en tombant de E en B; et que la vîtesse qu'il aura au point C, en tombant du point A suivant les plans contigus AB et BC, sera la même que si, étant parti du point E, il avait suivi la seule direction EC. Elle sera par conséquent la même que s'il était tombé de la hauteur E, du plan incliné EC.

199. Si l'on prend la ligne BK pour le sinus total, la ligne BD sera le sinus de l'angle BKD, ou de son égal ABM complément de l'angle ABE; d'où il suit que *la vîtesse que le corps acquerra en tombant de* A *en* B, *est à celle qui lui restera au point* B *pour suivre la direction* BC, *comme le sinus total est au sinus du complément de l'angle formé par les deux plans contigus.*

200. Si l'on voulait savoir de quelle hauteur un corps devrait tomber librement dans l'air pour acquérir une vîtesse égale à celle qu'il acquerrait en tombant le long de plusieurs plans contigus ABCD, il faut du point A mener comme ci-devant la ligne horizontale AF, qui rencontrera les plans DC et CB prolongés en F et en G; décrire sur GB le demi-cercle GNB; prolonger le plan BA jusqu'au point N, d'où abaissant la perpen- PLANCHE 6. FIGURE 71.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diculaire NE, l'on aura le point E duquel devrait tomber le corps pour acquérir, en suivant la direction EB, la même vîtesse au point B qu'il aurait en tombant de A en B, ou la même vîtesse au point C, en suivant le plan incliné EC, que s'il était tombé le long des deux plans contigus ABC (198).

Menant aussi du point E la ligne horizontale EI, jusqu'à la rencontre de la ligne FD, il faut encore décrire le demi-cercle IHC, prolonger le côté CE jusqu'au point H, d'où l'on abaissera la perpendiculaire HK pour avoir le point K duquel le corps devrait tomber pour acquérir en descendant suivant la direction KC, la même vîtesse au point C que s'il était tombé de A en C, ou la même vîtesse au point D, suivant la direction KD ou KM, que s'il avait suivi les plans contigus ECD ou ABCD (*ad*).

M. Varignon est le premier qui ait traité ce sujet avec précision dans un Mémoire qu'il donna à l'Académie Royale des Sciences en 1693, où il relève l'erreur de Galilée qui pensait, comme ont fait plusieurs autres qui ont écrit après lui, que la vîtesse qu'un corps acquiert en tombant le long de plusieurs plans inclinés ABCD était la même que s'il tombait librement de la hauteur AL, qui est celle du point de repos A au-dessus de l'horizontale MD; n'ayant point fait attention que la vîtesse acquise en parcourant le premier plan était diminuée par la rencontre du second, que celle qu'il avait à la fin du second était aussi diminuée par la rencontre du troisième, et ainsi des autres.

PLANCHE 6. FIGURE 74. Une surface courbe AM, pouvant être regardée comme composée d'une infinité de plans contigus, on ne peut pas dire que la vîtesse d'un corps qui descendrait le long d'un tel plan augmente à chaque instant d'une égale quantité, mais selon une loi qui est particulière à la courbe sur laquelle le corps descend. Ainsi tout ce que nous avons dit sur les plans inclinés ne peut faire tirer aucune conséquence au sujet des courbes, et si nous allons découvrir quelque chose qui leur soit commun, ce sera par un principe entièrement indépendant de celui qui a servi pour le plan incliné.

Expression de la vîtesse d'un corps pesant qui descend le long de plusieurs plans inclinés contigus. PL. 6, FIG. 71.

(*ad*) On traduit ces considérations en formules d'une manière très-simple, comme il suit. Nommant (dans la fig. 71) h, h', h'', ... les différences de niveau des points de rencontre A, B, C, D, ... des lignes inclinées AB, BC, CD, ... parcourues par un corps pesant, lesquelles peuvent être ou ne pas être situées dans un même plan vertical; ω, ω', ω'', ... les angles que chaque ligne forme avec la suivante, g la force accélératrice de la gravité : la vîtesse du corps sera

à l'extrémité de la première ligne $\sqrt{2g}.\sqrt{h}$

à l'extrémité de la seconde $\sqrt{2g}(\cos.\omega\sqrt{h}+\sqrt{h'})$

à l'extrémité de la troisième $\sqrt{2g}(\cos.\omega\cos.\omega'\sqrt{h}+\cos.\omega'\sqrt{h'}+\sqrt{h''})$

et ainsi de suite. La loi de ces formules est facile à saisir.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Examen du mouvement des corps qui roulent sur des surfaces curvilignes.

201. *Si un corps descend par l'action de sa pesanteur, soit sur un plan, soit sur une courbe convexe ou concave, je dis que sa vîtesse sera toujours exprimée par la racine quarrée de la hauteur verticale d'où il est descendu depuis le commencement de sa chûte; ou que cette vîtesse est égale à celle que le mobile aurait acquise en tombant verticalement de la même hauteur.*

Supposons que les temps que le mobile a mis à parcourir les espaces AM et Am depuis le point de repos sont exprimés par les abscisses BN, Bn d'une courbe (Fig. 75), dont les ordonnées NS, ns expriment les vîtesses acquises à la fin de ces temps. Soit la longueur de la ligne AM droite ou courbe $=z$, M$m=dz$; la hauteur verticale AP$=x$, MR$=dx$, BN$=t$, N$n=dt$, NS$=u$, $qs=du$; g la vîtesse que la pesanteur communique aux corps dans chaque unité du temps. La ligne AM$=z$ a été parcourue pendant le temps t, pendant lequel s'est acquise la vîtesse u qu'il faut trouver. Pour cela, remarquez que NS$=u$ étant la vîtesse que le corps a dans l'instant N$n=dt$, la superficie NSsn pourra exprimer l'espace qu'il parcourt pendant cet instant, et la superficie curviligne BNS exprimera l'espace parcouru pendant le temps BN$=t$. Mais pendant ce temps le mobile a parcouru la ligne AM: donc l'on aura AM$=z=$BNS$=\int u\,dt$, donc $dz=u\,dt$, ce qui se doit entendre d'une égalité de rapport, d'où l'on tire $dt=\frac{dz}{u}$. De plus, u étant la vîtesse que le corps a au point M, $qs=du$ sera la quantité dont elle s'augmente sur le plan incliné MRm pendant l'instant dt. Mais sans ce plan elle se serait augmentée de $g\,dt$: ainsi l'augmentation de vîtesse sur le plan MRm est à $g\,dt$ comme MR est à Mm, ce qui donne $du : g\,dt :: dx : dz$; donc $du\,dz=g\,dt\,dx$. Mettant dans cette équation pour dt sa valeur $\frac{dz}{u}$, elle deviendra $du\,dz=g\frac{dz\,dx}{u}$, ou $du=g\frac{dx}{u}$, ou $u\,du=g\,dx$. Prenant l'intégrale, $\frac{1}{2}u^2=gx$, ce qui donne $u=\sqrt{2gx}$. Donc la vîtesse que le corps a au point M est égale à celle qu'il aurait acquise en tombant de la hauteur AP, car il est facile de voir que cette dernière est égale à $\sqrt{2gx}$.

PLANCHE 6. FIG. 72, 73, 74, 75.

Nous venons de voir que la vîtesse d'un corps qui est tombé le long d'un plan, soit rectiligne ou curviligne, est égale à celle qu'il aurait acquise en tombant perpendiculairement de la même hauteur: mais comme le temps qu'il emploie à parcourir ces plans est différent, nous allons donner dans le problême suivant une formule générale pour le trouver, laquelle étant ensuite particularisée par l'essence de la courbe exprimée dans son équation, donnera le temps employé à parcourir cette courbe.

Formule pour le mouvement des corps qui roulent le long des courbes.

202. Ayant trouvé ci-devant $du\,dz=g\,dt\,dx$, on en tirera $dt=\frac{du\,dz}{g\,dx}$, et mettant pour du sa valeur $g\frac{dx}{u}$, il vient $dt=\frac{dz}{u}$. Ainsi $\frac{dz}{u}$ sera la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

différentielle, ou l'élément du temps; ce qui est bien évident, car cette différentielle n'est autre chose que le temps qu'il faut pour parcourir le côté Mm=dz qui, étant parcouru avec la vîtesse u, doit exiger un temps =$\frac{dz}{u}$. On a donc $t=\int\frac{dz}{u}=\int\frac{dz}{\sqrt{2gx}}$. Présentement, si l'on met pour dz la valeur que l'équation de la courbe lui donne, on aura la différentielle du temps exprimée par une seule variable, et l'intégrale de cette différentielle sera le temps cherché. Nous supposerons dans la suite $u=\sqrt{x}$, en faisant $2g=1$, parce que cela est plus simple: le rapport des choses demeurera toujours le même.

On pourrait appliquer la formule $\int\frac{dz}{\sqrt{x}}$ à quantité de courbes, mais la plupart de ces courbes changent cette formule dans une différentielle qui n'a point d'intégrale finie, ce qui n'offre rien de simple ni de curieux; c'est pourquoi je vais seulement l'appliquer à la *cycloïde simple*, à cause qu'elle y fait découvrir plusieurs choses nouvelles et curieuses.

Pl. 6, Fig. 76. Application de la formule précédente à la cycloïde.

203. Supposant une *cycloïde* BME qui ait pour origine le point E, et pour cercle générateur le cercle ADE: *si un corps commence à tomber du point* B *le long de la courbe* BME, *je dis que les temps qu'il mettra à parcourir les arcs de cycloïde* BM, Mm, BE, ME, *etc., seront entre eux comme les arcs de cercle correspondants* AD, Dd, AE, DE, la ligne CP et ses semblables étant perpendiculaires sur AE.

Soit AE=a, EC=x, Cc=MR=dx, Mm=dz; AC ou BP sera =$a-x$. Le temps t sera $=\int\frac{dz}{\sqrt{a-x}}$. L'équation différentielle de la cycloïde est $dz=dx\sqrt{\frac{a}{x}}$: mettant cette valeur de dz dans l'expression du temps, on aura $dt=dx\sqrt{\frac{a}{ax-x^2}}$ pour le temps employé à parcourir l'arc Mm. Présentement, les triangles semblables CDL, SdD donnent $CD=\sqrt{(ax-x^2)}:LD=\frac{1}{2}a::dS=dx:Dd=\frac{a\,dx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$. Or cette valeur de D$d$ fait voir que Dd et dt sont toujours en raison constante: donc le temps employé à parcourir Mm, est exprimé par l'arc Dd, et comme cela arrive toujours, en quelque endroit qu'on prenne les arcs Mm, Dd, il suit que le temps employé à parcourir tel arc fini comme BM sera exprimé par l'arc AD son correspondant, et ainsi de tous les autres.

Figure 76.

204. Le corps étant parvenu par sa descente le long de la cycloïde au point M, le chemin qu'il aura fait sera exprimé par l'arc de cycloïde BM, le temps qu'il a mis à le faire sera exprimé par l'arc de cercle AD, et la vîtesse acquise à la fin de ce temps le sera par la racine quarrée de AC; d'où il suit que dans la courbe BNS (Fig. 75) dont les abscisses BN exprimeraient les temps de la descente d'un corps sur un cycloïde, et les ordonnées NS les vîtesses à la fin de ces temps, si les abscisses de cette

Figure 75.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

courbe sont égales à des arcs de cercle, les ordonnées correspondantes seront égales aux racines quarrées des sinus verses de ces arcs.

205. *Le temps que le mobile met à parcourir la cycloïde* BME *par sa pesanteur, est au temps qu'il mettrait à tomber de la hauteur* AE *du diamètre du cercle générateur, comme la demi-circonférence d'un cercle est à son diamètre.*

Nous venons de trouver que l'élément du temps (203), est $dx\sqrt{\frac{a}{ax-x^2}}$, qui, étant multiplié par $\frac{1}{2}\sqrt{a}$, sera l'élément Dd de la demi-circonférence. Donc l'intégrale de cet élément étant multipliée par $\frac{1}{2}\sqrt{a}$ sera l'intégrale de l'élément Dd, qui est la demi-circonférence ADE; donc cette demi-circonférence étant multipliée par $\frac{2}{\sqrt{a}}$ sera l'intégrale de $dx\sqrt{\frac{a}{ax-x^2}}$; donc $t=\int dx\sqrt{\frac{a}{ax-x^2}}=$la demi-circonférence ADE.$\frac{2}{\sqrt{a}}$. Mais le temps que le mobile met à tomber de la hauteur AE est $\frac{2a}{\sqrt{a}}$, ou $2\sqrt{a}$: donc ce temps est au temps t, comme $2\sqrt{a}$: ADE.$\frac{2}{\sqrt{a}}$, ou comme AE$=a$:ADE.

206. Le temps employé à parcourir la cycloïde est ADE.$\frac{2}{\sqrt{a}}$, et le temps employé à parcourir la ligne BE est $\frac{2\text{BE}}{\sqrt{a}}$; donc ce temps est au précédent comme $\frac{2.\text{BE}}{\sqrt{a}}$ est à $\frac{2.\text{ADE}}{\sqrt{a}}$, ou comme BE est à ADE, ou comme BE est à AB; c'est-à-dire comme la racine quarrée de la somme des quarrés de la demi-circonférence d'un cercle et de son diamètre est à la même demi-circonférence. Pour avoir ce rapport en nombres, on remarquera que AE étant 7, ADE ou AB sera 11; BE sera $\sqrt{170}=$à-peu-près 13: ainsi le temps que le mobile met à parcourir la cycloïde est à celui qu'il met à parcourir la ligne BE, comme 11 est à 13 (*ae*).

207. *Si un mobile parcourt un arc quelconque* KE *de cycloïde, le temps qu'il y emploiera est égal au temps qu'il emploierait à parcourir la cycloïde entière, ou tout autre arc.* Pl. 6, Fig. 7

Soit décrit le cercle KTI qui ait pour diamètre KI$=c$, parallèle à AE, et soit comme ci-dessus AE$=a$, EC$=x$, etc., M$m=dz=dx\sqrt{\frac{a}{x}}$ par la propriété de la cycloïde. Mettant cette valeur de dz dans l'élément du temps $dt=\frac{dz}{\sqrt{\text{KP}}}=\frac{dz}{\sqrt{(c-x)}}$, on aura $dt=dx\sqrt{\frac{a}{cx-x^2}}$. Les triangles semblables OPN, nqN donnent PN$=\sqrt{(cx-x^2)}$: ON$=\frac{1}{2}c$:: N$q=dx$: N$n=\frac{c\,dx}{2\sqrt{(cx-x^2)}}$. Donc $dt=\text{N}n.\frac{2\sqrt{a}}{c}$; donc $\int dt=t=\int \text{N}n.\frac{2\sqrt{a}}{c}=$ la

(*ae*) Ce rapport, calculé exactement, est celui de 1:1,18545. Rectification l'art. 206.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

demi-circonférence KTI$\times\frac{2\sqrt{a}}{c}$. Donc le temps employé à parcourir l'arc de cycloïde KME est égal à KTI.$\frac{2\sqrt{a}}{c}$. Or le temps employé à parcourir la cycloïde entière est$\frac{2.\text{ADE}}{\sqrt{a}}$, mais $\frac{2.\text{KTI}.\sqrt{a}}{c}=\frac{2.\text{ADE}}{\sqrt{a}}$, car cette équation se réduit à KTI$\times a=$ADE$\times c$, qui est évidente par la proportion qui s'en tire. Donc si un corps commence à tomber d'un point quelconque d'une cycloïde, il mettra toujours le même temps, ce qui a été découvert depuis long-temps, et si je le démontre ici, c'est que cela se tire naturellement des principes que je viens d'établir.

208. Ayant $dt=\text{N}n\times\frac{2\sqrt{a}}{c}$, il s'ensuit que N$n$ exprime par-tout le temps employé à parcourir l'arc Mm. Ainsi l'accélération de vîtesse sur l'arc de cycloïde KME est réglée par la demi-circonférence KTI, de même que l'accélération sur la cycloïde entière est réglée par la demi-circonférence du cercle générateur, et tout ce que l'on a dit de celle-ci se doit entendre de celle-là.

Pl. 6, Fig. 79. Application de la cycloïde pour la régularité des pendules.

209. Si l'on a une cycloïde BIC, qui ait pour origine le point B et pour cercle générateur BHF, *il est démontré que si l'on suspend à son extrémité* C *un pendule* CG, *dont la longueur soit égale à* 2BF, *ce pendule enveloppant la cycloïde* CIB *en faisant ses vibrations, décrira par son extrémité* G *une autre cycloïde* EGB *égale à la première*, qui aura pour origine le point E, et pour cercle générateur le cercle ADE, égal au cercle BHF. Cela étant, lorsque ce pendule fait ses vibrations, son poids G est précisément dans le même cas que s'il descendait librement le long de la cycloïde BKE; par conséquent *la durée d'une vibration d'un pendule est le double du temps qu'un corps mettrait à tomber sur la cycloïde. Donc la durée de cette vibration est au temps qu'un corps mettrait à tomber de* A *en* E, *comme la circonférence d'un cercle est à son diamètre, ou comme* 22 *est à* 7 (205).

Figure 78.

210. Présentement, si l'on a un autre *pendule* CG qui ne soit point situé entre deux cycloïdes, il décrira des arcs de cercle en faisant ses vibrations. Or l'expérience apprend que ce pendule étant de même longueur que le précédent, ses vibrations seront aussi de la même durée, sur-tout si elles sont fort courtes. On se sert toujours de ce pendule pour la mesure du temps avec le même succès que du pendule entre les cycloïdes; ainsi ce qui convient à l'un convient également à l'autre.

Longueur du pendule à secondes.

211. *Le pendule qui bat les secondes en France, et dans une grande partie de l'Europe, est de* 3 *pieds* 8 *lignes et* $\frac{1}{2}$ *de longueur;* c'est-à-dire que si l'on attache une balle de fusil à un fil suspendu à un point fixe, que depuis ce point jusqu'au centre de la balle il y ait 3 pieds 8 lignes

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et $\frac{1}{3}$ d'intervalle, et qu'on fasse décrire à la balle des petites vibrations, chacune se fera dans une seconde de temps (*af*).

Il serait à souhaiter que notre pied de France fût de 2 lignes et $\frac{5}{6}$ plus long qu'il n'est, parce que trois de ces pieds feraient justement la longueur du pendule à secondes. Cette mesure serait prise de la nature même, et aurait l'avantage d'être conservée et connue dans tous les siècles à venir, par les révolutions journalières des astres.

Règle pour trouver l'espace qu'un corps parcourt en tombant depuis le repos pendant une seconde.

212. Si l'on se rappelle ce qui est dit dans les articles 209 et 210, on verra que *la durée des vibrations d'un pendule entre des cycloïdes, ou d'un pendule qui décrit des arcs de cercle fort petits, est au temps qu'un corps met à tomber d'une hauteur égale à la moitié de la longueur du pendule, comme* 22 *est à* 7, *ou comme une seconde est à* $\frac{7}{22}$ *de seconde*, ce qui est le temps qu'il faut à un corps pour tomber de la hauteur d'un pied 6 pouces 4 lignes et $\frac{1}{4}$.

213. Présentement, pour connaître l'espace qu'un corps doit parcourir en tombant pendant la durée d'une seconde, on fera la proportion ordinaire (174), en disant : comme $\frac{49}{484}$, (quarré du temps employé à parcourir 18 pouces 4 lignes et $\frac{1}{4}$), est à cette même longueur; ainsi le quarré d'une seconde est *à l'espace que le corps parcourra pendant cette seconde, qui se trouvera de* 15 *pieds* 1 *pouce* 3 *lignes*. On peut donc compter là-dessus comme sur une chose exactement déterminée, ce qui est assez conforme à l'opinion commune, mais qui n'était fondée que sur des expériences fort douteuses. Cependant l'on fera attention que dans la suite de cet ouvrage, *nous ne prendrons que* 15 *pieds seulement pour l'espace qu'un corps doit parcourir en tombant dans le temps d'une seconde*, et nous n'aurons point égard aux 15 lignes qu'on trouve de plus, afin de rendre les calculs plus commodes (*ag*).

Expériences faites sur la longueur du pendule en Afrique et en Amérique.

214. Des observations faites à l'île de Caïenne, située à 5 degrés de latitude septentrionale sur la côte orientale de l'Amérique, ont appris que le pendule qui y bat les secondes est plus court que celui qui les bat en France de 1 ligne et $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire qu'il n'est que de 3 pieds 7 lignes et $\frac{1}{4}$. De pareilles observations ont fait voir qu'en l'île de Gorée, à 15 de-

---

Valeur exacte de la longueur du pendule.

(*af*) D'après les derniers résultats, la longueur du pendule qui bat les secondes, à Paris, est de 0,99384 mètre (ce qui revient à 3,05948 pieds). On a ensuite pour la même longueur à la latitude L, comptée en degrés décimaux à partir de l'équateur, l'expression $0{,}99090 + 0{,}0052424 \sin.^2 L$.

On renvoie à la note (*aa*) pour la valeur de l'espace parcouru par les corps pesants dans une seconde.

(*ag*) Voyez ci-dessus dans la note (*aa*) la longueur exacte de l'espace qu'un corps parcourt en tombant dans le vide à Paris pendant la durée d'une seconde. Quand on emploie les logarithmes dans les calculs, comme il faut toujours le faire, il n'y a aucun avantage à prendre des nombres ronds préférablement aux nombres véritables.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

grés de latitude septentrionale, située près la côte occidentale d'Afrique, le pendule qui y bat les secondes n'est que de 3 pieds 6 lignes et $\frac{1}{2}$. Si l'on applique à ces observations le principe précédent, on verra qu'à Caïenne les corps parcourent en tombant, pendant une seconde, 15 pieds 9 lignes; et à Gorée ils parcourent pendant le même temps 14 pieds 4 pouces 3 lignes; ce qui fait une différence assez considérable avec ce qui arrive en France. Il en est apparemment de même dans tous les pays situés près de l'équateur, selon les conjectures de plusieurs grands mathématiciens qui ont cherché dans la plus profonde physique la cause de ces différentes longueurs des pendules (*ah*).

Règle pour trouver la longueur du pendule, pour que chaque vibration se fasse dans un temps déterminé, ou la longueur du pendule étant déterminée, trouver le temps de ses vibrations.

Planche 6.
Figures 78 et 80.

215. On trouvera, par le moyen du pendule à secondes, quelle doit être la longueur d'un autre pendule, pour que chaque vibration se fasse dans le temps que l'on voudra, ou bien pour qu'il fasse dans un temps donné un nombre déterminé de vibrations: pour cela il faut considérer: 1° *Que si l'on a deux pendules de différentes longueurs, le quarré du temps d'une vibration du premier pendule* CG, *est au quarré du temps d'une vibration du second* AD, *comme la longueur du premier pendule est à la longueur du second.* 2° *Que la longueur du premier pendule est à la longueur du second réciproquement, comme le quarré du nombre des vibrations du second pendule pendant tel temps qu'on voudra, est au quarré du nombre des vibrations du premier pendant le même temps*: ces deux analogies sont une suite de la théorie précédente.

216. Voulant savoir, par exemple, la longueur qu'il faut donner à un pendule, dont chaque vibration soit d'une demi-seconde, il faut dire: *comme le quarré d'une seconde* (*qui est* 1), *est au quarré d'une demi-seconde* (*qui est* $\frac{1}{4}$), *ainsi* 3 *pieds* 8 *lignes et* $\frac{1}{2}$ (*longueur du pendule à secondes*), *est au quatrième terme, qu'on trouvera de* 9 *pouces* 2 *lignes et* $\frac{1}{8}$. C'est-à-dire que si l'on suspend une balle de plomb de 4 à 5 lignes de diamètre à un fil de soie, et que l'intervalle entre le centre de la balle

---

Comment l'intensité de la pesanteur varie à la surface de la terre.

(*ah*) Il est à-présent reconnu que l'intensité de la pesanteur est modifiée dans les différents points de la terre par deux circonstances, qui sont l'éloignement plus ou moins grand de ces points au centre du globe, et la valeur plus ou moins grande de la force centrifuge résultant de son mouvement de rotation, force dont l'effet est de diminuer l'action de la pesanteur (on verra dans la note suivante ce que c'est que la force centrifuge). Ces deux causes se réunissent pour produire dans la pesanteur, et par conséquent dans la longueur du pendule qui bat les secondes, en allant de l'équateur aux pôles, une augmentation proportionnelle au quarré du sinus de la latitude, et c'est sur ce résultat, et sur l'observation de la longueur du pendule faite à l'Observatoire de Paris, que sont fondées les formules données dans les notes (*aa*) et (*af*). La théorie dont elles sont déduites se trouve dans la *Mécanique céleste*, 1re partie, liv. 3.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et le point de suspension soit exactement de 9 pouces 2 lignes et $\frac{1}{6}$, ce pendule étant mis en oscillation, en sorte que la balle à chaque vibration ne fasse au commencement qu'environ 3 pouces de chemin, fera 120 vibrations en une minute, et sera encore plus commode que le pendule à secondes, pour mesurer la durée du temps qu'on emploiera à faire quelque expérience. Cependant si l'on voulait se servir de ce dernier, on observera aussi que la balle ne fasse au commencement qu'environ 10 ou 12 pouces de chemin à chaque vibration BD (Fig. 78).

217. De même, voulant avoir un pendule qui fasse, par exemple, 140 vibrations par minute, il faut dire : *comme le quarré de* 140 *est au quarré de* 60, *ainsi* 3 *pieds* 8 *lignes et* $\frac{1}{2}$, *longueur du pendule à secondes, est à un quatrième terme*, qn'on trouvera de 6 pouces et environ 9 lignes, pour la longueur qu'il faut donner au pendule que l'on cherche (*ai*).

(*ai*) Dans le paragraphe commençant à l'art. 153, l'auteur a expliqué les lois du mouvement des corps cédant librement à l'action de la pesanteur, lequel est un *mouvement uniformément accéléré*, et on a vu dans la note (*ab*) les formules très-simples par lesquelles ces lois s'expriment. Il a ensuite examiné dans le paragraphe commençant à l'art. 178, le mouvement des corps pesants glissants sur des plans inclinés, dont on trouve les formules dans la note (*ac*), et il a reconnu que ce mouvement était de la même nature que le premier. Enfin il a passé aux corps pesants glissants le long des courbes : mais quoique la remarque faite à la fin de l'art. 200 soit propre à faire sentir que ce dernier mouvement est d'une nature différente de celle des précédents, l'auteur ne s'est point assez arrêté sur cette différence, et il aurait dû annoncer nettement qu'il s'agissait maintenant, non plus d'un mouvement où la vîtesse croissait proportionnellement au temps, mais où la vîtesse pouvait croître ou décroître à chaque instant d'une manière quelconque; c'est-à-dire, suivant l'expression adoptée présentement, d'un *mouvement varié*. Objet de cette note.

Pour suppléer à ce qui manque au texte, je m'arrêterai ici sur ce genre de mouvements. J'exposerai quelques circonstances du mouvement d'un point matériel libre ou assujéti dans une courbe, dont Bélidor n'a point parlé et dont la connaissance est nécessaire. Enfin je donnerai succinctement sur le mouvement d'un corps solide, ou d'un système de points matériels assujétis entre eux, des notions indispensables pour entendre la théorie des machines.

§ 1. Dans le mouvement uniformément varié (voy. la note (*ab*)), la force agissant sur le corps est constante, et, dans une époque quelconque du mouvement, elle fait croître la vîtesse de quantités égales dans des intervalles de temps égaux : mais on peut imaginer que cette même force varie pendant la durée du mouvement. Considérons l'instant qui a lieu au bout du temps t, et admettons qu'à cet instant la force agissant sur le corps soit telle que, si elle devenait constante, elle ferait croître sa vîtesse de la quantité γ dans l'unité de temps. Comme, par les principes du calcul différentiel, cette force doit être censée constante pendant l'instant infiniment petit dt, elle fera pendant cet instant croître la vîtesse du corps, Formules et lois générales du mouvement varié.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'on nommera v, de la quantité γdt. On aura donc d'abord $dv = \gamma dt$, et $\gamma = \frac{dv}{dt}$.

Considérant ensuite que, puisque γ est constant pendant l'instant dt, le corps doit être censé se mouvoir pendant cet instant d'un mouvement uniformément varié, et employant ici les formules de la note (ab), on aura pour l'espace qu'il parcourt dans cet instant $de = vdt + \frac{1}{2}\gamma dt^2$, ou, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre, $de = vdt$; d'où $v = \frac{de}{dt}$, et parconséquent $\gamma = \frac{d^2e}{dt^2}$.

On voit donc par ces équations que les lois du mouvement varié d'une manière quelconque consistent en ce que *la vîtesse variable* γ *que la force accélératrice tend à imprimer au corps dans l'unité de temps, est toujours représentée par le coëfficient différentiel du second ordre de l'expression analytique qui donne en fonction du temps* t *la valeur de l'espace* e *parcouru par le corps.* On voit aussi que *la vîtesse variable* v *du corps est le coëfficient différentiel du premier ordre de cette même expression.*

Quand on veut trouver le mouvement d'un corps, la vîtesse γ imprimée dans l'unité de temps par la force accélératrice est donnée par la nature de la question, en fonction du temps, de l'espace ou de la vîtesse acquise. En mettant son expression dans l'équation $\gamma = \frac{d^2e}{dt^2}$, cette équation réunie à celle $v = \frac{de}{dt}$ déterminera, abstraction faite des difficultés de l'intégration, la vîtesse et l'espace parcouru en fonction du temps, et parconséquent la nature du mouvement.

Mouvement d'un point matériel libre soumis à l'action de plusieurs forces accélératrices.

§ 2. Considérons maintenant un point matériel soumis à l'action de plusieurs forces accélératrices agissant suivant des directions différentes, qui lui feront décrire dans l'espace une certaine courbe. Le mouvement que prendra ce corps résultera, d'après les lois de la composition des forces et des vîtesses exposées ci-dessus, des mouvements qui lui seront imprimés respectivement par toutes les forces, et, à un instant quelconque, le corps aura dans le sens de chaque force parcouru le même espace et acquis la même vîtesse que si cette force eût été seule. La manière la plus simple de déterminer ce mouvement, est de décomposer chacune des forces appliquées au point matériel parallèlement à trois axes rectangulaires, sur lesquels on compte les coordonnées qui servent à déterminer la situation du point. Les composantes parallèles à chaque axe s'ajoutent entre elles, et on nommera ξ la somme des vîtesses que les composantes parallèles à l'axe des x peuvent imprimer dans l'unité de temps, η la même somme pour les composantes parallèles à l'axe des y, ζ la même somme pour celles parallèles à l'axe des z. On suppose ces forces positives quand elles tendent à augmenter les coordonnées x, y, z du point, lesquelles représentent les espaces qu'il parcourt dans le sens de chaque axe. D'après cela on aura conformément au § précédent, pour exprimer la nature du mouvement dans le sens de chaque axe, les trois équations $\frac{d^2x}{dt^2} = \xi$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \eta$, $\frac{d^2z}{dt^2} = \zeta$. Les constantes arbitraires introduites par leur intégration se détermineront d'après la position, la vîtesse et la direction du corps à l'instant où les forces ont commencé à agir. En éliminant entre elles le temps t, il restera deux équations en x, y et z qui seront celles de la courbe décrite par le corps.

Les vîtesses du corps dans le sens des trois axes sont respectivement $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En représentant par v leur résultante, on aura, d'après les formules de la note (d), $v=\sqrt{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}}=\frac{ds}{dt}$, s étant la longueur de l'arc de la courbe; et si l'on nomme a, b, c les angles formés par v avec les axes, on aura $v\cos. a=\frac{dx}{dt}$, $v\cos. b=\frac{dy}{dt}$, $v\cos. c=\frac{dz}{dt}$; d'où, mettant à la place de v la valeur ci-dessus, $\cos. a=\frac{dx}{ds}$, $\cos. b=\frac{dy}{ds}$, $\cos. c=\frac{dz}{ds}$, ce qui montre que le mouvement du point matériel est toujours dirigé dans le sens de la tangente à la courbe qu'il décrit. En représentant par γ la vîtesse résultante des trois vîtesses ξ, η et ζ imprimées aux corps dans chaque unité de temps dans le sens de chaque axe, on aura $\gamma=\xi\cos. a+\eta\cos. b+\zeta\cos. c$, ou en employant les valeurs ci-dessus, $\gamma=\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{ds\,dt^2}$. Mais à cause de $ds^2=dx^2+dy^2+ds^2$, le numérateur du second membre est égal à $ds\,d^2s$: donc $\gamma=\frac{d^2s}{dt^2}$. comme s réprésente l'espace parcouru par le point matériel, on voit que les expressions analytiques de la vîtesse et de la force accélératrice sont ici les mêmes que dans le cas du § précédent, où le mouvement était supposé rectiligne.

En multipliant respectivement les trois équations du mouvement du corps dans le sens de chaque axe par dx, dy, dz, et les ajoutant, on aura $\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}=\xi\,dx+\eta\,dy+\zeta\,dz$: intégrant, il vient $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=const.+2\int(\xi\,dx+\eta\,dy+\zeta\,dz)$; ou en remarquant que le premier membre est le quarré de la vîtesse $v=\frac{ds}{dt}$, $v^2=const.+2\int(\xi\,dx+\eta\,dy+\zeta\,dz.)$ La constante se détermine en remarquant qu'à l'instant où les forces ξ, η et ζ ont commencé à agir, la quantité sous le signe $\int$ était nulle, en sorte que, si l'on nomme v' la vîtesse que le corps avait à cet instant, laquelle peut être nulle, l'équation ci-dessus devient $v^2-v'^2=2\int(\xi\,dx+\eta\,dy+\zeta\,dz)$; et en multipliant les deux membres par m qui représentera la masse du point matériel,

$$mv^2-mv'^2=2\int(m\xi\,dx+m\eta\,dy+m\zeta\,dz.$$

Cette équation, qui doit être interprétée comme il suit, renferme la principale loi du mouvement d'un corps soumis à l'action de plusieurs forces. Le produit mv^2 de la masse d'un corps par le quarré de sa vîtesse se nomme sa *force vive* (il ne faut attacher à cette expression aucune notion métaphysique, mais la considérer seulement comme une dénomination convenue), et par conséquent le premier membre de l'équation représente l'augmentation que la force vive du corps a éprouvée depuis l'instant où les forces ont commencé à agir sur lui. D'une autre part, les quantités $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ expriment, conformément à la note (b), les pressions que les forces agissant sur le corps dans le sens de chaque axe exercent sur lui. Les quantités $m\xi\,dx$, $m\eta\,dy$, $m\zeta\,dz$ sont donc les produits des pressions exercées par les forces par l'élément de l'espace que le corps parcourt suivant leurs directions respectives, et le second membre de l'équation est le double de la somme des produits semblables, prise depuis l'instant où les forces ont commencé à agir.

La force vive d'un corps est le produit de sa masse par le quarré de sa vîtesse.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La quantité d'action imprimée à un corps est le produit de la pression qu'une force exerce sur lui par l'espace qu'il a parcouru suivant la direction de cette force.

Ce produit d'une pression soufferte par un corps, multipliée par l'espace que ce corps a parcouru dans la direction de cette pression, sera nommé *la quantité d'action* exercée par la force et imprimée au corps. D'après cela l'équation précédente signifie donc : 1° *que la force vive acquise pendant un certain temps par un corps qui se meut par l'action de plusieurs forces quelconques est toujours numériquement égale au double des quantités d'action que ces forces lui ont imprimées pendant le même temps, en prenant négativement les quantités d'action quand les espaces parcourus sont en sens contraire de l'action des forces ;* 2° *que la force vive acquise par le corps à un instant donné, et par conséquent la valeur de sa vîtesse, dépend uniquement de la grandeur des forces qui ont agi sur lui, et de l'espace qu'il a parcouru suivant la direction de chacune de ces forces*, et non point de la figure de la courbe qu'il a décrite, de la manière dont sa vîtesse a varié, ni de la durée de son mouvement.

Dans le mouvement d'un corps, la force vive acquise est toujours égale au double de la quantité d'action imprimée par les forces qui agissent sur lui.

Ce principe, connu sous le nom de *conservation des forces vives*, qui sera étendu plus loin, et dont l'application aura lieu très-fréquemment par la suite, suffit pour déterminer le mouvement d'un corps. Mais il faut pour cela que la quantité $\xi m\,dx + \eta m\,dy + \zeta m\,dz$ soit une différentielle exacte des trois variables x, y, z : c'est ce qui arrive toujours quand les quantités ξ, η, ζ qui représentent les forces sont constantes, ou dépendent uniquement des distances du corps à des points fixes (Voy. le *Traité de Mécanique de M. Poisson*, t. I, p. 328). Mais si les forces appliquées au corps varient avec le temps ou avec sa vîtesse, il faudrait, pour intégrer cette quantité, y substituer d'abord les valeurs du temps ou de la vîtesse en fonction des coordonnées x, y, z, ce qui suppose le problème résolu.

Exemple. Mouvement d'un corps pesant lancé horizontalement dans un espace vide.

Pl. A, Fig. 15.

§ 3. Pour donner un exemple très-simple de l'application de ce qui précède, on considérera un corps pesant placé au point A, qui ayant été lancé avec une certaine vîtesse dans le sens de l'axe horizontal AY, serait soumis à l'action de la pesanteur parallèle à l'axe vertical AX. On sait d'avance ici que le corps se mouvra dans le plan vertical passant par ces deux axes, et en nommant g la force accélératrice de la pesanteur, et faisant attention qu'aucune force accélératrice n'agit sur lui dans le sens AY, on aura pour les équations de son mouvement dans les sens AX et AY, $\frac{d^2x}{dt^2} = g$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$. Intégrant, il vient $\frac{dx}{dt} = gt + const.$, $\frac{dy}{dt} = const.$ La constante est nulle dans la première équation, puisque le corps n'avait à l'origine du mouvement aucune vîtesse dans le sens des x, et dans la seconde équation elle est égale à V, si V représente la vîtesse avec laquelle le corps a été lancé dans le sens AY. Les deux équations ci-dessus deviennent donc $\frac{dx}{dt} = gt$, $\frac{dy}{dt} = V$. En intégrant une seconde fois, on aura $x = \frac{1}{2}gt^2$, $y = Vt$, ce qui fixe la position du corps au bout du temps t. Éliminant t entre ces deux équations, il vient $y^2 = \frac{2V^2}{g}x$ pour l'équation de la courbe AM que le corps décrit, laquelle est une parabole. Enfin, pour avoir l'expression de sa vîtesse, on emploiera l'équation du principe de la conservation des forces vives, qui devient ici $v^2 - v'^2 = 2\int g\,dx$, ou $v^2 - v'^2 = 2gx$, puisque g est constante. On a vu ci-dessus que v' représentait la vîtesse du corps à l'instant où les forces accélératrices ont commencé à agir. On a donc $v' = V$, et par conséquent l'équation ci-dessus donne $v^2 = 2gx + V^2$, ou $v = \sqrt{2gx + V^2}$: ce qui apprend que la vîtesse du corps dans le sens de la courbe est la résultante de la vîtesse V

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui lui a été imprimée dans le sens AY, et de la vîtesse $\sqrt{2gx}$ due à la hauteur x qu'il a parcourue dans le sens de la verticale (Voy. la note (*ab*)).

Mouvement d'un point matériel lancé avec une certaine vîtesse, et assujéti à se mouvoir dans une courbe donnée.

§. 4. Je vais maintenant passer au cas où le corps n'est point libre, mais assujéti à demeurer dans une courbe donnée, et je supposerai en premier lieu qu'il lui a été imprimé une certaine vîtesse initiale, dans le sens de la courbe où il est placé, mais qu'aucune force accélératrice n'agit sur lui. En considérant, conformément aux principes du calcul différentiel, la courbe comme composée d'éléments infiniment petits, dont chacun est parcouru dans l'instant dt, et nommant ω l'angle de deux éléments consécutifs ou *l'angle de contingence* de la courbe, on voit que le corps ayant parcouru le premier élément avec la vîtesse v avec laquelle il a été lancé, cette vîtesse, à la rencontre dn second élément, se décomposera nécessairement en deux autres, l'une v cos. ω dirigée suivant le second élément, et l'autre v sin. ω dirigée suivant la normale à la courbe : le corps parcourra le second élément avec la vîtesse v cos. ω, et celle v sin. ω sera détruite par la résistance de la courbe. On conclut de-là que le point matériel, en passant d'un élément de la courbe à un autre, fait une perte de vîtesse exprimée par $v\,(1-\cos.\omega)$: mais l'angle ω étant infiniment petit tant que la courbe est continue, la quantité $1-\cos.\omega$ est le sinus verse d'un angle infiniment petit, c'est-à-dire infiniment petite du second ordre ; elle ne produit donc, quoique répétée une infinité de fois, qu'une quantité infiniment petite du premier ordre : ce qui apprend que la vîtesse avec laquelle le corps a été lancé se conserve sans altération dans toute l'étendue de la courbe qu'il décrit.

La vîtesse initiale du corps se conserve sans altération.

On remarquera en second lieu que le corps ne peut perdre à chaque instant une partie de sa vîtesse contre la courbe sans exercer contre elle une pression, mesurée par la force qui serait capable d'imprimer la vîtesse ainsi perdue. Or la vîtesse que le corps perd dans l'instant dt perpendiculairement à la courbe est v sin. ω ; en nommant ds l'élément de l'arc de la courbe, r son rayon de courbure, et faisant attention que sin. $\omega = \frac{ds}{r}$, cette vîtesse pourra s'exprimer par $\frac{v\,ds}{r}$. La force accélératrice qni l'imprimerait au corps dans l'instant dt lui imprimerait dans l'unité de temps la vîtesse $\frac{v\,ds}{r\,dt}$, ou $\frac{v^2}{r}$. Par conséquent, si m est la masse de ce corps, la pression qu'il exercera normalement à la courbe sera, conformément à la note (*b*), exprimée par $m\frac{v^2}{r}$. Cette pression se nomme la *force centrifuge* du corps, parce qu'elle mesure la force avec laquelle le corps tend à s'éloigner du centre de courbure de la courbe dans laquelle il est retenu, en vertu de sa propension à se mouvoir en ligne droite et à s'échapper à chaque instant suivant la tangente de cette courbe.

Pression normale à la courbe, ou force centrifuge.

Mouvement d'un point matériel soumis à l'action de plusieurs forces accélératrices, et assujéti à se mouvoir dans une courbe donnée.

§ 5. Lorsque plusieurs forces agissent sur un point retenu dans une courbe, chacune se décompose par l'effet de la résistance de la courbe en deux autres, l'une perpendiculaire à la courbe, qui est détruite, l'autre dans le sens de sa tangente, qui est la seule qui agisse pour imprimer le mouvement. La pression qui s'exerce contre la courbe est donc ici composée de deux parties, savoir de la pression résultant du mouvement du corps ou de sa force centrifuge, dont la valeur a été donnée dans le § précédent, et des composantes normales à la courbe des forces qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

agissent sur le corps. En nommant ici, comme dans le § 2, ξ, η et ζ les vîtesses que peuvent imprimer au corps dans l'unité de temps dans le sens de chaque axe les forces qui agissent sur lui, et se rappelant que les cosinus des angles formés par la tangente à la courbe avec les axes sont représentés respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, on aura pour les composantes des ces vîtesses dans le sens de cette tangente $\frac{\xi dx}{ds}$, $\frac{\eta dy}{ds}$, $\frac{\zeta dz}{ds}$. Le mouvement du corps a donc lieu comme s'il était continuellement poussé dans le sens de la courbe par une force capable de lui imprimer dans l'unité de temps une vîtesse $\gamma=\frac{\xi dx}{ds}+\frac{\eta dy}{ds}+\frac{\zeta dz}{ds}$. Ainsi, d'après le § 1, s étant l'espace parcouru, on a $\gamma=\frac{d^2s}{dt^2}$, et en substituant cette valeur dans l'équation précédente, intégrant, et faisant attention que $\frac{ds^2}{dt^2}=v^2$, v étant la vîtesse du corps, il viendra comme dans le § 2, $v^2-v'^2=2f(\xi dx+\eta dy+\zeta dz)$: d'où l'on conclut que le théorême de la conservation des forces vives a lieu dans le cas où le corps est retenu dans une courbe comme dans celui où il se meut librement, c'est-à-dire que la valeur de la vîtesse ne dépend point de la nature de la courbe décrite, mais seulement de l'espace parcouru dans le sens des forces qui agissent sur le corps, et que l'augmentation de force vive qui a lieu quand le corps passe d'un point à un autre est toujours numériquement égal au double de la quantité d'action imprimée dans cet intervalle, sans que l'espèce de résistance que la courbe oppose au mouvement du corps apporte aucune diminution à cette force vive. Quand le second membre de l'équation précédente pourra s'intégrer, elle donnera l'expression de la vîtesse. En introduisant ensuite cette expression dans l'équation $ds=vdt$, et la combinant avec les équations données de la courbe, on aura les moyens de déterminer la situation du corps après un temps donné, et réciproquement.

L'augmentation de force vive, d'un point à un autre, se fait comme si le corps était libre.

A l'égard de la pression exercée contre la courbe, il faudra, pour en obtenir la valeur complète, composer suivant les règles de la composition des forces la pression $\frac{mv^2}{r}$ provenant de la force centrifuge, laquelle est toujours dirigée suivant le rayon de courbure, avec les composantes des forces agissant sur le point matériel qui sont détruites par la courbe: ces composantes sont dirigées pour chaque force suivant une normale située dans le plan qui contient la tangente à la courbe et la direction de la force.

Mouvement d'un corps pesant glissant le long d'une courbe donnée.

Pl. A, Fig. 15.

§ 6. Pour appliquer à l'exemple le plus simple les considérations précédentes, je supposerai un corps pesant qui glisserait le long de la courbe donnée AM, tracée dans le plan des deux axes AX et AY, en partant du point A. La seule force accélératrice à laquelle le corps est soumis étant ici la pesanteur, qui lui imprimerait une vîtesse g dans l'unité de temps, et qui agit parallèlement à l'axe AX supposé vertical, l'équation du principe de la conservation des forces vives donne $v^2-v'^2=2fgdx=2gx$, où v' représente la vîtesse avec laquelle le corps aurait été lancé au point A dans le sens de la courbe, à l'instant où la pesanteur a commencé à agir sur lui. Si le corps n'a point été lancé, et qu'il ait commencé à se mouvoir avec une vîtesse nulle, on a simplement $v^2=2gx$ et $v=\sqrt{2gx}$; d'où l'on voit que quelle que soit la courbe qu'il a suivie, la vîtesse du corps à un point quelconque de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cette courbe est due à la hauteur verticale dont il est descendu pour arriver à ce point, ce qui s'accorde avec l'art. 201 du texte. Pour savoir ensuite le temps que le corps emploie sur chaque courbe à descendre d'une certaine hauteur, il faut dans l'équation $ds = v\,dt$ mettre pour v la valeur ci-dessus, ce qui donnera $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gx}}$, conformément à l'art. 202. On mettra pour ds la valeur de x qui sera fournie par l'équation de la courbe.

Quant à la pression normale soufferte par la courbe AM, elle est égale à la pression $\frac{mv^2}{r}$, ou $\frac{2mgx}{r}$, résultant de la force centrifuge, plus l'effort mg résultant de la gravité décomposé dans le sens de la normale, avec laquelle il fait un angle dont le cosinus est $\frac{dy}{ds}$. La valeur de cette pression est donc $\frac{2mgx}{r} + \frac{mg\,dy}{ds}$, dans laquelle il faudra substituer pour ds et pour le rayon de courbure r les valeurs particulières à chaque courbe.

Exemple. Pendule simple oscillant dans un arc de cercle. Pl. A, Fig. 16.

Supposons par exemple que le corps, suspendu par un fil attaché en C, décrive par l'action de la pesanteur un arc de cercle MAm dont le point C soit le centre. Prenons en A l'origine des coordonnées x et y comptées sur les axes vertical et horizontal AX et AY. Le corps étant censé partir du point M′, nommons MP′ x', et supposons-le arrivé en M, en appelant MP x. L'arc s se comptant toujours dans le même sens que les coordonnées, et à partir de la même origine A, on voit qu'ici les arcs correspondants à chaque situation du corps diminuent quand le temps augmente, et qu'on doit prendre les différentielles dt et ds de signes contraires. De plus, quand le corps a passé de M′ en M, la hauteur verticale dont il est descendu est $x' - x$. La formule générale ci-dessus devient donc ici $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(x'-x)}}$. On a par la nature du cercle $ds = \frac{r\,dx}{y}$, le rayon CM ou CA étant représenté par r : son équation est $y^2 = 2rx - x^2$, d'où $ds = \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx - x^2}}$. Mettant cette valeur dans celle de dt, on aura $dt = \frac{-r\,dx}{\sqrt{2g(x'-x)(2rx-x^2)}}$, qu'il s'agit d'intégrer. Je renverrai pour l'intégration générale aux traités de Mécanique, et considérerai seulement le cas où le pendule s'écartant très-peu de la verticale, on peut considérer x comme très-petit par rapport à r, et négliger le terme x^2 devant celui $2rx$. On a alors simplement $dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{x'x - x^2}}$ dont l'intégrale est $t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \text{arc.}\left(\cos. = \frac{2x - x'}{x'}\right)$. La constante est nulle, car au point de départ M′ on a en même temps $t = 0$ et $x = x'$, supposition qui fait disparaître les deux membres de cette équation. Cette expression de t donne le temps que le corps emploie à descendre de M′ en M. Pour avoir celui qu'il emploie à descendre de M′ en A, on y fera $x = 0$, ce qui donnera $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, en représentant par π le rapport de la circonférence au diamètre. Ainsi, pourvu que l'arc AM′ soit fort petit, le temps de la descente est indépendant de la grandeur de cet arc.

Le corps étant arrivé au point A avec la vîtesse $\sqrt{2gx'}$ due à la hauteur MP′ dont il est descendu, continue à se mouvoir le long de la branche Am de la courbe, et sa vîtesse diminue peu-à-peu, parce que la pesanteur lui imprime alors une quantité

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'action qui est dirigée en sens contraire de son mouvement. Quand le corps est parvenu au point m' situé à la même hauteur que le point de départ M', la quantité d'action qui lui a été imprimée en sens contraire de son mouvement est mgx'. Il a donc dû perdre, depuis le point A jusqu'au point m', une quantité de force vive numériquement égale à $2mgx'$, ou une vîtesse égale à $\sqrt{2gx'}$, c'est-à-dire égale à celle qu'il possédait en A. Il suit de-là que le corps arrive en m' avec une vîtesse nulle, et se trouve à ce point dans la même situation où il était en M'. Il descend donc par l'effet de la pesanteur de m' en A, remonte en M', puis redescend de nouveau, et continue indéfiniment des oscillations d'égale étendue. A l'égard du temps que le corps emploie à monter de A en m', on se convainc facilement qu'il est égal à celui de la descente de M' en A. En effet, quand le corps passe de A en m, il lui est imprimé en sens contraire de son mouvement la quantité d'action mgx. Ainsi la force vive qu'il possédait en A étant $2mgx'$, celle qu'il possède en m est seulement $2mgx' - 2mgx$. Sa vîtesse en m est donc $\sqrt{2g(x'-x)}$, et par conséquent, comme on a ici $ds = vdt$, il vient $dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(x'-x)}}$. Cette expression étant au signe près la même que pour la portion de cercle AM', il est évident que la valeur de t prise entre les mêmes limites sera aussi la même. Ainsi la durée de chaque demi-oscillation étant $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, celle de l'oscillation sera $\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.

Durée des oscillations du pendule simple quand elles sont très-petites.

On voit par les formules de la note (*ab*) que le temps qu'un corps emploierait à tomber de la hauteur $\frac{1}{2}r$ serait $\sqrt{\frac{r}{g}}$. Le temps d'une oscillation est donc égal à celui de la chûte d'un corps d'une hauteur égale à celle de la moitié de la longueur du pendule, multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre. C'est le résultat trouvé dans l'art. 209 du texte pour le temps d'une oscillation dans la cycloïde, et par conséquent le calcul précédent justifie ce qui est dit dans l'art. 210.

A l'égard de la pression exercée contre la courbe décrite par le point matériel, c'est-à-dire ici de la tension du fil à l'extrémité duquel il est attaché, comme on a $\frac{dy}{ds} = \frac{r-y}{r}$, la formule trouvée à la fin du § précédent donnera pour la valeur de cette tension $\frac{mg}{r}[2(x'-x) + r - \sqrt{2rx-x^2}]$.

D'un assemblage de points matériels soumis à l'action de plusieurs forces accélératrices.

§ 7. On a considéré dans les paragraphes précédents le mouvement d'un seul point matériel, en faisant abstraction de l'étendue du corps, et supposant sa masse concentrée en un seul point, où les forces qui agissaient sur lui étaient censées appliquées. On va maintenant s'occuper des circonstances du mouvement d'un assemblage de points, soit qu'ils soient liés entre eux d'une manière invariable de manière à former un corps solide, soit qu'ils se trouvent assujétis seulement par des fils, et composent un système susceptible de changer de figure. Ces points étant soumis à l'action de diverses forces, on voit que, s'ils étaient libres, chacun prendrait sans altération les mouvements qu'elles tendent à leur imprimer; mais étant gênés par leur liaison mutuelle, ils ne peuvent céder à l'action des forces qui agissent sur eux qu'autant que cette liaison le leur permet. La vîtesse imprimée à chaque point est donc obligée à se décomposer en deux autres, l'une que prend le point, l'autre qui est détruite par l'effet de la liaison du système et de la réaction des points les uns sur les autres. Or il est évident que *ces vîtesses ainsi détruites sont nécessai-*

Principe de D'Alembert.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rement telles que si elles étaient imprimées seules aux points, il y aurait équilibre dans le système, car sans cela leur destruction mutuelle n'aurait pas lieu. En exprimant dans chaque cas, d'après la nature du système, les conditions de l'équilibre entre les quantités de mouvement dues aux vîtesses ainsi détruites, on aura des équations qui, abstraction faite des difficultés de l'intégration, pourront faire connaître les circonstances du mouvement.

Au moyen de ce principe dû à d'Alembert, on étend facilement à un assemblage de points matériels le principe de la conservation des forces vives, démontré dans le § 2 pour un seul point. En effet, nommons x, y, z, les coordonnées d'un des points du système dont la masse est m; ξ, η, ζ les vîtesses que les forces qui agissent sur lui sont capables de lui imprimer dans le sens de chaque axe. Les vîtesses avec lesquelles ce point se mouvra effectivement dans le sens des axes, seront exprimées respectivement par $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; et chacune d'elles augmentera dans l'instant dt de la quantité $\frac{d^2x}{dt}, \frac{d^2y}{dt}, \frac{d^2z}{dt}$. Mais les forces qui agissent sur le point lui imprimeraient dans le sens de chaque axe pendant l'instant dt s'il était libre les vîtesses ξdt, ηdt, ζdt. Il perd donc, dans le sens de chaque axe, par l'effet de la réaction des points les uns sur les autres, les vîtesses $\xi dt - \frac{d^2x}{dt}$, $\eta dt - \frac{d^2y}{dt}$, $\zeta dt - \frac{d^2z}{dt}$. Il en est de même pour tous les autres points, et d'après le principe précédent, si tous étaient animés de ces vîtesses perdues, il y aurait alors équilibre entre leurs quantités de mouvement. En employant donc ici le principe des vîtesses virtuelles pour exprimer les conditions de cet équilibre (voy. la note (n)), et représentant par $\delta x, \delta y, \delta z$ les petits espaces que chaque point parcourrait dans le sens des axes, si on donnait au système un mouvement infiniment petit, c'est-à-dire les vîtesses virtuelles de ces points estimées dans le sens des axes, les moments des quantités de mouvement dues aux vîtesses perdues dans le sens de ces mêmes axes seront respectivement $m\left(\xi dt - \frac{d^2x}{dt}\right)\delta x$, $m\left(\eta dt - \frac{d^2y}{dt}\right)\delta y$, $m\left(\zeta dt - \frac{d^2z}{dt}\right)\delta z$; et on aura, pour exprimer que la somme de ces moments est nulle, l'équation $\mathrm{S}\left[m\left(\xi dt - \frac{d^2x}{dt}\right)\delta x + m\left(\eta dt - \frac{d^2y}{dt}\right)\delta y + m\left(\zeta dt - \frac{d^2z}{dt}\right)\delta z\right] = 0$, où le signe S indique la somme des quantités semblables à celles contenues dans la parenthèse prises pour tous les points du système. On emploie ici une caractéristique particulière δ pour les variations des coordonnées qui représentent les vîtesses virtuelles des points, pour ne pas les confondre avec les variations dx, dy, dz qui expriment les espaces parcourus dans le sens de chaque axe en vertu du mouvement effectif du système. Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{S}m.\frac{\delta x\, d^2x + \delta y\, d^2y + \delta z\, d^2z}{dt^2} = \mathrm{S}m(\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z).$$

Je remarquerai maintenant qu'il y a un grand nombre de cas où les vîtesses virtuelles $\delta x, \delta y, \delta z$ peuvent être considérées comme identiques aux espaces dx, dy, dz; et que cela arrivera généralement toutes les fois que les conditions de la liaison des points matériels seront indépendantes du temps. En effet les espaces $\delta x, \delta y$ et δz ne sont assujétis à aucune autre condition qu'à pouvoir être décrits

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sans que les conditions de la liaison des points, telles qu'elles ont lieu dans l'instant et dans la situation où l'on considère le système, soient violées : ils peuvent donc être censés égaux aux espaces dx, dy, dz que le point décrit par le mouvement du système, à moins que pendant la durée de ce mouvement les conditions de la liaison ne viennent à changer. Par exemple, si l'un des points était assujéti à demeurer dans une ligne qui serait elle-même emportée par un mouvement donné, il est évident que l'espace qu'il décrirait effectivement par son mouvement ne devrait pas être confondu avec l'espace qu'il pourrait décrire par suite d'un petit ébranlement donné au système pris dans un instant et dans une situation déterminée. Mais en faisant abstraction des cas de cette espèce, on pourra remplacer δx, δy, δz par dx, dy, dz dans l'équation ci-dessus, qui deviendra alors $\mathrm{S}m\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}$ $=\mathrm{S}m\,(\xi\,dx+\eta\,dy+\zeta\,dz)$, et donnera en intégrant et faisant attention que $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=\frac{ds^2}{dt^2}=v^2$, v étant la vîtesse du point, $\mathrm{S}mv^2=const.+2\int\mathrm{S}m(\xi\,dx+\eta\,dy+\zeta\,dz)$. La constante se détermine d'après la connaissance de la valeur de l'intégrale du second membre à un instant donné, et de la valeur correspondante de $\mathrm{S}mv^2$ au même instant.

Dans le mouvement d'un système de points matériels la somme des forces vives acquises est toujours égale au double de la somme des quantités d'actions imprimées.

En se rappelant ici les dénominations établies dans le § 2, on conclut de l'équation précédente que *la somme des forces vives acquises par les divers points matériels du système pendant un certain temps, est toujours numériquement égale au double de la somme des quantités d'action que les forces agissant sur ces points ont imprimées pendant le même temps*, en sorte que la force vive du système est véritablement indépendante des conditions de la liaison, et de la nature des lignes décrites par les corps, et peut se calculer uniquement d'après les espaces que les corps ont parcourus dans le sens de chaque force. On voit de plus que si, à un instant quelconque, le système était abandonné à lui-même, et qu'il n'agît plus aucune force sur lui, la somme des forces vives qui aurait lieu à cet instant se conserverait sans altération, quels que fussent les mouvements que les corps prendraient ensuite les uns par rapport aux autres, et les variations que pourraient éprouver leurs vîtesses. Il ne faut point oublier d'ailleurs que l'existence de l'équation précédente suppose que les conditions de la liaison sont indépendantes du temps. Elle suffira pour déterminer le mouvement du système, toutes les fois que la parenthèse du second membre sera une différentielle exacte des trois variables x, y, z (ce qui aura lieu dans les cas indiqués § 2), et que ce mouvement ne dépendra que de la valeur d'une seule quantité, comme on en verra des exemples dans la suite.

D'un assemblage de points matériels soumis à l'action de plusieurs forces accélératrices, quand il y a des changements finis instantanés dans leurs vîtesses.

§ 8. Il est très-important de remarquer aussi que l'existence de l'équation précédente suppose également que les courbes décrites par les points sont continues, et que leurs vîtesses ne varient dans chaque élément du temps que d'une quantité infiniment petite. Pour le faire voir, je remarquerai que le principe de d'Alembert énoncé au commencement du § précédent a également lieu, soit que les vîtesses et les directions des points varient dans un instant d'une quantité infiniment petite ou d'une quantité finie, et fournit également les moyens de trouver la nature du mouvement. Soit donc m la masse de l'un quelconque des points du système, v la vîtesse qu'il possède à un instant donné, représentée en grandeur et en direction par la ligne MN. Supposons que, par une cause quelconque, cette vîtesse venant à

Pl. A, Fig. 17.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

varier dans cet instant d'une quantité finie devienne v' représentée en grandeur et en direction par MN'. Achevant le parallélogramme MN'NN'', il faudra concevoir que la vîtesse primitive v ou MN a été, par suite de l'action mutuelle des corps, décomposée en deux autres, dont l'une v' ou MN' subsiste, et l'autre MN'' ou v'' est détruite. Et d'après le principe qu'on vient de rappeler, cette dernière doit être telle que si tous les points étaient animés respectivement des quantités de mouvement mv'' dues à ces vîtesses, il y aurait équilibre dans le système. Or on a dans le triangle MNN', d'après un théorême de géométrie élémentaire, $v^2 = v'^2 + v''^2 + 2v'v''$ cos. MN'N, ou parce que l'angle N'MN'' est supplément de l'angle MN'N, $v^2 = v'^2 + v''^2 - 2v'v''$ cos. N'MN''. Multipliant tous les termes par m, et faisant la somme des équations semblables qui auraient lieu pour tous les points du système, on aura $Smv^2 = Smv'^2 + Smv''^2 - 2Smv'v''$ cos. N'MN''. Mais les quantités de mouvement mv'' doivent se faire équilibre : ainsi, d'après le principe des vîtesses virtuelles (voy. la note (*n*)), multipliant mv'' par le petit espace que le point parcourrait dans le sens de v'' si on donnait au système un mouvement infiniment petit, espace exprimé par v' cos. N'MN''. dt (si on suppose toujours les conditions de la liaison des corps indépendantes du temps), il faudra que la somme des produits semblables soit nulle. On a donc l'équation $Smv''.v'$ cos. N'MN''. $dt = 0$, laquelle fait disparaître le dernier terme de l'équation précédente, et la réduit à $Smv'^2 = Smv^2 - Smv''^2$.

Ce résultat apprend que la somme des forces vives qui a lieu dans le système après le changement brusque est moindre que celle qui avait lieu auparavant, et que *le système a perdu une quantité de force vive égale à celle qui aurait lieu si les corps étaient animés des vîtesses qu'ils ont perdues lors de ce changement.* Ce beau théorême qui complète le principe de la conservation des forces vives, a été établi pour la première fois en 1783 par M. Carnot, dans son *Essai sur les machines en général.* Il en résulte que toutes les fois qu'il se fait un changement brusque dans la vîtesse des points d'un système, il arrive précisément la même chose que si les forces qui leur sont appliquées avaient cessé d'agir pendant un certain temps, et avaient imprimé de moins une quantité d'action numériquement égale à la moitié de la force vive due aux vîtesses qui ont été perdues.

Théorême de Carnot : par l'effet d'un changement instantané dans les vîtesses, il se perd une quantité de force vive égale à celle due aux vîtesses perdues par les corps.

Quand le mouvement change par degrés insensibles, les points matériels perdent bien à chaque instant par leur action mutuelle, ou par la réaction des lignes et des surfaces dans lesquelles ils sont retenus, une portion de leur vîtesse ; mais cette portion étant infiniment petite, la force vive perdue dans chaque élément du temps, qui est proportionnelle au quarré de la vîtesse, est infiniment petite du second ordre, et après un temps fini elle est infiniment petite du premier ordre, ou nulle.

§ 9. Pour montrer l'usage des considérations précédentes, je m'occuperai en premier lieu du mouvement d'un corps solide, en le supposant lié à un axe fixe autour duquel il est assujéti à tourner, et je supposerai d'abord que le corps n'est soumis à l'action d'aucune force accélératrice, mais qu'il se meut en vertu d'une impulsion qui lui a été donnée. Ainsi imaginant le corps immobile, et qu'une masse M animée d'une vîtesse V vient le pousser, puis cesse à l'instant même d'agir sur lui, il s'agit de déterminer le mouvement qui en résultera. Je supposerai la

Du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

direction de V perpendiculaire à l'axe fixe et à la surface du corps choqué : car si ces conditions n'étaient pas remplies, cette vîtesse se décomposerait d'abord à la rencontre du corps, et n'agirait sur lui que par la composante normale à sa surface ; cette composante, si elle n'était point perpendiculaire à l'axe fixe, se partagerait encore en deux autres, l'une parallèle à cet axe qui ne produirait aucun effet, l'autre qui lui serait perpendiculaire, de laquelle seule résulterait le mouvement de rotation que le corps doit prendre autour de lui.

Pl. A, Fig. 18.

Cela posé, nommons m la masse du corps, dont tous les points sont rapportés aux trois axes rectangulaires AX, AY, AZ, au moyen des coordonnées x, y, z. Pour plus de simplicité, l'axe AZ est supposé l'axe fixe, et la vîtesse V dirigée suivant EF perpendiculairement au plan des xz. Soient X, Z les coordonnées AG, FG du point F où elle rencontre ce plan. Appelons r la distance d'un point quelconque du corps à l'axe fixe AZ, et v la vîtesse de rotation que doivent prendre les points de ce corps situés à l'unité de distance de cet axe, c'est-à-dire la *vîtesse angulaire* du corps, en sorte que la vîtesse d'un point quelconque sera rv. En employant ici le principe de d'Alembert énoncé § 7, on voit qu'à l'instant où se fait l'impulsion la masse M qui possède la vîtesse V la perd, puisque cette masse est supposée cesser aussitôt d'agir sur le corps ; que chaque élément de la masse du corps, qui ne possédait aucune vîtesse, prend la vîtesse rv, c'est-à-dire perd la vîtesse $0-rv$, ou simplement $-rv$; et par conséquent que la quantité de mouvement MV due à la vîtesse perdue par la masse M, et toutes les quantités de mouvement $-rv\,dm$ perdues par les éléments du corps, doivent se faire équilibre autour de l'axe fixe AZ. Les conditions de cet équibre s'exprimeront, conformément aux règles de la note (m), en égalant à zéro la somme des moments de ces quantités de mouvement prises par rapport à cet axe, ce qui donnera $\mathrm{MV.X}-\int rv\,dm\,.\,r=0$, d'où l'on déduit pour la valeur de la vîtesse angulaire avec laquelle le corps tournera autour de l'axe fixe par l'effet de l'impulsion $v=\frac{\mathrm{MV.X}}{\int r^2\,dm}$.

La vîtesse angulaire est la vîtesse de rotation des points situés à l'unité de distance de l'axe fixe.

Expression de la vîtesse angulaire résultant d'une impulsion donnée au corps.

§ 10. La quantité $\int r^2\,dm$, qui est la somme des produits de chaque élément de la masse du corps par le quarré de la distance de cet élément à l'axe de rotation, se nomme le *moment d'inertie du corps pris par rapport à cet axe*. On s'en formera convenablement l'idée, en remarquant que quand un corps tournant autour d'un axe vient à rencontrer un obstacle, l'effort exercé sur cet obstacle est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel au moment d'inertie du corps. Quand on connaît la valeur du moment d'inertie pour un axe passant par le centre de gravité d'un corps, on calcule facilement cette valeur pour tout autre axe parallèle au premier. En effet, supposons que l'axe des z passe par le centre de gravité, et soit r la distance d'un point quelconque du corps à cet axe, on aura $r^2=x^2+y^2$. Soient de plus r' la distance d'un point quelconque du corps à un autre axe parallèle à l'axe des z, x', y' les coordonnées du point où ce dernier coupe le plan des xy, et a la distance des deux axes, en sorte que $a^2=x'^2+y'^2$. On aura $r'^2=(x-x')^2+(y-y')^2$, d'où développant, multipliant par dm, intégrant en faisant attention que par la nature du centre de gravité $\int x\,dm=0$, $\int y\,dm=0$, on tire $\int r'^2\,dm=\int r^2\,dm+a^2m$; ce qui apprend que le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque, est égal au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle

Du moment d'inertie.

La valeur du moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à celui-ci et passant par le centre de gravité, plus le produit de la masse du corps par le quarré de la distance des deux axes.

étant connue, on peut en déduire la valeur de ce moment par rapport à tout autre axe parallèle au premier.

Si un corps solide dont on voudrait calculer le moment d'inertie n'avait point sa surface soumise à la loi de continuité, il faudrait le partager en un grand nombre de petites parties, calculer pour chacune le produit de son volume par le quarré de la distance de son milieu à l'axe de rotation; et faire la somme de ces produits. Si la surface du corps était continue et susceptible d'être représentée par une équation, l'évaluation du moment d'inertie ne serait plus qu'une application du calcul intégral, dont on trouvera divers exemples dans les traités élémentaires de mécanique. Je mettrai seulement ici la note des divers moments d'inertie qu'il peut être utile d'avoir sous les yeux.

Expression du moment d'inertie de divers corps.

Le moment d'inertie d'une ligne droite dont la longueur est a, pris par rapport à un axe passant par son milieu et qui lui est perpendiculaire, est $\frac{1}{12}a^3$.

Celui d'un parallélepipède rectangle dont les trois arêtes sont a, b, c, pris par rapport à un axe passant par son centre et parallèle à l'arête c, est $\frac{1}{12}abc\,(a^2+b^2)$. Le moment d'inertie étant pris par rapport à l'arête c elle-même, il est $\frac{1}{3}abc\,(a^2+b^2)$.

Celui d'un cylindre droit à base circulaire dont le rayon est r et la longueur c, pris par rapport à son axe, est en appelant π le rapport de la circonférence au diamètre, $\frac{\pi}{2}cr^4$.

Celui d'un cône droit à base circulaire dont le rayon de la base est r et c la hauteur, pris par rapport à son axe, est $\frac{\pi}{10}cr^4$.

Celui d'un segment sphérique, pris par rapport au diamètre passant par le milieu de ce segment, r étant le rayon de la sphère et f la flèche du segment, est $\pi f^3\left(\frac{2}{3}r^2-\frac{1}{2}fr+\frac{1}{10}f^2\right)$. Le moment d'inertie de la sphère entière par rapport à un de ses diamètres est $\frac{8\pi}{15}r^5$.

Celui d'un ellipsoïde, en nommant a, b, c ses trois axes, et E son volume $=\frac{4\pi}{3}.abc$, pris par rapport au diamètre c, est $\frac{E}{5}(a^2+b^2)$.

Enfin le moment d'inertie d'un solide de révolution quelconque, pris par rapport à son axe de figure, en nommant x l'abscisse de la courbe génératrice comptée sur cet axe, et y l'ordonnée de cette courbe perpendiculaire à ce même axe, est exprimé en général par $\frac{\pi}{2}\int y^4 dx$, formule qu'il faudra intégrer après y avoir substitué pour y sa valeur en x résultant de l'équation de la courbe génératrice de la surface du solide.

Remarque sur l'espèce d'unité dans laquelle le moment d'inertie doit être exprimé.

Il faut remarquer pour les applications que les quantités données par les formules précédentes se trouveront exprimées en unités de volume. En les multipliant par la pesanteur spécifique Π du corps, elles le seraient en unités de poids. Mais en se rappelant que (voy. la note (*b*)) la masse est égale au poids divisé par la vîtesse g que la pesanteur imprime dans l'unité de temps, on voit qu'il faudra, avant de faire usage des nombres donnés par les formules précédentes, les multiplier par le rapport $\frac{\Pi}{g}$, pour que les nombres se trouvent exprimés en unités de masse, comme cela doit être d'après la nature du moment d'inertie.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Des efforts supportés par l'axe fixe à l'instant où l'impulsion est donnée au corps.

§ 11. En revenant maintenant à la considération du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe par suite d'une impulsion, je remarquerai qu'à l'instant où cette impulsion a lieu, et où les quantités de mouvement perdues par la masse qui choque ce corps et par les parties de ce corps se font mutuellement équilibre autour de l'axe fixe, cet axe doit nécessairement en général supporter un effort, que l'on connaîtra en employant les règles du § 3 de la note (*m*). En conservant ici les dénominations du § 9, j'observerai que les directions des quantités de mouvement $-vrdm$ perdues par les éléments du corps, lesquelles font équilibre à la quantité de mouvement MV perdue par la masse M, font avec l'axe des x et celui des y des angles dont les cosinus sont exprimés respectivement par $\frac{y}{r}, \frac{x}{r}$. Par conséquent en faisant attention, conformément à ce qui est dit vers la fin de la note (*d*), que ces quantités de mouvement tendent à diminuer les x et à augmenter les y positives, leurs composantes dans le sens des x et des y seront exprimées par $-\frac{y}{r}.vrdm, \frac{x}{r}.vrdm$, ou $-vydm, vxdm$. Ainsi l'effort supporté par l'axe fixe parallèlement aux x sera $-v\int ydm$, et parallèlement aux y il sera $MV+v\int xdm$.

En supposant que M soit le centre de gravité du corps solide, et représentant par x', y' les coordonnées AO, MN de ce point, on aura $\int xdm = mx', \int ydm = my'$, et les expressions des efforts supportés par l'axe fixe dans le sens des x et des y deviendront $-vmy', MV+vmx'$.

Quant aux points où ces efforts sont appliqués, on voit facilement que l'effort parallèle aux x coupe l'axe AZ à une distance de l'origine A exprimée par $\frac{\int zydm}{my'}$; et que l'effort parallèle aux y le coupe à une distance de cette origine exprimée par $\frac{MV.z+v\int xzdm}{MV+vmx'}$.

Des conditions qui doivent être remplies pour que l'axe fixe n'éprouve aucun effort à l'instant de l'impulsion.

Il peut arriver dans des cas particuliers que l'axe fixe n'éprouve aucun effort à l'instant de l'impulsion, et cela aura lieu toutes les fois que les quantités de mouvement perdues à cet instant dans le système se feront équilibre d'elles-mêmes et sans le secours de l'axe fixe. Alors il devra y avoir séparément équilibre dans les deux groupes parallèles aux x et aux y dans lesquels ces quantités de mouvement viennent d'être décomposées. Or d'après le § 1 de la note (*i*), il faut d'abord, pour que des forces parallèles se fassent mutuellement équilibre, que leur somme soit nulle, ce qui donne $-vmy'=0$, $MV+vmx'=0$; et il faut ensuite que la somme de leurs moments pris par rapport à un plan quelconque qui leur soit parallèle, au plan des xy par exemple, soit également nulle, ce qui donne de plus $-v\int zydm=0$, $MV.Z+v\int zxdm=0$. La première et la troisième de ces équations donnent $y'=0, \int zydm=0$. En mettant dans la seconde pour v sa valeur trouvée dans le § 9, on en déduit $X=\frac{\int r^2dm}{mx'}$. Enfin en éliminant MV entre la seconde et la quatrième, on a $Z=\frac{\int zxdm}{mx'}$. Ces résultats expriment les conditions nécessaires pour que l'axe n'éprouve aucun effort à l'instant de l'impulsion. La première équation $y'=0$ apprend que le centre de gravité du corps doit se trouver dans le plan des xz, et par conséquent que la direction de l'impulsion doit être

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

perpendiculaire au plan passant par l'axe fixe et par le centre de gravité. La seconde $\int zy\,dm = 0$ exprime une certaine condition à laquelle doit satisfaire la position de l'axe des x dans le corps. Les deux autres donnent les valeurs des coordonnées du point F où la direction de l'impulsion doit couper le plan des xz, point qu'on nomme *centre de percussion.*

Du centre de percussion.

On peut remarquer que si le corps était partagé en deux parties égales par le plan des xy, auquel cas le centre de gravité se trouverait dans ce plan, on aurait les deux équations $\int zy\,dm = 0$., $\int zx\,dm = 0$. L'une des conditions énoncées ci-dessus pour que l'axe fixe n'éprouve aucun effort se trouverait satisfaite, et de plus on aurait $Z = 0$, en sorte que la direction de l'impulsion devrait être comme le centre de gravité dans le plan des xy. Dans ce cas les conditions pour que l'axe fixe n'éprouve aucun effort se réduisent donc à ce que la direction de l'impulsion coupe à angles droits la perpendiculaire menée du centre de gravité à l'axe fixe, et que leur point d'intersection soit situé à une distance de cet axe $= \frac{\int r^2 dm}{m x'}$. Le numérateur de cette expression est le moment d'inertie du corps pris par rapport à l'axe fixe. En nommant mk^2 son moment d'inertie pris par rapport à un axe parallèle à l'axe fixe et passant par le centre de gravité, on aura d'après le § 10, $\int r^2 dm = m\,(x'^2 + k^2)$, et l'expression précédente de la distance du centre de percussion prendra la forme $x' + \frac{k^2}{x'}$.

A quoi se réduisent les conditions pour que l'axe fixe n'éprouve aucun effort, dans le cas où le corps peut être partagé en deux parties égales par un plan perpendiculaire à cet axe.

On démontre que les deux conditions précédentes suffisent encore pour que l'axe fixe n'éprouve aucun effort, lorsque cet axe est parallèle à un des *axes principaux* (on verra tout-à-l'heure la signification de cette expression) qui se coupent au centre de gravité. (Voyez les *Leçons de Mécanique analytique* de M. de Prony, t. II, p. 357 et suiv., où cette théorie est complètement développée.)

§ 12. Lorsque l'impulsion a été donnée au corps, l'axe fixe supporte un nouvel effort par l'effet des forces centrifuges dues à la vîtesse de rotation dont les parties du corps sont animées. On en trouvera la valeur par le même procédé employé dans le § précédent. En conservant toujours la même notation, les forces centrifuges des éléments de la masse du corps seront, conformément au § 4, exprimées par $\frac{r^2 v^2}{r} dm = v^2 r\,dm$. Elles sont dirigées dans le sens des rayons r des arcs que ces éléments décrivent autour de l'axe fixe, lesquels font avec les axes des x et des y des angles dont les cosinus sont respectivement $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$. Les composantes de ces forces dans le sens des x et des y sont donc $v^2 r\,dm . \frac{x}{r} = v^2 x\,dm$, $v^2 r\,dm . \frac{y}{r} = v^2 y\,dm$; d'où l'on conclut que l'effort supporté par l'axe fixe en vertu de la force centrifuge du corps est dans le sens des x égal à $v^2 \int x\,dm = v^2 m x'$, et dans le sens des y égal à $v^2 \int y\,dm = v^2 m y'$.

Des efforts supportés par l'axe fixe après l'impulsion, et pendant le mouvement de rotation du corps.

L'effort dans le sens des x coupe cet axe à une distance de l'origine des coordonnées $= \frac{\int z x\,dm}{m x'}$, et l'effort dans le sens des y le coupe à une distance de cette même origine $= \frac{\int zy\,dm}{m y'}$. Lorsque ces distances seront égales, on pourra composer les deux efforts en un seul dont l'expression sera $v^2 m \sqrt{x'^2 + y'^2} = v^2 m r'$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Conditions qui doivent être remplies pour que l'axe fixe ne supporte aucun effort provenant de la force centrifuge du corps.

L'axe fixe peut toujours être tellement situé dans le corps que les forces centrifuges résultant du mouvement de rotation se détruisent mutuellement, et n'exercent aucun effort sur lui. Pour en énoncer facilement les conditions, je remarquerai qu'on démontre que par un point quelconque pris dans l'intérieur d'un corps on peut toujours mener trois axes rectangulaires tellement situés qu'en les prenant pour axes des coordonnées on aura les trois équations $\int xy\,dm = 0$, $\int xz\,dm = 0$, $\int yz\,dm = 0$, les intégrales étant prises dans toute l'étendue du corps (Voyez le *Traité de Mécanique* de M. Poisson, t. 2, p. 94, ou les *Leçons de Mécanique analytique* de M. de Prony, t. 2, p. 307). Euler a nommé les axes déterminés par cette condition *axes principaux de rotation*, et on va voir la raison de cette dénomination.

Des axes principaux.

Pour exprimer que les forces centrifuges des éléments du corps se font mutuellement équilibre indépendamment de l'axe fixe, il faut poser les quatre équations $v^2 m x' = 0$, $v^2 m y' = 0$, $\int zx\,dm' = 0$, $\int zy\,dm = 0$. Les deux premières donnent $x' = 0$, $y' = 0$, ce qui montre que le centre de gravité du corps doit se trouver dans l'axe des z qui est l'axe fixe. Les deux autres apprennent, d'après ce qui vient d'être dit, que cet axe doit être un des axes principaux du corps qui se coupent au centre de gravité. Il résulte de-là que les axes principaux qui se coupent au centre de gravité, déterminés par la propriété géométrique énoncée ci-dessus, jouissent de cette propriété mécanique que le corps peut tourner autour d'eux sans exercer sur eux aucun effort, en sorte que s'il a commencé à tourner autour d'un de ces axes, il continue le même mouvement soit que cet axe soit fixe ou non.

S'il arrivait que l'on n'eût point les deux équations $x' = 0$, $y' = 0$, mais seulement les deux autres $\int zx\,dm = 0$, $\int zy\,dm = 0$, alors le centre de gravité ne se trouverait plus dans l'axe de rotation, et les efforts exercés sur cet axe ne seraient pas nuls. Ces deux efforts seraient dirigés dans le plan des xy, et se composeraient en un seul $= v^2 m r'$, appliqué à l'origine des coordonnées, en sorte qu'il suffirait de rendre cette origine fixe pour que l'axe de rotation ne pût pas être déplacé. Cet axe étant alors un des axes principaux qui se coupent à l'origine, on voit encore ici que les axes principaux qui se coupent dans un point quelconque d'un corps ont cette propriété, que si ce point est fixe, le mouvement de rotation aura lieu autour de l'un quelconque de ces axes sans qu'il tende à être déplacé.

On ne peut pas réunir les conditions nécessaires pour que l'axe fixe ne supporte aucun effort à l'instant de l'impulsion et pendant le mouvement de rotation du corps.

En comparant les conditions qui viennent d'être indiquées pour que l'axe de rotation n'éprouve aucun effort pendant le mouvement du corps, avec celles trouvées dans le § précédent pour qu'il n'en éprouve aucun à l'instant de l'impulsion qui cause ce mouvement, on verra qu'il n'est jamais possible d'y satisfaire en même temps; car si l'axe fixe passe par le centre de gravité, le centre de percussion se trouve placé à une distance infinie de cet axe.

Du mouvement autour d'un axe fixe d'un corps solide dont tous les points sont sollicités par des forces accélératrices.

§ 13. J'ai considéré depuis le § 9 le mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe, en supposant que ce corps eût reçu une impulsion, et fût ensuite abandonné à lui-même. Je vais maintenant supposer les parties de ce corps soumises à l'action continue de forces accélératrices, et je remarquerai que cette question est une de celles dont la solution peut être donnée par une seule équation, car le mouvement du corps dépend de la valeur d'une seule quantité, savoir de l'angle décrit autour de l'axe de rotation par l'un quelconque de ses points.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On peut donc, conformément à la remarque faite à la fin du § 7, y employer directement le principe de la conservation des forces vives. Continuons à rapporter les points du corps solide à trois axes rectangulaires par les coordonnées x, y, z, l'axe des z étant l'axe de rotation. Soit m la masse du corps, et employons ici les signes D et S pour les différentielles et les intégrales relatives aux parties de cette masse, afin de ne pas les confondre avec les différentielles et intégrales relatives aux espaces parcourus par le corps, lesquelles seront indiqués comme à l'ordinaire par les signes d et f. Nommons θ l'angle décrit par les points du corps autour de l'axe de rotation au bout du temps t, r leur distance à cet axe : la vîtesse angulaire du corps sera $\frac{d\theta}{dt}$, et la vîtesse effective de chaque point $r\frac{d\theta}{dt}$. Enfin, représentons par γ la force accélératrice agissant sur chaque point, et par ω l'angle que forme la direction de cette force avec l'arc de cercle que le point décrit autour de l'axe des z.

Cela posé, la force vive d'un élément du corps est $\mathrm{D}m.r^2\frac{d\theta^2}{dt^2}$. L'espace qu'il parcourt dans chaque élément du temps est $rd\theta$, et cet espace, estimé dans le sens de la force γ, est $rd\theta.\cos.\omega$; en sorte que la quantité d'action imprimée par cette force dans chaque élément du temps est $\mathrm{D}m.\gamma.rd\theta\cos.\omega$. Ainsi l'équation du principe des forces vives démontrée dans le § 7 donnera ici $\mathrm{SD}m.r^2\frac{d\theta^2}{dt^2} = const. + 2f\mathrm{D}m.\gamma.rd\theta\cos.\omega$, ou, mettant hors du signe S les quantités qui sont constantes pour les divers points du corps, $\frac{d\theta^2}{dt^2} = const. + \frac{2fd\theta\mathrm{S}\gamma\,cos.\,\omega.r\mathrm{D}m}{\mathrm{S}r^2\mathrm{D}m}$. Cette équation servira à déterminer le mouvement, pourvu que les quantités γ et ω puissent s'exprimer en fonctions de r et θ, de manière que la quantité sous le signe f devienne une différentielle de cette dernière quantité.

Du mouvement d'un corps pesant autour d'un axe fixe horizontal. Pl. A, Fig. 19.

§ 14. J'appliquerai ce résultat au cas d'un corps pesant tournant autour d'un axe horizontal. Supposons l'axe des z qui est l'axe de rotation placé horizontalement ainsi que l'axe des y, l'axe des x placé verticalement, et prenons pour θ l'angle compris entre le plan vertical des xz, et un plan mené par l'axe de rotation AZ et par le centre de gravité du corps. La force γ appliquée à chaque point M du corps sera égale à la constante g, et agira suivant MG parallèle à AX. L'angle GMT représenté ci-dessus par ω, qu'elle forme avec l'arc décrit par le point M, est égal à l'angle AMP dont le cosinus est $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{AM}} = \frac{\gamma}{r}$. Mettant donc à la place de γ et de cos. ω ces valeurs, et faisant attention que $\mathrm{S}y\mathrm{D}m = my'$, y' étant toujours la distance du centre de gravité du corps au plan des xz, l'équation obtenue dans le § précédent deviendra $\frac{d\theta^2}{dt^2} = const. + \frac{2fmgy'd\theta}{\mathrm{S}r^2\mathrm{D}m}$; ou, en appelant r' la distance du centre de gravité à l'axe de rotation, et remarquant que $y' = r'\sin.\theta$, $\frac{d\theta^2}{dt^2} = const. + \frac{2fmgr'\sin.\theta\,d\theta}{\mathrm{S}r^2\mathrm{D}m}$, ce qui donne, en effectuant l'intégration indiquée, $\frac{d\theta^2}{dt^2} = const. - \frac{2gmr'\cos.\theta}{\mathrm{S}r^2\mathrm{D}m}$. La constante se déterminera en fixant les valeurs correspondantes de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'angle θ et de la vîtesse $\frac{d\theta}{dt}$ à l'instant où l'on commence à compter le temps. Si, par exemple, le corps a commencé à se mouvoir avec une vîtesse nulle, et qu'à cet instant la valeur de l'angle θ fût θ', on aura $\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2gmr'(\cos.\theta' - \cos.\theta)}{Sr^2Dm}$. Cette équation fait connaître la vîtesse correspondante à une situation donnée du corps, et en tirant la valeur de dt et intégrant, on aura la relation entre le temps et l'espace parcouru.

On a trouvé dans le § 6 pour l'expression générale de la vîtesse acquise par un point matériel pesant qui descend le long d'une courbe quelconque $v^2 = 2gx$, x étant l'espace qu'il a parcouru verticalement. Si ce point est à l'extrémité d'un fil attaché à un point fixe, et qu'il décrive un arc de cercle dont R soit le rayon, on aura, en appelant θ' l'angle du fil avec la verticale à l'origine du mouvement et θ le même angle au bout du temps t, $v = R\frac{d\theta}{dt}$, $x = R(\cos.\theta' - \cos.\theta)$. En mettant ces valeurs dans l'équation $v^2 = 2gx$, elle deviendra $\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g(\cos.\theta' - \cos.\theta)}{R}$, laquelle coïncide avec la précédente en faisant $R = \frac{Sr^2Dm}{mr'}$. Il suit de-là qu'un corps pesant et étendu a autour d'un axe horizontal le même mouvement qu'un point matériel fixé à une distance de cet axe exprimée par cette valeur de R, ou fait des oscillations de même durée que celles d'un pendule simple dont R serait la longueur. On ne changerait donc rien au mouvement du corps en concentrant toute sa masse dans l'un quelconque de ses points situés à la distance $R = \frac{\int r^2 Dm}{mr'}$ de l'axe de rotation. Ces points se nomment *centres d'oscillation*. On peut remarquer qu'ils se trouvent placés à la même distance de l'axe de rotation que le centre de percussion (§ 11), et que, en représentant par mk^2 le moment d'inertie du corps pris par rapport à un axe parallèle à l'axe fixe et passant par le centre de gravité, cette distance peut s'exprimer par $r' + \frac{k^2}{r'}$.

Du centre d'oscillation.

Du choc de deux corps parfaitement durs.

§ 15. Je ne pousserai pas plus loin ces applications à un corps solide des principes généraux établis dans le § 7 pour le mouvement d'un assemblage de points matériels. On trouvera dans les traités de Mécanique de MM. de Prony et Poisson les développements sur lesquels je n'ai pu m'étendre. Quant aux applications à des systêmes de points matériels qui ne formeraient point un corps solide, je m'occuperai seulement de la question du choc de deux corps.

Concevons deux sphères parfaitement dures dont les masses sont m, m', se mouvant dans le même sens avec les vîtesses V, V′ suivant la ligne droite qui passe par leurs centres. La supposition d'une dureté parfaite est véritablement une hypothèse mathématique, puisque la nature n'offre point de corps semblables, et il en résulte que l'effet du choc sera de changer instantanément les vîtesses des corps en une vîtesse commune u. Ils perdront donc les quantités de mouvement $m(V-u)$, $-m'(u-V')$, lesquelles doivent se faire équilibre d'après le principe de d'Alembert, ce qui donne $m(V-u) - m'(u-V') = 0$, d'où $u = \frac{mV + m'V'}{m+m'}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On peut parvenir au même résultat en faisant usage du théorême de Carnot, démontré § 8. En effet, la somme des forces vives avant le choc est $mV^2+m'V'^2$, et les vîtesses perdues instantanément à l'instant du choc sont $V-u$, $-(u-V')$, auxquelles sont dues les forces vives $m(V-u)^2$, $m'(u-V')^2$. La somme des forces vives après le choc sera donc d'après ce théorême $(m+m')u^2=mV^2+m'V'^2-m(V-u)^2-m'(u-V')^2$, équation d'où l'on tire pour u la même valeur que ci-dessus.

Du choc de deux corps élastiques.

Supposons maintenant que les sphères qui se choquent jouissent d'un certain degré d'élasticité, et estimons ce degré par la portion n de leur vîtesse qui leur serait restituée en sens contraire si elles venaient frapper un plan immobile parfaitement dur. A l'instant du choc, ces corps perdront les portions de leurs vîtesses $V-u$, $-(u-V')$, et u sera encore déterminé d'après le même principe que ci-dessus. Mais la force d'élasticité leur restituant en sens contraire les portions $n(V-u)$, $-n(u-V')$ de ces vîtesses perdues, leurs vîtesses après le choc, en les représentant par v et v', deviendront $v=u-n(V-u)$, $v'=u+n(u-V')$, c'est-à-dire, en mettant pour u sa valeur, $v=\frac{(m-nm')V+(1+n)m'V'}{m+m'}$; $v'=\frac{(m-nm')V'+(1+n)mV}{m+m'}$. En faisant dans ces formules $n=1$, on aura les valeurs qui conviennent aux cas où les corps seraient parfaitement élastiques.

La vîtesse après le choc des corps parfaitement durs ou des corps non élastiques est la même, et il y a dans les deux cas la même perte de force vive.

Il y a plusieurs remarques importantes à faire sur ces résultats. La première est que la valeur qu'on vient de trouver pour la vîtesse commune après le choc de deux corps parfaitement durs est la même obtenue dans le § 2 de la note (x) pour les corps non élastiques. Cette circonstance remarquable apprend qu'il revient au même ou de supposer que le choc de deux corps non élastiques n'est pas instantané, ce qui oblige alors à prendre en considération la force de percussion qui s'introduit dans le système pendant la durée de ce choc, ou bien de supposer que ce choc se fait dans un instant, ce qui permet de négliger cette force. Le changement brusque des vîtesses fait dans le second cas perdre au système précisément la même quantité de force vive qui résulte dans le premier de la quantité d'action imprimée aux corps par la force de percussion en sens contraire de leur mouvement. Ainsi, toutes les fois qu'il se fait dans une machine un choc entre corps non élastiques, on peut le considérer comme s'il avait lieu entre corps parfaitement durs, et comme si le changement de vîtesse qui en résulte se faisait instantanément, et évaluer les pertes de force vive en conséquence.

Les formules précédentes pour le choc des corps en parties élastiques ou parfaitement élastiques, s'accordent également avec celles du § 2 de la note (x), en sorte qu'il est encore indifférent pour les corps de cette espèce de supposer le choc instantané, ou en lui attribuant une certaine durée, de tenir compte de la quantité d'action imprimée pendant cette durée par la force de percussion. On remarquera d'ailleurs que d'après les valeurs ci-dessus de v et v', on trouve pour la somme des forces vives des deux corps après le choc $mv^2+m'v'^2=mV^2+m'V'^2-\frac{(1-n^2)mm'(V-V')^2}{m+m'}$. Ainsi l'effet du choc est de faire perdre au système une quantité de force exprimée par $\frac{(1-n^2)mm'(V-V')^2}{m+m'}$. Cette quantité devient nulle

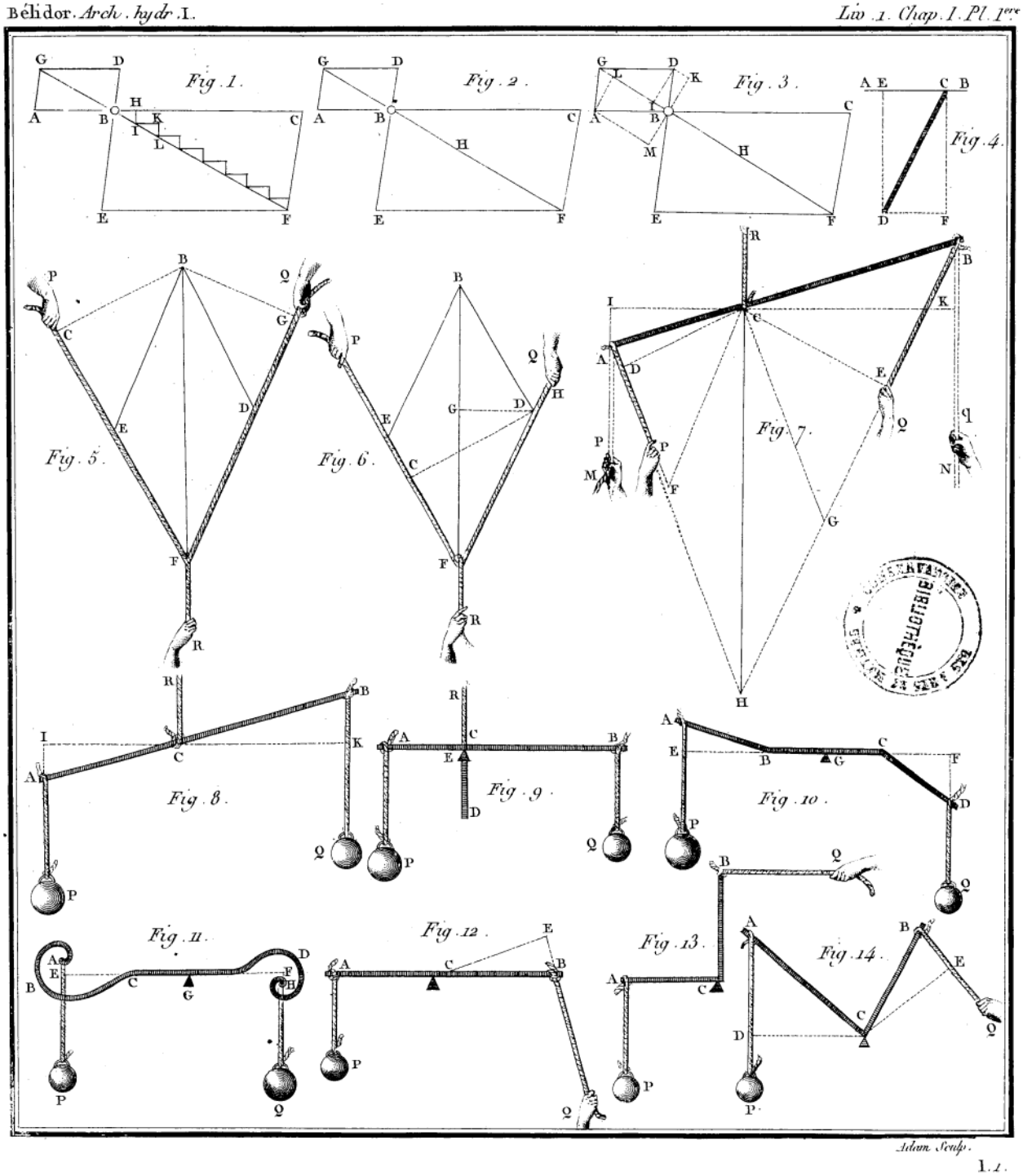
Il n'y a aucune perte de force vive

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

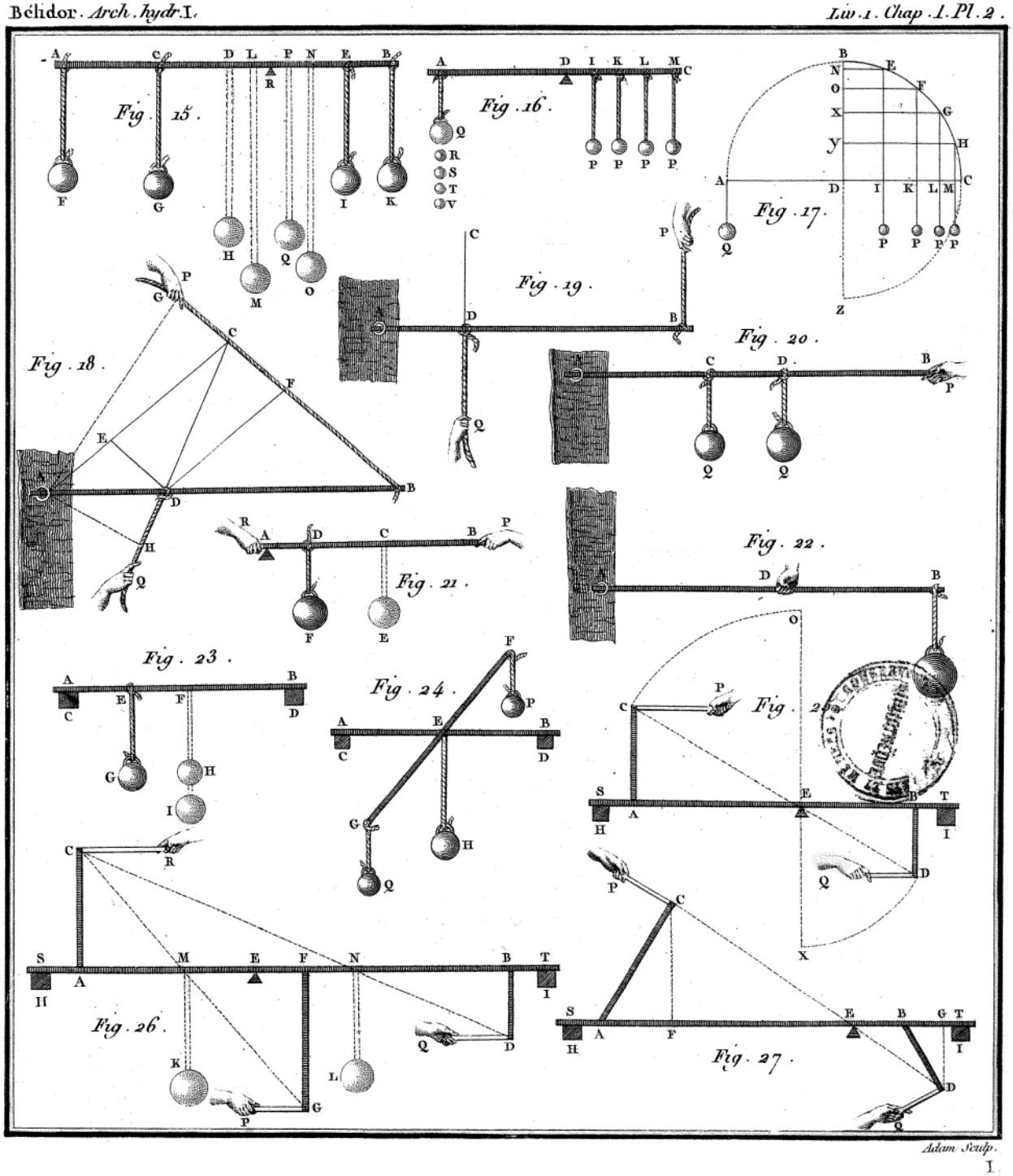
dans le choc des corps parfaitement élastiques.

pour les corps parfaitement élastiques, puisqu'on a alors $n = 1$. Ce résultat susceptible d'être étendu à un plus grand nombre de corps, apprend que s'il se fait dans une machine un choc entre corps parfaitement élastiques, les vîtesses qui ont lieu après le choc sont toujours telles qu'il n'en résulte dans la machine aucune perte de force vive; ce qui tient à ce que la force d'élasticité imprime aux corps après le choc dans le sens de leur mouvement la même quantité d'action que la force de percussion leur avait imprimée pendant ce choc en sens contraire de ce mouvement.

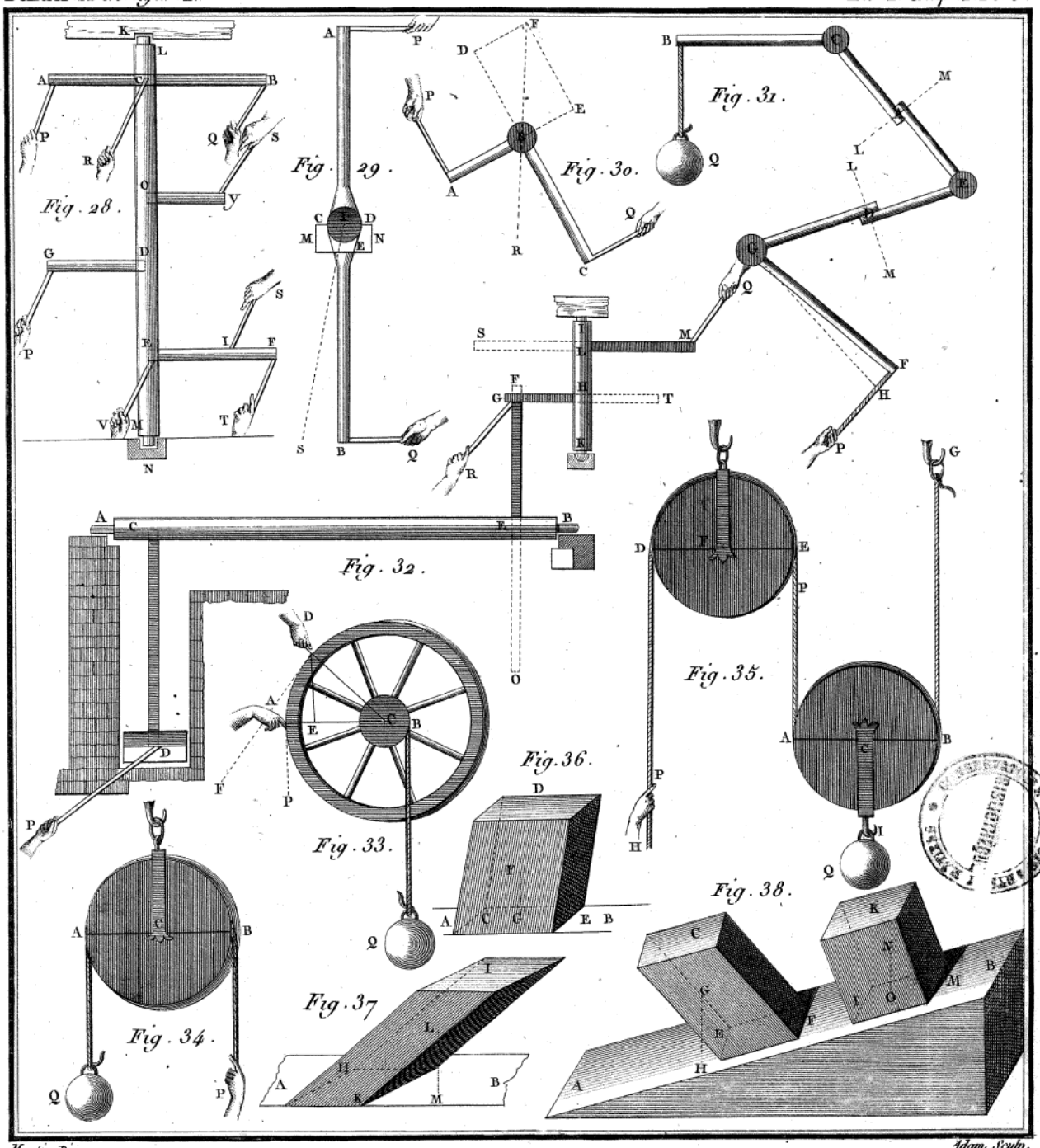
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



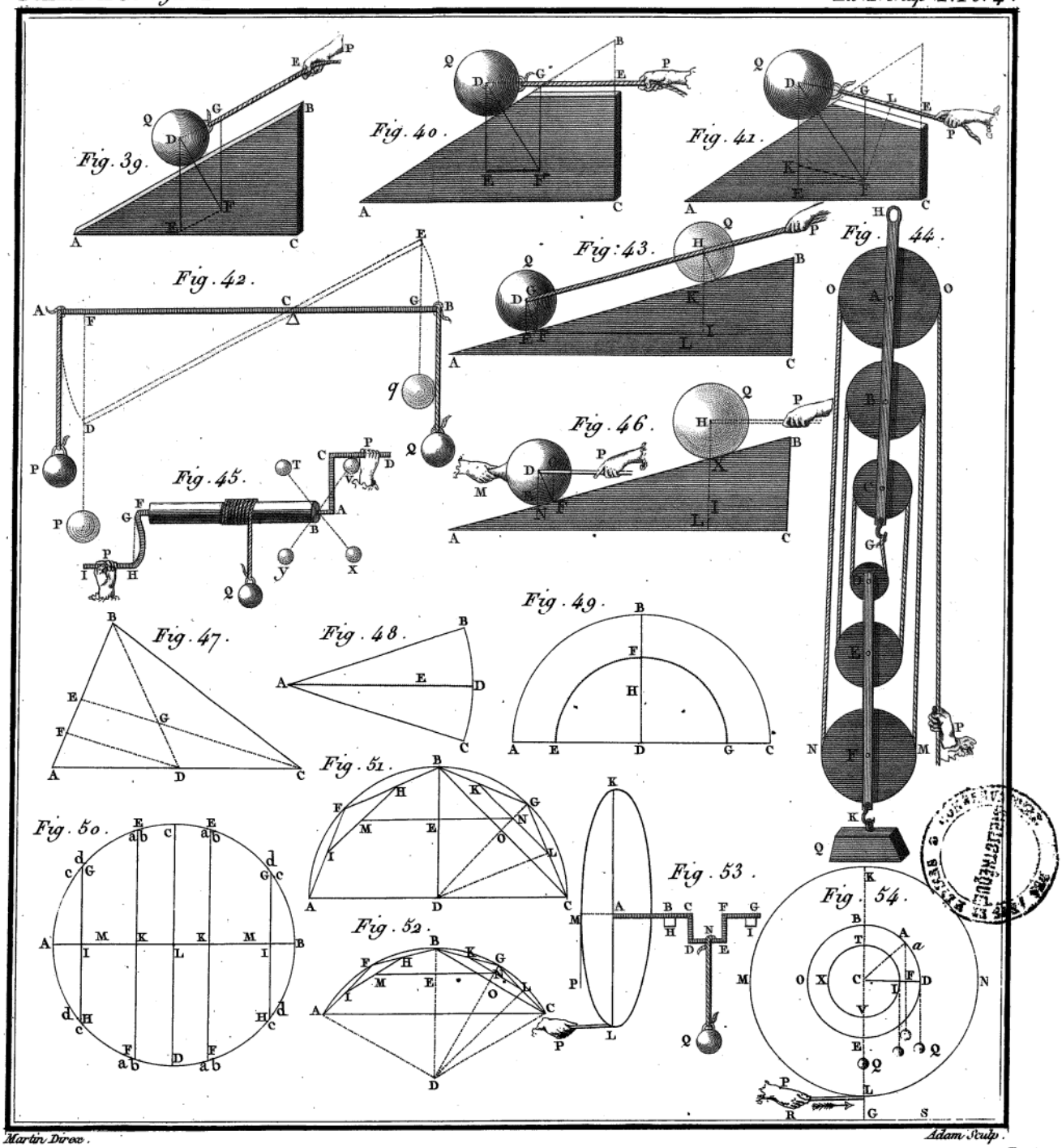
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



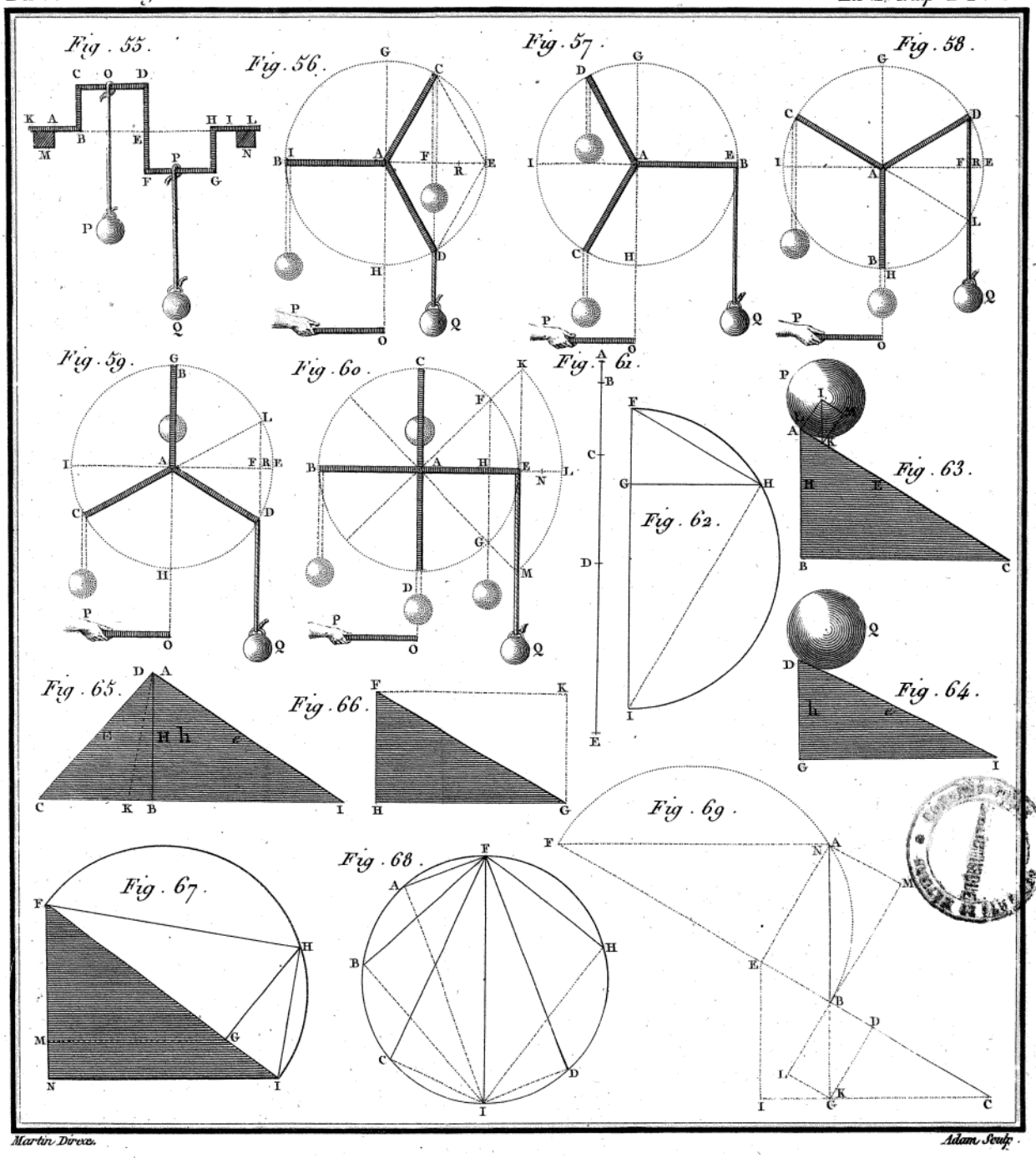
Martin Direx. Adam Sculp.

I. 3.

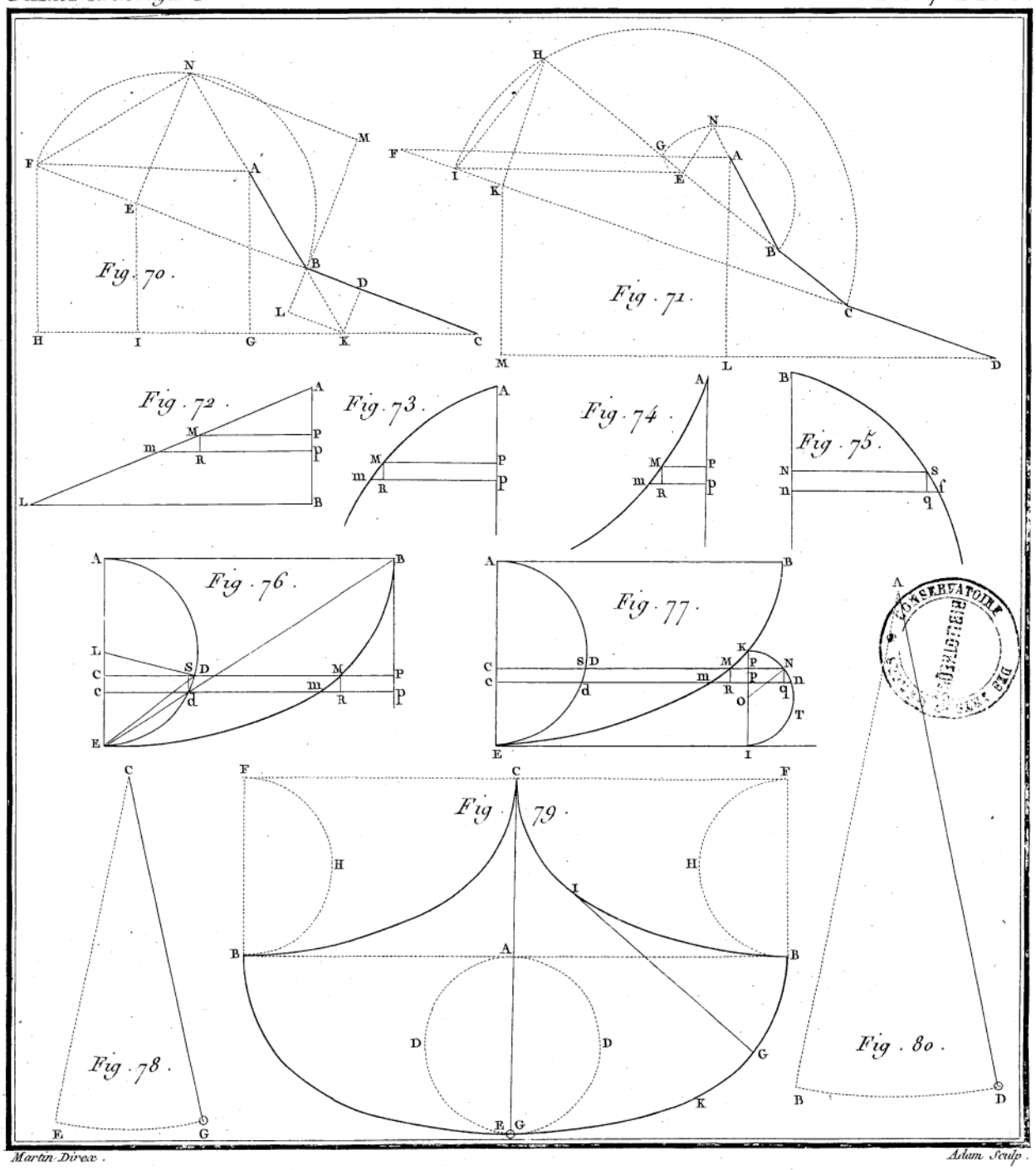
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

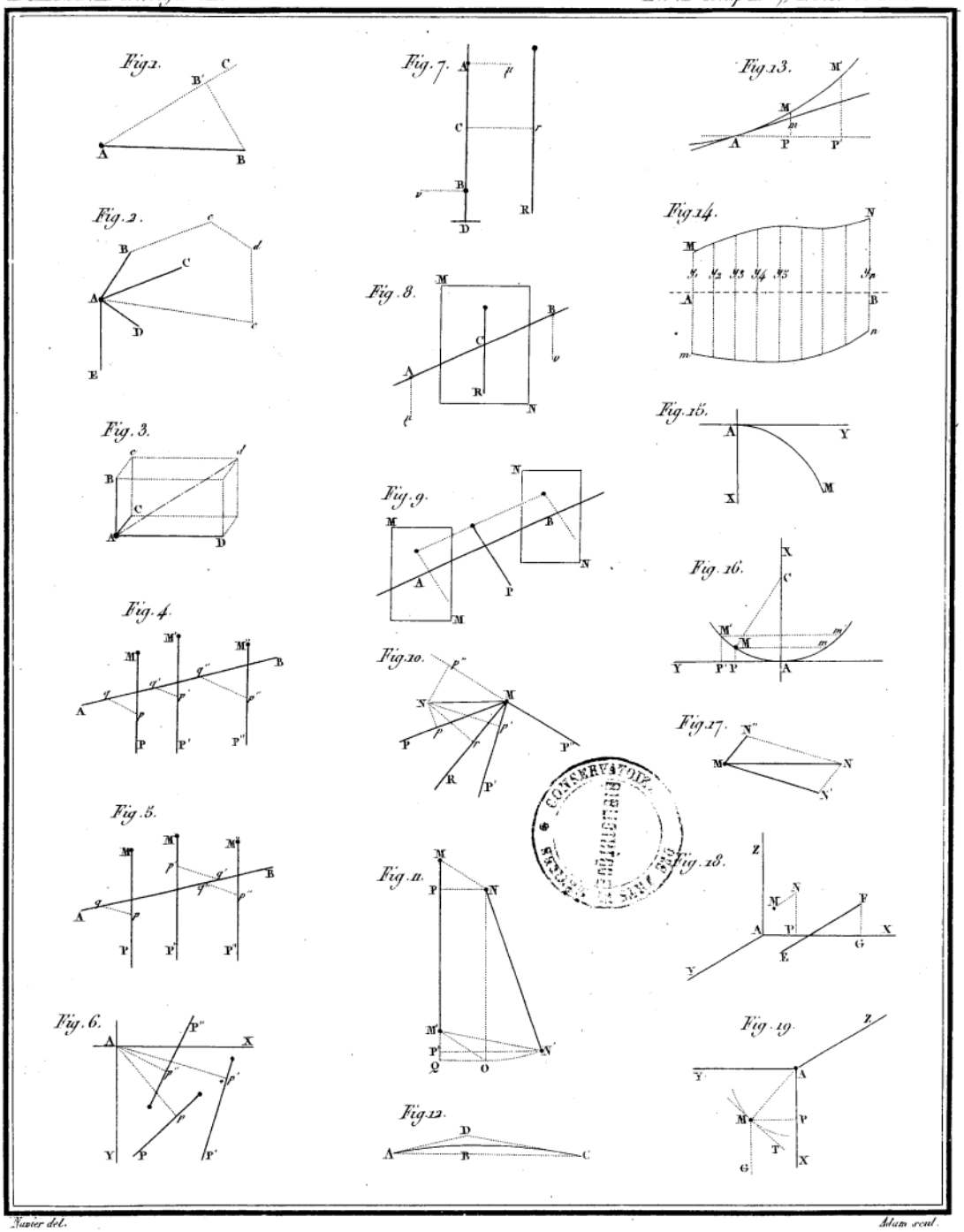


Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Martin Direx. *Adam Sculp.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS

Nanier del. Adam scul.

I. A.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE II.

Du Frottement, et de la manière d'en calculer l'effet dans les Machines.

Les auteurs qui ont écrit sur la Mécanique ont fait des suppositions qui ne peuvent avoir lieu dans la pratique.

Les auteurs dont nous avons des traités de Mécanique ont supposé, comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent, que les parties qui devaient se mouvoir les unes sur les autres étaient parfaitement polies, laissant à la discrétion de ceux qui auraient des machines à faire construire le soin de diminuer le poids, ou d'augmenter la puissance, autant qu'il serait nécessaire pour surmonter la résistance causée par les frottements, sans donner aucune règle qui pût seulement servir à en faire une estimation grossière. Cependant comme l'effet du frottement est beaucoup plus grand qu'on ne se l'imagine, et qu'on ne peut porter un jugement exact d'aucune machine, sans y avoir égard aussi scrupuleusement qu'au rapport des différents bras de levier qui communiquent le mouvement, sur-tout quand elles sont destinées à élever de l'eau, j'ai cru ne pouvoir me dispenser de donner ce chapitre, qu'il faut s'appliquer à bien entendre, comme un des plus essentiels de cet ouvrage.

M. Amontons est le premier qui se soit appliqué à donner des règles pour calculer le frottement, qu'il a établies sur un grand nombre d'expériences : cependant comme les conséquences qu'il en a tirées n'avaient d'autre fondement que ces mêmes expériences, M. *Parent* a essayé de traiter ce sujet géométriquement dans plusieurs mémoires. Mais, par une fatalité assez ordinaire aux découvertes les plus utiles, qui n'arrivent que rarement à la connaissance de ceux à qui elles seraient le plus nécessaires, il ne paraît pas que les machinistes en aient fait jusqu'ici aucune application. Il est vrai que ce qu'en dit M. Parent n'est guère à leur portée : ce sont des calculs algébriques à perte de vue, capables de les effrayer, au lieu que s'il en avait déduit des conséquences en forme de maximes, on les aurait suivies avec la confiance que l'on a ordinairement pour tout ce que l'on sait être établi sur les principes des mathématiques, quoique l'on ignore la voie par laquelle on y est arrivé. Pour ne point tomber dans le même inconvénient, je vais donner ce qu'il importe le plus de savoir sur les frottements, que je ferai en sorte de mettre à la portée de ceux qui n'ont que les premiers éléments des mathématiques, cette matière pouvant être traitée moins rigoureusement que celles qui sont de pure Géométrie.

Quelle est la cause du frottement.

218. Pour peu que l'on fasse attention à la cause du frottement, c'est-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à-dire à la résistance mutuelle que deux corps éprouvent lorsqu'on veut les faire glisser l'un sur l'autre, on verra qu'elle vient des parties dont leurs surfaces sont hérissées, quoique souvent elles ne soient point sensibles. Si ces parties sont dures, sans pouvoir être usées ni brisées qu'après un temps considérable, comme sont celles du bois, du cuivre et du fer qu'on emploie ordinairement dans les machines, il faut nécessairement, pour dégager deux surfaces appliquées l'une sur l'autre, que si l'on en fait glisser une, elle s'élève tant soit peu, et la difficulté que l'on trouvera à la mouvoir dépendra principalement du poids dont elle sera chargée.

On peut supposer que les surfaces qui frottent sont hérissées de demi-sphères.

PLANCHE I. FIG. 1, 2, 3 et 4.

Pour mieux exposer de quelle manière se font les frottements de cette espèce, qui se rencontrent le plus dans la pratique de la mécanique, il faut supposer que deux corps AE et FK étant appliqués l'un sur l'autre, les surfaces qui se touchent sont horizontales, et toutes hérissées de petites demi-sphères opposées et égales entre elles (*ak*), de sorte que les sphères supérieures sont engagées dans les interstices des inférieures, c'est-à-dire qu'il y aura toujours trois demi-sphères inférieures, comme A, B, C, qui laisseront entre elles un vide D, pour recevoir une des supérieures. Ceci nous facilitera le moyen de calculer l'effort qu'il faudrait que fît une puissance P pour commencer à mouvoir tant soit peu le corps Q selon une direction LP parallèle aux deux surfaces, dont l'inférieure AC est supposée immobile.

La résistance causée par le frottement est proportionnée au poids dont les surfaces sont chargées, et non pas à l'étendue des mêmes surfaces.

219. Quelle que soit la difficulté que la puissance P trouvera à mouvoir le corps Q, il est constant que la grandeur FH de sa base n'y entrera pour rien : car si on suppose ce corps divisé en deux parties égales, et que l'on applique une de ses moitiés FR sur l'autre NK, la puissance P sera toujours la même, quoique la base ne soit que moitié de ce qu'elle était, parce que chacune des parties égales de cette dernière sera chargée d'un poids double de celui dont elle était pressée en premier lieu. D'où il suit en général que dans plusieurs surfaces de différente étendue char-

---

Remarque sur les expériences d'Amontons sur le frottement, et sur la théorie qu'en a donnée Bélidor.

(*ak*) Les expériences d'Amontons sur le frottement, dont Bélidor vient de parler, se trouvent dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1699. L'auteur conclut que la résistance provenant du frottement est indépendante de la grandeur des surfaces en contact, ce qui a été confirmé depuis ; qu'elle est à-peu-près la même pour le bois, le fer, le cuivre, le plomb, etc., quand ces diverses substances sont enduites de vieux oing, et environ le tiers de la pression : on va voir plus bas les rectifications dont ce dernier résultat est susceptible. Il n'est pas besoin de dire combien la supposition des demi-sphères hérissant la surface des corps, sur laquelle Bélidor veut appuyer le résultat expérimental d'Amontons, mérite peu d'attention. Je ne m'arrêterai pas non plus, pour ne point charger ces notes de remarques inutiles, à la démonstration géométrique fondée sur cette hypothèse, démonstration qui est très-fautive.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

gées de poids égaux, chacune des parties qui composent les grandes est moins chargée que chacune des parties qui composent les petites dans la raison réciproque de ces surfaces. Or comme c'est la même chose à une puissance, d'élever à l'aide d'un plan incliné un nombre de petites sphères à-la-fois, ou de n'en élever qu'une seule, dont la pesanteur serait égale à celle de toutes les petites prises ensemble, il sera indifférent à la puissance P qu'il y ait, par exemple, mille demi-sphères de la base du corps Q, engagées dans les interstices que laissent celles de la surface AC, ou qu'il n'y en ait qu'une chargée elle seule du poids total, puisqu'elle sera capable d'une pression mille fois plus grande que chacune des précédentes. Comme donc la hauteur où il faudra que la puissance élève cette demi-sphère, pour la dégager d'avec les inférieures, sera la même où il faudrait que chacune des autres s'élevât, l'action de la puissance ne changera point, qu'il y ait un grand nombre de demi-sphères ou qu'il n'y en ait qu'une, parce que dans l'état d'équilibre, sa quantité de mouvement sera toujours exprimée par le produit du poids attribué à plusieurs demi-sphères, ou à une seule, par la hauteur où il faudra l'élever dans le même temps.

220. Nous supposerons donc que voulant faire glisser un corps sur un autre, toutes les particules de la base du premier, qui causent la résistance qu'il s'agit de surmonter, sont réduites à une demi-sphère DFE, soutenue par trois autres M, P, Q, appartenant à la surface du corps inférieur. Ainsi cette demi-sphère sera engagée dans l'interstice des trois autres, qu'elle touchera chacune en un point D, F, E; la demi-sphère supérieure étant chargée de tout le poids que nous lui attribuons, tendra à écarter les autres M, P, Q : la première M sera poussée selon la direction OA qui joint les centres O, A, et qui passe par le point d'attouchement D; de même la seconde P sera poussée selon la direction OC, qui joint leurs centres O, C, en passant par le point d'attouchement F : enfin la troisième Q le sera selon la direction OB, qui passe par le point d'attouchement E.

Manière de connaître par raisonnement le rapport du poids à la résistance du frottement qu'il peut causer.

Pl. 1, Fig. 5.

Présentement, si la demi-sphère supérieure est tirée par une puissance R, selon une direction horizontale OR partant du centre O, il est question de savoir le rapport de cette puissance au poids attribué à la demi-sphère supérieure, pour que cette puissance soit prête à la mouvoir.

Dans le moment que la demi-sphère O est disposée à suivre la puissance R, il est évident qu'elle cesse de presser la demi-sphère M au point D, et qu'elle ne s'appuie plus que contre les autres P et Q, qui la repoussent selon les directions BO et CO; ou, si l'on veut, selon une seule direction TO composée des deux précédentes, avec une force que nous pouvons exprimer aussi par cette même ligne TO.

Si l'on tire les lignes AB, AC, BC, pour joindre les centres des trois demi-sphères inférieures, elles passeront par les points où ces demi-sphères

Figure 5.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

se touchent, et formeront un triangle équilatéral ABC. Tirant aussi la perpendiculaire AT, elle coupera à angles droits la verticale OG, et l'on aura le triangle rectangle OGT, dont les trois côtés pourront exprimer les trois puissances qui font équilibre entre elles pour soutenir la demi-sphère supérieure ; car ayant pris OT pour l'action de la sphère supérieure contre les deux inférieures D et Q, OG pourra être pris pour le poids de cette demi-sphère, et GT pour l'action de la puissance R que l'on cherche : il reste donc à trouver le rapport de GT à GO.

Pour y parvenir, je considère que les lignes OA, OB, OC, AB, AC, BC, sont égales entre elles, et forment les arêtes d'un *tetraëdre* qui a pour axe la perpendiculaire OG, car elles sont chacune double du rayon d'une des demi-sphères; ainsi BC sera divisé en deux également au point T. Or si l'on suppose que BO soit composé de six parties égales, à cause du triangle rectangle OBT, le quarré de BO valant 36, et le quarré de BT 9, celui de OT sera de 27. D'autre part, on sait que le centre de gravité d'un triangle équilatéral est le même que celui de grandeur, et la figure ACBO étant une pyramide régulière, le point O sera le centre de gravité de cette base, et se trouvera au tiers de la ligne AT, tirée de l'angle A au milieu de son côté opposé (100); ainsi GT sera le tiers de la perpendiculaire OT, et le quarré de OT étant de 27, celui de GT, qui en est la neuvième partie, sera de 3, et celui de OG de 24, à cause du triangle rectangle OGT.

Pour qu'une puissance puisse surmonter la résistance du frottement, il faut qu'elle soit égale au tiers du poids qui le cause.

Si l'on multiplie ces deux nombres par 10000, pour en avoir les racines, plus exactement, on trouvera qu'elles peuvent être exprimées par 173 et 489. Ces deux nombres étant à-peu-près dans le rapport de 1 à 3, il suit que dans la pratique la puissance R pourra être considérée comme étant égale au tiers de la demi-sphère, d'autant mieux qu'il arrive rarement que le frottement qui se rencontre dans les machines soit tout-à-fait si grand que nous le supposons ici, par le soin qu'on prend de polir les surfaces des parties qui doivent se toucher, et de les enduire de vieux oing pour en rendre le mouvement plus doux. En effet, quand la graisse s'est insinuée dans les concavités imperceptibles que laissent entre elles les particules saillantes, elles ne s'engrènent plus tant. On peut donc conclure que si la demi-sphère supérieure pesait 60 liv., il faudrait environ 20 liv. de force à la puissance pour commencer à la tirer à soi ; et que si ce poids de 60 liv., au lieu de n'appartenir qu'à une seule demi-sphère, était également distribué à un grand nombre d'autres unies à une même surface, comme dans la première figure, il faudrait de même 20 liv. de force à la puissance P pour commencer à mouvoir le corps Q, sans se mettre en peine de la grandeur de sa base, qui n'a rien de commun avec l'action de sa pesanteur, comme je l'ai déja insinué.

Expériences faites avec différentes matières,

222. J'ai dit que M. Amontons avait fait un grand nombre d'expériences sur le frottement : j'ajouterai qu'il a trouvé que faisant glisser du fer, du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cuivre, du plomb, ou du bois l'un sur l'autre, que ces matières fussent de même espèce, ou variées entre elles, la résistance causée par le frottement était toujours à-peu-près le tiers de la pesanteur du corps qu'on faisait mouvoir, lorsque les surfaces qui se touchaient étaient enduites de vieux oing; et que cette résistance suivait toujours la proportion des poids, sans que la grandeur des surfaces causât aucun changement. J'en ai fait aussi où j'ai observé les mêmes choses; et pour montrer combien devait être exacte la façon dont je m'y suis pris, je m'y arrêterai un moment.

par lesquelles on a reconnu que le frottement était toujours le tiers du poids.

223. Si l'on a un corps D, posé sur un plan incliné AB, en sorte que la ligne de direction GH, tirée de son centre de gravité G, passe par sa base EF, il demeurera en repos, si les particules de la base du corps et celles du plan incliné s'accrochent de manière à contre-balancer la partie du poids qui tend à le faire glisser. Mais il est visible que ce corps ne se soutiendra pas ainsi sur toutes sortes de plans, et qu'il y en aura qui seront trop élevés, c'est-à-dire trop roides, et où la partie du poids qui tend à le faire glisser sera supérieure à la résistance causée par le frottement. Un plan peut donc être incliné de façon que la partie du poids dont je parle soit en équilibre avec le frottement; et supposant que l'on ait trouvé par expérience l'angle sous lequel le plan doit être incliné pour que cela arrive, on connaîtra ensuite le rapport de la puissance qui doit être en équilibre avec le frottement, à la partie du poids dont le plan incliné est chargé.

La meilleure manière de faire des expériences sur le frottement est de se servir d'un plan incliné.

Pl. 1, Fig. 6.

Si du centre de gravité G, on abaisse la perpendiculaire GI sur le plan, qu'on tire la ligne GP parallèle à AB, et qu'on fasse le parallélogramme HL: prenant le côté GH pour exprimer le poids D, la diagonale GI exprimera la pression du même poids sur le plan incliné; et le côté GL la partie du poids qui tend à faire glisser le corps D, ou la puissance P qui s'y oppose. Si le plan est incliné de façon à le mettre en état d'être tout prêt à glisser, le rapport du frottement à la pression du poids sera comme GL est à GI, ou comme BC est à CA; c'est-à-dire, comme la hauteur du plan incliné est à sa base, à cause des triangles semblables GLI et ABC.

224. Il suit de-là que lorsqu'on voudra connaître le frottement dont deux corps sont capables, il faudra incliner celui qui sert de base, en sorte que l'autre qui est dessus commence à glisser imperceptiblement, et observer quel est l'angle sous lequel cela arrivera; le rapport de la tangente de cet angle au sinus total, donnera celui du frottement à la partie du poids qui le cause. J'ai remarqué dans les expériences que j'ai faites ainsi que l'angle d'inclinaison BAC était d'environ 18 degrés 20 minutes, qui donne BC:AC :: 33136:100000, ou BC:AC :: 1:3.

Un corps commence à glisser sur un plan incliné, quand ce plan fait avec l'horizon un angle de 18 degrés 20 minutes.

Quand on aura trouvé le rapport du frottement d'un corps à la partie de son poids qui presse un plan incliné, ou aura aussi le rapport du frottement du même corps à sa pesanteur sur un plan horizontal, puis-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que le frottement augmentant dans la raison des pressions, ce rapport sera toujours le même; c'est-à-dire que si sur un plan incliné le frottement est le tiers de la pesanteur relative du corps, sur un plan horizontal le frottement sera aussi le tiers de la pesanteur absolue du même corps. Mais voilà ce principe suffisamment établi (*al*).

(*al*) L'auteur s'arrêtant à ce résultat, que le frottement dans les machines doit s'évaluer généralement au tiers de la pression, il faut placer ici ce qu'on a appris depuis sur ce sujet, et qui est presque entièrement dû aux travaux de Coulomb, publiés en 1785, dans le tome X des *Mémoires des savants étrangers*. Voici en premier lieu les lois générales, déduites de l'expérience, auxquelles les phénomènes du frottement sont assujétis.

Lois générales déduites des expériences de Coulomb sur le frottement.

« Le frottement des bois glissant à sec sur les bois oppose, après un temps suffisant de repos, une résistance proportionnelle aux pressions : cette résistance augmente sensiblement dans les premiers instants du repos; mais après quelques minutes elle parvient ordinairement à son maximum ou à sa limite. »

« Lorsque les bois glissent à sec sur les bois avec une vîtesse quelconque, le frottement est encore proportionnel aux pressions; mais son intensité est beaucoup moindre que celle qu'on éprouve en détachant les surfaces après quelques minutes de repos : on trouve par exemple que la force nécessaire pour faire glisser et détacher deux surfaces de chêne après quelques minutes de repos, est à celle nécessaire pour vaincre le frottement lorsque les surfaces ont déja un degré de vîtesse quelconque, comme 9,5 est à 2,2. »

« Le frottement des métaux glissant sur les métaux sans enduit, est également proportionnel aux pressions; mais son intensité est la même, soit qu'on veuille détacher les surfaces après un temps quelconque de repos, soit qn'on veuille entretenir une vîtesse uniforme quelconque. »

« Les surfaces hétérogènes, telles que les bois et les métaux, glissant l'une sur l'autre sans enduit, donnent pour leurs frottements des résultats très-différents de ceux qui précèdent, car l'intensité de leur frottement, relativement au temps de repos, varie lentement, et ne parvient à la limite qu'après quatre ou cinq jours et quelquefois davantage; au lieu que dans les métaux elle y parvient dans un instant et dans les bois dans quelques minutes : cet accroissement est même si lent, que la résistance du frottement dans les vîtesses insensibles est presque la même que celle que l'on surmonte en ébranlant ou détachant les surfaces après quelques secondes de repos. Ce n'est pas encore tout : dans les bois glissant sans enduit sur les bois, et dans les métaux glissant sur les métaux, la vîtesse n'influe que très-peu sur les frottements; mais ici le frottement croît très-sensiblement à mesure que l'on augmente les vîtesses; en sorte que le frottement varie à très-peu près suivant une progression arithmétique, lorsque les vîtesses croissent suivant une progression géométrique. » (*Mémoires des savants étrangers*, t. X, p. 254.) Mais il faut observer qne cet effet n'a plus lieu quand les surfaces en contact sont enduites d'un corps gras, ou quand, glissant à sec les unes sur les autres, elles ont été usées par le frottement pendant un certain temps (*Idem*, p. 259).

Il résulte de l'assemblage de ces faits que l'on peut toujours, sur-tout dans les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

225. Il y a des cas où l'on ne pourrait, sans erreur, faire abstraction de la grandeur des surfaces, pour en estimer le frottement. Par exemple, si l'on en avait deux extrêmement polies, appliquées l'une contre l'autre, et qu'il n'y eût point d'air entre-deux dont le ressort pût contre-balancer le poids de l'atmosphère, la pression serait d'autant plus grande que la surface supérieure présenterait une plus grande base à la colonne d'air, dans la raison même de la grandeur des surfaces pressées. Mais parce que dans les machines les parties qui se frottent sont presque toujours curvilignes, comme sont les tourillons, les fuseaux des lanternes, les dents des roues, celles des pignons, etc., quand on en veut calculer le frottement, on ne doit point avoir égard à la pression causée par la pesanteur de l'air.

Quand la pesanteur de l'air agit sur une surface, il faut alors avoir égard à l'étendue de cette surface pour en estimer le frottement.

---

grandes machines, où les efforts sont considérables, regarder le frottement comme indépendant de la grandeur des surfaces en contact et de la vîtesse du mouvement. Sa valeur est donc uniquement fixée par la pression à laquelle ces surfaces sont soumises et par la nature de ces surfaces; en sorte qu'ayant déterminé par expérience pour chaque espèce de corps le frottement qui répond à une pression donnée, ou le *rapport du frottement à la pression*, on pourra calculer dans tous les cas l'effort nécessaire pour faire glisser deux surfaces l'une sur l'autre. Les seules circonstances qui donneront lieu à quelques exceptions sont celles où les surfaces de contact seraient très-petites, et réduites à des arêtes ou à des pointes émoussées, le frottement prenant alors une valeur particulière; et celles où une machine étant restée quelque temps sans marcher, les frottements qui ont lieu dans le premier instant du mouvement ont aussi en général une valeur particulière, plus grande que celle qu'ils offrent après que le mouvement a duré quelque temps.

Le docteur Vince a donné dans les *Trans. phil.*, t. 75, des recherches expérimentales sur le frottement, dont les résultats s'accordent avec ceux de Coulomb en ce seul point, que la résistance provenant du frottement entre corps durs est indépendante de la vîtesse (elle augmente avec la vîtesse pour des surfaces telles que celles des étoffes de laine et autres). Mais il trouve qu'à surfaces égales le frottement croît dans un moindre rapport que la pression, ou, ce qui est la même chose, que le frottement d'un même corps diminue avec la grandeur de la surface sur laquelle il pose. Ces résultats sont déduits d'expériences faites très en petit, et je ne pense pas qu'ils puissent altérer en rien la confiance accordée à ceux que Coulomb, physicien très-habile et très-exact, a obtenus dans des circonstances aussi approchées qu'il est possible de celles qui ont lieu dans les machines. Voici le résumé de ses observations.

Évaluation du frottement des surfaces planes quand elles ont été quelque temps en contact.

Le frottement des surfaces planes a été considéré dans deux circonstances différentes: dans la première, les surfaces étaient restées en contact assez long-temps pour qu'en raison de l'adhérence qu'elles pouvaient contracter, et de l'engrenage plus complet qui pouvait avoir lieu entre les parties saillantes des deux corps, le frottement eût atteint toute sa valeur. Le tableau suivant offre les résultats obtenus,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cas singulier où un même corps peut causer une

226. Il arrive quelquefois que la pesanteur d'un seul corps produit une multiplication de frottement dont il est à-propos d'examiner la cause.

---

lesquels se rapportent comme l'on voit à la résistance qui a lieu au premier instant où l'on met une machine en mouvement.

INDICATION des surfaces en contact.	RAPPORT du frottement à la pression.	OBSERVATIONS.
Chêne sur chêne, les fibres parallèles.....	0,44	Le frottement parvient au *maximum* au bout de quelques secondes.
les fibres parallèles, et la surface réduite à des arêtes arrondies.....	0,42	*Idem.*
les fibres croisées.....	0,27	*Idem.*
les surfaces garnies d'un enduit de suif renouvelé à chaque expérience...	0,38	Le frottement atteint son *maximum* en quelques jours. L'adhérence produit une résistance d'envir. 19 kil. par mètre quarré.
les mêmes après un long user, en mettant du vieux oing.....	0,21	*Idem.* L'adhérence produit une résistance d'environ 39 kil. par mètre quarré.
Chêne sur sapin, les fibres parallèles.....	0,67	Le frottement atteint son *maximum* au bout de quelques secondes.
Sapin sur sapin, les fibres parallèles.....	0,56	*Idem.*
Orme sur orme, les fibres parallèles.....	0,46	*Idem.*
Fer sur chêne.....	0,20	Il n'est point certain que le frottement eût atteint son *maximum*.
Cuivre sur chêne.....	0,18	*Idem.*
Fer sur fer.....	0,28	Le *maximum* du frottement a lieu au bout de quelques secondes.
Cuivre sur fer.....	0,26	*Idem.*
la surface reduite à des pointes émoussées.....	0,17	*Idem.*
les surfaces garnies d'un enduit de suif neuf.....	0,11	Il a lieu au bout de quelques heures. La résistance de l'adhérence est d'environ 7 kil. par mètre quarré.
d'un enduit d'huile.....	0,17	
d'un enduit de vieux oing..	0,14	
Pierre de liais (calcaire d'un grain très-fin) bien polie, sur une pierre semblable (Rondelet, *Tr. de l'art de bâtir*, t. 3, p. 243)...	0,58	La valeur du frottement après que le mouvement est commencé ne peut pas différer sensiblement de celle qui a lieu à l'instant où le mouvement commence.
Pierre de Château-Landon (calcaire très-dure) dont la surface était piquée ou bouchardée, sur une pierre semblable. (Boistard, *Expér. sur la main-d'œuvre*, etc., p. 58.).....	0,78	*Idem.*
Caisse en bois glissant sur du pavé. (Regnier, *Descr. du dynamomètre, Journ. de l'École Polytechnique*, 5e cahier.).....	0,58	*Idem.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Soit un plan EF pressé entre deux autres AB et CD, dont le premier est chargé d'un poids G. Si le plan CD est immobile et l'autre AB retenu au

multiplication de frottement.

Pl. 1, Fig. 7.

On a considéré ensuite le frottement des surfaces planes dans la supposition que le mouvement avait lieu depuis un certain temps, ce qui a fourni le tableau suivant:

Évaluation du frottement des surfaces planes en mouvement les unes sur les autres.

INDICATION des surfaces en contact.	RAPPORT du frottement à la pression.	OBSERVATIONS.
Chêne sur chêne, les fibres parallèles.....	0,11	
et la surface réduite à des arêtes arrondies.....	0,08	
les fibres croisées.....	0,10	
et la surface réduite à des arêtes arrondies.....	0,10	
les fibres parallèles et les surfaces enduites de suif ou de vieux oing renouvelé à chaque essai....	0,035	L'adhérence des surfaces occasionne une résistance d'environ 30 kil. par mètre quarré.
la surface réduite à des arêtes arrondies, avec enduit, ou l'enduit essuyé et les surfaces restant onctueuses.....	0,06	
Chêne sur sapin, les fibres parallèles.....	0,16	
Sapin sur sapin.....	0,17	
Orme sur orme.....	0,10	
Chêne sur fer, les fibres étant parallèles, et la vîtesse très-petite.....	0,08	Le frottement augmente avec la vîtesse, à moins que les surfaces n'aient été usées pendant long-temps.
la vîtesse étant de $0^m,3$ par seconde.....	0,17	
les surfaces étant très-petites, sans enduit, mais restant onctueuses.....	0,07	Le rapport du frottement à la pression est constant.
Fer sur fer.....	0,28	Le frottement diminue quand les surfaces ont été usées long-temps.
Cuivre sur fer.....	0,24	Le frottement après un long user se réduit à 0,17.
Fer sur fer avec un enduit de suif renouvelé.....	0,10	L'adhérence produit une résistance d'environ 14 kil. par mètre quarré.
Cuivre sur fer avec un enduit de suif renouvelé.....	0,10	L'adhérence produit une résistance d'environ 7 kil. par mètre quarré.
avec de l'huile sur un ancien enduit de suif.....	0,12	L'adhérence peut être regardée comme nulle.
la surface réduite à des pointes émoussées, restant onctueuses, ou enduites de suif et d'huile.....	0,12	

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

point fixe H, la puissance P voulant tirer le plan EF à soi, éprouvera de la part du frottement une résistance double de celle que peut causer naturellement le poids G.

Il est constant que la puissance P ne pouvant attirer le plan EF sans surmonter le frottement de la surface supérieure contre l'inférieure du plan AB, ce sera la même chose à la puissance de dégager les particules d'en-bas d'avec celles d'en-haut, ou de dégager ces dernières d'avec les précédentes, puisque le mouvement vertical du poids G sera le même d'une

---

Évaluation du frottement des axes dans leurs boîtes.

Les résultats contenus dans le tableau suivant sur le frottement des axes supposent que le mouvement a lieu depuis un certain temps.

INDICATION des axes mis en expérience.	RAPPORT du frottement à la pression.	OBSERVATIONS.
Axe de fer dans une boîte de cuivre.....	0,155	
avec un enduit de suif.....	0,085	
avec un enduit de vieux oing..	0,12	
les surfaces étant pénétrées par le suif et restant onctueuses.	0,127	
avec un enduit d'huile.....	0,13	
avec un enduit qui n'avait pas été renouvelé depuis longtemps, quoique la machine eût servi continuellement..	0,133	On voit par ce tableau que le frottement des axes est en général un peu moins considérable dans des circonstances semblables que le frottement des surfaces planes, et on peut juger aussi, d'après les résultats précédents, que dans tous les cas qui peuvent se présenter dans le mouvement des machines, où les surfaces sont ordinairement enduites de corps gras, le frottement est beaucoup au-dessous du tiers de la pression, en sorte que l'évaluation admise par Bélidor était tout-à-fait fantive.
Axe de chêne verd dans une boîte de gayac avec un enduit de suif.....	0,038	
l'enduit étant essuyé, et les surfaces restant onctueuses..	0,06	
après avoir servi long-temps, sans qu'on eût rafraîchi l'enduit.....	0,07	
Axe de chêne verd dans une boîte d'orme enduite de suif.....	0,03	
l'enduit étant essuyé, et les surfaces restant onctueuses..	0,05	
Axe de buis dans une boîte de gayac enduite de suif.....	0,043	
l'enduit étant essuyé et les surfaces restant onctueuses.....	0,07	
Axe de buis dans une boîte d'orme enduite de suif.....	0,035	
l'enduit étant essuyé et les surfaces restant onctueuses....	0,05	

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

manière comme de l'autre. Il faudra donc que le plan AB s'élève autant au-dessus du plan EF, que ce dernier s'élevera au-dessus de CD. Ainsi la puissance P ne pourra tirer le plan EF à soi, sans que le poids n'ait une quantité de mouvement double de celle qu'il aurait s'il n'était point arrêté (*am*); mais comme c'est la même chose d'élever un certain poids à une hauteur double d'un autre, ou d'élever un poids double à une hauteur simple dans le même temps (98), il faut donc, pour que la puissance P soit en équilibre avec le frottement des deux surfaces du plan EF, qu'elle ait une force double de celle qu'il lui faudrait s'il n'était question que du frottement d'une seule surface.

Si au lieu de deux plans on en avait un grand nombre, comme A, tous considérés sans pesanteur, arrêtés en B, et qu'il y eût entre deux d'autres plans C pressés par un seul poids G, la puissance P qui voudrait tirer à elle tous ces plans serait obligée d'employer une force proportionnée à leur nombre; c'est-à-dire que s'il y en avait douze, composant ensemble 24 surfaces, et que le poids fût de 30 livres, le frottement de ce poids contre une des surfaces étant de 10 liv., il faudra à la puissance 240 liv. de force pour surmonter le frottement total. Car le poids s'élevera 24 fois plus haut, pour laisser à toutes les surfaces la liberté de se dégager, que si l'on n'avait à vaincre que le frottement d'une seule surface, puisque, par la raison que je viens d'exposer, il tiendra lieu d'un poids de 720 livres : ce qui fait voir qu'il y a des cas où un poids médiocre peut causer beaucoup de résistance. PL. 1, FIG. 8.

227. Ayant une surface verticale AB contre laquelle serait appliquée une des faces du corps EG, et qu'une puissance P fît monter ou descendre ce corps le long de cette surface, par une direction FP partant du centre de gravité du corps et parallèle à la surface AB, il est constant que cette puissance soutenant tout le poids, quelque grand qu'il soit, le frottement d'une des faces du corps sera très-peu de chose, puisqu'on peut dire qu'il n'y a point de frottement où il n'y a point de pression. Cependant si les deux surfaces qui se touchent sont dans le cas d'avoir des parties saillantes qui s'engrènent mutuellement, comme nous l'avons conçu jusqu'ici, le corps ne pourra monter sans s'écarter tant soit peu

Le frottement d'un corps contre une surface verticale sera insensible, si ce corps est soutenu en l'air par son centre de gravité.

FIGURE 9.

(*am*) Les expressions dont Bélidor se sert sont une suite des notions inexactes établies dans le paragraphe commençant à l'art. 85, qui ont été rectifiées dans la note (*n*), et auxquelles se rapporte aussi la note (*s*). Son raisonnement est ici fondé sur le principe des vîtesses virtuelles. Il ne fallait point parler de *quantité de mouvement*, mais observer que la puissance P ne pouvait tirer le plan sans soulever le poids G deux fois plus haut que si le plan EF n'eût pas été contenu entre deux autres. Je me dispenserai par la suite de faire des remarques semblables à celle-ci : le lecteur pourra facilement y suppléer.

Remarque sur l'art. 226.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la verticale pour se dégager d'avec la surface AB, et sans que la puissance P ne fasse un effort un peu au-dessus de celui du poids. Il y a donc ici un frottement, qu'il ne faut pas confondre avec celui qui naît de la pesanteur du corps, et qu'il s'agit d'estimer. Donnons-en un exemple avant de finir l'estimation : on sait que les pistons frottent contre les parois des corps de pompe ; mais comme c'est le cercle du piston qui soutient tout le poids de la colonne d'eau, et non pas la surface, que d'ailleurs le cuir dont elle est entourée pour s'unir plus intimement au corps de pompe est flexible, quelle que soit la mesure de ce frottement, il n'a rien de commun avec la pesanteur de la colonne d'eau (*an*), et quand on s'est laissé éblouir par les avantages d'un piston sans frottement, c'est qu'on n'a pas fait assez d'attention à la nature de celui qui se trouve en pareil cas.

Si une surface verticale est poussée perpendiculairement contre une autre surface, le frottement sera encore le tiers de la pression.

Pl. 1, Fig. 9.

228. S'il y a une seconde puissance Q qui pousse le corps D selon une direction QD perpendiculaire à la face EG, il faudra que la première P, pour faire monter ce corps, soit au-dessus de ce que nous l'avons supposé, puisqu'elle aura encore à surmonter le frottement causé par la pression de la puissance Q. Supposant cette pression de 30 liv. et le poids de 40, il faudra que la puissance P soit de 50, parce qu'agissant selon une direction parallèle au plan AB, la résistance causée par le frottement sera le tiers de la puissance.

Si l'on fait abstraction de la puissance P, et si le corps EG repose sur un plan horizontal HCIK, tandis qu'il est poussé par la puissance Q contre la surface verticale AB comme ci-devant, et par une autre puissance M selon une direction horizontale ML parallèle à la surface AB, il arrivera que la puissance M aura deux obstacles à surmonter, celui du frottement du corps contre la surface verticale, et celui du frottement du même corps contre le plan horizontal HI. Car la pression contre la

---

Remarque sur l'art. 227. Évaluation du frottement des pistons dans les corps de pompe.

(*an*) Cette assertion n'est pas exacte en ce sens que, plus la colonne d'eau est élevée, et plus il faut que le cuir du piston presse fortement le corps de pompe pour ne point laisser échapper d'eau. Langsdorf, auteur d'une théorie des pompes et machines à colonne d'eau, a donné sur ce sujet le résultat suivant, fondé, à ce qu'il assure, sur de nombreuses expériences. Pour les pistons des machines à colonne d'eau, et des machines à vapeur, la résistance du frottement évaluée en kilogrammes est exprimée par la formule

$$300\, r\, H$$

r = le rayon du cylindre où se meut le piston,
H = la hauteur de la colonne d'eau dont le piston est chargé, l'un et l'autre étant évalués en mètres ;

d'où il suit que cette résistance est proportionnelle à la charge du piston et à son diamètre. Ce résultat est cité dans l'*Essai sur la science des machines* de M. Guenyveau, page 203.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

surface verticale, quelque force qu'on attribue à la puissance Q, ne diminue point l'action de la pesanteur du corps, qui n'en pressera pas moins le plan horizontal que si la puissance Q n'y était pas (68). Ainsi la puissance M sera exprimée par le tiers de la puissance Q, plus le tiers de la pesanteur du corps.

229. Il suit que si l'on avait une surface verticale et inflexible EFGH engagée dans deux coulisses AB et CD, et qu'une puissance Q la poussât selon une direction perpendiculaire QI, la puissance P qui voudrait élever cette surface doit être égale à son poids, plus au tiers de la puissance Q ou de la pression qu'elle cause. Ce qui fait voir que dans les *écluses*, la difficulté que l'on éprouve à élever une *vanne* qui soutient de l'eau vient de deux causes : la première du poids de la vanne, la seconde de la poussée de l'eau contre la même vanne, laquelle ayant pour appuis les coulisses, les presse selon une direction perpendiculaire, et cause un frottement dont il est aisé de faire l'estimation. Pl. 1, Fig. 10.

230. Pour faire mention des différents cas où le frottement a lieu et qui se rencontrent ordinairement dans les machines, comme on en jugera par les exemples que je donnerai par la suite, imaginons que le rectangle AB représente une pièce de bois équarrie, comme sont ordinairement dans certains moulins les pilons qui se trouvent enclavés entre des pièces de traverse EF et MN, nommées *prisons*. Elles servent à les diriger lorsqu'ils montent et retombent par l'action d'une puissance P, que nous supposerons appliquée au point V du *mentonnet* SV, pour le faire monter de V en O selon une direction PV perpendiculaire à la face ST. Comme il faut donner un peu de jeu entre les prisons, il arrive que la puissance P, n'agissant point dans la direction KY qui passe par le centre de gravité du pilon, fait qu'il appuie et frotte contre le bord des faces C et D. Pour calculer ces deux frottements, je suppose qu'une puissance Q repousse le pilon, selon une direction QC perpendiculaire à VG, avec une force égale à la pression qui se fait au point C : alors regardant le point V comme un point d'appui, et le poids L comme celui qu'on veut élever, il y aura même raison de ce poids à la puissance Q, que de la perpendiculaire VG à la perpendiculaire VI ; ce qui donne $\frac{VI \times L}{VG} = Q$. De même, pour savoir la pression qui se fait au point D, nous supposerons aussi que la puissance R qui agit selon une direction perpendiculaire RD lui fait équilibre ; ce qui donne encore : le poids L est à la puissance R comme la perpendiculaire VH est à la perpendiculaire VI, ou $\frac{VI \times L}{VH} = R$. Figure 11.

Dans les deux divisions précédentes, les dividendes étant les mêmes, les quotients seront en raison réciproque des diviseurs : par conséquent le frottement au point C sera à celui du point D comme HV est à VG,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce qui donne lieu à plusieurs remarques que nous allons rendre sensibles à l'aide de la figure 12, dont voici la construction (*ao*).

Application des propriétés de l'hyperbole à la variété des frottements des pilons.

PLANCHE 1. FIGURES 11 et 12.

231. Il faut tirer la ligne gh égale à la verticale GH de la figure précédente, et par ses extrémités mener les parallèles gi et hl en faisant les angles alternes igh et ghl de telle ouverture que l'on voudra. On prendra sur la ligne gh, en partant de ses extrémités, les parties ga et ha chacune égale à la distance IV où se trouve la puissance P de la ligne de direction du poids L. Ensuite on tirera la ligne ab parallèle à gi ou à hl que l'on fera d'une grandeur arbitraire; et prenant les côtés des angles igh et ghl pour des asymptotes, on fera passer par chacun des points b une hyperbole.

Il s'agit présentement de faire voir quelle est la pression du pilon dans les différentes élévations du mentonnet. Il faut par le point v mener à l'asymptote gi la parallèle qs, terminée par les deux hyperboles; et si l'on suppose le mentonnet à la hauteur v prise au-dessous du point n milieu de gh, je dis que vs exprimera la pression qui se fait au point C et vq celle qui se fait au point D, et que le rapport de chacune de ces lignes à la constante ab sera le même que celui de chaque pression au poids L. Car, par la propriété de l'hyperbole, on aura $gv \times vs = ga \times ab$ et $hv \times vq = ga \times ab$, qui est la même chose que GV × Q = IV × L et VH × R = IV × L.

Cas où le frottement des pilons est le moindre de tous.

232. Il suit premièrement que, quand le mentonnet se trouve à la hauteur n milieu de la verticale gh, la parallèle mo à l'asymptote gi étant alors divisée en deux également, la pression contre les points C et D est égale; et que dans ce cas-là, la somme de ces deux pressions est la moindre de toutes celles qui peuvent naître des différentes élévations du mentonnet, parce que la parallèle mo est la plus petite de toutes celles qu'on peut tirer d'une hyberbole à l'autre.

Rectification de la théorie du frottement des pilons contre leurs prisons.

(*ao*) Cet article est absolument fautif, et par conséquent les suivants, jusqu'à l'art. 238 inclus. La question dont il s'agit a été résolue d'avance dans le § 1 de la note (*m*). On voit ici, comme dans cette note, que le pilon et son mentonnet doivent être considérés comme un corps libre auquel sont appliquées les quatre forces P, Q, R, L, agissant dans un même plan. Or l'équilibre de ce corps exigeant 1° que les forces étant estimées dans un sens quelconque fassent une somme nulle, on a d'abord P = L et Q = R; 2° que la somme des moments des forces pour faire tourner le corps autour d'un point quelconque, par exemple autour du point I, soit aussi nulle, on a de plus P. VI — Q. VG — R. VH = 0, ou, à cause de Q = R, P. VI = Q. GH. D'où l'on conclut que la force P doit être égale au poids du pilon, que les pressions contre les deux prisons sont égales entre elles, quelle que soit la situation du mentonnet, et que chacune d'elles est au poids du pilon comme la longueur VI du mentonnet est à l'intervalle GH des prisons.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

233. Secondement, lorsque le mentonnet touchera les prisons E ou N, si les lignes égales gd et hd en marquent l'épaisseur, la pression sera la plus grande de toutes, parce que les parallèles seront les plus grandes de toutes celles qu'on peut mener dans l'intervalle dd.

Cas où le frottement des pilons est le plus grand.

234. Troisièmement, si le point V du mentonnet ne rencontrait nul obstacle, et qu'il pût parvenir au niveau des points C ou D, les points d se confondant avec g et h, la ligne de se confondra aussi avec l'asymptote gi ou hl; il y aura une des deux pressions qui sera infinie (et l'autre gf sera la moindre de toutes celles que peut recevoir la prison opposée.

Cas où le frottement d'un pilon peut devenir infini.

235. Quatrièmement, lorsque le jeu du mentonnet se fait au-dessous du point n, comme de v en t, on voit qu'à mesure qu'il monte, le frottement diminue, le rapport du grand au moindre étant comme qs est à rx.

Cas où le frottement des pilons va en diminuant.

236. Cinquièmement, lorsque le mentonnet se trouvera à une égale distance du point n au-dessus et au-dessous, les pressions seront égales, et d'autant plus petites que le mentonnet sera moins éloigné du point n; ce qui fait voir que dans la construction des pilons il faut, pour qu'il y ait le moins de frottement possible, placer le mentonnet de manière que le chemin qu'il doit faire soit partagé en deux également par le milieu de l'intervalle des prisons.

Situation qu'il faut donner au mentonnet, pour que les pilons aient le moins de frottement qu'il est possible.

237. Comme la ligne ga exprime le bras de levier IV, si cette ligne augmentait tandis que ab ou le poids aurait toujours la même valeur, la pression ou le frottement augmenterait dans la même raison, parce que le sommet de chaque hyperbole s'éloignerait des points g et h. Ainsi, supposant que lorsque le mentonnet commence à monter, la puissance P soit appliquée au point S, et qu'elle aille de S en V d'un mouvement uniforme, dans le temps qu'elle fait monter le pilon de V en O, il faudra au premier instant que la ligne ga soit égale à IS, et la parallèle qs sera autant au-dessous de ce qu'elle est présentement que IS est au-dessous de IV. C'est ce qui fait voir que la puissance en montant diminuera dans un sens, et augmentera dans l'autre : mais elle diminue beaucoup moins à proportion qu'elle n'augmente par la longueur du bras de levier qui va toujours en croissant, ce que l'on peut exprimer d'une manière générale. Nous nommerons z la distance où la puissance P pourra se trouver du point I, y la hauteur DS ou HV du mentonnet au-dessus de la ligne horizontale DR, d la verticale GH; par conséquent GV sera $d-y$. Ainsi on aura $\frac{Lz}{y}$ pour la pression au point D, et $\frac{Lz}{d-y}$ pour la pression au point C; et si le rapport de la pression au frottement est celui de m à n, on aura $\frac{nLz}{my}+\frac{nLz}{md-my}$ pour le frottement, à quoi ajoutant le poids L, il viendra enfin $L+\frac{nLz}{my}+\frac{nLz}{md-my}=P$.

Le frottement des pilons dépend aussi de la longueur du mentonnet.

PLANCHE I. FIGURES 11 et 12.

238. Nous avons dit (236) qu'il fallait que le chemin que fait le men-

Il faut calculer le frottement des pilons dans le cas

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du plus grand effort que la puissance sera obligée de faire.

tonnet eût ses extrémités également éloignées des deux points où se fait la pression; dans ce cas, si la puissance restait à la même distance de la ligne de direction du poids, elle irait toujours en décroissant jusqu'au milieu du chemin qu'elle doit parcourir (235), et ensuite augmenterait jusqu'à devenir égale à ce qu'elle était au commencement de la montée. Or quand on voudra déterminer cette puissance par rapport au poids et au frottement qu'elle doit surmonter, il faudra l'estimer dans le cas du plus grand effort qu'elle sera obligée de faire au commencement et à la fin du chemin qu'elle a à parcourir, sans se mettre en peine si elle varie entre ces deux extrémités. Alors y pourra être regardée comme une quantité constante que l'on déterminera par la hauteur HV, où le mentonnet se trouve au-dessus de la ligne DH lorsqu'il commence à monter, et nommant cette hauteur c, on aura au lieu de l'expression précédente $L+\frac{2nLz}{mc}=P$, et si $m:n::3:1$, on aura $L+\frac{2Lz}{3c}=P$, dont nous ferons usage par la suite. Quelquefois le mentonnet, au lieu de se trouver entre les deux points où se fait le frottement, est placé vers le bas du pilon au-dessous de la prison inférieure: mais de quelque manière qu'il soit situé, ce que je viens de dire doit suffire pour en calculer le frottement.

Ce qui précède fait bien voir que quand on veut examiner de près le jeu des parties d'une machine pour en avoir des idées justes, afin d'en calculer exactement l'effet, on y découvre mille choses qu'on n'aperçoit qu'après un circuit de recherches. Il est vrai qu'on peut se dispenser d'être aussi scrupuleux, mais on se relâche toujours assez quand on vient à l'exécution, et si l'on voulait traiter dans la rigueur géométrique tout ce qui appartient aux pilons seulement, on se trouverait engagé dans des difficultés de calcul qui ne seraient pas aisées à résoudre.

Les frottements qui se font par un mouvement circulaire doivent être calculés comme s'ils se faisaient en ligne droite, et l'on doit avoir égard aux bras de levier qui répondent au poids et à la puissance.

239. Nous avons supposé jusqu'ici que la puissance qui surmontait le frottement agissait en ligne droite, et que sa vîtesse était la même que celle du poids; mais dans les machines les mouvements étant presque toujours circulaires, et les vîtesses du poids et de la puissance étant différentes, nous allons faire voir que la puissance qui doit surmonter le frottement, croît ou diminue selon sa vîtesse par rapport à celle du poids; ou, ce qui revient au même, selon la grandeur des bras de levier qui répondent à l'un et à l'autre, et que par conséquent pour calculer les frottements, il faut suivre les lois ordinaires de la mécanique.

Pl. 1, Fig. 13.

Si l'on a un corps A posé sur un plan horizontal, attaché par son centre de gravité à une verge inflexible AC, dont le point d'appui B est dans le milieu, et qu'à l'extrémité C il y ait une puissance qui tire toujours selon une direction CH perpendiculaire au levier; le centre de gravité du poids ira toujours de A en I, et décrira une circonférence ainsi que le point C, l'un et l'autre avec la même vîtesse. Par conséquent cette puissance

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sera équivalente au tiers du poids, comme si elle agissait selon une ligne droite AE.

Si la puissance était appliquée au point D, milieu de BC, elle décrirait la circonférence LM moitié de IK; et sa vîtesse n'étant que moitié de celle du poids, il lui faudrait une force double de celle qu'elle avait à l'extrémité C, c'est-à-dire dans la raison réciproque de son bras de levier à celui du poids; ainsi il faudra qu'elle soit les deux tiers de la pesanteur du corps A. Mais si au contraire le bras de levier BF était double de BA, la vîtesse de la puissance serait double de celle du poids, et sa force égale à la sixième partie de la pesanteur du même poids.

240. Lorsqu'on fait mouvoir un corps sur un plan autour d'un point fixe, les parties de la surface qui frotte ont plus ou moins de vîtesse selon leur éloignement de ce point: pour avoir une vîtesse moyenne, il faut déterminer la longueur du bras de levier qui doit appartenir au poids par la distance du point fixe au centre de gravité de la surface. Par exemple, si l'on avait un corps cylindrique ROQS, comme une meule de moulin posée à plat, qu'on voulût faire tourner autour de son centre B, la base étant un cercle, on pourra supposer que la pesanteur de ce corps est également distribuée sur la circonférence LM, qui a pour rayon la ligne BD qui doit être les deux tiers de BT (101), et même si l'on veut en un seul point D, qui aura pour bras de levier la ligne BD. Ainsi lorsqu'une meule de moulin se meut d'un mouvement uniforme, on peut dire que sa quantité de mouvement est le produit de sa pesanteur par la circonférence LM, ou par les deux tiers de celle de son grand cercle.

Quand un corps est mu autour d'un point fixe, le bras de levier qui répond au frottement, doit être exprimé par la distance du point fixe au centre de gravité de la surface qui frotte.

Pl. 1, Fig. 13.

Il suit de-là que lorsque l'arbre d'une machine est dans une situation verticale et qu'il aboutit par le pied à un pivot qui tourne dans une crapaudine, le frottement de ce pivot a pour bras de levier les deux tiers de son rayon.

241. Ayant un cylindre ADCH posé horizontalement sur deux paliers taillés en portion de cercle, comme on le voit à l'endroit KHZ du profil, pour servir à une puissance Q à élever un poids P selon une direction perpendiculaire au diamètre horizontal AC, à l'aide d'une corde qu'on suppose faire plusieurs tours sur le cylindre pour le contraindre à tourner dans les paliers KHZ; il est certain que dans l'état d'équilibre, s'il n'y avait point de frottement, la puissance serait égale au poids. Par conséquent si ce poids est de 60$^{liv.}$, l'appui sera chargé de 120$^{liv.}$. Le frottement du cylindre contre le palier étant le tiers de la pression, il faudra ajouter 40$^{liv.}$ à la puissance, parce que la vîtesse de la surface qui frotte est égale à celle de la puissance qu'on peut supposer appliquée au point C, l'une et l'autre étant également éloignées du centre. La puissance ainsi augmentée, la pression du cylindre contre l'appui le sera aussi, et causera un surcroît de frottement égal au tiers de cette augmentation,

Il y a des cas où une puissance qui agit pour élever un poids contribue à en augmenter le frottement.

Figures 14 et 15.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

c'est-à-dire au tiers de 40liv. qui est $13\frac{1}{3}$, qu'il faut encore ajouter à la puissance. Mais cette seconde augmentation va causer une nouvelle pression, par conséquent un nouveau frottement. Il faudra donc prendre le tiers de $13\frac{1}{3}$, et encore le tiers du tiers, ainsi de suite, tant qu'on soit parvenu à un poids si petit qu'il ne mérite pas qu'on en tienne compte; et l'on trouvera que le frottement donne $40 + 13\frac{1}{3} + 4\frac{4}{9} + 1\frac{13}{27} + \frac{40}{81} + \frac{40}{243} = 59 + \frac{223}{243}$, qui étant ajouté à 60, on aura $119^{liv.}\frac{223}{243}$ pour la valeur de la puissance, afin qu'elle soit en équilibre avec le poids et le frottement; de sorte que si on l'augmentait tant soit peu, elle ferait monter le poids.

Manière de trouver la somme des termes d'une progression géométrique.

242. Comme les quantités dont il faut augmenter la puissance composent une progression géométrique dont les termes doivent aller en décroissant jusqu'à zéro, on trouvera tout d'un coup la somme de tous ces termes par une règle générale démontrée dans les éléments d'algèbre : la voici.

Si l'on a une progression géométrique allant en décroissant jusqu'à zéro, on aura la somme de tous les termes qui suivent le premier en multipliant le premier par le second, et divisant le produit par la différence du premier au second. Ainsi les deux premiers termes étant a et b, la somme de tous les termes qui suivent le premier sera $\frac{ab}{a-b}$.

Présentement, si l'on suppose que a exprime la somme du poids et de la puissance dans l'état d'équilibre, le premier terme de la progression sera $\frac{1}{3}a$ et le second $\frac{1}{9}a$; d'où l'on tire $\frac{\frac{1}{3}a \times \frac{1}{9}a}{\frac{1}{3}a - \frac{1}{9}a} = \frac{\frac{1}{27}a^2}{\frac{2}{9}a} = \frac{1}{6}a$, ce qui fait voir que *quand le rapport qui règne dans la progression est celui de* 3 *à* 1, *la somme de tous les termes qui suivent le premier est égale à la moitié du premier.* Par conséquent on aura pour tous les termes ensemble $\frac{1}{3}a + \frac{1}{6}a$, ou $\frac{1}{2}a$, pour l'expression du frottement : on peut donc établir cette règle générale.

Règle générale pour calculer les frottements dans le cas où l'action de la puissance se joint à celle du poids.

243. *Quand l'action d'une puissance se joindra à celle du poids pour en augmenter la pression sur le point d'appui, et que leurs directions seront parallèles, il faut que cette puissance, pour être en équilibre avec le frottement seul, soit égale à la moitié de la pression que soutient l'appui lorsque la puissance et la surface qui frotte ont la même vîtesse.*

Voulant donc savoir la force qu'il faut à la puissance Q pour surmonter le frottement du cylindre, il suffira tout d'un coup de prendre la moitié de la pression : on aura 60liv. au lieu de $59\frac{223}{243}$ qui est un peu moindre, parce que nous n'avions pas poussé les termes de la progression assez loin (*ap*).

Remarque sur la règle fautive donnée art. 243.

(*ap*) Le lecteur ne doit point oublier que cette règle, aussi bien que tout ce que Bélidor en déduit dans les articles suivants, est fondée sur le principe que la ré-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Attention qu'il faut avoir lorsque la direction de la puissance n'est pas parallèle à celle du poids.

244. Quand les directions du poids et de la puissance ne sont pas parallèles, l'appui n'étant point pressé par la force absolue de l'un et de l'autre, le frottement est moindre que la moitié de leur somme. Par exemple, si la puissance était appliquée en R, et qu'elle tirât selon une direction horizontale DR parallèle au diamètre AC, on pourrait supposer que la corde est attachée au centre B, que la puissance tire selon la direction BY, et que le poids est suspendu à ce même centre. Or comme dans l'état d'équilibre la puissance est égale au poids, on pourra prendre le rayon BC pour la puissance et le rayon BH pour représenter le poids. Alors si l'on mène la ligne HO parallèle à BC, on aura le parallélogramme des forces HBCO, dont la diagonale BO exprimera l'action du poids au point Z. Le frottement étant égal à la moitié de cette pression par l'article précédent, BV marquera ce qu'il faut ajouter à la puissance quand elle sera exprimée par le rayon : c'est pourquoi, sans faire de parallélogramme, il suffit de tirer la corde HC qui joint les directions du poids et de la puissance, et de prendre pour l'expression du frottement la perpendiculaire tirée du centre sur cette corde, pour avoir $R = BC + BV$.

245. Si la puissance tirait selon une direction ES, la supposant encore appliquée au centre B de même que le poids, c'est comme si elle agissait selon BX parallèle à ES. Le frottement se fera au point M, et l'on aura $S = BN + BL$. Quand le point E se confondra avec le point C, BL égalera le rayon, la direction BS sera parallèle à celle du poids, et l'on retombera dans le premier cas, puisque la puissance S sera double du rayon.

246. Si la puissance tirait selon une direction NT, c'est encore comme si elle agissait selon la direction BG, parallèle à la précédente. La pression se fera au point K, et l'on aura toujours $T = BH + BI$.

247. Enfin si la puissance agissait selon la direction A4 qui serait la même que celle du poids, elle soutiendra ce poids sans que ni l'un ni l'autre presse l'appui, et il n'y aura d'autre frottement que celui que peut causer la seule pesanteur du cylindre.

Examen des différents degrés de force d'une puissance qui élève un poids à l'aide d'une manivelle.

248. Ce que nous venons de dire s'applique de soi-même à ce qui arrive à une puissance qui élève un poids à l'aide d'un treuil et d'une manivelle; car si le coude de la manivelle est égal au rayon du treuil, qu'elle agisse toujours selon une direction tangente au cercle qu'elle décrit, sa vîtesse étant la même que celle de la surface qui frotte, cette puissance sera bien à la vérité égale au poids dans l'état d'équilibre; mais lorsqu'elle aura le

---

sistance provenant du frottement est égale au tiers de la pression. On a vu dans la note (*al*) ce qu'il fallait penser de ce principe. Les résultats de l'auteur ne méritent donc aucune attention. On trouvera dans la note suivante la véritable manière de calculer le frottement des axes dans les machines de rotation.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

frottement à surmonter, elle variera continuellement, parce que sa direction ne sera pas toujours la même que celle du poids. Ce n'est que dans le moment qu'elle sera perpendiculaire à l'horizon que les deux directions étant parallèles, le point d'appui sera chargé de sa force absolue, aussi-bien que de celle du poids, et que le frottement sera la moitié du poids total; au lieu que quand la direction de la puissance agissant de bas en haut se trouve opposée à la précédente, ne pressant point l'appui, elle soutient le poids seulement, et n'a rien de plus à surmonter, ne tenant point compte du frottement causé par la pesanteur du treuil. De sorte qu'on peut dire qu'à chaque révolution la puissance va en croissant jusqu'à devenir double du poids, et puis décroît jusqu'à lui devenir égale.

Les mêmes remarques subsisteront encore, quoique le coude de la manivelle soit plus grand que le rayon du treuil, dès qu'on aura égard à la vîtesse de la puissance par rapport à celle de la surface qui frotte, comme nous le ferons voir après avoir parlé de la balance.

Manière de calculer les frottements des tourillons ou essieux d'une balance. Pl. 1, fig. 16.

249. Si l'on a une balance AC dont l'essieu soit dans le milieu, et représenté par le cercle DGH posé sur un appui EF; qu'il y ait aux extrémités A et C un poids de 150 liv. et que la pesanteur de la balance soit de 20, l'appui EF sera chargé de 320 liv. Pour qu'un de ces poids emporte l'autre, il faudra charger l'un des bras de la balance d'un nouveau poids pour surmonter le frottement de l'essieu contre l'appui. Si l'on voulait qu'il fût suspendu à l'extrémité I du rayon BI, comme est le poids K, il faudrait qu'il fût égal à la moitié de la pression que causent les poids P et Q joints à celui de la balance (243), parce que la vîtesse du point I où est appliquée la puissance sera la même que celle du point D de la surface qui frotte, par conséquent de 160 liv. Mais si on applique ce poids à l'extrémité C, comme serait le poids L, alors il faudra qu'il y ait même raison de L à K que de la vîtesse du point D à celle du point C, ou de BD à BC; car DBC peut être considéré comme un levier coudé dont le point d'appui est en B. Ainsi supposant BD d'un demi-pouce, et BC de vingt, on aura 40:1 :: K:L, ou 40:1 :: 160:L=4 liv.

Si les bras de la balance étaient inégaux, les poids suspendus à leurs extrémités le seraient aussi; mais la puissance qui doit surmonter le frottement sera toujours à la moitié de la charge que soutient l'appui, comme le rayon de l'essieu est à la distance de cette puissance au centre de l'essieu.

Application de l'article précédent au frottement de l'essieu d'un treuil. Figures 17 et 18.

250. Pour reprendre ce qui nous reste à dire sur la manivelle, supposons qu'il soit question d'élever un poids P de 100 liv., à l'aide d'un treuil de 6 pouces de rayon, et d'une manivelle de 15 pouces de coude. Pour connaître la puissance appliquée à la poignée BC, il faut commencer par la poser dans la situation la plus désavantageuse où elle se

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rencontre à chaque tour, qui est lorsque agissant de haut en bas, sa direction est parallèle à celle du poids, selon l'article 248. Alors le coude AB de la manivelle se trouvant horizontal, formera avec le rayon AD du treuil une balance DB dont l'essieu sera celui du treuil; et dans l'état d'équilibre, le bras AB de 15 pouces sera au bras AD de 6, réciproquement comme le poids P de 100 liv. est à la puissance Q qui sera de 40 liv. (43). Ainsi le poids et la puissance ensemble seront de 140 liv.; à quoi ajoutant le poids du treuil, y compris celui des manivelles que je suppose ensemble de 60 liv., l'appui sera chargé de 200 liv., dont il faudrait prendre la moitié, si la vîtesse de la puissance égalait celle de la surface des tourillons. Mais le rayon du tourillon étant d'un demi-pouce, il sera la trentième partie du coude de la manivelle : par conséquent la puissance ne doit être augmentée que de la trentième partie de 100 liv., qui est $3^{\text{liv.}}\frac{1}{3}$, et elle sera de $43^{\text{liv.}}\frac{1}{3}$.

Manière de calculer le frottement de l'essieu d'une roue. Pl. 1, Fig. 19.

251. Ayant une roue avec son essieu, si l'on prend leurs rayons dans le même alignement, ils composeront ensemble un levier, dont le point d'appui sera au centre commun de la roue et des tourillons : car je suppose que ce sont deux tourillons qui reposent sur les appuis, comme cela est ordinairement. Ainsi deux poids P et Q étant en équilibre aux extrémités A et D, si l'on veut que le poids Q emporte P, il faudra ajouter au premier Q un autre capable de surmonter le frottement du tourillon sur les appuis. C'est pourquoi, selon l'article précédent, on ajoutera à la somme des poids P et Q celui de la roue et de l'essieu; on en prendra la moitié, on la multipliera par le rayon du tourillon, et on divisera le produit par le rayon de la roue; le quotient donnera le poids que l'on cherche.

Observation sur les différentes directions d'une puissance qui élève un poids à l'aide d'une roue.

252. Il est à remarquer, si le poids P était en équilibre avec une puissance qui, agissant selon une direction EF tangente à la roue, serait appliquée à l'extrémité d'un rayon CE faisant un angle constant ACE avec celui de l'essieu, comme cela arrive quelquefois aux roues des moulins à eau; qu'à ne considérer que la résistance causée par le frottement, on peut supposer, comme dans l'article 244, le poids P suspendu au centre C, et la puissance F agissant aussi sur le même centre selon la direction CG parallèle à EF. Les directions du poids et de la puissance faisant ensemble l'angle GCI, n'agiront pas sur l'appui avec leurs forces absolues, puisqu'elles se détruiront en partie. C'est pourquoi si l'on prend la ligne CI pour exprimer le poids et CG la puissance, et qu'on fasse le parallélogramme GI, le frottement causé par l'action du poids et de la puissance sur le point d'appui ne sera exprimé que par la moitié de la diagonale CH. On dira donc comme CI est à CH divisé par 2, ainsi P est à un quatrième terme qu'il faudra multiplier par le rayon du tou-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rillon : et divisant le produit par le rayon de la roue, le quotient donnera ce qu'il faut ajouter à la puissance F.

Manière de calculer le frottement des poulies fixes contre leur essieu. Pl. 1, Fig. 20.

253. Ce que nous avons dit de la balance peut s'appliquer de même aux poulies, eu égard au frottement de leur palier contre l'essieu. Par exemple, ayant une poulie BD suspendue à un point fixe, à l'aide d'une écharpe dont nous n'avons fait voir que l'intérieur BH pour ne point couvrir les parties qui intéressent le plus, on prendra le cercle KFL pour l'essieu, et l'autre IEFG pour le palier, lequel nous supposerons égal au précédent à peu de chose près, ne les ayant fait inégaux que pour les mieux distinguer; car dans l'usage il suffit que le palier soit assez grand pour le jeu du boulon. Cela posé, si l'on fait passer sur cette poulie une corde dont on fait abstraction du diamètre et de la roideur, qu'à ses extrémités il y ait deux poids égaux P et Q en équilibre, le second ne pourra emporter le premier, ou seulement le faire monter tant soit peu qu'on ne lui en ajoute un autre S, capable de surmonter la résistance du frottement que les poids dont la poulie est chargée causeront sur l'essieu au point F. Comme l'essieu à cet endroit est pressé par la somme des deux poids P et Q, joints à celui de la poulie, si le tout ensemble pesait 200$^{liv.}$, la puissance qui serait appliquée à l'extrémité G du rayon HG, qu'on suppose le même que celui de l'essieu, et qui agirait selon une direction perpendiculaire GM, serait égale à la moitié de 200$^{liv.}$ (243), parce que la vîtesse du point F, sommet du palier, sera la même que celle du point G. Mais si l'on veut que la puissance soit appliquée à l'extrémité C, il y aura même raison de la vîtesse du point C à celle du point F, ou du rayon HC de la poulie au rayon HF de l'essieu, que de la puissance M = 100$^{liv.}$ à la puissance S. Par conséquent si le rayon de l'essieu est la dixième partie de celui de la poulie, la puissance S ne sera que la dixième partie de la puissance M, c'est-à-dire de 10$^{liv.}$, qui est le poids qu'il faudra ajouter à un des bouts de la corde pour être tout près d'enlever celui qui est à l'autre.

Suite de l'art. précédent pour le frottement des poulies mobiles. Pl. 2, Fig. 21.

254. Si la poulie était mobile comme AB, c'est-à-dire que la corde passât par le dessous, qu'un de ses bouts fût attaché à un point fixe C, et qu'à l'autre, qu'on suppose parallèle au précédent, il y eût une puissance Q qui tirât de bas en haut pour enlever un poids P suspendu à l'essieu ou à l'écharpe, le palier au lieu de toucher l'essieu en haut, le touchera en bas, et le frottement se fera au point G. Or si la puissance destinée à le surmonter était appliquée à l'extrémité I du rayon FI, pour agir de bas en haut selon une direction IL perpendiculaire au rayon, il faudrait qu'elle fût égale à la moitié du poids. Mais si elle agit à l'extrémité E, et que le rayon de l'essieu soit encore la dixième partie de celui de la poulie, cette puissance ne sera que la vingtième partie du poids. Ce

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui fait voir que la puissance Q, pour être capable d'enlever tant soit peu le poids P, doit être égale à la moitié de ce poids, plus à la vingtième partie du même poids.

Manière de calculer le frottement des poulies moufflées.

255. Quand on aura plusieurs poulies moufflées dont les unes seront immobiles et les autres mobiles, on voit qu'il n'y aura nulle difficulté à calculer le frottement que la partie du poids dont chacune d'elles sera chargée pourra causer, selon la grandeur de leur diamètre et de celui de leur essieu, afin d'ajouter la somme de tous ces frottements à la puissance qui soutenait ce poids en équilibre, pour être toute prête à le faire monter : sur quoi l'on remarquera en passant que la puissance qui doit surmonter les frottements sera d'autant moindre que les diamètres des poulies seront plus grands, et celui de leur essieu plus petit (*aq*).

Théorie du frottement des axes dans les machines de rotation.

(*aq*) Tout ce que dit l'auteur depuis l'art. 241 sur l'évaluation du frottement qui a lieu sur les axes étant peu exact, et affecté d'ailleurs de la supposition fausse que le frottement est égal au tiers de la pression, je vais exposer ici, le plus simplement possible, la véritable manière de traiter cette question.

Pl. B, Fig. 1.

Soit A un tourillon tournant dans le palier M*m*N, R*m* la direction de la pression R qui s'exerce sur ce tourillon par l'effet des forces qui agissent sur lui, pression dont on déterminera dans chaque cas la valeur d'après la note (*m*). Si le système était en repos, le tourillon se placerait dans le palier de manière que la direction de la force R fût normale à sa surface et à celle du palier à leur point de contact commun; mais à cause du mouvement de rotation, qui est censé avoir lieu de droite à gauche, le tourillon se transporte dans le palier jusqu'à ce qu'il soit parvenu en *m*, dans une situation telle que la tangente *mp* au point *m* fasse avec *m*R un angle égal au complément de l'angle du frottement (voy. l'art. 223 du texte), et il s'y maintient en équilibre, sans pouvoir glisser le long de la surface du palier. En nommant donc f le rapport du frottement à la pression, la tangente de l'angle pmR sera $\frac{1}{f}$, et son sinus $\frac{1}{\sqrt{1+f^2}}$. La pression normale qui aura lieu en *m* sera donc $\frac{R}{\sqrt{1+f^2}}$, et le frottement qu'elle occasionnera $\frac{Rf}{\sqrt{1+f^2}}$, qu'il faut considérer comme une nouvelle force, agissant en *m* tangentiellement à la surface du tourillon et en sens contraire du mouvement. Il faut la faire entrer en considération avec les autres, pour déterminer la valeur de R et les conditions de l'équilibre qui doit avoir lieu autour de l'axe A du tourillon, qui est ici l'axe fixe de rotation.

Pl. B, Fig. 2.

Si au lieu d'un tourillon tournant dans un palier, on avait un axe fixe, et que ce fût la concavité du trou d'une poulie qui tournât autour de cet axe, le raisonnement ci-dessus s'appliquerait encore, et la valeur du frottement serait donnée par la même formule. Mais comme ici l'axe fixe de rotation est l'axe A du trou de la poulie, c'est autour de cet axe que l'équilibre devrait être censé s'établir.

Application aux treuils et poulies.

Pl. B, Fig. 3.

Soit un treuil tournant sur les tourillons A, B; nommons r le rayon de la roue, r' celui de l'arbre, r'' celui des tourillons, α l'angle formé par les directions du poids Q

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dans un terrain uni et horizontal, les animaux attelés à une voiture n'ont d'autre résistance à surmonter que le frottement des roues contre leur essieu.

256. D'après ce qui vient d'être dit des poulies, on voit l'avantage que l'on tire des roues pour les voitures : car l'on sent bien que les animaux qui tirent un chariot sur un chemin horizontal et fort uni, n'ont d'autre obstacle à surmonter que le frottement des moyeux contre leur essieu, qui doit augmenter selon que le chariot sera plus chargé, puis-

---

et de la puissance P qui l'élève en surmontant le frottement, M le poids du treuil et des cordages dont le centre de gravité sera, pour plus de simplicité, supposé dans le plan vertical qui contient l'axe du treuil. Le rayon des deux tourillons étant supposé le même, il est inutile pour déterminer l'effet du frottement de calculer séparément les pressions qui ont lieu sur chacun. On déterminera seulement la résultante de ces pressions conformément à ce qu'on a vu à la fin du § 3 de la note (m), laquelle sera $\sqrt{P^2+(Q+M)^2+2P(Q+M)\cos.\alpha}$. La résistance du frottement, d'après ce qui a été dit ci-dessus, sera donc représentée par $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\sqrt{P^2+(Q+M)^2+2P(Q+M)\cos.\alpha}$, et pour exprimer que l'équilibre a lieu entre cette résistance, le poids Q, et la force P, on aura, en faisant pour abréger $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}=f'$, l'équation $Pr-Qr'-f'r''\sqrt{P^2+(Q+M)^2+2P(Q+M)\cos.\alpha}=0$; d'où l'on tirera la valeur de la puissance P.

Si la puissance P était dirigée parallèlement à la corde qui soutient le poids Q, on aurait $\alpha=0$, et $\cos.\alpha=1$. L'équation d'équilibre deviendrait $Pr-Qr'-f'r''(P+Q+M)=0$, d'où l'on tire $P=\frac{Qr'+f'r''(Q+M)}{r-f'r''}$; et si l'on veut négliger le poids M du treuil, on aura simplement $P=Q\frac{r'+f'r''}{r-f'r''}$.

Si au lieu d'un treuil on avait une poulie, on ferait $r'=r$ dans les formules précédentes.

Application aux palans. Pl. B, Fig. 4.

A l'égard des poulies mouflées, considérons le système représenté par la fig. 4, où les poulies ont des diamètres égaux, et les cordons sont censés parallèles. Nommons r'' le rayon des trous des poulies, r' celui de leurs gorges, et posons pour abréger $\frac{r'+f'r''}{r'-f'r''}=B$. On aura d'abord, d'après ce qui précède, entre les tensions T, T_1, T_2, T_3, etc. des cordons, les relations suivantes : $T_1=TB$, $T_2=T_1B=TB^2$, $T_3=T_2B=TB^3$, etc., $T_n=TB^n=P$, en nommant n le nombre des cordons aboutissant à la mouffle mobile. Or le poids Q étant égal à la somme des tensions des n cordons, on a $Q=T(1+B+B^2+B^3+\text{etc.},+B^n)=T\frac{B^{n+1}-1}{B-1}$, d'où l'on tire $T=Q\frac{B-1}{B^{n+1}-1}$. Mettant cette valeur dans celle de P, on aura enfin pour l'expression de la force qui fait monter le poids en surmontant le frottement, $P=Q\frac{B^{n+1}-B_n}{B^{n+1}-1}$.

Les valeurs de f, dans les formules précédentes, se détermineront dans chaque cas d'après les résultats contenus dans le troisième tableau de la note (al). On pourra presque toujours négliger dans la pratique la différence de f et f', et supposer cette dernière quantité égale à la première.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que ce frottement sera encore le tiers du poids. Si les quatre roues étaient égales, la puissance serait au tiers du poids, comme le rayon de l'essieu est à celui de la roue. Par conséquent, plus les roues sont grandes, et moins la puissance aura besoin de force, comme l'expérience le montre. Pour en faire voir la raison, considérez que c'est la même chose que le moyeu presse l'essieu, ou que ce soit l'essieu qui presse le moyeu : ainsi on peut regarder le rayon de la roue perpendiculaire à l'horizon comme un levier de la seconde espèce, qui a son point d'appui au centre de l'essieu, la puissance appliquée à l'autre extrémité, et le poids entre-deux, c'est-à-dire à l'extrémité du rayon du moyeu. Alors la puissance sera au poids dans la raison réciproque du rayon du moyeu à celui de la roue, ou bien comme la circonférence de l'un est à la circonférence de l'autre, car la circonférence du moyeu exprime la vîtesse des points qui frottent, et la circonférence de la roue la vîtesse de la puissance, puisque le chemin que ferait l'animal en marchant d'un pas égal dans un temps déterminé, peut être mesuré par le nombre de tours que fera la roue.

257. Quand on voudra calculer la force nécessaire pour tirer une voiture ordinaire à quatre roues, comme celles de devant sont toujours plus petites que celles de derrière, il faudra prendre le tiers du poids et le partager également sur l'essieu d'une des grandes roues et sur celui d'une des petites, comme si l'une et l'autre ne portaient que la sixième partie de la charge; multiplier ce sixième par le rayon de l'essieu qui est ordinairement le même pour les deux roues, ensuite diviser ce produit par le rayon de la grande roue, et diviser encore le même produit par le rayon de la petite. On aura deux quotients qui, étant ajoutés ensemble, donneront la puissance, au lieu que pour tirer le traîneau, il faut que cette puissance soit au moins égale au tiers de la charge (*ar*).

(*ar*) Je placerai ici quelques résultats d'expérience sur le frottement des voitures, pour suppléer à ce que le texte laisse à desirer. Évaluation du frottement des voitures.

Quand une voiture roule sur un terrain horizontal, ferme et uni, ou sur le pavé, les chevaux allant au pas, la force du tirage peut s'estimer le $\frac{1}{25}$ de la charge totale environ. Si la vîtesse est plus grande, le tirage n'augmente pas sensiblement sur le terrain uni, mais il augmente beaucoup sur le pavé. Pour une voiture suspendue allant au grand trot sur une chaussée pavée en grès, le tirage est environ le $\frac{1}{14}$ de la charge. Dans un terrain sablonneux, ou sur des cailloux nouvellement placés, le tirage, au pas comme au trot, est également le $\frac{1}{8}$ de la charge (Boulard, *Jour. de phys.*, décembre 1785; le comte de Rumford, *Bibl. Brit., sc. et arts*, t. 47). Ces résultats s'accordent avec de nouvelles observations communiquées à la société royale d'Edimbourg, d'après lesquelles le tirage sur un bon chemin horizontal est entre le $\frac{1}{25}$ et le $\frac{1}{30}$ de la charge. (*Bibl. univ., sc. et arts*, t. 1, p. 165).

On peut considérer une roue sous le rapport de l'avantage qu'elle offre pour franchir un obstacle; c'est ce qu'on nomme *la puissance d'une roue*. On admet ordi- De la puissance d'une roue.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Manière de calculer le frottement d'un corps contre un plan incliné quand la direction de la puissance est parallèle au plan.

Pl. 2, Fig. 22.

258. Pour continuer le calcul du frottement des machines simples, considérez le plan incliné ABC, sur lequel est un corps Q soutenu par une puissance P dont la direction DP est parallèle au plan.

Si du centre de gravité D l'on abaisse la perpendiculaire DH sur le plan, et qu'on fasse le parallélogramme rectangle EH, la diagonale DF prise dans la direction du poids exprimera la pesanteur absolue de ce poids, le côté DH sa pression sur le plan incliné, et le côté ED la partie qui tend à le faire descendre (82). Nommant donc AB a, AC b, BC c, DF p, on aura à cause des triangles semblables ABC et DEF, $a:c::p:\frac{cp}{a}$ $=$ED. D'autre part $a:b::p:\frac{bp}{a}=$EF. Ainsi prolongeant DE de la longueur EG égale au tiers de EF, on aura GE $=\frac{bp}{3a}$ pour le frottement. Par conséquent il viendra P $=\frac{p}{a}(\frac{1}{3}b+c)$ pour l'expression de la puissance qui sera en équilibre avec le poids et le frottement; ce qui est une formule générale lorsque la direction de cette puissance est parallèle au plan, et qui servira aussi à connaître la pesanteur d'un poids qu'une puissance donnée pourra élever à l'aide d'un plan incliné dont les côtés seraient aussi donnés, puisque dégageant p dans la formule il vient $\frac{3aP}{3c\times b}$ $=p$. Supposant $a=5$, $b=4$, $c=3$, $p=500^{\#}$, l'on trouvera que la puissance P doit être de $433^{\text{liv.}}\frac{1}{3}$.

Suite de l'article précédent, quand la direction de la puissance est arbitraire.

Figure 23.

259. Si la puissance tirait selon une direction arbitraire DK, il est clair qu'il faudra qu'elle surmonte non-seulement le frottement de la pression du corps sur le plan, mais encore celui qu'elle y causera elle-même par l'obliquité de sa direction. C'est pourquoi si l'on élève la perpendiculaire GI sur l'extrémité G, et qu'on prolonge KD, il est constant que si la

---

nairement que cette puissance est proportionnelle à la racine quarrée du rayon de la roue. En effet, soit une roue chargée du poids Q, tirée par une force horizontale P passant par son centre C, et qui vient à rencontrer l'obstacle A. Cet obstacle, à l'instant où la roue le franchit, est un axe fixe autour duquel les forces P et Q tendent à faire tourner la roue en sens contraire. Or ces forces étant données, la roue sera d'autant plus puissante que le moment de P pris par rapport à l'axe A sera plus grand à l'égard du moment de Q pris par rapport au même axe. La puissance de la roue est donc proportionnelle à la quantité $\frac{P.AB}{Q.BC}$, ou en appelant r le rayon de la roue, et h la hauteur de l'obstacle, à la quantité $\frac{P}{Q}\cdot\frac{r-h}{\sqrt{r^2-(r-h)^2}}$ $=\frac{P}{Q}\cdot\frac{r-h}{\sqrt{2rh-h^2}}$. Dans le cas ou h est assez petit pour être négligé par rapport à r, cette expression se réduit à $\frac{P}{Q}\sqrt{\frac{r}{2h}}$, qui varie proportionnellement à $\sqrt{r}$.

Pl. B, Fig. 5.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ligne GD exprime la puissance lorsqu'elle agit selon une direction parallèle au plan, cette direction devenant oblique, la puissance sera exprimée par ID. Prolongeant EF jusqu'en M, la ligne DE pourra être prise pour le sinus total (que nous nommerons r) de l'angle EDM, et DM pour la sécante (que nous nommerons s); c'est pourquoi à cause des triangles semblables DEM et DGI, on aura $r:s :: DG = \frac{p}{a}(\frac{1}{3}b+c) : DI = \frac{ps}{ar}(\frac{1}{3}b+c)$. Ayant trouvé la force ID, il reste à lui ajouter de quoi surmonter le frottement de la pression qu'elle causera sur le plan, en faisant attention que cette pression doit être exprimée par la ligne IG perpendiculaire au plan. Mais, à cause qu'elle lui est oblique, il faudra prendre le tiers de la ligne ID qui donne $K = \frac{4ps}{3ar}(\frac{1}{3}b+c)$. On aura donc pour la puissance capable de surmonter le poids et le frottement $\frac{ps}{3ar}(\frac{1}{3}b+c)$.

Autre suite de l'article 258, lorsque la direction de la puissance est parallèle à la base du plan incliné.

260. Lorsque la direction de la puissance est parallèle à la base AC du plan, les triangles ABC et DME devenant semblables, donnent $s:r :: a:b$, ou $\frac{s}{r} = \frac{a}{b}$; et mettant dans l'équation précédente $\frac{a}{b}$ à la place de $\frac{s}{r}$, il vient $K = \frac{4p}{3b}(\frac{1}{3}b+c)$, ce qui est encore une formule générale pour le cas où la direction de la puissance est parallèle à la base du plan, avec laquelle on pourra connaître le poids qu'une puissance donnée est capable d'élever à l'aide d'un plan incliné, puisque dégageant p dans l'équation précédente, il vient $p = \frac{3bK}{4(\frac{1}{3}b+c)}$. Sur quoi il faut remarquer que si la puissance au lieu de tirer le corps de D en K le poussait de Z en D, selon une direction parallèle à la base AC, il lui faudrait toujours la même force. Si l'on suppose que les lettres ont la même valeur que ci-devant, on trouvera que la puissance pour faire monter le poids doit être de 722 livres.

Examen du frottement qu'une puissance a à surmonter en se servant d'un coin pour élever un poids.

Pl. 2, Fig. 24.

261. Un plan incliné ABC posé sur un plan horizontal NO, étant chargé d'un poids Q soutenu par une puissance K qui agit selon une direction DK parallèle à la base, n'est autre chose qu'un coin qui tombe dans le cas de tout ce que nous venons de dire dans l'article précédent. Car que ce soit la puissance qui tire à soi le corps pour le faire monter tandis que le coin est immobile, ou que ce soit une autre puissance R qui pousse le coin pour faire monter le corps, tandis que la puissance K se maintenant dans la même direction monte le long de la verticale VX, ce sera toujours la même chose; puisque dans l'un et l'autre cas, on aura selon l'article précédent K ou $R = \frac{4p}{3b}(\frac{1}{3}b+c)$. Lorsque c'est le coin qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

marche, il faudra ajouter à la puissance R le tiers de la pesanteur du poids Q et du coin ABC pris ensemble, pour le frottement de la base AC contre le plan NO, et il viendra $R = \frac{4P}{3b}(\frac{7}{12}b+c)+\frac{5}{3}$ ABC. Ainsi supposant que la pesanteur du coin soit de 30 liv., l'on trouvera que la puissance R doit être de 899 liv. pour être toute prête à mouvoir le coin (*as*).

Cet exemple montre bien la conséquence d'avoir égard au frottement dans la construction des machines, dont le principal objet doit être de soulager la puissance en faisant en sorte qu'elle soit toujours inférieure au poids : au lieu qu'ici pour en élever un de 500 liv., il lui faut une force de 899 liv.. Voilà pourtant le cas où l'on se trouverait en se servant d'une vis pour presser un corps entre deux plans, si l'on n'était soulagé par la longueur du bras du levier, comme je vais le montrer, n'ayant parlé du coin que pour en faire l'application au calcul du frottement dans le jeu de la vis et de son écrou, qui est de toutes les machines celle où il s'en rencontre le plus.

Théorie du frottement sur le plan incliné.

(*as*) Les formules du texte, depuis l'art. 259, indépendamment de la supposition inexacte du frottement égal au tiers de la pression, sont mal établies. Voici les principaux points de la vraie théorie du frottement sur le plan incliné.

Pl. B, Fig. 6.

Nommant α l'inclinaison du plan sur l'horizon, θ l'angle de la direction de la force P avec la pente du plan, on aura pour la pression exercée sur le plan $Q\cos.\alpha - P\sin.\theta$, et pour le frottement qui en résultera $f(Q\cos.\alpha - P\sin.\theta)$. L'action de la force P dans le sens du plan étant $P\cos.\theta$, et celle du poids $Q\sin.\alpha$, l'équation d'équilibre sera $P\cos.\theta = Q\sin.\alpha + f(Q\cos.\alpha - P\sin.\theta)$, d'où l'on déduit $P = Q\frac{\sin.\alpha + f\cos.\alpha}{\cos.\theta + f\sin.\theta}$.

Si la force P, au lieu de soulever le poids Q comme on l'a représenté dans la figure, faisait presser ce poids sur le plan, il faudrait donner à $\sin.\theta$ le signe —.

Si la force P est parallèle à la pente du plan, $\theta = 0$, et la formule devient $P = Q(\sin.\alpha + f\cos.\alpha)$.

Si cette force est parallèle à la base du plan, l'angle θ est négatif et $= \alpha$. On a donc $P = Q\frac{\sin.\alpha + f\cos.\alpha}{\cos.\alpha - f\sin.\alpha}$.

La valeur de f, dans les formules précédentes, se déterminera d'après la nature des surfaces en contact, par les résultats du premier ou du second tableau de la note (*al*), suivant qu'il s'agira de donner une première impulsion à un corps, ou d'entretenir un mouvement déja produit. On remarquera dans le deuxième tableau qu'il y a quelque cas où l'adhésion des surfaces produit une petite résistance, dont on pourra tenir compte en posant l'équation d'équilibre.

On peut demander quelle serait la direction la plus avantageuse à donner à la force P pour faire monter le poids le long du plan. Pour résoudre cette question, il faut égaler à zéro la différentielle de l'expression de P prise par rapport à θ. On trouve ainsi $-\sin.\theta + f\cos.\theta = 0$, d'où $\text{tang.}\theta = f$, ce qui apprend que la force P doit faire avec la pente du plan un angle égal à l'angle du frottement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Manière de calculer le frottement d'une vis quand on s'en sert pour élever un poids.

PLANCHE 2. FIGURES 25 et 26.

262. La vis n'est autre chose qu'un cylindre autour duquel on a roulé un nombre de triangles rectangles ou plans inclinés ABC, dont chaque base AC représente la circonférence du cercle du cylindre, la hauteur CB un des pas de la vis, et l'hypothénuse AB le filet d'une révolution. L'écrou dans lequel la vis tourne est un autre cylindre creux dont le diamètre est à-peu-près égal à celui de la vis, sur l'intérieur duquel on doit supposer aussi qu'on a contourné plusieurs triangles ADB, pour former des plans inclinés qui s'engagent et glissent sur les précédents. On voit qu'ayant une vis F à laquelle soit suspendu un poids P, et que l'écrou CD soit immobile tandis qu'une puissance fait tourner la vis pour élever le poids, le triangle ADB représentera un contour ou une révolution de la vis, et le triangle ABC un contour ou une révolution de l'écrou. Or si le premier triangle est chargé d'un poids G, et qu'une puissance Q veuille faire monter le poids en poussant ce triangle selon une direction parallèle à base AC, on pourra prendre le poids G pour celui qui est suspendu à la vis F, dont l'action est distribuée sur les pas de l'écrou qui portent ceux de la vis, et considérer que les pas de la vis glisseront sur ceux de l'écrou, de la même manière que le triangle ADB sur le plan ABC. D'où il suit qu'il faudra calculer le frottement de la vis comme s'il était question de faire monter un corps sur un plan incliné en le poussant selon une direction parallèle à la base (260). Ainsi nommant b la circonférence du cercle de la vis, c la hauteur d'un des pas, et p le poids que l'on veut élever, on aura encore $Q = \frac{4p}{3b}(\frac{1}{3}b + c)$.

Suite de l'article précédent, lorsqu'on se sert de la vis pour presser un corps contre un autre.

263. Si la vis au lieu de monter descendait, ainsi que cela arrive lorsqu'il est question de presser un corps entre deux plans, il faudra en calculer l'effet comme si on voulait élever un poids à l'aide d'un coin (261), parce qu'il y a deux points d'appui. Car la vis ne peut presser de haut en bas qu'elle ne pousse l'écrou de bas en haut avec la même force, et pour tenir compte du frottement de la tête de la vis contre le plan supérieur qu'elle presse, il faut ajouter à l'expression de la puissance précédente le tiers du poids p, équivalant la plus grande pression que l'on veut faire. On aura $Q = \frac{4p}{3b}(\frac{7}{12}b + c)$. Comme les points qui composent la surface de la tête de la vis auront plus ou moins de vîtesse selon leur distance de l'axe de la même vis, le bras de levier qui répond à ce frottement ne sera pas égal au rayon du cylindre de la vis; mais nous l'avons supposé pour rendre le calcul moins composé. On pourra, si l'on veut, pour plus de précision, avoir égard à ce qui est dit dans l'article 240.

264. Nous venons de supposer dans les deux cas précédents que la puissance agissait selon une direction tangente à la circonférence du cercle du cylindre de la vis où elle était appliquée, afin de ne nous point écarter du plan incliné, où la vîtesse de cette puissance est expri-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mée par la base du plan et celle du poids par sa hauteur. Mais comme on ne fait jamais tourner une vis sans le secours d'un levier AB, il suit que sa vîtesse sera exprimée par la circonférence IEBK du cercle qu'elle décrit. Nommant donc f cette circonférence, il faudra dire : comme la vîtesse de la puissance est à celle du poids, ou comme f est à b; ainsi l'expression que l'on vient de trouver pour surmonter le poids et le frottement, est à la puissance réduite à l'extrémité du bras du levier (79). On aura $Q = \frac{4p}{3f}(\frac{1}{3}b+c)$ pour le premier cas, et $Q = \frac{4p}{3f}(\frac{7}{12}b+c)$ pour le second; qui sont deux formules avec lesquelles on pourra, en connaissant les dimensions de la vis, trouver le poids qu'une puissance donnée pourra enlever, ou la plus grande pression qu'elle peut causer, puisque pour cela il n'y a qu'à dégager p.

Application du calcul de la vis.

265. Pour appliquer ces formules à un exemple, je suppose que l'on a une vis dont la circonférence est de 40 pouces, le pas de 2 pouces, la circonférence du cercle que décrit la puissance de 400 pouces, qui répond à un levier d'un peu plus de 5 pieds, et que le poids que l'on veut élever est de 10000 liv.. Ainsi l'on aura $b = 40$, $c = 2$, $f = 400$, $p = 10000$ liv., ce qui donne pour les termes de la première formule $\frac{4p}{3f} = \frac{100}{3}$, $\frac{1}{3}b+c = \frac{40}{3}+2 = \frac{46}{3}$, lesquels multipliés l'un par l'autre donneront $\frac{4600}{9} = 511$ liv. $\frac{1}{9}$ pour la puissance qui doit être en équilibre avec le poids et le frottement.

266. Si l'on fait les mêmes substitutions dans la seconde formule $Q = \frac{4p}{3f}(\frac{7}{12}b+c)$, on trouvera $Q = \frac{100}{3}(\frac{280}{12}+2) = 844$ liv. $\frac{4}{9}$ pour la puissance dans le second cas; c'est-à-dire que pour peu qu'on l'augmente, elle sera capable de causer une pression équivalente à celle d'un poids de 10000 liv. (*at*).

Théorie du frottement dans la vis.

(*at*) Tout ce qui précède depuis l'art. 262, étant fondé sur les formules données pour le plan incliné, est entièrement fautif, conformément à la remarque de la note précédente.

Considérant une vis à filets carrés, nommant α l'angle de l'hélice avec l'horizon, l'axe étant supposé vertical, et Q la charge portée par les filets, une force horizontale agissant tangentiellement à un cylindre passant au milieu du filet, aura pour expression, d'après cette note, $Q\frac{\sin.\alpha + f\cos.\alpha}{\cos.\alpha - f\sin.\alpha}$. Par conséquent si r est le rayon de ce cylindre, et r' le rayon du cercle que décrit la puissance, la valeur de la force P capable de faire monter le poids Q sera $P = \frac{r}{r'}Q\frac{\sin.\alpha + f\cos.\alpha}{\cos.\alpha - f\sin.\alpha}$.

Quant à la vis à filets triangulaires, l'expression de P est beaucoup plus compliquée. On la trouvera dans *la Nouv. archit. hydr.*, tome 1, page 458.

Si une des extrémités de la vis était appuyée contre un obstacle, et qu'on voulût avoir égard au frottement qui s'y fait, Q' étant la pression qui s'exerce contre cet

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Examen du frottement qui se fait à la rencontre de deux leviers. Pl. 2, Fig. 27.

267. Les différentes manières dont le mouvement se communique dans les machines font naître différentes manières de calculer les frottements. Par exemple celui qui se fait par la rencontre des dents des roues et des fuseaux des lanternes n'ayant rien de commun avec ce que nous avons dit jusqu'ici, nous allons commencer par ce qu'on peut exposer de plus simple sur ce sujet.

La ligne AB doit être considérée comme une verge inflexible, représentant un levier horizontal dont le point d'appui est à l'extrémité B, ayant un poids Q suspendu à l'endroit V. Comme ce poids ne peut se soutenir ainsi, nous supposerons dans le même plan vertical un second levier KEC parallèle au précédent, ayant son point d'appui en E : nous en avons arrondi l'extrémité C, afin de le mieux séparer de l'autre AB. A l'extrémité K est une puissance qui agit selon la direction KP perpendiculaire au bras KE, pour soutenir en équilibre le poids Q, qu'il convient de réduire au point D; ce que l'on fera en le multipliant par la distance BV du point d'appui, et en divisant le produit par l'autre distance BD (60) : on aura $\frac{Q \times BV}{BD}$. Si on le multiplie par le bras EC et si l'on divise par EK, le quotient donnera l'effort que la puissance P aura à soutenir : mais comme on peut se passer de le déterminer dans les différentes positions du point d'appui E, F, G, H, I, qu'on voudra donner au levier KEC, il suffira de supposer toujours le poids Q réduit au point D. Nous l'exprimerons par la ligne DN perpendiculaire sur AB, d'une grandeur arbitraire : alors faisant DL égale au tiers de DN, elle marquera la force de la puissance qui agit de D en L selon une direction parallèle à DA, pour surmonter le frottement du poids.

Dans la situation où se trouve le levier KEC, il est certain qu'au premier instant où la puissance P agira pour vaincre l'action du poids, l'arc que décrira le point C étant infiniment petit pourra être regardé comme une partie de la verticale NI; c'est pourquoi on peut faire abstraction du chemin que fera le point C pour s'approcher de l'extrémité A, par conséquent de la résistance causée par le frottement qu'elle aurait à surmonter avec le poids, si sa direction KP cessait sensiblement d'être parallèle à la verticale NI. Si au contraire le levier de la puissance au lieu d'être horizontal était vertical comme CIK, le point d'appui I de ce levier, se trouvant directement opposé au poids, en soutiendra l'action, et la puissance P sera nulle. Ce n'est qu'en faisant mouvoir tant

---

appui, et ρ le rayon du cercle qui frotte, la résistance du frottement sera fQ', et son bras de levier (art. 240) sera $\frac{2}{3}\rho$. On aura donc alors pour la valeur complette de la force, $P = \frac{r}{r'} Q \frac{\sin.\alpha + f\cos.\alpha}{\cos.\alpha - f\sin.\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho}{r'} fQ$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

soit peu l'extrémité C de son levier, que si la direction ne cesse pas d'être sensiblement parallèle à AB, le chemin qu'elle fera faire au point C étant infiniment petit pourra être supposé horizontal : alors elle n'aura d'autre effort à surmonter que celui du frottement, et pourra être exprimée par le tiers du poids ou par ligne LD.

Quelle doit être la situation du levier de la puissance pour le plus grand effet.

268. Il n'y a donc que lorsque son levier rencontre obliquement celui du poids, qu'elle participe de la résistance causée par le poids et par le frottement. Pour en estimer le plus grand effet, il faut faire le parallélogramme LN, et considérer que la diagonale MD peut être regardée comme une puissance qui exprimera la résistance causée par le poids DN et le frottement DL agissant ensemble, lorsque la direction de cette puissance, qui n'est autre chose que la diagonale même, sera perpendiculaire au levier KGD. Car la puissance P ne peut rien avoir de plus à surmonter que le concours du poids et du frottement, l'un et l'autre pris dans leur plus grand effet; d'où il suit qu'à quelqu'endroit du quart de circonférence EI où soit situé le point d'appui du levier de la puissance P, il n'y en a qu'un seul G, où cette puissance soutienne le plus grand effort que le poids et le frottement puissent lui opposer.

L'angle du plus grand effet, formé par la rencontre des leviers du poids et de la puissance, est de 18 degrés 26 minutes.

269. Pour savoir quel est l'angle que doit former la rencontre des leviers du poids et de la puissance pour le plus grand effet, afin qu'on puisse le distinguer dans la pratique, remarquez que supposant les lignes AD et EC unies l'une contre l'autre, l'angle MDL étant commun aux angles droits NDL et MDG, les angles NDM et ADG seront égaux. Si l'on prend donc le côté DN pour le sinus total, le côté NM sera la tangente de l'angle NDM, et la diagonale MD sa sécante. Mais MN est le tiers de DN : prenant donc le tiers de 100000, on aura 33333 pour la tangente de chacun de ces angles, qui répond dans les tables à 18 degrés 26 minutes, ce qui est un *maximum* qui se présente naturellement sans le secours d'aucun calcul algébrique.

Dans le cas du plus grand effet, le poids est à la puissance comme 18 est à 19.

270. Moyennant l'angle du plus grand effet, on aura toujours le rapport du poids à la résistance que la puissance P doit surmonter, puisque le rapport sera le même que celui du sinus total à la sécante de cet angle, c'est-à-dire comme 100000 est à 105408, ou à-peu-près comme 18 est à 19: nous nous servirons de ces deux derniers termes à cause de leur simplicité. On pourra donc prendre pour l'expression de l'effort composé du poids et du frottement $\frac{19.BV \times Q}{18.BC}$.

Suite de l'article précédent, lorsque l'angle des leviers du poids et de la puissance a plus de 18 degrés 26 minutes.

271. Quand le levier CHK de la puissance P fait avec celui du poids un angle ADH plus ouvert que ACG, la puissance MD qui repousse l'extrémité de ce levier n'agissant pas avec sa force absolue, il faut, pour connaître à quoi elle se réduit, décrire un cercle qui ait pour diamètre MD, prolonger HD jusqu'à la circonférence T, et faire le rectangle RMDT.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Alors la puissance MD sera divisée en deux autres RD et DT, dont la première agissant de R en D selon une direction perpendiculaire au levier HC, exprimera la force relative de MD, par conséquent la résistance causée par le concours du poids et du frottement que la puissance P doit surmonter. Quant à l'autre puissance DT, étant directement opposée au point d'appui H, elle n'a aucune relation avec la puissance P.

272. Il suit de-là qu'il y aura même raison de la corde ND à la corde MT, ou du sinus de l'angle NMD à celui de l'angle MDT, que du poids à la résistance relative du poids et du frottement que la puissance P aura à surmonter. Mais l'angle NMD, ou son égal MDL est donné, puisqu'il est le complément de l'angle du plus grand effet. De même, quand on connaîtra l'angle ADH formé par le levier du poids et de la puissance P, on n'aura qu'à retrancher l'angle MDH de deux droits pour avoir aussi l'angle MDT; et à l'aide des tables des sinus, on aura toujours trois termes de connus, avec lesquels on connaîtra la résistance que la puissance P doit surmonter.

Autre suite de l'art. 269, lorsque l'angle des leviers du poids, et de la puissance a moins de 18 degrés 26 minutes.

273. Quand le levier de la puissance et du poids font un angle ADF au-dessous de 18 degrés 26 minutes, si l'on mène du point M au levier FC la parallèle MO, et qu'on fasse le parallélogramme SO, la puissance MD sera divisée en deux autres OD et DS, dont la première, qui est perpendiculaire sur l'extrémité C du levier FC, exprimera encore la résistance relative du poids et du frottement; car pour la seconde DS, son effet ne tombe que sur le point d'appui F qu'elle pousse de F en C. Ainsi l'on aura toujours cette proportion : que le sinus de l'angle NMD est au sinus de l'angle OMD ou MDS, comme le poids est à la résistance que la puissance P doit surmonter. On remarquera que quand l'angle ADF est au-dessous de 18 degrés 26 minutes, on n'aura qu'à l'ajouter à l'angle MDL, qui est toujours de 71 degrés 34 minutes, pour avoir l'angle MCF.

Nous venons de supposer le levier du poids immobile, et que le point d'appui de celui de la puissance pouvait changer de situation, ce qui ne se rencontre pas dans les machines où les points d'appui sont toujours fixes; aussi n'en avons-nous usé de la sorte que pour arriver par degrés au but que nous nous sommes proposé : il est temps d'envisager les choses sous une autre face.

Examen de l'action du poids et de la puissance, lorsque les points d'appui demeurant les mêmes, les leviers changent de situation.

Planche 2. Fig. 27 et 28.

274. A ne considérer que le seul levier KEC, il est certain que si la puissance P agit avec une force toujours au-dessus de la résistance qui lui est opposée pour faire monter le poids, toutes les lignes vont changer de situation comme dans la figure vingt-huitième. L'extrémité C du levier KC décrira l'arc HC, et l'extrémité A de celui du poids l'arc AF, ce qui ne pourra arriver sans que le point D ne s'éloigne du point fixe B, et sans que l'action du poids, qu'on suppose d'abord avoir été réduite au

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

point H, ne diminue de plus en plus, tant par l'augmentation de son bras de levier BC, que par l'angle aigu que fera sa direction avec ce même bras de levier. Nommant donc BH a, BC x, et q le poids réduit au point H, on aura aq pour le produit du poids par la perpendiculaire BH, qui étant divisée par x, il vient $\frac{aq}{x}$ pour l'action relative du poids selon la perpendiculaire NC, que nous prendrons, comme ci-devant, pour le poids même (*au*). Faisant donc CL égale au tiers de CN, et achevant le parallélogramme LN, la puissance qui agira selon la diagonale MC et qui marque le concours de la résistance causée par le poids et le frottement sera exprimée par $\frac{19aq}{18x}$; ce qui est le plus grand effort que la puissance P aura à surmonter, et aura lieu quand l'angle FCK sera de 18 degrés 26 minutes, c'est-à-dire quand la diagonale MC sera perpendiculaire sur l'extrémité C du levier KC, ce qui retombe dans le cas des articles 270 et suivants.

Suite de l'article précédent, lorsque les leviers font un angle quelconque.

275. Quand le levier du poids et de la puissance feront ensemble un angle quelconque plus ou moins ouvert que le précédent, on n'aura qu'à prolonger le levier KC, et faire le rectangle RT. La puissance exprimée par la diagonale MC sera divisée en deux autres CR et CT, dont la première étant perpendiculaire au point C du levier CK exprimera l'action relative du poids et du frottement que la puissance P doit surmonter. Pour la seconde CT, étant directement opposée au point d'appui E, on ne doit pas en tenir compte. Or si l'on nomme b le sinus de l'angle constant LCM et y le sinus de l'angle MCT, on aura (272) : comme le sinus b est au sinus y, ainsi l'action du poids exprimée par la ligne CN $=\frac{aq}{x}$, est à l'action du poids et du frottement exprimée par CR $=\frac{aqy}{bx}$. Nommant donc EK c, et EC d, il viendra enfin $\frac{adqy}{bcx}=$P.

Quand on aura l'angle FCK on aura aussi l'angle MCT, alors y deviendra une quantité connue. Et remarquez que l'angle FCK donne son supplément, et qu'ayant les lignes EB et EC de connues, on aura dans le triangle CEB deux côtés et un angle, par conséquent le côté CB, c'est-à-dire la valeur de x.

Remarques sur les différentes longueurs des bras de levier.

276. Comme l'action du poids diminue à mesure que le côté BC du triangle ECB augmente, on sent bien que lorsque l'angle KCF sera de 18

Remarque sur l'art. 274.

(*au*) On peut être étonné de voir l'auteur représenter le poids agissant au point C par une ligne qui n'est pas verticale. Il faut faire attention que tout ceci est destiné à s'appliquer au mouvement des roues dentées, dans lequel les efforts, exprimés ici par des poids, sont toujours perpendiculaires aux rayons des roues, lesquels sont représentés par les leviers.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

degrés 26 minutes, l'effort exprimé par la diagonale MD ne sera pas à la pesanteur absolue du poids Q comme 19 est à 18, ainsi que dans l'article 270. Il y aura des cas où cette puissance pourra être égale au poids seulement, d'autres où elle sera plus grande, mais on est sûr qu'elle ne le surpassera jamais de la dix-huitième partie de lui-même. Par exemple, lorsque la ligne BH sera beaucoup plus grande que EH, l'angle FCE pourra être de 18 degrés 26 minutes sans qu'il y ait presque de différence entre BC et BH, à cause de la petitesse de l'angle CBH. L'action du poids diminuera si peu qu'on pourra le prendre dans son entier; et lorsqu'il sera exprimé par le nombre 18, sa résistance au point D, y compris le frottement, le sera par 19, qui est la plus grande qu'on puisse admettre. Pl. 2, Fig. 29.

Au contraire, lorsque la ligne EH sera beaucoup plus grande que HB, le côté BC croîtra d'abord, et le poids Q diminuant à proportion, il pourra arriver que lorsque les leviers formeront l'angle du plus grand effet, le rapport de BH à BC sera moindre que celui de 18 à 19, c'est-à-dire que l'action du poids sera plus diminuée que la résistance causée par le poids et le frottement ne sera augmentée; et la plus grande résistance que la puissance aura à surmonter sera égale à la pesanteur absolue du poids même. Enfin lorsque les lignes EH et HB seront égales, le plus grand effet de la puissance tiendra un milieu entre 18 et 19, et pourra être exprimé par $18\frac{1}{2}$.

J'ai cherché l'expression générale d'un *maximum* qui pût convenir à ces trois cas, mais je l'ai trouvée si composée et d'un calcul si long et si pénible, que j'ai cru la devoir supprimer. Car à quoi sert de charger un ouvrage de grands calculs algébriques, qui n'aboutissent qu'à rebuter ceux qui ne les entendent pas, et à fatiguer l'attention des autres sans en tirer aucune utilité dans la pratique?

277. On a dû s'apercevoir que nous avons supposé jusqu'ici les points d'appui des leviers du poids et de la puissance dans une ligne horizontale; mais comme il pourrait arriver que cela ne se rencontrât pas, considérez la figure 30, où l'un est plus élevé que l'autre: on verra aussi que le poids Q est suspendu à une corde qui s'entortille sur un arbre NM; c'est pourquoi il faut, afin de réduire le poids au point D, le multiplier par le rayon BV et diviser le produit par le bras de levier BD, comme ci-devant.

Tout ce que l'on a dit des leviers subsiste de même, quoique leur point d'appui ne soit pas dans une ligne horizontale.

Figure 30.

Si le poids était suspendu comme est le poids T à une roue ou tambour LOR, dont le rayon BL fût plus grand que le bras de levier BC, il faudrait de même multiplier le poids T par le rayon BL, et en diviser le produit par BD. On aura toujours ainsi l'action du poids réduit au point D, agissant selon une direction perpendiculaire au bras de levier BD: il ne s'agira plus que d'avoir l'angle FDE pour connaître la puissance P.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pl. 2, Fig. 31.

278. La figure 31 marque encore une autre disposition de leviers. On suppose qu'ils ont pu être dans une même ligne SB oblique à l'horizon, se touchant au point H; mais que la puissance P agissant de bas en haut a fait décrire à l'extrémité C de son levier l'arc HC, tandis que l'extrémité F du levier du poids Q a décrit l'arc RF, pour le faire monter à l'aide d'une corde attachée au point V et d'une poulie M.

Comme le bras de levier du poids doit être exprimé par la perpendiculaire BI et non par la ligne BV, il faudra multiplier cette perpendiculaire par le poids et en diviser le produit par BD : le quotient pourra être regardé comme une puissance exprimée par la perpendiculaire OD au levier BF, qui repousse le point C selon une direction OD. Alors quand on aura l'angle ECF dans le cas de la plus haute élévation du poids, on verra si cet angle est au-dessus ou au-dessous de 18 degrés 26 minutes. S'il est au-dessous, l'effort que la puissance P aura à surmonter sera moindre que dans le cas du plus grand effet, et au contraire s'il est au-dessus, il y aura eu un moment où cet angle aura été de 18 degrés 26 minutes; c'est pourquoi il faudra estimer la puissance dans ce cas-là, ce qui ne souffrira aucune difficulté, puisqu'on aura toujours dans le triangle EBC deux côtés et un angle, de même que l'angle IBV, avec lesquels on trouvera la valeur des autres lignes.

279. On peut, en faisant abstraction du poids Q, supposer que l'objet de la puissance est uniquement d'en repousser une autre qui agit de N en C, selon une direction verticale ND oblique au levier FB, mais qu'on peut lui rendre perpendiculaire en faisant le triangle rectangle NOD (23). On pourrait aussi supposer que la puissance P, au lieu d'être appliquée à l'extrémité K de son levier pour tirer de bas en haut, est appliquée au point T, pour tirer selon une direction TX de haut en bas, parce qu'elle fera toujours le même effet, pourvu qu'elle soit également éloignée du point d'appui E. Ainsi l'on voit que quelque disposition que puisse avoir son levier, par rapport à la direction de l'effort qu'elle aura à surmonter, on en trouvera toujours la valeur en suivant les règles générales que nous avons établies.

Examen des différentes directions d'une puissance qui élève un pilon. Figure 32.

280. Quand nous avons parlé (dans les articles 230 et 231) de la résistance qu'une puissance avait à surmonter de la part du poids et du frottement d'un pilon, nous avons supposé que cette puissance agissait parallèlement à la ligne de direction du poids. Mais, comme cette supposition n'a pas lieu dans la pratique, considérez que dans la figure 32 le point O est le centre d'un arbre autour duquel sont enclavées des pièces de bois saillantes EV, servant à accrocher le mentonnet de chaque pilon pour le faire monter de L en S lorsque l'arbre vient à tourner; ce qui peut se réduire en un levier VK dont le point d'appui O est dans le milieu, ayant une puissance appliquée à l'extrémité K, qui tire de K en P

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

selon une direction perpendiculaire, tandis que l'autre extrémité V surmonte le poids et le frottement.

Il est constant que si la puissance poussait de bas en haut selon une direction perpendiculaire FV au mentonnet, prenant la verticale VN pour la résistance opposée, on aura (237) $VN = L + \frac{2Lz}{3c}$, en faisant les mêmes suppositions que dans l'article 238, qu'il convient de relire pour plus d'intelligence : mais si la puissance en faisant monter le pilon allait en même temps de I vers A, elle aurait encore à surmonter le frottement causé par la résistance VN. C'est pourquoi faisant VA égal au tiers de VN et achevant le parallélogramme NA, la diagonale VM exprimera concours du poids et du frottement dans leur entier. Or le rapport de VN à VM étant celui de 18 a 19 (270), il suit qu'on aura $VM = \frac{19}{18}\left(L + \frac{2Lz}{3c}\right)$ pour l'expression de la puissance P, lorsqu'agissant à l'aide d'un levier VK, ce levier sera perpendiculaire à la diagonale VM. Cependant comme cette diagonale ne sera pas constante, puisqu'elle augmentera à mesure que le point V s'éloignera de I (237), on ne peut pas dire que le plus grand effort de la puissance P arrivera lorsque l'angle ZVO sera de 18 degrés 26 minutes, parce que la résistance augmentera au lieu de diminuer, à mesure que l'angle ZVO deviendra plus ouvert que celui du plus grand effet. Si donc on divise VM en deux puissances VB et BM, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle au levier BK, que VB exprime toujours la résistance que la puissance aura à surmonter dans toutes les situations du levier, cette résistance sera composée de deux variables, dont l'une sera le bras de levier IV, et l'autre le sinus OZ de l'angle ZVO, dont j'ai supprimé le *maximum*, parce qu'il tombait encore dans un calcul trop composé pour en tirer quelqu'utilité.

Manière de calculer l'effort d'une puissance qui élève un pilon.

281. Pour estimer commodément le plus grand effort de la puissance P, il faut chercher dans la longueur du mentonnet le point où l'extrémité V du levier VK fera avec VM un angle de 18 degrés 26 minutes, ce qui donnera la valeur de z, laquelle étant substituée dans $\frac{19}{18}\left(L + \frac{2Lz}{3c}\right)$, on aura la puissance P dans ce cas-là. Ensuite on fera un second calcul, selon l'article 280, pour voir l'effort qu'elle aura à vaincre lorsque l'extrémité V de son levier sera prête d'échapper le mentonnet, c'est-à-dire lorsque le point V sera aussi éloigné qu'il le peut être du point I, et l'on prendra la plus forte de ces estimations ; car il y aura des cas où la première répondra au plus grand effet de la puissance, et d'autres où ce sera la seconde, ce qui dépendra de la longueur du mentonnet.

Application des règles précédentes au calcul d'une machine. Pl. 2, Fig. 33.

282. Voici une autre application de nos principes qui aura son utilité par la suite. AB est une espèce de chariot porté par des roulettes C, C, dont nous ferons abstraction du frottement contre l'essieu, pour ne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

considérer que celui des dents qui accompagnent le brancard AB, auquel est attachée une corde qui passant sur une poulie va aboutir au poids Q qu'on veut élever, en faisant rouler le chariot de droite à gauche sur le plan horizontal XZ, à l'aide d'une puissance P appliquée à un levier RT dont le point d'appui S est dans le milieu.

Il est constant que si le levier touchait une des faces de la dent HO, de manière que l'une et l'autre se trouvassent dans une même ligne verticale, la puissance agissant de T en P selon une direction perpendiculaire à son levier, serait égale au poids Q dans l'état d'équilibre; car l'effort que fait ce poids pour attirer le chariot, fera le même effet qu'une puissance Y qui pousserait l'extrémité D du levier, selon une direction perpendiculaire YD et avec une force égale. Mais si la puissance P veut l'emporter sur la précédente pour faire mouvoir le charriot, elle aura à surmonter outre le poids le frottement du point D qui glissera le long de la face HO, et la résistance ira toujours en croissant, jusqu'à ce que l'angle NDL formé par le levier et la face HD prolongée soit de 18 degrés 26 minutes, et diminuera quand il sera plus ouvert. Ainsi, dans le cas du plus grand effet, le poids Q sera à la puissance P comme 18 est à 19 (270); c'est-à-dire que si le poids est de 1000 liv., la puissance sera équivalente à 1055 liv. $\frac{1}{2}$.

283. Pour faire mouvoir cette machine, on peut au lieu de levier se servir d'une lanterne E, dont chaque fuseau I poussera successivement une dent DH pour lui faire faire un petit chemin, et quand ce fuseau sera près d'échapper la dent, il en succédera un autre qui accrochera la dent suivante; sur quoi il est à remarquer qu'il n'y aura jamais qu'un fuseau et une dent parfaitement engrenés.

Si l'on prolonge la dent DH, que du centre E on tire une ligne ED au point d'attouchement D, et que la puissance soit appliquée à l'extrémité F d'un rayon prolongé, la ligne DEF pourra être regardée comme un levier, qui fera si l'on veut un angle DEK; car pourvu que la direction KP soit perpendiculaire à l'extrémité F ou K, peu importe que le levier soit droit ou coudé. Pour connaître la puissance P, nous supposerons que le plus grand angle EDG est de 10 degrés, qu'il faudra ajouter à 71 degrés 34 minutes (273), et dire : comme le sinus de 71 degrés 34 minutes est au sinus de 81 degrés 34 minutes, ainsi le poids de 1000 liv. est à la résistance qui se fait au point D, qu'on trouvera de 1042 liv. Par conséquent, si le bras de levier EF ou EK est double de ED, la puissance sera équivalente à 521 liv., pour être en équilibre avec la résistance du poids et du frottement. Si on la fait un peu plus forte, elle sera en état d'enlever le poids.

284. Si l'angle GDE, au lieu d'être au-dessous de 18 degrés 26 minutes, était au-dessus, on sent bien qu'il faudrait estimer la résistance au

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

point D dans le cas du plus grand effet, et qu'elle serait la même que dans l'article 282.

Autre manière de considérer l'effet de la même machine. Pl. 2, Fig. 33.

Si le chariot, au lieu d'être attiré par le poids Q, était chargé d'un corps V qu'on suppose encore peser 10000 liv., et qu'on voulût voiturer de la droite à la gauche, il est constant que ce corps étant soutenu par le plan horizontal XZ, la puissance P n'aura d'autre effort à surmonter que celui que causera le frottement de l'essieu des roulettes. Si le rayon de l'essieu est la vingt-quatrième partie de celui des roulettes, la résistance opposée au fuseau I, quand les lignes DE et HG seront confondues, ne sera que la vingt-quatrième partie du tiers de 10000 liv., c'est-à-dire 139 liv., et ira toujours en augmentant jusqu'au moment où l'angle EDG sera de 18 degrés 26 minutes. On dira donc: comme 18 est à 19, ainsi 139 est à la résistance que l'on cherche, qui sera de 146 $\frac{1}{2}$ liv.; dont prenant la moitié, puisque EF est double de ED, on aura 73 liv. pour la puissance P.

Examen des différentes manières de se servir des roues et des lanternes.

285. Il y a peu de machines où l'on puisse se passer de roues et de lanternes, parce qu'elles facilitent les mouvements circulaires; sur quoi l'on fera attention que les unes et les autres peuvent être combinées de quatre manières.

La première, lorsque le plan de la roue et l'essieu de la lanterne est horizontal; alors les dents sont verticales et perpendiculaires au plan de la roue.

La seconde, lorsque le plan de la roue étant horizontal, l'essieu de la lanterne est vertical: dans ce cas les dents sont dans la circonférence de la roue, sur le prolongement des rayons.

La troisième, lorsque la roue est verticale et que l'axe de la lanterne l'est aussi: les dents sont alors horizontales et perpendiculaires au plan de la roue.

La quatrième enfin, lorsque le plan de la roue est vertical, et que l'axe de la lanterne est horizontal: alors les dents sont encore dans la circonférence de la roue sur le prolongement des rayons, comme dans le second cas.

Comme il suffira de faire voir la manière de calculer le frottement dans l'un de ces cas pour en tirer une règle commune aux autres, je m'arrêterai au quatrième, parce qu'il est plus aisé à représenter. Je suppose donc qu'une puissance P, qui a pour bras de levier la ligne AK, tire de K en P pour faire tourner la roue, dont une des dents HI ayant rencontré le fuseau R de la lanterne NO, agit pour le faire descendre de R en L, afin d'élever le poids Q, suspendu à une corde entortillée sur l'arbre B. Pl. 3, Fig. 35.

Le calcul du frottement des roues et des lanternes dépend de tout ce qui a été dit au sujet des leviers.

286. Pour bien entendre ce qui doit arriver dans le mouvement de cette machine, considérez qu'à mesure que la dent HI descendra, le point S où elle touchait le fuseau R dans le moment de sa rencontre s'éloignera du centre A, ce qui augmentera tant soit peu le bras de levier qui répond

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à la puissante résistance, jusqu'au moment où la dent étant parvenue en FG sera prête d'échapper le fuseau. Si l'on tire les lignes AD, BD au point d'attouchement D, qu'on prolonge BD indéfiniment vers E, les côtés des angles DAK, EBT formeront des leviers coudés, dont le premier appartient à la puissance P et le second au poids Q. Ainsi, multipliant le poids par le rayon BT et divisant le produit par la ligne BD, le quotient pourra être pris pour une puissance qui repousserait le point D selon une direction MD perpendiculaire à la ligne BE, ce qui tombe dans le cas de ce que nous avons dit aux articles 274, 275, 276, 277, 278. A mesure que le point D s'éloignera du centre B, l'action du poids Q réduite au point D deviendra moindre. Au contraire, à mesure que la ligne AD augmentera par rapport à la constante AK, la puissance P croîtra. D'autre part, cette puissance ayant à surmonter le poids et le frottement qui concourront au point D, croîtra à mesure que l'angle ADE approchera de valoir 18 degrés 26 minutes. Il s'agit donc de savoir la situation de la dent FG et du fuseau L dans laquelle la puissance P aura le plus grand effort à surmonter, ce qui ne serait point aisé à découvrir si l'on voulait la déterminer dans toute la rigueur géométrique, à cause des lignes variables qui se rencontrent. Mais ce serait s'arrêter à la minutie, et chercher des difficultés pour le seul plaisir de les résoudre, que de vouloir appliquer ici le calcul algébrique, tandis qu'avec quelques suppositions, qui n'ont rien qui répugne, on peut suivre dans la pratique les règles précédentes.

Manière de déterminer les longueurs des bras de levier des roues des lanternes.

287. Sans se mettre en peine de l'accroissement presqu'insensible de la ligne BD à mesure que le fuseau L descend, je la détermine par la distance du centre de la lanterne à celui du même fuseau. Je mesure de même la ligne AD par la distance du centre A au point où la dent et le fuseau sont près de s'échapper. Comme on a aussi la ligne AB qui marque la distance d'un centre à l'autre, on aura les trois côtés du triangle ABD, par conséquent, l'angle ADE. Quand on l'aura trouvé, s'il a plus de 18 degrés 26 minutes, on multipliera le poids Q réduit au point D par 19, on en divisera le produit par 18, le quotient donnera la plus grande résistance que la puissance P aura à surmonter. S'il est moindre, on l'ajoutera à 71 degrés 34 minutes, et on suivra ce qui est dit dans l'article 275.

Sans avoir égard à l'article précédent, on peut bien assurer qu'il y a peu de machines où l'angle ADE ne soit toujours au-dessus de 18 degrés 28 minutes; car si la face de la dent HI n'atteint le fuseau R que lorsqu'elle se trouvera dans l'alignement AB, au même instant que la dent FG abandonnera le fuseau L (comme cela doit être, pour que le mouvement soit bien réglé), l'arc SD mesurera le chemin que chaque dent fera faire au fuseau qu'elle rencontrera; et comme la circonférence du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rayon BD comprendra autant de fois cet arc qu'il y a de fuseaux à la lanterne, il ne s'agit plus que de savoir combien on a coutume d'en employer dans les différentes occasions.

On peut, dans la pratique, estimer toujours la puissance dans le cas du plus grand effet.

288. On se sert ordinairement des lanternes pour donner à un corps une certaine vîtesse déterminée par rapport à celle de la puissance qui le meut, et le mouvement de la lanterne a d'autant plus de célérité que le nombre des fuseaux est plus petit, eu égard à celui des dents de la roue. Par exemple dans les moulins ordinaires servant à moudre le blé, la lanterne n'a jamais plus de dix fuseaux, et fait faire cinq tours à la meule tandis que la roue en fait un. Il y a d'autres machines où les lanternes ont un plus grand nombre de fuseaux, mais je n'en ai jamais vu qui en eussent plus de 20, comme à la machine du pont Notre-Dame à Paris, et aux moulins où l'on fabrique la poudre à canon, où l'arc que chaque dent fait décrire au fuseau qu'elle rencontre se trouve de 18 degrés. Comme je ne vois pas la nécessité d'employer un plus grand nombre de fuseaux dans quelque occasion que ce soit, puisqu'il vaut mieux, pour une plus grande solidité, diminuer la circonférence de la roue que d'augmenter celle de la lanterne, on peut regarder l'angle ABE comme s'il ne pouvait jamais avoir moins de 18 degrés. Mais l'angle ADE étant extérieur au triangle ABD, sera plus grand que le précédent : on peut donc, pour éviter des calculs superflus, estimer toujours la puissance dans le cas du plus grand effet. Quand même il arriverait par hasard que l'angle ABE se trouverait moindre de 18 degrés 26 minutes, le pis aller sera d'estimer la puissance un peu au-dessus de ce qu'elle devait être. C'est pourquoi, sans s'embarrasser de la valeur de cet angle, on pourra suivre ce qu'indique la formule $\frac{19.BT\times AD\times Q}{18.BD\times AK} = P$.

289. Lorsque les dents, au lieu d'être placées sur la circonférence de la roue, seront élevées perpendiculairement sur son plan, comme dans le premier et le troisième cas (285), représentés par la roue verticale de la trente-septième figure, il faudra dans la formule au lieu de AD prendre AE : alors elle deviendra générale pour tous les cas.

PLANCHE 3. FIGURE 37.

Manière abrégée de déterminer une puissance qui élève un poids à l'aide d'une roue et d'une lanterne. FIGURES 35 et 36.

290. Si l'on supprime de la formule précédente $\frac{19}{18}$, il restera $\frac{BT\times AD\times Q}{BD\times AK} = P$, d'où l'on tire $P:Q::BT\times AD:BD\times AK$; ce qui fait voir qu'en faisant abstraction du frottement, la puissance est au poids comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues (75). Car les lignes AD et BT peuvent être prises pour les rayons des pignons, et les lignes BD et AK pour ceux des roues. Or, comme il suffit de multiplier l'un des moyens de cette proportion par $\frac{19}{18}$, il suit que quand on connaîtra le poids, on aura qu'à le multiplier par ce nombre : on trouvera la puissance relativement au poids et au frottement, en suivant les règles ordinaires de la mécanique.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Méthode abrégée de trouver le poids quand la puissance sera donnée.

291. Quand on aura la puissance et qu'on voudra chercher le poids, il faudra renverser le rapport précédent pour avoir $\frac{18}{19}$ qu'on multipliera par la puissance, on aura la valeur du poids relativement au frottement qu'il peut causer, ce qui est bien évident, car si l'on dégage la lettre Q dans la formule, elle sera changée en celle-ci, $Q = \frac{18P}{19} \times \frac{BD \times AK}{BT \times AD}$.

Ce que nous venons de voir dans les deux articles précédents ne doit avoir lieu que lorsqu'il n'y a qu'une roue et une lanterne qui agissent pour élever un poids, ou pour mieux dire, lorsqu'il n'y a qu'un frottement; mais lorsqu'il y a plusieurs roues et plusieurs lanternes, par conséquent plusieurs frottements, les formules doivent changer.

Pl. 3, fig. 36.

Je suppose que A est un treuil servant d'essieu à la lanterne B, que cette lanterne s'engrène avec la roue C dont l'essieu G est commun à la lanterne D, s'engrenant avec la roue E qui a pour essieu l'arbre F, autour duquel est une corde qui aboutit à un poids P tenant lieu de puissance, dont l'objet est d'élever le poids Q. Pour estimer cette puissance relativement au poids et au frottement qui se fera aux endroits R et S, nous nommerons les rayons des treuils, roues et lanternes par les lettres qui les accompagnent, a, b, c, d, e, f.

Quand une puissance élève un poids donné à l'aide de plusieurs roues et lanternes, il faut, pour avoir égard au frottement, la multiplier par $\frac{19}{18}$, élevé au degré qui aurait pour exposant autant d'unités qu'il y a de roues ou de lanternes.

292. Si la puissance était appliquée au point D, et qu'elle tirât selon la direction perpendiculaire DT au rayon d, elle serait exprimée par $\frac{19}{18}Q \times \frac{ac}{bd}$ (290), qui est égal à l'action de la dent S contre le fuseau qu'elle pousse. Or pour avoir égard au frottement qui se fera en cet endroit, il faudra multiplier $\frac{19}{18}Q \times \frac{ac}{bd}$ par $\frac{19}{18}$; et si la puissance est appliquée à l'extrémité du rayon f, comme nous l'avons supposé en premier lieu, il faudra encore multiplier le produit précédent par $\frac{e}{f}$ pour avoir $\frac{19}{18} \times \frac{19}{18} \times Q \times \frac{ace}{bdf} = P$.

293. Il suit que lorsqu'il y a deux roues et deux lanternes, par conséquent deux frottements, il faut multiplier le poids par le quarré de $\frac{19}{18}$, qui est à-peu-près $\frac{9}{8}$ qu'on peut prendre à la place de ce quarré. Que s'il y avait trois roues et trois lanternes, il faudrait multiplier le poids par le cube de $\frac{19}{18}$, ou par $\frac{23}{19}$ qui est à-peu-près la même chose, et cela parce que le frottement des parties les plus proches du poids contribue à augmenter celui des parties qui se frottent en second et en troisième lieu, d'où l'on tire cette règle générale :

Lorsqu'une puissance élève un poids donné à l'aide de plusieurs roues et lanternes, il faut pour avoir égard au frottement multiplier le poids par $\frac{19}{18}$ élevé au degré qui aurait pour exposant autant d'unités que la machine comprend de lanternes, et faire le reste du calcul en suivant les règles ordinaires de la mécanique.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La règle précédente en fournit une autre fondée sur l'article 291.

294. *Lorsqu'on veut élever un poids à l'aide de plusieurs roues et lanternes et que la puissance est donnée, il faut pour trouver le poids multiplier la puissance par* $\frac{18}{19}$ *élevé au degré qui aurait pour exposant autant d'unités que la machine comprendra de roues ou de lanternes* : c'est-à-dire que s'il y en a deux, on pourra la multiplier par $\frac{8}{9}$, s'il y en a trois par $\frac{19}{27}$, et ainsi des autres, et faire le reste à l'ordinaire; ce qui devient très-commode pour calculer les machines les plus composées (*av*).

Quand la puissance sera donnée, et qu'on voudra trouver le poids, il faudra multiplier la puissance par $\frac{18}{19}$, élevé au degré qui aurait pour exposant autant d'unités qu'il y a de roues.

295. Quelquefois les dents d'une même roue s'engrènent avec deux ou trois lanternes, pour donner à la puissance le moyen d'élever plusieurs poids séparés, ou de produire deux effets différents. Par exemple on voit que la roue verticale E, dont les dents sont autour de la circonférence, peut faire tourner en même temps les lanternes D et F, aux arbres desquelles sont suspendus les poids Q et R, qu'une puissance P appliquée au bras de levier BL veut élever en tirant selon une direction LP. Car la dent I poussant le fuseau K de bas en haut, tandis que la dent G en pousse un autre H de haut en bas, la puissance continuant d'agir, les lanternes tourneront d'un sens opposé. Or si leurs rayons sont égaux, de même que les poids, le frottement sera aussi égal de part et d'autre, et il suffira de suivre ce qui a été dit dans l'article 290, pour avoir l'expression de la puissance capable d'élever un des poids. Doublant cette puissance, on aura celle qui les élevera tous deux, sans avoir égard aux articles 293 et 294, qui n'ont lieu que lorsque plusieurs frottements sont occasionnés par un même poids.

Calcul d'une machine composée d'une roue et de deux lanternes.

Pl. 2, Fig. 34.

296. Voici encore un autre exemple de la rencontre des roues et lanternes qui contribuera à faciliter l'usage des règles que nous venons d'établir. A est l'arbre d'une roue verticale qui a deux rangées de dents : la première sur la circonférence s'engrène avec les fuseaux de la lanterne T, à l'arbre de laquelle est suspendu un poids Q. La seconde rangée est située sur le plan de la roue, et s'engrène avec la lanterne GH, laquelle a pour essieu un arbre IK qui soutient une roue horizontale M, dont les dents sont élevées perpendiculairement sur son plan et s'engrènent avec la lanterne F, dont l'essieu Y est entortillé d'une corde, laquelle passant sur une poulie X va aboutir à un poids R, qu'il est question d'élever en même temps que le poids Q par l'action d'une seule puissance qui tire de V en P, appliquée à l'extrémité du bras de levier AV.

Calcul d'une autre machine composée de roues et de lanternes.

Pl. 3, Fig. 37.

Une des dents B de la circonférence de la roue verticale poussant de bas en haut le fuseau D, fera tourner la lanterne T, tandis qu'une des

---

(*av*) Il ne faut point oublier ici que ces règles ne tiennent point compte des frottements qui ont lieu sur les axes des roues et lanternes. Voyez d'ailleurs, sur ces règles mêmes, la note suivante (*ax*).

Remarque sur les règles des art. 293 et 294.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dents élevées sur le plan de la même roue poussera un des fuseaux de la lanterne GH, pour le faire tourner d'un sens opposé à la direction de la puissance P, de même que la roue horizontale M qui fera tourner la lanterne F, laquelle répond au poids R.

Pour trouver l'expression de la puissance P relativement aux poids Q et R et au frottement, nous supposerons cette puissance divisée en deux autres que nous nommerons x, y, dont la première sera employée à élever le poids Q, et la seconde le poids R. Nous nommerons aussi les rayons CT a, CB b, AB c, AV d, GZ e, IM f, YN g, YO h, et AE l. Je considère qu'entre le poids Q et la puissance qui le soutient, il y a les quatre bras de leviers CT, CB, BA et AV, dont le premier et le troisième peuvent être considérés comme répondant au poids, le second et le quatrième comme répondant à la puissance (74): c'est pourquoi multipliant le poids Q par $\frac{19}{18}$, on aura (290) $bd : ac :: \frac{19}{18}Q : x$, d'où l'on tire $x = \frac{19}{18}Q \times \frac{ac}{bd}$.

Comme le poids R et la puissance qui le soutient répondent chacun alternativement à trois bras de levier, et que les lanternes F et G occasionnent deux frottements, il faut multiplier le poids R par $\frac{9}{8}$ (294): on aura $ged : hfl :: \frac{9}{8}R : y$; ou $y = \frac{9}{8}R \times \frac{hfl}{ged}$. Si l'on ajoute ces deux équations ensemble, et qu'à la place de $x+y$ on mette sa valeur, on aura $P = \frac{19}{18}Q \times \frac{ac}{bd} + \frac{9}{8}R \times \frac{hfl}{ged}$, qui ne renferme que P d'inconnue.

Dans la même machine la puissance étant donnée, on demande de trouver les poids.

297. Si l'on connaissait la puissance P et que l'on ignorât les poids R et Q, il suffirait de déterminer le rapport que l'on veut qu'ils aient entre eux pour les trouver chacun en particulier. Ainsi supposant $\frac{n}{m} = \frac{R}{Q}$, nommant x le poids Q, on aura $m : n :: x : \frac{nx}{m} = R$; mettant dans l'équation précédente x à la place de Q, et $\frac{nx}{m}$ à la place de R, elle sera changée en celle-ci $P = \left(\frac{19ac}{18bd} + \frac{9fhln}{8degm}\right)x$, de laquelle dégageant l'inconnue il vient $x = Q = \frac{P.72bdegm}{76acegm + 81bfhln}$; ce qui étant multiplié par $\frac{n}{m}$, donnera $R = \frac{nx}{m} = \frac{P.72bdegn}{76acegm + 81bfhln}$.

Voici une occasion de désabuser le plus grand nombre des machinistes des merveilles qu'ils croient pouvoir opérer par la répétition des roues et des lanternes, en faisant voir dans quelles bornes sont renfermés les avantages que l'on peut tirer d'une machine.

Quand il s'agit d'élever des corps solides d'une extrême pesanteur, on a raison d'emprunter le secours des machines composées, pour diminuer

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le nombre des hommes ou des animaux, sans se mettre en peine du temps qu'il faudra de plus, pour n'avoir égard qu'à la facilité d'exécuter une chose d'une manière plutôt que de l'autre, et c'est ce qui a rendu le cric, la chèvre, la grue, etc. d'un usage si commun. Mais comme ce ne sont point les machines de cette espèce que nous avons en vue, mais bien celles que l'on peut mettre en usage pour élever l'eau, c'est dans ce cas où il faut faire en sorte que la quantité de mouvement du poids approche le plus près qu'il est possible d'égaler celle de la puissance. Car l'égalité parfaite de ces deux grandeurs ne peut avoir lieu qu'autant que l'on fait abstraction des frottements et des autres obstacles inséparables de la pratique, puisque, quand on viendra à l'exécution, la quantité de mouvement du poids sera toujours au-dessous de la quantité de mouvement de la puissance, et d'autant moindre que la machine sera plus composée, comme on va en juger.

Plusieurs conséquences pour faire voir le déchet causé par le frottement.

298. Je sais bien qu'il n'y a personne qui ne préfère une machine simple à une autre plus composée qui remplirait la même fin, parce qu'elle est plus facile à exécuter, d'une moindre dépense et moins sujette à réparation : mais on ne soupçonne pas qu'elle a encore un autre avantage, qui est de faire réellement beaucoup plus d'effet.

Par exemple, s'il était question de faire mouvoir des pistons de pompe pour élever de l'eau dans un réservoir, afin de la distribuer aux fontaines d'une ville, ou pour tout autre usage, la fin qu'on doit se proposer est d'en procurer, avec une puissance limitée, la plus grande quantité qu'il est possible dans un temps déterminé. Or ce plus grand effet dépendra non seulement de la grosseur des corps de pompe ou des colonnes d'eau qui passeront dans le réservoir, mais encore de la vîtesse avec laquelle elles y seront élevées, par conséquent de la plus grande quantité de mouvement du poids (qui est ici celui de l'eau même), laquelle ne pouvant égaler la quantité de mouvement de la puissance, tout ce que l'on peut faire de mieux c'est qu'elle en approche le plus qu'il est possible; sur quoi l'on peut tirer des articles 290, 291, 292, 293, 294, les conséquences suivantes :

1° Lorsqu'une puissance élève un poids donné à l'aide d'une roue et d'une lanterne, le seul frottement de ces deux pièces est cause que la puissance est alors à ce qu'elle eût été sans le frottement comme 19 est à 18; et si la puissance est donnée, sa quantité de mouvement sera à celle du poids dans le rapport des mêmes nombres.

2° Si une puissance élève un poids donné à l'aide de deux roues, elle sera à ce qu'elle eût été dans le rapport de 9 à 8; et si la puissance est donnée, sa quantité de mouvement sera à celle du poids dans le même rapport.

3° Lorsqu'une puissance élève un poids donné à l'aide de trois roues,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

elle sera à ce qu'elle eût été comme 23 à 19; et si la puissance est donnée, sa quantité de mouvement sera à celle du poids dans le même rapport.

4° Si une puissance élève un poids donné à l'aide de quatre roues, elle sera à ce qu'elle eût été dans le rapport de 5 à 4; si la puissance est donnée, sa quantité de mouvement sera à celle du poids dans le même rapport.

Conclusion où l'on fait voir que plus les machines sont composées, et moins elles font d'effet.

299. On voit qu'à mesure qu'on multiplie le nombre des roues et des lanternes, on est obligé d'augmenter la puissance ou de diminuer le poids, et que si l'on voulait faire mouvoir des pistons de pompe à l'aide d'une roue et d'une lanterne, la puissance étant limitée, il ne passera au réservoir que les $\frac{18}{19}$ de l'eau qui y serait montée, si les pistons avaient reçu leur mouvement immédiatement de la puissance. Quand on se servira de deux roues, il n'en passera au réservoir que les $\frac{8}{9}$. Quand on en emploiera trois, il n'en passera que les $\frac{19}{23}$. Enfin quand on en emploiera quatre, il n'en passera que les $\frac{4}{5}$.

On dira peut-être que, dans bien des cas, on ne peut se dispenser d'employer les roues et les lanternes pour communiquer les mouvements: mais il ne s'en faut servir que quand on ne peut faire autrement, puisqu'il y a mille autres moyens plus simples, sur-tout quand il s'agit d'élever des eaux, et voilà le cas où un machiniste donne des marques de son habileté. Mais je me suis assez étendu sur ce sujet, je passe à ce que j'ai à exposer sur la difficulté qu'on éprouve à élever un poids à l'aide d'un rouleau (*ax*).

Remarque sur la théorie du frottement des engrenages donnée par Bélidor.

(*ax*) Je remarquerai sur cette théorie du frottement des dents des roues et des fuseaux des lanternes commençant à l'article 267, qu'en admettant les considérations mécaniques de l'auteur, il faudrait pour l'application, au lieu de supposer le frottement égal au tiers de la pression, employer les résultats donnés dans le deuxième tableau de la note (*al*): c'est-à-dire que dans le cas où les roues seraient en bois, le frottement devrait être supposé le $\frac{1}{10}$ de la pression, et le $\frac{1}{30}$ environ si les dents étaient graissées; et dans le cas où elles seraient en fer ou en cuivre, les dents étant également graissées, ce rapport devrait être encore $\frac{1}{10}$ environ.

En supposant le frottement égal au $\frac{1}{10}$ de la pression, et faisant dans cette hypothèse le même calcul fait dans les art. 269 et 270, on trouve que l'effet du frottement, au lieu d'augmenter la puissance dans le rapport $\frac{19}{18}$, ne l'augmente plus que dans le rapport de 1,005 à 1, à très-peu de chose près. Cette augmentation est trop peu considérable pour qu'il soit nécessaire d'y avoir égard. Dans le cas même où il se trouverait entre la puissance et le poids quatre engrenages, l'excédent de force que causerait leur frottement ne serait encore que de $\frac{1}{50}$ environ, quantité qu'il est permis de négliger, eu égard au degré d'exactitude avec lequel on peut espérer de calculer les machines.

Rectification de cette théorie.

En examinant maintenant la théorie même donnée par Bélidor, on s'aperçoit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

300. Ayant un cylindre immobile posé horizontalement dont la figure 38 représente le profil, supposant que sur ce cylindre passe une corde

Examen du frottement des cordes sur les cylindres ou rouleaux.

Pl. 3, Fig. 38.

facilement que n'ayant point égard à la forme qu'il convient de donner aux dents des roues et aux cames qui soulèvent les pilons, et qu'on leur donne effectivement dans les machines bien exécutées, cette théorie présente la chose d'une manière toute différente de celle qui a lieu, et beaucoup moins simple. En effet, si l'on veut employer, comme l'auteur l'a fait dans les art. 267 et suiv., la considération de deux leviers CM et C′M, mobiles autour des points fixes C et C′, pour représenter ce qui se passe dans l'engrenage de deux roues, il faudra imaginer que le levier C′M qui tourne par l'action de la puissance P, porte à son extrémité une portion de courbe par laquelle il pousse le levier CM; et on verra plus bas, dans la note (*bf*), que la forme de cette courbe est déterminée par la condition qu'à quelque position C*m* que le levier CM soit parvenu, il est toujours tangent à la courbe fixée à l'autre levier, et la normale à leur point de contact *m* va toujours passer par le point M où le contact a commencé. La résistance causée par le frottement est une force dirigée dans le sens *m*C, de manière à contrarier l'action de la force P.

Pl. B, Fig. 7.

Cela posé, nommons x l'angle variable décrit par le rayon CM autour du centre C, et r, r' les rayons CM, C′M. Quand les leviers sont dans le prolongement l'un de l'autre, la pression qui a lieu au point de contact M est égale à la force P. Les rayons venant à tourner, le bras de levier CM diminue, et la pression augmente; mais, comme on le verra plus loin, la forme de la courbe qui conduit le rayon CM ou C*m* étant assujétie à la condition que le moment de la puissance P pour faire tourner les roues soit constant, l'augmentation de la pression a lieu dans le même rapport que la diminution du bras de levier C*m*; d'où il est aisé de voir que la pression qui se fera en *m* devra être exprimée par $\frac{P}{\cos. x}$. Le frottement qui aura lieu à ce point sera donc $\frac{fP}{\cos. x}$, en appelant f le rapport du frottement à la pression.

En abaissant du centre C′ sur le prolongement de C*m* la perpendiculaire C′*n*, cette ligne, dont la valeur est $C'n = (r+r')\sin. x$, sera le bras de levier avec lequel le frottement s'opposera à la rotation de la roue dont C′ est le centre. Le moment de ce frottement sera donc $fP(r+r')\frac{\sin. x}{\cos. x}$. Ainsi le moment de la force P étant Pr', on voit que la valeur de ce moment, eu égard à l'effet du frottement des dents, se trouvera réduite à $P\left[r' - f(r+r')\frac{\sin. x}{\cos. x}\right]$. La valeur du terme soustractif introduit par le frottement est nulle pour $x = 0$, et augmente avec cetangle. Soit x' la plus grande valeur qu'il puisse atteindre, c'est-à-dire celle qui a lieu à l'instant où le flanc de la dent conduite est quitté par la courbe de la dent qui conduit. La valeur moyenne du facteur variable $\frac{\sin. x}{\cos. x}$, dans l'étendue comprise entre $x = 0$ et $x = x'$, est $\frac{-\log. \cos. x'}{x'}$, log. indiquant un logarithme Népérien. Par conséquent, la valeur moyenne à adopter pour calculer le moment de P sera $P\left[r' - f(r+r').\frac{-\log. \cos. x'}{x'}\right]$.

Si l'on veut appliquer ce qui précède au cas où la roue que la puissance P fait

Application a

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aux extrémités de laquelle soient suspendus deux poids égaux A et B, nous ferons voir *qu'un de ces poids est à la pression de la corde sur le cylindre, comme le rayon* CD *est à la demi-circonférence* DFE; c'est-à-dire que si chaque poids était de 7 livres la pression serait de 22.

---

frottement des cames soulevant un pilon.

Pl. B, Fig. 8.

tourner soulève un pilon, il faudra supposer que le levier CM est soulevé par l'autre parallèlement à lui-même, ce qui donne l'angle $x = 0$ et le rayon $r = \infty$. Le terme introduit par le frottement dans la formule précédente devenant alors $\infty.0$, cette formule n'apprend rien : mais le cas dont il s'agit est très-facile à résoudre directement. En effet la courbe fixée au levier C′M est alors telle, comme on le verra plus bas, qu'ayant commencé à toucher en M la base horizontale du pilon, leur point de contact demeure constamment dans la verticale M*m*, qui est toujours normale à cette courbe. La résistance causée par le frottement est donc toujours dirigée horizontalement dans le sens *nm*. De plus la pression réciproque du pilon et de la came demeure constante, en sorte que cette pression étant égale à P, la résistance du frottement est constamment fP. Elle s'oppose à la rotation de la roue avec le bras de levier C′*n* égal à la hauteur M*m* dont le pilon a été soulevé, qu'on représentera par *h*. Par conséquent, le rayon C′M étant toujours *r*′, on voit que le moment P*r*′ de la force P se trouve réduit par l'effet du frottement à $P(r' - fh)$. En nommant *h*′ la valeur de *h* à l'instant où le pilon est au haut de sa course, et où la came le laisse retomber, la valeur moyenne du moment de P sera $P(r' - \frac{1}{2}fh')$.

Remarque sur la nature particulière du frottement des engrenages, qui se rapproche plus ou moins du frottement des rouleaux.

Pour compléter maintenant les notions qu'il est utile d'établir sur le frottement des dents, il faut s'arrêter sur une considération particulière dont Bélidor n'a fait aucune mention. On remarquera que dans l'élévation d'un pilon, un seul point M de sa base se trouve successivement en contact avec différents points de la surface de la came, et glisse le long de cette surface, de manière que le frottement est absolument de même nature que celui d'une surface plane traînée sur une autre, auquel se rapportent les résultats contenus dans les tableaux de la note (*al*). Si l'on a maintenant deux roues engrenant l'une dans l'autre dont les rayons soient à-peu-près égaux, il y aura très-peu de différence entre la longueur développée de la courbe d'une dent, et la longueur du flanc de la dent opposée que cette courbe conduit; d'où il suit que dans ce cas la dent et le flanc rouleront l'un sur l'autre, sans qu'il y ait presque aucun glissement. Leur frottement sera donc alors ce qu'on nomme un frottement de la seconde espèce, semblable à celui qui a lieu à la surface d'un rouleau qui roule sur un plan horizontal. Ces frottements étant très-peu sensibles, on les néglige ordinairement dans le calcul des machines.

Entre les deux cas extrêmes qu'on vient d'indiquer se trouvent une infinité de cas intermédiaires, dans lesquels le mouvement des dents l'une contre l'autre participe plus ou moins du glissement ou de la rotation, suivant que la roue conduite à un plus ou moins grand diamètre par rapport à celle qui conduit. Pour être exact, on ne doit donc pas considérer en général le frottement des dents comme de même nature que celui des surfaces planes ou des axes des machines, et employer pour f les valeurs fixées dans les tableaux de la note (*al*). En attendant que des expériences spéciales aient complétement éclairci cette matière, on

Comment, en ayant égard à cette remarque, on peut

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

PLANCHE 3. FIGURE 39.

Si l'on suppose qu'à un point quelconque de la corde qui touche le cylindre on en ait attaché une autre GP, à laquelle soit appliquée une puissance P qui tire selon une direction CP passant par le centre C, cette puissance faisant un effort égal à la pression de la corde sur le point O, les parties GF et CL de la corde seront égales entre elles et tangentes au cylindre. Si l'on tire les lignes HL, HF parallèles à GF et GL, on aura le parallélogramme des forces dont la diagonale GH exprimera l'effort de la puissance P, et le côté GL l'action du poids A. Par conséquent on aura A : P :: GL : GH. Présentement, si l'on mène la sous-tendante LF et les rayons CL, CF, on aura les triangles semblables GLH, LCF, puisque leurs angles du sommet GLH, LCF sont égaux, d'où l'on tire GL : GH :: LC : LF. Mais A : P :: GL : GH ; donc A : P :: LC : LF.

Si l'on soutient un poids à l'aide d'une corde qui embrasse la demi-circonférence d'un cylindre immobile, il y aura même raison du poids à la pression de la corde, que du rayon du cylindre à la demi-circonférence.

301. Si l'on suppose l'arc LOF infiniment petit, de manière qu'il se confonde avec la sous-tendante LF, le point G se réunira au point O, et il y aura toujours même rapport du poids A à la puissance P, ou à la pression de la corde sur l'arc O infiniment petit, que du rayon CL à cet arc. Or comme il arrivera la même chose à tous les points de la demi-circonférence du cylindre, il suit que le poids A sera à la somme de toutes les pressions de la corde, comme le rayon est à la somme de tous les arcs infiniment petits, c'est-à-dire à la demi-circonférence du cylindre.

Si la corde embrasse une partie de la circonférence, le poids sera à la pression comme le rayon est à l'arc embrassé par la corde.

302. Si au lieu de deux poids on suppose deux puissances égales appliquées aux extrémités d'une corde, qui tirent chacune de leur côté, et que la partie du cylindre embrassée par la corde soit plus ou moins grande que la demi-circonférence, une de ces puissances sera encore à la pression du cylindre, comme le rayon est à l'arc embrassé par la corde.

D'où il suit que les pressions causées par des puissances égales sur un même cylindre seront entre elles comme la grandeur des arcs embrassés par la corde ; que si ces arcs sont égaux, mais que les poids soient différents, les pressions seront entre elles comme ces poids.

FIGURE 41.

Si l'on a une corde qui embrasse les trois quarts de la circonférence d'un rouleau, la pression sur chacun de ces quarts de circonférence

303. Si l'on a deux poids P et Q attachés aux extrémités d'une corde PABF, qui embrasse le quart AB de la circonférence d'un cylindre, et dont un des bouts BF aille passer sur une poulie D que je suppose sans frottement ; que le poids Q soit précisément d'une pesanteur capable d'enlever le poids P, et de surmonter le frottement de la corde contre le

---

peut adopter la règle empirique suivante. En nommant n le rapport de la longueur de la courbe d'une dent à celle du flanc qu'elle mène, et F le rapport du frottement à la pression, tel qu'il est déterminé par les tableaux de la note (*al*), on pourra dans les formules précédentes faire $f = F\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Cette valeur satisfait aux deux cas limites, puisqu'elle donne $f = F$ dans le cas où le flanc étant réduit à un point on a $n = \infty$, et $f = 0$ dans le cas où la dent et le flanc étant de même longueur, on a $n = 1$.

estimer à-peu-près le rapport du frottement à la pression.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

augmentera dans la raison des termes d'une progression géométrique.

cylindre; d'autre part qu'on ait aussi le poids R suspendu à une des extrémités de la corde PABCR, qui embrasse toute la demi-circonférence, en sorte que le poids R soit aussi près d'enlever le poids P, comme nous avons supposé que l'était le poids Q; je dis que les trois poids P, Q, R seront en proportion continue.

Pour le démontrer, remarquez que si l'on a une autre poulie E, sur laquelle nous supposerons que passe la corde FG qui ne fait que toucher le cylindre au point B, voulant soutenir le poids Q en équilibre, il faut que le poids S lui soit égal. Or si l'on suppose présentement que les poids S et R répondent à une même corde SGBCR, il faudra autant de force au poids R, pour surmonter la pesanteur du poids S et le frottement de la corde contre le quart BC de la circonférence du cylindre, que pour enlever le poids P et surmonter le frottement de la demi-circonférence. Si donc on fait voir que les poids P, S, R, sont en proportion continue, on conclura que les poids P, Q, R, le seront aussi.

Nommant a le poids P, et x la partie du poids Q qu'il faut pour surmonter le frottement du quart du cercle AB, tout le poids Q, ou son égal S, sera exprimé par $a+x$. De même, nommant y la partie du poids R qui doit surmonter le frottement de la corde sur le quart de cercle BC, pour être tout près d'enlever le poids S; tout le poids R sera exprimé par $a+x+y$, ainsi il faut faire voir que $P=a : S=a+x :: S=a+x : R=a+x+y$, ou que $a(a+x+y)=(a+x)^2$.

Faites attention que les pressions des cordes sur un cylindre, lorsqu'elles embrassent des arcs égaux, sont entre elles comme les actions des poids qui sont attachés à leurs extrémités dans le cas de l'équilibre (302), et que les frottements étant proportionnés aux pressions, on pourra dire que le poids P est à la partie du poids Q capable de surmonter le frottement de la corde sur le quart de cercle AB, comme le poids S est à la partie du poids R capable de surmonter le frottement de la corde GBCR sur le quart de cercle BC. Ainsi l'on aura $a : x :: a+x : y$, d'où l'on tire $ay=ax+x^2$. Or si l'on met la valeur de ay dans l'équation précédente, on aura de part et d'autre $a^2+2ax+x^2$.

Pl. 3, Fig. 40.

304. Si la corde qui répond aux poids P et Q, au lieu de n'embrasser que le quart de la circonférence du cylindre, régnait sur toute la moitié ABC, comme dans la fig. 40, et que la corde qui répond aux poids P et R venant passer sur la poulie D, au lieu de n'embrasser que la demi-circonférence du cylindre, tournât tout autour, comme je suppose que fait la corde PABCFAER, ou on aura encore $\div P : Q : R$. Car les pressions augmentant dans la raison des arcs que les cordes embrassent, les poids Q et R qu'il faudra pour surmonter la pesanteur du poids P et le frottement de la corde sur la demi-circonférence du cylindre d'une part, et sur la circonférence entière de l'autre, quoique beaucoup plus grands

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'ils ne l'étaient ci-devant, seront toujours dans le même rapport avec le poids P.

Lorsque la corde fait plusieurs tours sur le cylindre, la pression causée par le poids augmente dans la raison des termes d'une progression géométrique.

305. Enfin si après que la corde qui répond aux poids P et R aura fait un tour sur le cylindre, un de ses bouts, au lieu d'aller passer sur la poulie D, venait repasser sur la demi-circonférence ABC pour faire un tour et demi, et qu'à son extrémité il y eût un poids S capable d'enlever le poids P et de vaincre le frottement des trois demi-tours que la corde fait sur le cylindre, les quatre poids P, Q, R, S seront continuellement proportionnels, d'où il suit que connaissant les deux premiers poids dont la corde n'embrasse que la demi-circonférence du cylindre, on aura la valeur de la puissance capable d'enlever le poids P et de surmonter le frottement de la corde, selon le nombre des demi-tours qu'elle fait sur le cylindre, en formant une progression géométrique dont les termes soient dans le même rapport que les poids P et Q. Ainsi supposant que le poids P soit de deux livres et le poids Q de quatre, on aura cette progression 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, etc. Alors le poids R sera de 8 liv., le poids S de 16; et si la corde fait deux tours, il faudra que le poids capable de surmonter l'action du poids P et le frottement soit de 32 liv.; si elle fait deux tours et demi, de 64; si elle en fait trois, de 128; si elle en fait trois et demi, de 256; et ainsi des autres.

Manière de trouver la puissance qui est en équilibre avec un poids dont la corde fait plusieurs tours sur un rouleau immobile.

306. Quand on a les deux premiers termes d'une progression géométrique, on peut trouver tout d'un coup la valeur de tel terme que l'on voudra, puisque celui que l'on cherche sera toujours exprimé par une fraction qui aura pour numérateur le second terme élevé à une puissance dont l'exposant sera un nombre égal à la quantité des termes qui précèdent celui qu'on demande, et pour dénominateur le premier terme élevé à une puissance qui aura pour exposant celui du numérateur moins l'unité, ce qui fournit une règle très-commode pour abréger le calcul des frottements dont nous parlons. J'ai fait nombre d'expériences avec des rouleaux et des cordes de différente grosseur, dont le résultat s'est rencontré aussi juste qu'on le pouvait souhaiter avec la théorie précédente (*ay*).

Théorie du frottement d'une corde enroulée sur un cylindre immobile.

(*ay*) Cette théorie est exacte, mais on peut la présenter d'une manière plus appropriée au calcul, comme il suit. Soit T le poids qui tire la corde, r le rayon du rouleau, t la tension de la corde à un point quelconque de l'arc qu'elle embrasse sur le rouleau, s la longueur de cet arc comptée jusqu'au point où la tension est t, p la pression exercée par la corde sur la surface du rouleau dans l'étendue de l'arc s, f le rapport du frottement à la pression.

D'après l'art. 301, on a d'abord $dp = t\frac{ds}{r}$. Mais $t = T + fp$, d'où $dp = \frac{dt}{f}$; donc $\frac{dt}{t} = f\frac{ds}{r}$. Intégrant, il vient $\log. t = \frac{fs}{r} + const.$ La constante se détermine en obser-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

307. On voit l'avantage que l'on tire des poulies, et combien est considérable le frottement des grosses cordes sur un cylindre de bois : on ne doit donc pas s'étonner si sur les ports de mer il suffit de faire faire à un câble trois ou quatre tours sur un pieu, pour arrêter le plus gros vaisseau contre la force des vents et l'agitation des flots.

Examen de la résistance causée par la roideur des cordes qui embrassent des rouleaux ou poulies.

Après l'obstacle causé par les frottements, il n'y en a point de plus difficile à surmonter que celui qui provient de la roideur des cordes qui sont obligées de se plier sur des poulies ou des rouleaux ; et comme il importe extrêmement d'y avoir égard pour faire une estimation exacte de la résistance qu'une puissance qui meut une machine trouve à surmonter, voici quelques règles fondées sur le raisonnement et l'expérience.

Pl. 3, Fig. 38.

308. Pour peu qu'on y fasse attention, on aperçoit d'abord qu'une corde DA doit être d'autant plus difficile à plier, qu'elle est plus grosse et plus tendue par un poids ; à quoi l'on peut ajouter que plus la corde sera obligée de se courber pour se rouler sur la poulie G, plus elle fera d'effort pour résister à la puissance P qui fait monter le poids. Il est à remarquer qu'il n'y a que la roideur du brin qui répond au poids qui fait obstacle à son enlèvement ; car pour l'autre, quoique également tendu, comme il ne fait que se développer de dessus la poulie à mesure qu'elle tourne, la puissance P n'a aucune résistance à vaincre de ce côté-là (*az*).

* Mém. de l'Acad. an. 1699.

Expériences faites sur la roideur des cordes, avec les conséquences que l'on en a tirées.

309. M. Amontons a fait des expériences* pour voir selon quelles proportions ces différentes résistances augmentaient, et voici comme il s'y est pris. Il a accroché contre une poutre deux cordes distantes l'une de l'autre de 5 à 6 pouces, auxquelles pendait librement le bassin d'une balance ; il a engagé un rouleau ou cylindre de bois dans ces deux cordes,

---

vant que $s=0$ donne $t=T$. Donc log. $t=\frac{fs}{r}$ + log. T, d'où log. $\frac{t}{T}=\frac{fs}{r}$. Si l'on nomme e la base du système des logarithmes Népériens = 2,71828, cette équation pourra être mise sous la forme $t=Te^{\frac{fs}{r}}$, et donnera la valeur du poids qui enleverait un poids T au moyen d'une corde embrassant sur un rouleau un arc dont le nombre de degrés serait $\frac{s}{r}$.

On n'a point d'expériences spéciales pour fixer dans ce cas la valeur de f ; mais on ne peut se tromper beaucoup en supposant $f=0,33$.

Remarque sur le déroulement des cordes.

(*az*) Il n'est point exact de dire que le déroulement de la corde ne produit aucune résistance. Mais dans la pratique on considère ordinairement la résistance qu'il occasionne comme peu considérable, et pouvant être négligée par rapport à celle qui résulte de l'enroulement. Au surplus, dans les expériences faites sur la roideur des cordes, les deux résistances sont évaluées ensemble, et les résultats obtenus en présentent la somme.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en leur faisant faire à chacune un tour du même sens; ensuite il a entortillé vers le milieu du cylindre, d'un sens contraire à celui de la corde, un ruban de fil fort flexible, au bout duquel pendait un second bassin. Après cette préparation, il a mis dans le premier bassin un poids d'une certaine pesanteur, et successivement d'autres plus petits dans le second pour faire descendre le cylindre, nonobstant la résistance causée par la roideur des cordes. Après avoir répété la même chose avec des cordes de différentes grosseurs, des rouleaux de différents diamètres et des poids de différentes pesanteurs, il en a tiré les conséquences suivantes :

1° La résistance qui vient de la roideur causée par les poids qui tirent la corde, croît dans le rapport de ces poids.

2° La résistance qui vient de la grosseur des cordes croît dans le même rapport que leur diamètre augmente.

3° La résistance qui vient des rouleaux augmente à proportion que leur diamètre diminue, et au contraire (*ba*).

310. Il est tout naturel de penser, pour le premier article, que si l'on attache successivement plusieurs poids à une corde, elle se tendra de plus en plus, et que la difficulté de plier ou de courber cette corde, croîtra dans la raison qu'elle sera plus tendue, c'est-à-dire dans le rapport des poids qui la tirent.

Pour bien entendre le second article, il faut faire attention qu'il y a toujours un point H de la circonférence de la poulie, par rapport auquel le diamètre DH de la corde doit se mouvoir; par conséquent plus ce diamètre sera long, plus l'action du poids qui s'oppose à la courbure que l'on veut faire prendre à la partie KH aura d'avantage contre la puissance opposée. Ainsi ayant deux cordes dont l'une aurait un diamètre double de celui de l'autre, si elles soutiennent des poids égaux, leurs résistances à se plier seront dans la raison de 1 à 2. Il est vrai que si l'on imagine ces deux cordes composées de filets de même diamètre, la grosse en comprendra quatre fois plus que la petite; mais en récompense chaque filet de la grosse ne soutiendra que la quatrième partie du poids que soutient chaque filet de la petite; ce qui fait voir que dans leur totalité ils seront également tendus, et que s'il n'y avait d'autres difficultés à courber ces deux cordes que celle qui vient de l'action des poids, les résistances de ces cordes seraient égales; d'où il suit que les superficies de leurs cercles n'entrent ici pour rien. Cependant les filets de la grosse corde étant deux fois plus éloignés que ceux de la petite du point sur lequel

Pl. 3, Fig. 38.

(*ba*) Les expériences faites par Coulomb ont confirmé la dernière des trois règles données par Amontons, mais elles ont apporté quelque modification aux deux premières. Voyez la note suivante (*bb*).

Remarque sur les règles de l'art. 309.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ils résistent à être ployés, ils doivent causer une résistance double, ce qu'il convenait de faire sentir.

Quant à la troisième conséquence, il est constant que si les cordes ont le même diamètre et qu'elles soutiennent des poids égaux, leur difficulté à se plier doit augmenter à mesure que les diamètres des poulies seront plus petits; car les diamètres étant comme leur circonférence, plus celle des poulies sera petite, et plus la courbure des cordes s'éloignera de la ligne droite. D'un autre côté on peut considérer les diamètres DH et HI de la corde et de la poulie comme un levier DI, dont le point d'appui est en H : alors la résistance de la corde à être pliée pourra être supposée réunie au point D, et la puissance qui doit la surmonter appliquée à l'extrémité I. Mais le diamètre HI ayant au centre C un point d'appui, cette puissance perdra la moitié de l'avantage qu'elle aurait sans cela; son bras de levier ne peut donc être exprimé que par le rayon CI : par conséquent plus ce rayon sera petit, et plus la résistance causée par la courbure de la corde sera difficile à surmonter.

Règle générale pour calculer la résistance causée par la roideur des cordes qui passent sur une poulie.

311. Des expériences qu'a faites M. Amontons, on en tire une règle fort commode pour tous les calculs qu'on peut faire sur ce sujet; la voici : *Si l'on a une corde d'une ligne de diamètre à laquelle soit suspendu le poids d'une livre, et qu'elle fasse un tour sur un cylindre d'un pouce, il faudra le poids d'une demi-once, ou la trente-deuxième partie du poids que soutient ici la corde pour surmonter sa résistance à se courber.* Par conséquent si au lieu d'une livre on en suspendait 64, la résistance de la même corde à se plier sur le cylindre d'un pouce de diamètre serait surmontée par le poids de deux livres, c'est-à-dire par la trente-deuxième partie du précédent.

Pour savoir la résistance d'une autre corde d'un diamètre quelconque, chargée de tel poids que l'on voudra, en se servant d'un rouleau d'un diamètre à volonté, il faut 1° diviser par 32 le poids que soutient la corde; 2° multiplier le quotient par le nombre de lignes que comprendra le diamètre de la corde; 3° diviser ce produit par le nombre de pouces que comprend le diamètre du rouleau : le quotient donnera en livres le poids qui sera en équilibre avec la résistance causée par la roideur de la corde.

Exemple : si le poids était de 400 liv., et la corde de 8 lignes de diamètre, on aura selon la règle $\frac{400}{32} \times 8 = 100$, qui, étant divisé par le diamètre du rouleau que nous supposerons de 5 pouces, donnera 20 liv. pour la pesanteur du poids destiné à surmonter la résistance causée par la roideur de la corde.

312. Pour rendre raison de cette règle, remarquez que lorsqu'on a une corde d'une ligne de diamètre et un rouleau d'un pouce, ce sera toujours la trente-deuxième partie du poids suspendu à cette corde qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en surmontera la roideur : c'est pourquoi nous avons commencé à diviser 400liv. par le nombre 32. D'autre part comme la corde au lieu d'une ligne de diamètre en a huit, la résistance de cette corde à se plier sera huit fois plus grande ; par conséquent la puissance qui doit surmonter cette résistance, au lieu d'être exprimée par $\frac{400}{32}$, le sera par $\frac{8\times400}{32}$. Voilà la première et la seconde opération, sur quoi il est à remarquer qu'elles ne font que donner l'expression de la puissance appliquée à la surface d'un rouleau qui aurait un pouce de diamètre. Mais si cette puissance a un bras de levier cinq fois plus grand, elle n'aura besoin que de la cinquième partie de sa force ; c'est pourquoi, dans la troisième opération, on a divisé le résultat des deux premières par le diamètre du rouleau.

Application de la règle précédente pour calculer la roideur des cordes qui passent sur une poulie.

313. Si la corde, au lieu de passer sur un rouleau tel que celui dont M. Amontons s'est servi, passait sur une poulie, comme nous l'avons supposé d'abord, il faudrait diviser le produit de la seconde opération par le rayon de la poulie, et non par le diamètre ; car autrement la puissance qui doit surmonter la résistance de la corde ne serait que moitié de ce qu'elle devrait être. C'est à quoi M. Amontons n'a pas fait attention, ayant pris par-tout le diamètre des poulies au lieu de leurs rayons, sans en faire de différence avec les rouleaux. Il a même calculé une table fort ample pour évaluer en livres la puissance qu'il faut pour surmonter la roideur des cordes de toutes sortes de diamètre, qui soutiendraient des poids depuis 10 livres jusqu'à 100 mille. Pour n'y avoir pas pris garde, on ne peut se servir de cette table qu'en doublant les puissances (*bb*).

314. Pour faciliter l'intelligence de tout ce qui précède, voici un exemple qui pourra servir pour le calcul de toutes les puissances qui auront un poids à enlever avec une poulie immobile : je suppose que la poulie a 24 pouces de diamètre, son boulon un pouce, que celui de la

---

Théorie de la roideur des cordes, et son évaluation numérique.

(*bb*) Je placerai ici les résultats admis présentement pour l'évaluation de la roideur des cordes, fondés entièrement sur les expériences que Coulomb a faites avec l'appareil employé par Amontons, et avec un autre appareil qu'il a imaginé. On trouvera le détail de ces expériences dans le tome 10 des *Mémoires des savants étrangers*, et dans le tome 1 de la *Nouvelle Architecture hydraulique*.

Elles ont appris d'abord que la résistance provenant de la roideur d'une corde était réciproque au rayon de la poulie ou de l'arbre sur lequel cette corde s'enroulait ; et qu'en nommant d le diamètre de la corde, cette même résistance était proportionnelle à une certaine puissance d^{μ} de ce diamètre, et à la tension à laquelle les parties de la corde étaient soumises.

On a ensuite observé que dans la fabrication des cordes chaque fil de caret dont elles sont composées se trouvait soumis à une certaine tension qu'il conservait dans l'ourdissage ; d'où il suit que la tension d'une corde dans une machine doit toujours être considérée comme composée d'une partie constante et indépendante

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

corde qui passe par-dessus est de 18 lignes, et que le poids est de 800 liv. Cela posé, il faut que la puissance pour être capable d'enlever ce poids soit composée de trois parties; la première pour être en équilibre avec le poids, la seconde pour surmonter la roideur de la corde, et la troi-

---

de l'effort qu'elle fait, et de cet effort lui-même. D'après cela la résistance provenant de larroideur doit être représentée par la formule suivante:

$$\frac{d^{\mu}}{D}(a+bQ)$$

d diamètre de la corde,
D diamètre de la poulie,
Q poids qui tend la corde,
a, b, μ, constantes à déterminer par expérience.

Les constantes a et b varient pour chaque espèce de corde. Quant à l'exposant μ, sa valeur dépend principalement de l'état des cordes, et elle se trouve comprise entre les limites $\mu = 2$ et $\mu = 1$, en sorte qu'on a $\mu = 2$ pour les grosses cordes neuves, $\mu = 1{,}5$ pour les cordes plus qu'à demi-usées, et $\mu = 1$ pour des ficelles très-petites et très-flexibles. S'il s'agit de cordes goudronnées, il paraît par les expériences qu'au lieu de supposer la roideur proportionnelle à la puissance μ du diamètre, il est plus exact de la supposer proportionnelle au nombre de fils de caret dont la corde est composée, d'autant mieux que l'expérience a prouvé que l'exposant μ ne variait pas sensiblement pour les cordes goudronnées par leur degré d'usé. Les expériences ont appris aussi que la vîtesse du mouvement augmentait un peu la roideur, mais que l'augmentation n'était pas assez sensible pour qu'il fût nécessaire d'y avoir égard dans la pratique, sur-tout quand les tensions étaient considérables.

Voici maintenant les résultats des expériences disposés de manière à faciliter les applications.

Tableau des poids nécessaires pour plier différentes cordes autour d'un arbre d'un mètre de diamètre.

INDICATION DES CORDES.	DIAMÈTRE des cordes $= d$.	POIDS des cordes par mètre de longueur.	ROIDEUR constante $= d^{\mu} a$.	ROIDEUR par kilogramme de charge $= d^{\mu} b$.
	mètre.	kilogramme.	kilogramme.	kilogramme.
Corde blanche de 30 fils de caret.....	0,0200	0,2834	0,22246	0,0097382
Corde blanche de 15 fils de caret.....	0,0144	0,1448	0,063514	0,0055182
Corde blanche de 6 fils de caret.....	0,0088	0,0522	0,01060 38	0,0023804
Corde goudronnée de 30 fils de caret..	0,0236	0,3326	0,3496	0,0125514
Corde goudronnée de 15 fils de caret..	0,0168	0,1632	0,105928	0,0060592
Corde goudronnée de 6 fils de caret...	0,0096	0,0693	0,21208	0,0025968

On voit par ce tableau qu'une corde blanche de 30 fils de caret, dont le diamètre est de $0^{m},02$ et qui souffre dans une machine une tension de Q kilogrammes, occasionne par sa roideur, quand elle s'enroule sur un arbre dont le diamètre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sième pour vaincre le frottement de la poulie contre le boulon. Pour la première, elle n'est autre chose que l'équivalent du poids dans l'état d'équilibre, par conséquent de 800 liv. Pour la seconde, il faut prendre la

---

est D, une résistance exprimée en kilogrammes par $\frac{1}{D}(0{,}222+0{,}00974\,Q)$, le diamètre D étant évalué en mètres; et ainsi des autres.

Pour faire usage dans la pratique de ces résultats, il faudra commencer par calculer la roideur de celle des cordes comprises dans le tableau ci-dessus qui se rapprochera le plus par sa composition et sa grosseur de celle qu'on aura en vue, en donnant à D et Q les valeurs qui ont lieu dans la machine qu'on veut calculer. Puis, s'il s'agit d'une corde blanche dont le diamètre $= d'$, on multipliera le résultat par le rapport $\left(\frac{d'}{d}\right)^{\mu}$, en prenant pour μ un nombre compris entre 1 et 2 conformément à ce qu'on a vu plus haut. S'il s'agit d'une corde goudronnée, on multipliera le résultat par le rapport du nombre de fils de caret de cette corde au nombre de fils de caret de la corde du tableau à laquelle on l'aura comparée.

Par exemple supposez qu'on veuille calculer la roideur d'une corde blanche neuve d'un diamètre $d' = 0^{m},04$ se roulant sur une poulie d'un diamètre D $= 0^{m},45$, et supportant une tension $Q = 5000^{kil}$. On la comparera à la première corde du tableau, dont le diamètre $d = 0^{m},02$, et qui s'enroulait sur un arbre de 1^{m} de diamètre; en sorte que sa roideur se trouvera exprimée par $\frac{1}{0,45}(0{,}222+0{,}00974\times 500)\left(\frac{0,04}{0,02}\right)^{\mu}$, où l'on fera $\mu = 2$ puisqu'il s'agit d'une corde neuve : on trouvera 435 kil. pour l'excédent de force à employer par l'effet de la roideur.

Pour second exemple, on calculera la roideur d'un câble de 120 fils de caret se roulant sur un arbre d'un diamètre D $= 0^{m},54$, en faisant un effort $Q = 3916$ kil. En comparant ce câble à celui de 30 fils de caret du tableau, sa roideur se trouvera représentée par $\frac{1}{0,54}(0{,}35+0{,}1255\times 3916)\frac{120}{30} = 367$ kil., qui expriment la roideur cherchée.

Remarques sur l'évaluation de la roideur des cordes dans divers cas particuliers.

J'ajouterai les remarques suivantes. Les expériences ont appris que les cordes blanches imbibées d'eau avaient une roideur sensiblement plus grande que les sèches, sur-tout quand elles étaient un peu grosses. L'augmentation porte principalement sur la partie constante $d^{\mu}a$ de l'expression de la roideur, et on aura égard à cette circonstance en doublant dans le tableau les nombres qui la représentent. La roideur des cordages goudronnés augmente un peu quand la température descend au-dessous de la glace fondante, et l'augmentation porte encore sur la partie constante. On a observé aussi que quand une corde venait d'être fléchie sur une poulie, elle avait besoin d'un certain temps pour reprendre toute la roideur dont elle était susceptible, et qu'elle avait d'abord manifestée.

De la roideur des chaînes.

Bélidor a passé sous silence ce qui concerne la roideur des chaînes. La résistance qu'une chaîne présente à l'enroulement et au déroulement est l'effet du frottement qu'éprouvent les chaînons en tournant sur leur axe. Soit Q la force qui tend la chaîne, f le rapport du frottement à la pression, le frottement sera fQ. Cela posé, nommons p la force qu'il faut ajouter à celle qui tire la chaîne pour surmonter ce frottement. Il est facile de voir que tandis que la poulie décrit un petit angle au-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trente-deuxième partie du poids qui sera 25, qu'il faut multiplier par 18, diamètre de la corde, et diviser le produit par 12, rayon de la poulie : il viendra 37 liv. $\frac{1}{2}$. Pour la troisième, considérez que le boulon se trouvera chargé de deux poids de 800 liv. plus de 37 $\frac{1}{2}$ liv., qui font ensemble 1637 $\frac{1}{2}$ liv., dont il faut prendre la moitié qui est 819 pour l'expression du frottement de la poulie contre le boulon. En la multipliant par le rayon du boulon et divisant par celui de la poulie, il viendra 34 liv. pour le frottement réduit à l'extrémité du bras de levier (253). Ainsi, ajoutant ces termes ensemble, on aura $800 + 37\frac{1}{2} + 34 = 871$ liv. $\frac{1}{2}$ pour la puissance capable de faire monter le poids, pour peu qu'on l'augmente, au lieu de 845 liv. qu'a trouvé M. Amontons, *Acad. des Sc.* 1779, p. 226.

Parallèle pour faire voir l'avantage des grandes poulies au-dessus des petites.

315. Le fréquent usage que l'on fait des poulies m'engage à faire voir qu'il n'est pas aussi indifférent que le pensent la plupart de ceux qui ignorent la théorie des machines, d'en employer de petites au lieu de grandes : on en va juger.

Je suppose qu'il s'agit encore d'élever un poids de 800 liv. avec une corde de 18 lignes de diamètre, à l'aide d'une poulie fixe dont le boulon sera aussi d'un pouce de diamètre, afin qu'il ait au moins la même force que le précédent : la seule différence est que nous supposerons le diamètre de la poulie de 4 pouces au lieu de 24. Ainsi on divisera le poids par 32, on en multipliera le quotient par le diamètre de la corde : on aura 450, qui étant divisé par le rayon de la poulie, c'est-à-dire par deux pouces, il viendra 225 liv. pour l'expression de la puissance qui doit surmonter la roideur de la corde, qu'il faut ajouter avec le double du poids pour avoir 1825 liv., qui est le poids dont la poulie sera chargée. Il en faut prendre la moitié qui est 912 liv. $\frac{1}{2}$ pour le frottement de la poulie contre le boulon, laquelle étant multipliée par le diamètre du boulon, et le produit divisé par celui de la poulie, il viendra environ 228 liv. pour l'expression de la puissance appliquée à l'extrémité du rayon pour surmonter le frottement. Or ajoutant ce nombre avec 225, il vient 453 liv. pour ce qu'il faut ajouter à la puissance dans l'état d'équilibre, afin qu'elle

---

tour de son axe, le chaînon qui s'enroule décrit sur le sien un angle parfaitement égal, d'où il suit que les petits espaces parcourus en même temps par les points d'application des forces p et fQ sont entre eux comme le rayon de la poulie, qu'on nommera R, est au rayon de l'axe du chaînon, qu'on nommera r. Donc, d'après le principe des vîtesses virtuelles, on exprimera que p fait équilibre à fQ en écrivant $p.R = fQ.r$, d'où $p = \frac{r}{R} fQ$; et comme en négligeant, pour plus de simplicité, la différence des tensions de la chaîne qui ont lieu des deux côtés de la poulie, une résistance égale se produit au point où la chaîne se déroule, sa roideur se trouvera exprimée en totalité par $2\frac{r}{R} fQ$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

soit capable d'enlever le poids. Ainsi cette puissance doit être de 1253 liv., au lieu que nous ne l'avons trouvée ci-devant que de 871 liv., ce qui fait une différence de 382 liv., quoique toutes choses soient égales excepté le diamètre des poulies; ce qui fait voir combien il importe de préférer les grandes aux petites (*bc*).

(*bc*) On va reprendre, d'après les méthodes de calcul beaucoup plus exactes qu'on a présentement, les exemples des art. 314 et 315, pour montrer comment on fait usage de ces méthodes. Rectification du calcul de l'art. 314.

Il faut d'abord déterminer l'effet de la roideur de la corde, parce que la force nécessaire pour la vaincre augmente le frottement, tandis que le frottement n'a aucune influence sur cette roideur. Ainsi le diamètre de la corde étant comme dans l'art. 414 de 18 lignes $= 0^m,0407$, on la comparera avec la première du tableau de la note (*bb*), et puisque le diamètre de la poulie D $= 24$ pouc. $= 0^m,65$, et que le poids qui tend la corde Q $= 800$ livres $= 392$ kil., cette roideur se trouvera exprimée par $\frac{1}{0,65}(0,222+0,00974\times 392)\left(\frac{0,0407}{0,102}\right)^{\mu}$; où faisant $\mu = 2$, si l'on suppose que la corde est neuve, il viendra 26 kil. environ. Maintenant, d'après la note (*aq*), l'expression de la puissance P qui enlevera le poids Q est $P = \frac{Qr' + f'r''(Q+M)}{r' - f'r''}$, où le rayon du trou de la poulie $r'' = 6$ lignes $= 0^m,0135$, celui de la poulie $r' = 12$ pouces $= 0^m,325$. Dans cette formule M est le poids de la poulie; je le négligerai comme l'auteur, mais je mettrai pour M les 26 kil. qu'il faut ajouter pour vaincre la roideur de la corde. Substituant donc ces valeurs dans la formule, et supposant, pour prendre le cas le plus désavantageux, que le frottement se fait fer contre fer, sans enduit, ce qui, d'après les tableaux de la note (*al*) donnera à-peu-près $f = 0,18$ et $f' = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = 0,177$, il viendra P $= 398$ kil.; à quoi ajoutant les 26 kil. qui vaincront la roideur de la corde, on aura en tout 424 kil. $= 866$ liv., au lieu de 871 liv. trouvées par Bélidor. Il est à remarquer que si ces résultats diffèrent peu, c'est par l'effet d'une compensation, la résistance du frottement étant estimée dans le texte trop grande, et celle de la roideur trop petite.

Rectification du calcul de l'art. 315.

Quant à l'exemple de l'art. 315, la corde ayant la même grosseur que dans l'art. précédent, mais le diamètre de la poulie étant six fois plus petit, il suffira de multiplier par 6 les 26 kil. trouvés ci-dessus pour l'expression de la roideur, ce qui donnera 156 kil. Faisant ensuite dans la formule $P = \frac{Qr' + f'r''(Q+M)}{r' - f'r''}$, $Q = 392$ kil., $r'' = 0^m,0135$, $r' = 2$ pouces $= 0^m,054$, M $= 156$ kil., $f' = 0,177$, on aura P $= 436$ kil., à quoi ajoutant les 156 kil. trouvés pour la roideur de la corde, il viendra 592 kil. $= 1209$ liv., au lieu de 1253 trouvées par l'auteur.

Formule pour le calcul d'un palan, en ayant égard au frottement et à la roideur des cordes.

Je terminerai cette note par l'exposition de la formule servant à calculer la force nécessaire pour enlever un poids donné par le moyen d'un palan semblable à celui qui a été considéré dans la note (*aq*). D'après cette note et celle (*bb*), on aura, eu égard au frottement et à la roideur des cordes, la relation suivante entre les tensions T et T_1, des deux premiers cordons: $T_1 = T.\frac{r' + f'r''}{r' - f'r''} + \frac{1}{2r'}(a + bT)\left(\frac{d'}{d}\right)^{\mu}$; Pl. B$_2$ Fig. 4.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

316. J'ajouterai ici quelques remarques auxquelles il convient d'avoir égard dans la pratique.

Observations auxquelles il faut avoir égard dans l'usage qu'on fait des cordes.

1° La roideur des cordes sera d'autant plus grande qu'elles seront obligées de se plier plus vîte; c'est pourquoi il faudra y faire attention, lorsque dans le calcul d'une machine il se trouvera des cordes qui se plieront avec différentes vîtesses.

2° Supposez que l'on connaisse la force des cordes d'une certaine grosseur, ou les poids qu'elles peuvent soutenir, il ne faut pas en employer de plus grosses qu'il n'est nécessaire.

3° Que les cordes neuves résistent plus à se courber sur une poulie ou un treuil que ne font les vieilles; ce qui fait qu'elles éloignent la direction du poids du diamètre horizontal de la poulie, allongent le bras de levier, et obligent la puissance opposée à un plus grand effort. D'autre part, les cordes neuves chargées de tout le poids qu'elles peuvent porter sont plus sujettes à se rompre, que lorsqu'on les charge successivement pour les rendre souples (*bd*).

---

où r'' est le rayon du trou des poulies, r' celui des poulies elle-mêmes, f' le rapport du frottement à la pression, d le diamètre de la corde du tableau de la note (*bb*) à laquelle on compare la corde passée dans le palan dont le diamètre est d'; et a, b, μ des constantes dont cette note fixe la signification et la valeur. En faisant pour abréger $\alpha = \frac{a}{2r'}\left(\frac{d'}{d}\right)^{\mu}$, et $6 = \frac{r'+f'r''}{r'-f'r''} + \frac{b}{2r'}\left(\frac{d'}{d}\right)^{\mu}$, l'équation précédente deviendra $T_1 = \alpha + 6\,T$. On aura également $T_2 = \alpha + 6\,T_1 = \alpha\,(1+6) + 6^2\,T$, $T_3 = \alpha + 6\,T_2 = \alpha\,(1+6+6^2) + 6^3\,T$, etc.; $T_n = \alpha\,(1+6+6^2+\ldots+6^{n-1}) + 6^n\,T = P$, n étant le nombre des poulies. Le poids Q étant égal à la somme des tensions des cordons, on a

$$Q = \alpha\,(1+1+6+1+6+6^2+1+6+6^2+6^3+\ldots+1+6+6^2\ldots+6^{n-1}) + (1+6+6^2\ldots+6^n)\,T,$$

ou $Q = \alpha\left[\frac{6^{n+1}-1}{(6-1)^2} - \frac{n+1}{6-1}\right] + \frac{6^{n+1}-1}{6-1}\,T$; d'où tirant la valeur de T et la substituant dans celle de T_n ou P, il vient $P = \alpha\left[\frac{(n+1)6^n}{6^{n+1}-1} - \frac{1}{6-1}\right] + \frac{(6-1)\,6^n}{6^{n+1}-1}\,Q$.

Évaluation de la force des cordages.

(*bd*) A l'égard de ces remarques, voyez ci-dessus la note (*bb*). Il serait fort important, pour l'établissement des machines, d'être à même de fixer exactement la grosseur des cordages, d'après l'effort qu'ils ont à faire. Malheureusement leur force varie beaucoup d'après la qualité du chanvre et les circonstances de la fabrication. En rapprochant les nombreuses expériences de Duhamel sur ce sujet, il paraît que la résistance des cordes blanches est à-peu-près proportionnelle au quarré de leur diamètre, mais qu'elle augmente dans un rapport un peu plus grand que leur poids et le nombre de fils de caret dont elles sont composées. On peut admettre que la tension nécessaire pour rompre une corde blanche neuve de 8 centimètres de circonférence varie entre 2000 et 3000 kil.; d'où il suit qu'en appelant d le diamètre d'une corde exprimé en centimètres, la force nécessaire pour la rompre exprimée en kilogrammes sera représentée à-peu-près par $400\,d^2$, valeur qui peut varier de $\frac{1}{4}$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

4° Aux cordes qui tournent autour d'un treuil, il n'y a que l'axe qui ne varie point, au lieu que la circonférence du treuil augmente selon la grosseur de la corde. Ainsi quand elle ne fait qu'un tour, il faut dans le calcul des machines ajouter le demi-diamètre de la corde au rayon du treuil pour former le bras de levier. Si la corde doit faire plusieurs tours les uns sur les autres, il faudra faire l'estimation de la puissance résistante, dans le cas où le bras du levier qui lui répond sera le plus allongé par la grosseur de la corde. Voici encore quelques observations sur la construction des machines en général.

Maximes générales qu'il faut suivre quand on fait le projet d'une machine.

317. Je laisse à la capacité de ceux qui ont à construire une machine de chercher les moyens de la rendre la plus simple qu'il sera possible, en ne se servant que des pièces absolument nécessaires, ayant égard à toutes les maximes que nous venons d'exposer (*be*). Comme il n'y a point

---

en plus ou en moins. Coulomb avertit qu'il ne faut jamais charger les cordes de plus de 40 kil. par fil de caret, quoiqu'elles puissent porter sans se rompre de 50 à 60 kil. (*Sav. étr.*, t. 10, p. 285). Les cordes mouillées perdent près du tiers de leur force.

Quant aux cordages goudronnés, leur résistance est aussi à-peu-près proportionnelle à leur diamètre; mais le goudron les affaiblit beaucoup, et cette résistance, à diamètre égal, n'est guère que les $\frac{2}{3}$ ou les $\frac{3}{4}$ de celle des cordes blanches. On peut voir sur ce sujet l'art. *Cordages*, dans le *Dictionnaire de Marine* de l'*Encyclopédie méthodique*.

Sur la disposition du mécanisme dans les machines. — On renvoie pour la connaissance des moyens de changer un mouvement dans un autre, à l'*Essai sur la composition des machines*.

(*be*) L'auteur passe ici légèrement sur une des parties les plus importantes de l'établissement des machines, l'arrangement du mécanisme le plus convenable à l'objet qu'on veut remplir. On entend proprement par *mécanisme*, la disposition des pièces par le moyen desquelles le mouvement imprimé par le moteur à son point d'application, est transmis au point d'application de la résistance. La nature du mouvement de ces deux points étant donnée d'avance par la nature du moteur et celle du travail que la machine doit exécuter, il y a en général plusieurs mécanismes au moyen desquels on peut faire produire l'un des mouvements par l'autre. Les diverses méthodes pour produire un mouvement donné par le moyen d'un autre mouvement également donné, ont été rassemblées et classées méthodiquement dans l'*Essai sur la composition des machines*, de MM. Hachette, Lanz et Betancourt, ouvrage dont l'étude est indispensable à toutes les personnes qui s'occupent de cette matière. Je crois aussi qu'il leur serait extrêmement utile d'avoir, comme le conseille M. Gregory, les procédés pour la transformation des mouvements dessinés sur une grande feuille de carton, avec quelques compartiments de reste pour placer dans leur ordre les nouvelles inventions qui viendraient à leur connaissance. Je remarquerai d'ailleurs que la recherche des moyens de transformer un mouvement dans un autre, est proprement une question de géométrie; mais il entre dans l'application qu'on fera de ces moyens plusieurs considérations mécaniques sur lesquelles il est utile de s'arrêter.

En quoi consiste la simplicité d'une machine.

Je remarquerai en premier lieu que la qualité d'une machine à laquelle la plupart des auteurs paraissent attacher le plus d'importance, est la *simplicité*, par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'ouvrage, de quelque nature qu'il soit, où l'on ne découvre des imperfections après l'avoir achevé, il faut pour n'avoir point de regret faire plusieurs projets différents pour combiner toutes les façons dont une

---

où l'on entend l'emploi du plus petit nombre de parties mobiles qu'il est possible. Cette considération est sans doute essentielle en général; mais il ne faut pas lui donner trop d'importance. La machine la plus simple n'est pas toujours la plus convenable. Par exemple un traîneau est plus simple qu'une voiture; cependant cette dernière est préférable. Quand on veut élever de l'eau d'un puits avec un seau, ce qu'il y a de plus simple est de le tirer avec une corde. Il vaut pourtant mieux faire passer la corde sur une poulie, et mieux encore l'enrouler sur un arbre tourné par une manivelle, parce qu'avec ces derniers procédés un homme montera plus d'eau dans le même temps sans se fatiguer davantage. On voit par ces exemples familiers que la perfection d'une machine ne consiste pas précisément à avoir le moins de parties qu'il est possible, et qu'elle aura toujours le degré de simplicité convenable, pourvu qu'elle ne présente aucune pièce qu'on ne puisse supprimer sans augmenter la fatigue du moteur, ou diminuer la quantité de travail effectuée.

Conditions principales à remplir dans l'établissement des machines.

L'établissement d'une machine est une spéculation dans laquelle il s'agit de faire la moindre dépense possible, en produisant une quantité de travail déterminée. Les frais de la première construction sont un objet important; mais ceux d'entretien et de réparation le sont peut-être davantage en général, et il y a beaucoup de cas où les interruptions dans le travail que les réparations comportent, sont extrêmement nuisibles. La dépense du moteur doit aussi être prise en considération, soit qu'elle résulte seulement d'un premier établissement, comme dans les machines mues par une chûte d'eau, soit qu'elle comporte des frais journaliers, comme dans les machines mues par les animaux ou par la vapeur. On voit donc qu'il faut principalement s'attacher dans la composition d'une machine: 1° à réduire les frais de première construction, en n'employant point de pièces inutiles, et en diminuant par une disposition bien entendue les efforts supportés par les diverses parties, et par conséquent leurs dimensions; 2° à prévenir des interruptions dans le travail et des réparations fréquentes, en employant de préférence des matériaux durables, et en procurant à la machine une marche douce, uniforme, exempte de chocs et de secousses, auxquels rien ne résiste à la longue; 3° à utiliser l'action du moteur dont on dispose, en faisant en sorte qu'aucune partie de cette action ne soit employée inutilement à presser des points fixes, et diminuant les frottemens et autres résistances qui la consomment en pure perte (voyez l'addition placée à la fin de ce livre). Pour que ces préceptes généraux soient utiles dans la pratique, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails.

Sur la manière d'appliquer le moteur et de transmettre les mouvements.

§ 1. La première considération dans la composition d'une machine est la manière dont on fera agir le moteur sur son point d'application. Le seul précepte général à donner à cet égard est qu'il faut, autant qu'il est possible, diriger l'effort du moteur tangentiellement à la ligne décrite par ce point. Le but de ce précepte est que l'effort ne se décompose point, et soit employé tout entier à faire marcher la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

même chose peut être exécutée, méditer sérieusement les avantages et les défauts dont chaque projet sera susceptible, en faire les développements par des plans, profils et mémoires, comprenant une analyse exacte

---

machine. Le même principe s'applique à l'action qu'exercent les unes sur les autres les diverses pièces du mécanisme qui se transmettent le mouvement. Il faut que la normale commune aux surfaces qu'on met en contact se trouve tangente à la direction du mouvement. Une disposition contraire, quand elle ne fait pas perdre une partie de la force, a toujours pour résultat d'occasionner des efforts dont il résulte pour la machine une fatigue et des frottemens inutiles. Par exemple, supposons un axe horizontal A, auquel on veut donner un mouvement de rotation par le moyen d'un autre axe horizontal B, que fait tourner une manivelle. Cela peut se faire de plusieurs manières, et particulièrement par les trois dispositions indiquées dans la figure. Celle n° 1 où les roues sont dans le même plan est la plus simple et la meilleure. Celle n° 2 lui est inférieure, et celle n° 3 est encore plus défectueuse. En effet dans la disposition n° 1, la pression mutuelle des dents se trouve dirigée dans le sens du mouvement, et n'agit que perpendiculairement aux axes, tandis que dans les deux autres les axes éprouvent, indépendamment des mêmes pressions transversales, des pressions longitudinales dont il résulte un excédent de frottement, et qui tendent à faire plier la roue montée sur l'axe A. De plus dans le n° 3 le glissement des dents de cette roue dans les filets de la vis sans fin doit les user plus promptement.

Pl. B, Fig. 9.

Comment doit être placé le pignon qui engrène avec la roue à laquelle le moteur est appliqué.

Pl. B, Fig. 10.

Après avoir tâché de disposer les engrenages de manière que les axes de rotation ne supportent que les efforts nécessaires pour la transmission des mouvements, il faut s'attacher à rendre ces efforts le moins considérables qu'il est possible. On y parvient en réglant convenablement les situations respectives et les grandeurs des roues. Soit en premier lieu une roue A, que le moteur fait tourner en agissant suivant la direction mP, et qui fait marcher une machine au moyen des dents dont sa circonférence est garnie, lesquelles engrènent dans celles d'un pignon. Le point de la circonférence de la roue où l'on placera le pignon paraît d'abord indifférent. Cependant de la situation de ce point dépendront entièrement les efforts que l'axe C aura à supporter. En effet, en se rappelant ce qu'on a vu dans le § 2 de la note (m), on jugera que la pression exercée sur cet axe sera la résultante de trois forces, savoir du poids de la roue agissant suivant la verticale passant par C, de l'effort P du moteur, et de la pression des dents de la roue contre celles du pignon. Or si le pignon est placé en B, c'est-à-dire de façon que le point de contact se trouve en n sur la perpendiculaire menée du centre C sur la direction du moteur, et du même côté par rapport à ce centre, la résultante de ces trois forces sera la plus petite possible, et égale au poids de la roue A plus la différence entre l'effort P du moteur et la pression mutuelle Q des dents. Si au contraire le pignon est placé en B′ dans la situation directement opposée, l'action sur l'axe C sera la plus grande possible, et égale au poids de la roue A plus la somme de l'effort du moteur et de la pression des dents, laquelle se trouvera alors dirigée dans le sens n' Q′. La fatigue éprouvée par l'axe et le frottement sur ses tourillons étant proportionnés à l'effort qu'il supporte, il est donc très-important de placer de préférence le pignon dans

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de ce qu'on aura remarqué pour et contre; ensuite comparer entre eux ces différents projets, afin de choisir le meilleur : autrement l'on se reproche d'avoir saisi avec trop de précipitation les premières idées.

---

la position B. Il ne l'est pas moins de régler convenablement le diamètre de la roue dentée A, car la différence entre l'effort P du moteur et la pression Q des dents, est d'autant plus grande que les rayons C*m* et C*n* diffèrent davantage; et s'ils étaient égaux, l'axe C supporterait seulement le poids de la roue A, et n'éprouverait plus aucun effort résultant de la transmission de l'action du moteur. Il sera aisé de faire l'application de ce qui précède aux grandes roues à eau qui font mouvoir les diverses espèces de moulins.

Les roues et pignons intermédiaires doivent avoir un grand diamètre.

Après avoir considéré la roue à laquelle le moteur est appliqué, passons aux roues intermédiaires qui transmettent son action aux parties de la machine. On peut d'abord observer que les efforts du moteur et de la résistance demeurant les mêmes, les pressions entre les dents des roues intermédiaires, pressions qui se reportent sur les axes, seront d'autant moindres que les diamètres de ces roues seront plus grands. Ainsi, indépendamment de la règle générale qui prescrit de ne jamais employer des pignons trop petits, sur-tout quand ils engrènent dans de grandes roues, on voit qu'il y a, en général, de l'avantage à donner aux roues et pignons intermédiaires un grand diamètre, puisqu'on diminue ainsi les pressions sur les axes, et les frottements qui en résultent, en même temps qu'on procure un plus grand bras de levier aux forces qui doivent faire équilibre à ces frottements. Si cette augmentation dans les diamètres des roues et pignons en occasionne aussi une dans les efforts qui tendent à tordre les axes, elle n'a lieu qu'en raison des diamètres, tandis que, pour procurer aux axes la même résistance, il suffira d'augmenter leur épaisseur en raison de la racine cubique de ces diamètres.

Comment on doit disposer les roues autour d'un axe principal qui leur communique un mouvement de rotation.

Planche B.
Fig. 11, n° 1.
Fig. 11, n° 2.

Soit un axe M N qui reçoit du moteur un mouvement de rotation, et sur lequel doivent être fixées des roues dentées destinées à communiquer ce mouvement. Soit A une de ces roues. Si on la fait engrener dans deux autres B, C, dont les axes soient situés dans un même plan avec l'axe M N, les pressions *m* Q, *n* Q qui s'exerceront sur les dents en *m*, *n*, étant égales et en sens opposés, l'axe M N n'aura aucun effort à supporter. Mais si les roues B et C ne sont point placées vis-à-vis l'une de l'autre, les efforts exercés en *m*, *n* ne se détruiront plus, et se composeront au contraire pour produire une pression que l'axe supportera en M, qui sera d'autant plus grande que l'angle *m* M *n* sera plus petit, et qui peut devenir double de la pression des dents. On remarquera d'ailleurs que, pour que l'axe M N n'éprouve aucune pression résultant des efforts que les roues exercent les unes sur les autres, il ne suffit pas que les roues conduites B, C soient placées symétriquement des deux côtés : il faut encore qu'elles soient situées dans un même plan perpendiculaire à l'axe. Dans la disposition de la fig. 11, n° 3, par exemple, les pressions *m* Q, *n* Q exercées par les dents se reportent sur l'axe aux points M, N; et quoique le frottement sur les tourillons et la tendance à faire plier l'axe soient moindres que si les roues B, C étaient situées d'un même côté de cet axe, cette disposition est inférieure à celle de la fig. 11, n° 1, où l'axe n'éprouve absolument aucun effort.

Fig. 11, n° 3.

Il y a des cas où, loin d'empêcher que les pressions mutuelles des dents se repor-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Ne vaut-il pas mieux employer du papier pendant quelque temps, que d'être réduit à la disgracieuse nécessité de construire et de démonter plusieurs fois une machine, avant de parvenir à la faire jouer rondement sur les axes, on peut au contraire en tirer un parti avantageux. Par exemple, si l'axe horizontal MN se trouvait très-lourd, soit par sa propre pesanteur, soit par la charge des roues fixées sur lui, il serait bien (cet axe tournant dans le sens indiqué par les flèches) de placer tout ou partie des roues conduites B, C du côté droit de la figure, parce que les pressions nQ, dirigées verticalement de bas en haut, tendraient alors à faire équilibre au poids dont l'axe MN est chargé, et à empêcher que ce poids ne portât sur les tourillons. Pl. B, Fig. 11.

On pourrait étendre davantage ces observations; mais comme la variété des combinaisons que présentent les machines est infinie, je crois devoir m'arrêter ici, après avoir mis le lecteur sur la voie, et appelé son attention sur un genre de considérations qui ont nécessairement une grande influence sur le succès des machines (La première idée de ces dernières réflexions m'a été suggérée par une lettre de M. Roberton, publiée par M. Robertson Buchanan à la suite de son *Essay on the shafts of mills*).

Comment on doit disposer des pilons ou marteaux levés par le mouvement de rotation d'un axe.

§ 2. Parmi les actions auxquelles les axes sont exposés, celles qui les fatiguent en général le plus sont sans doute les efforts résultant des chocs, dans les machines où des roues font marcher des pilons ou des marteaux. Chaque fois qu'une came vient en contact avec un pilon, il se fait contre la roue qui la porte un choc semblable à celui que produirait contre un corps immobile une masse égale à celle du pilon, mue avec une vîtesse égale à celle que la came lui fait prendre. Il résulte en général de ce choc un effort instantané contre l'axe de la roue, dont la valeur est plus ou moins considérable, et serait nulle si le point de la came qui agit sur le pilon était situé à une distance de l'axe de la roue égale à celle du centre de percussion de cette même roue (voyez la note (*ai*), § 11). Il est donc très-important que cette condition soit remplie. D'un autre côté, si l'on veut faire en sorte que les prisons dans lesquelles le pilon est contenu n'éprouvent aussi ni percussion à l'instant du choc, ni frottement pendant la levée du pilon, il faudra que le point de la came qui agit sur lui soit situé dans la verticale passant par son centre de gravité. Dans le cas où c'est un marteau qui est soulevé, et auquel la came imprime un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, il faut que le point de contact de la came et du marteau réponde au centre de percussion de ce dernier, afin qu'il ne résulte du choc aucun effort sur son axe. A la vérité on ne pourra alors éviter que, pendant le mouvement du marteau, son axe ne supporte une pression provenant de la force centrifuge des parties de sa masse, puisque (comme on l'a remarqué dans la note (*ai*), § 12) il est impossible de supprimer à-la-fois l'effort sur l'axe fixe provenant de l'impulsion, et celui provenant de la force centrifuge. Mais il vaut mieux éviter le premier, parce que les efforts instantanés fatiguent et détériorent toujours beaucoup plus les parties des machines que des pressions prolongées pendant quelque temps. Par la même raison, il est essentiel que le point du marteau qui frappe sur l'enclume réponde comme le point par lequel il est soulevé au centre de percussion de ce marteau. Il y aura à cette

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ment, comme cela n'est que trop ordinaire à ceux qui n'agissent qu'à tâtons?

Dans le projet d'une machine on doit sur toutes choses faire entrer

---

disposition le double avantage d'éviter qu'il ne résulte du choc sur l'enclume aucune réaction sur les tourillons de l'axe du marteau, et de tirer le meilleur parti possible de la matière qu'on aura employée à le construire, c'est-à-dire de lui faire produire par sa chûte le plus grand choc possible, eu égard à sa masse.

Il est important de disposer les machines de manière que les mouvements soient uniformes, et toujours dirigés dans le même sens.

§ 3. Les observations précédentes résultent en quelque sorte de la considération de la machine dans l'état d'équilibre : il y en a d'autres relatives à la machine considérée en mouvement qui ne sont pas moins importantes. L'objet qu'on ne doit pas cesser d'avoir en vue dans la composition d'une machine, et son véritable point de perfection, est que toutes ses parties, et sur-tout les parties les plus massives, se meuvent constamment dans le même sens avec une vîtesse uniforme. D'après les § 7 et 8 de la note (*ai*), il suffit dans la théorie, pour qu'il n'y ait point de force perdue dans une machine (abstraction faite des résistances provenant des frottements), que la vîtesse de ses parties varie par degrés insensibles, quels que puissent être d'ailleurs leurs changements de vîtesse et de direction. Cela serait également vrai dans la pratique, si l'on pouvait exécuter les machines de manière qu'il n'y eût point de jeu autour des tourillons des axes, dans les engrenages, et en général dans les contacts des diverses parties mobiles. Mais cela est impossible, et comme les pièces s'usent, elles acquièrent bientôt encore plus de jeu qu'on ne leur en a donné. Il résulte de-là qu'il ne se fait jamais dans une machine un changement de direction dans le mouvement, ou que la vîtesse ne devient jamais décroissante après avoir été croissante, et réciproquement, sans qu'il en résulte un choc (voyez le § 5 de l'addition placée à la fin du livre); et par conséquent il est très-important d'éviter ces changements, puisque les chocs, outre l'inconvénient de faire perdre inutilement une partie de l'action du moteur, ont encore celui de fatiguer la machine et d'en accélérer la destruction. On connaît divers moyens d'assurer l'uniformité du mouvement dans les machines. Les uns tiennent à un tracé bien entendu de la forme des dents, cames, et autres parties par lesquelles les mouvements se transmettent. Les autres consistent dans l'emploi des *volants*, c'est-à-dire dans un excès de masse et de vîtesse donné à certaines parties de la machine, ou dans des dispositions propres à régulariser l'action des moteurs. Toutes les fois qu'il sera possible à l'aide de ces moyens de procurer à la machine une marche constante, il faudra s'y attacher avec le plus grand soin (voyez le § 5 de l'addition à la fin du livre).

Comment on diminue l'inconvénient des chocs, quand ils sont inévitables.

Un grand nombre de machines, soit par la nature du travail qu'elles ont à faire, soit par le mode d'action du moteur qui leur est appliqué, comportent nécessairement des chocs, ou des changements périodiques dans la direction du mouvement et dans la vîtesse de quelques-unes de leurs parties. Telles sont, par exemple, les moulins à scier, ceux qui font marcher des marteaux, des pilons ou des pompes, et la plupart des machines à vapeur. A l'égard des pilons ou des marteaux, leur choc contre les cames qui les lèvent est inévitable, et il n'y aurait même rien à gagner à le faire disparaître au moyen d'une forme particulière donnée aux cames. Ce qu'il y a de mieux à faire, après avoir pris les précautions indiquées § 2, est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le choix du lieu où il faudra la placer. Si elle doit être permanente, il faut prévoir tous les inconvénients auxquels elle pourra être sujette, soit de la part des grandes eaux ou des sécheresses. Si c'est une machine située sur une rivière dont le courant soit le moteur, si elle est placée dans l'intérieur d'une ville, voir si elle n'incommodera pas le public, ou si elle-même n'en recevra point de préjudice, soit dans le temps présent ou à venir.

Après avoir déterminé le mécanisme qu'on aura trouvé le plus convenable selon l'objet qu'elle doit remplir, et calculé le poids qu'on veut qu'elle élève, il en faut faire un devis bien circonstancié, où les dimensions de chaque partie soient exactement rapportées avec leurs façons. Comme ce devis doit être relatif aux plans et profils, ces derniers doivent être accompagnés des nombres qui expriment la longueur et la grosseur des bois, ayant soin de développer en particulier tout ce qui sera dessiné trop en petit, comme les dents des roues, les pignons et les lanternes,

---

de distribuer tellement les cames et les pilons que les chocs se succèdent à intervalles égaux, et aussi courts qu'il est possible, et de donner beaucoup de masse et de vîtesse à la roue qui porte les cames, afin que l'uniformité de son mouvement soit peu altérée. Quant aux mouvements alternatifs des scies, ou des pistons des pompes et des machines à vapeur, on peut éviter les chocs, et il est très-important de le faire en procurant à ces pièces un mouvement analogue à celui d'un pendule qui oscille autour d'une verticale, en sorte qu'elles commencent et finissent chacune de leurs oscillations avec une vîtesse nulle. Cette condition est beaucoup plus essentielle à remplir que celle de conserver l'uniformité d'effort et de vîtesse pendant la durée de chaque oscillation; et il est infiniment préférable, par exemple, de faire mouvoir les pistons par une manivelle, que par le procédé qu'on trouvera indiqué à l'art. 761. Il résulterait de l'emploi de ce procédé un tel choc à l'instant où la crémaillère des pistons serait saisie par la partie dentée de la roue, que la machine ne pourrait y résister long-temps. On peut diminuer les inconvénients des chocs ou des changements brusques de vîtesse dans les machines, en employant des ressorts, soit formés avec des corps solides, soit avec des portions d'air renfermées dans des capacités.

Les mouvements alternatifs qui ont lieu dans les machines doivent être ménagés de manière que la vîtesse soit nulle au commencement et à la fin de chaque oscillation.

On ne peut trop recommander d'ailleurs une exécution très-soignée de toutes les parties des machines. Les diamètres des roues et pignons doivent, comme on l'a déja observé, être grands, et les tourillons des axes aussi petits que la solidité le permet. Les roues doivent être parfaitement rondes et parfaitement centrées. Les faces latérales des poulies ne doivent pas être plates; mais on doit augmenter un peu leur épaisseur dans le milieu, pour empêcher que le frottement latéral n'ait lieu à quelque distance de l'axe. Les cordes doivent être bien flexibles, ce qu'on obtient en les frottant avec de la graisse. Les dents des roues doivent être exécutées avec précision (voyez la note (bf), parfaitement égales et également espacées, et remplir entièrement les intervalles, afin d'éviter les secousses. Les tourillons doivent remplir exactement leurs boîtes. Toutes les parties qui se meuvent en contact les unes sur les autres doivent avoir leurs surfaces adoucies, et enduites de graisse.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

généralement toutes les pièces qu'il faudra exécuter en fer ou en cuivre. Et comme, à moins d'un grand usage, il est rare qu'un homme de cabinet puisse bien juger de la résistance de ces différentes matières et de la façon dont on doit les mettre en œuvre, il faudra communiquer avec d'habiles ouvriers. Quant à la résistance de ce qui se fera en bois, on estimera la force des principales pièces selon l'effort qu'elles auront à soutenir, en suivant ce qui a été enseigné sur ce sujet dans le quatrième livre de la Science des ingénieurs*, faisant en sorte qu'elles aient une force double de celle qu'il leur faudrait pour être prêtes à se rompre par l'effort de la puissance opposée. Une plus grande force est inutile, car si l'on fait les parties d'une machine trop matérielles, on augmente la dépense mal-à-propos, et on donne lieu à de plus grands frottements.

* Voyez la nouvelle édition qui a paru en 1813 chez Firmin Didot.

Ce que je viens de dire doit s'entendre de la construction des machines permanentes, dont l'objet est d'une assez grande conséquence pour ne rien négliger d'essentiel. Car pour celles qui ne doivent servir que peu de temps, leurs parties n'ont pas besoin d'une aussi grande solidité : il suffit qu'elles puissent durer aussi long-temps qu'on sera obligé de s'en servir.

Manière de diviser les roues et lanternes selon le nombre des dents et des fuseaux.

318. Pour dire un mot de la division des roues et lanternes, eu égard au nombre des dents et des fuseaux, voici ce qui a été suivi dans plusieurs occasions, dont on s'est bien trouvé.

PL. 3, FIG. 42.

Ayant tracé la circonférence OPR sur laquelle doit se rencontrer le centre des fuseaux d'une lanterne, réglé le diamètre des fuseaux selon la résistance dont il faudra les rendre capables eu égard à l'effort qu'ils soutiendront, et à leur diminution à mesure que le frottement des dents les use, il faut que le diamètre d'un des fuseaux soit à l'intervalle qui doit régner de l'un à l'autre, comme 8 est à 7; c'est-à-dire qu'ayant divisé le diamètre des fuseaux en huit parties égales pour servir d'échelle, on en donnera 15 pour l'intervalle d'un centre à l'autre, et il en restera 7 pour le vuide.

Je suppose une lanterne qui doit avoir 10 fuseaux, et que chaque fuseau sera de deux pouces et demi de diamètre. Il faut, pour avoir le diamètre de la circonférence OPR, multiplier 15 par un nombre égal à celui des fuseaux, comme ici par 10; on aura 150, dont on trouvera la valeur en pouces en disant : si 8 parties donnent deux pouces et demi, combien donneront 150? on trouvera à-peu-près 47 pouces, qui répondent à un diamètre de 15.

L'épaisseur des dents devant être proportionnée au diamètre des fuseaux, il faudra sur la circonférence NPQ leur donner 6 parties $\frac{1}{2}$ du même diamètre. Alors il y en aura une demie pour le jeu; et si l'on donne 8 parties $\frac{1}{2}$ pour l'intervalle qui doit se trouver entre les dents, il y en aura 15 pour la distance du centre de l'une à celui de l'autre comme pour les fuseaux.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Présentement pour déterminer le diamètre de cette circonférence prise dans le milieu des dents, il n'est plus question que de savoir le rapport de la vîtesse de la lanterne à celle de la roue. Par exemple si l'on veut que la lanterne fasse cinq tours pendant que la roue n'en fera qu'un, la circonférence NPQ doit être quintuple de OPR; par conséquent le diamètre de la roue sera quintuple de celui de la lanterne, et il faudra 50 dents.

Quant à la figure des dents, on peut la faire de plusieurs manières, mais, pour plus de perfection, il faudrait que leur courbure fût celle d'une *epicycloïde*. On pourra voir ce que M. de la Hire a dit dans le traité qu'il a donné de ces sortes de courbes avec leur application, et aussi la Mécanique de M. Camus, tome 2 (*bf*).

(*bf*) Les ouvrages cités dans le texte étant actuellement peu répandus, et la théorie de la figure des dents n'étant point exposée dans les traités élémentaires de mécanique publiés dans ces derniers temps, j'ai cru devoir en donner ici succinctement les principes.

Lorsque deux roues engrènent l'une dans l'autre, on peut se proposer de déterminer la figure de l'engrenage d'après diverses conditions : on pourrait, par exemple, vouloir que les dents n'éprouvassent aucun frottement, et ne fissent que rouler les unes sur les autres, ce qui les rendrait beaucoup plus durables. Mais Euler a fait voir dans le tome 5 des *Mémoires de l'Académie de Pétersbourg*, que cette disposition était impossible à réaliser dans l'exécution, parce qu'elle conduirait à employer des dents dont la pointe serait tournée du côté du centre de la roue. La condition qu'on cherche à remplir est que la puissance appliquée à une des roues et la résistance appliquée à l'autre, conservent continuellement les mêmes valeurs et se fassent constamment équilibre. Cette condition n'est souvent pas moins importante que l'autre, sur-tout dans les machines où il se transmet de grands efforts.

Des conditions que doit remplir tout engrenage. Pl. B, Fig. 12.

§ 1. Soient C et C′ les centres de deux roues, dont l'une doit conduire l'autre. Soit menée la *ligne des centres* CC′, et prenons les *rayons primitifs* CM, C′M, qui sont entre eux comme les nombres de tours que les roues doivent faire dans un même temps. La puissance P et la résistance Q pourront être considérées comme agissant tangentiellement aux *cercles primitifs* décrits avec les rayons CM, C′M, et alors il faudra que le mode de transmission du mouvement d'un cercle à l'autre soit tel que ces forces demeurent constamment égales entre elles. Or, d'après le principe des vîtesses virtuelles, cette égalité ne peut avoir lieu qu'autant que les forces parcourront toujours en même temps, dans le sens de leurs directions, des espaces égaux; donc il faut que, quand l'extrémité du rayon CM parcourt un certain espace, l'extrémité du rayon C′M parcoure un espace parfaitement égal. Cette condition ne peut être remplie qu'autant que les lignes quelconques par lesquelles les deux cercles se poussent, sont telles que la normale commune menée à leur point de contact, passe toujours par le point M. En effet, soit *m* le point de contact des courbes fixées à chaque cercle, par lesquelles le mouvement se transmet, B*m*B′ la position de cette normale à un instant quelconque, et décrivons des centres C, C′

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le nombre qui exprime les fuseaux d'une lanterne ne doit pas être partie aliquote de celui des dents de la roue.

319. Il est à-propos, comme l'a remarqué le même auteur dans son traité de mécanique, que le nombre des dents d'une roue ne contienne jamais exactement celui des fuseaux de la lanterne, afin d'empêcher que

---

des circonférences qui la touchent aux points B et B′. A l'instant dont il s'agit, la portion B*m* de la normale s'allonge autant que la portion MB′ s'accourcit, et par conséquent chaque point des circonférences dont on vient de parler a décrit des espaces égaux. Mais pour que les points des circonférences primitives aient aussi chacune décrit dans cet instant des espaces égaux, il est absolument nécessaire que les rayons CB, CB′ soient entre eux dans le même rapport que les rayons primitifs CM, CM′, ce qui ne peut arriver qu'autant que la normale B*m*B′ passera par le point M. Réciproquement, toutes les fois que la normale aux points de contact successifs *m* des courbes qui transmettent le mouvement, passera constamment par le point d'attouchement M des cercles primitifs, chacun de ces cercles décrira dans un même instant des espaces égaux, et par conséquent les valeurs des forces qui se font équilibre au moyen de la machine, conserveront toujours un même rapport.

Il faut que la normale commune aux deux courbes qui transmettent le mouvement, menée à l'un quelconque de leurs points de contact successifs, passe toujours par un même point de la ligne des centres.

Quant à la nature des courbes qui rempliront cette condition, la solution la plus directe du problême consisterait à décrire des points C et C′ deux cercles avec des rayons quelconques CA, C′A′, qui fussent entre eux dans le même rapport que les rayons primitifs CM, C′M, et à prendre pour les courbes cherchées des portions des développées de ces derniers cercles décrites en sens opposés. En effet la normale aux points de contact communs *m m* de ces développées se confondra constamment avec la tangente commune B*m*B′ des deux cercles, laquelle passera par le point M. Mais dans la pratique on emploie d'autres solutions que je vais indiquer.

Engrenage d'une lanterne et d'une roue dentée.
Pl. B, Fig. 13.

§ 2. CM et C′M étant les rayons des cercles primitifs d'une roue et d'une lanterne, supposons qu'ayant pris un point sur le dernier cercle, on le considère comme devant être poussé par la courbe MN fixée au premier, laquelle en passant de la position MN à la position M′N′, transportera ce point de la position M à la position *m*. Il est évident que les conditions énoncées dans le § 1 se trouveront remplies, si la courbe MN ou M′N′ est l'épicycloïde que décrirait un point quelconque du cercle primitif de la lanterne, roulant sur le cercle primitif de la roue. En effet, c'est la propriété caractéristique de cette courbe que la normale à son point d'intersection *m* avec le cercle qui la décrit, va toujours passer par le point M où ce cercle touche celui sur lequel il roule; et cela résulte de ce que chaque point *m* peut être considéré comme appartenant à un arc de cercle infiniment petit, dont le centre est en M. On voit donc que l'épicycloïde MN ou M′N′ est la courbe qu'il faut employer pour pousser les axes des fuseaux d'une lanterne; d'où il suit qu'ayant tracé en-dedans de la courbe MN une courbe qui lui soit parallèle, et qui en soit éloignée d'une quantité égale au rayon de ces fuseaux, on doit tailler suivant cette dernière courbe la portion de la dent qui doit conduire le fuseau.

Des arc-boutements qui ont lieu quand les dents s'engrenent avant la ligne des centres.

Si c'est la lanterne qui doit conduire la roue, le même engrenage devra être employé. Mais il faut remarquer que quand la roue conduit la lanterne, les dents prennent les fuseaux à-peu-près dans la ligne des centres, et les poussent en s'éloignant de cette ligne; d'où il résulte que s'il y a quelques inégalités dans les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les mêmes dents ne rencontrent souvent les mêmes fuseaux, ce qui ne doit arriver que le moins fréquemment qu'il est possible, parce qu'alors les dents, à force de frotter contre des surfaces différentes, prennent

---

surfaces en contact, elles ne mettent point d'obstacles à leur glissement mutuel. Dans le cas contraire les fuseaux prendront les dents avant la ligne des centres, et les pousseront en s'approchant de cette ligne, ce qui pourra produire des *arcs-boutements* qu'on tâche éviter autant que possible dans l'établissement des machines. Il ne faut donc point faire conduire une roue par une lanterne, et on emploie ordinairement alors un pignon.

Quand une grande roue engrène dans une lanterne, il est convenable de donner aux fuseaux de la lanterne plus de solidité qu'aux dents de la roue, qui éprouvant des frottemens moins fréquemment répétés, tendent à s'user moins promptement. On emploie à cet effet des proportions différentes de celles indiquées art. 318. Les épaisseurs du fuseau et de la dent sont dans le rapport de 5 à 2, ou au moins de 4 à 3. La hauteur de la dent est un peu plus grande que le diamètre du fuseau. Il est très-utile, pour diminuer le frottement, de rendre chaque fuseau mobile autour d'un axe de fer qui le traverse, et qui est fixé dans les plateaux de la lanterne.

Engrenage d'une roue dentée et d'un pignon. Pl. B, fig. 14.

§ 3. On suppose qu'une roue dentée conduise un pignon. Cet engrenage diffère du précédent en ce que le cercle du pignon, au lieu d'être poussé par un des points de sa circonférence, l'est par un de ses rayons. Les rayons primitifs de la roue et du pignon étant CM et C′M, la courbe qui passant de la position MN à la position M′N′, poussera le rayon du pignon de la position C′M à la position C′m, remplira la condition du problème si elle est une portion de l'épicycloïde qui serait décrite par le cercle dont le diamètre est C′M, roulant sur le cercle primitif de la roue. En effet on voit d'abord comme dans le § précédent que la normale à l'épicycloïde à son point d'intersection m avec le cercle ira passer par le point M; de plus l'angle MmC′ étant droit, le rayon C′m touche la courbe au point m, et la ligne mM est aussi perpendiculaire sur ce rayon. Ainsi dans cet engrenage les *flancs* des dents ou ailes du pignon, formés par des lignes qui tendent à son centre, sont conduits par les *dents* de la roue, formées par des portions de l'épicycloïde dont je viens d'indiquer la description. Chaque dent et chaque aile ayant une figure symétrique, la roue peut conduire le pignon en tournant dans les deux sens.

Supposant maintenant que le pignon conduise la roue, on pourrait faire pousser la dent de la roue par le flanc de la dent du pignon. Mais cela ne pourrait avoir lieu qu'autant que l'un approcherait l'autre de la ligne des centres, et alors le glissement des dents l'un sur l'autre est beaucoup plus dur; car on sait que c'est tout autre chose de faire glisser une surface sur une autre en la poussant, ou en la tirant. On préfère donc donner à chaque dent de la roue, en arrière de sa circonférence primitive, un flanc dirigé à son centre, et faire porter aux ailes du pignon, en avant de leur circonférence primitive et en prolongement de leurs flancs, des portions saillantes taillées sur une épicycloïde qui serait décrite par le cercle du diamètre CM roulant sur le cercle primitif du pignon. Alors les dents du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par la suite la figure qui leur convient le mieux. Pour cela il faut que le nombre des dents et celui des fuseaux soient premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils n'aient d'autre commune mesure que l'unité; parce qu'un

---

pignon conduisent les flancs des dents de la roue de la même manière qu'elles en sont conduites, en les prenant près de la ligne des centres, et en les éloignant de cette ligne.

Quand il y a beaucoup de différence entre les diamètres de la roue et du pignon, les épaisseurs respectives de leurs dents doivent être réglées d'après ce qui a été dit à la fin du paragraphe précédent pour les lanternes. Quand on a fixé les circonférences primitives, le nombre et les épaisseurs des dents, leur tracé se trouve entièrement déterminé d'après ce qui précède, aussi bien que la longueur de leurs flancs, et même la courbe suivant laquelle on doit évider leur *creux*, c'est-à-dire l'intervalle qui les sépare : cette courbe doit être telle que la pointe de chaque dent se meuve librement dans le creux correspondant. Toutes les pointes doivent être arrondies. Il n'est pas difficile de suppléer par soi-même à ces détails, sur lesquels on peut d'ailleurs consulter le tome 2 de la *Mécanique* de Camus, et chap. 3 du *Traité élémentaire des machines* de M. Hachette, dont la présente note facilitera beaucoup la lecture.

Remarque sur l'impossibilité de faire conduire un pignon par une roue uniquement après la ligne des centres, quand le nombre des dents du pignon est au-dessous d'une certaine limite; et sur la nécessité qu'il y a en général de disposer les engrenages de manière que chaque roue puisse conduire ou être conduite indifféremment.

Avant de quitter l'engrenage d'une roue et d'un pignon j'observerai encore que ce n'est que dans certaines limites qu'il est possible de faire conduire un pignon par une roue, de manière que ses ailes soient poussées uniquement après la ligne des centres. En effet, pour que cette condition soit remplie, il faut que l'aile du pignon ne soit quittée par l'extrémité de la dent, qu'à l'instant où le flanc de l'aile suivante parvient dans la ligne des centres. Or le nombre des ailes du pignon étant donné, ainsi que son rayon primitif et celui de la roue, l'angle compris entre les flancs de deux ailes consécutives le sera également, et si on veut satisfaire à la condition précédente, il est facile de s'assurer que la saillie, la grosseur et la grandeur de l'intervalle des dents de la roue se trouvent déterminées en conséquence. Or il peut se faire que l'intervalle des dents de la roue qu'on trouvera ainsi soit trop petit, pour qu'on puisse donner aux ailes du pignon une épaisseur telle qu'elles aient assez de solidité.

Plus le nombre des dents des roues et des pignons est petit, et plus il est difficile de faire ensorte que les ailes soient conduites uniquement après la ligne des centres. On s'est rendu compte que cette condition est impossible à remplir pour un pignon de 7 et même de 8 ailes. Elle pourrait l'être pour un pignon de 9 ailes par une roue qui aurait au moins 64 dents, mais les ailes seraient un peu trop faibles. A l'égard d'un pignon de 10 ailes, elle le sera par une roue qui aurait au moins 72 dents, en faisant seulement l'épaisseur des ailes un peu moindre que leur intervalle. Quand le nombre des ailes est plus considérable il n'y a plus de difficulté, pourvu que celui des dents de la roue soit réglé en conséquence.

Lorsque les ailes sont conduites partie avant, partie après la ligne des centres, ce qui arrive très-souvent, comme on peut en juger par ce qui précède, il faut que le flanc de la dent de la roue commence par pousser la pointe de l'aile du pignon. On voit donc qu'il est nécessaire de terminer ces ailes en portion d'é-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

même fuseau de la lanterne ne rencontrera la même dent de la roue qu'après que la lanterne aura fait autant de révolutions qu'il y aura de dents. Ainsi dans l'article précédent, au lieu de 50 dents, il en faudrait 49 ou 51.

---

picycloïde, comme on le ferait si on voulait rendre le pignon capable de conduire la roue. On verra d'ailleurs dans la suite, qu'à raison des inégalités qui ont lieu dans les efforts du moteur ou de la résistance, il arrive dans un très-grand nombre de cas que, de deux roues qui engrènent ensemble, chacune conduit l'autre et en est conduite alternativement, quoique le mouvement se fasse toujours dans le même sens; circonstance qu'il ne faut point perdre de vue dans l'établissement des engrenages.

Engrenage d'une roue dentée et d'une crémaillère. Pl. B, fig. 15.

§ 4. En passant maintenant à l'engrenage d'une roue avec une crémaillère, et admettant en premier lieu que ce soit la roue qui conduise la crémaillère, il est visible que la solution du cas où une roue conduit un pignon s'appliquera à ce cas-ci en supposant que le rayon du pignon devienne infini, et que sa circonférence primitive se change dans la ligne droite M*m* perpendiculaire sur CM. Ainsi l'épicycloïde qui doit donner la figure des dents de la roue étant maintenant décrite par le roulement d'un cercle dont le rayon est infini (c'est-à-dire par le roulement d'une ligne droite) sur la circonférence primitive du cercle de la roue, elle se changera dans la développée de ce cercle. Les courbes MN, M′N′ formant les dents de la roue seront donc des portions de la développée de son cercle primitif, et elles pousseront les flancs des dents de la crémaillère formés par des lignes MC′, *mc*′, toutes parallèles à CM. La normale commune à la courbe des dents de la roue et aux flancs des dents de la crémaillère se confondra toujours avec M*m*.

En supposant ensuite que ce soit la crémaillère qui conduise la roue, on verra de même que les flancs des dents de la roue étant dirigés vers son centre, les dents de la crémaillère qui les conduiront seront formées par des portions d'une cycloïde que décrirait un cercle du diamètre CM roulant sur la ligne primitive M*m* de la crémaillère.

Des cames qui lèvent un pilon. Pl. B, Fig. 16.

§ 5. Ce qui vient d'être dit dans le paragraphe précédent s'applique immédiatement à la description des cames qui soulèvent un pilon. Il est évident en effet que C étant le centre autour duquel se meut la came, et M*m* la ligne verticale dans laquelle se trouve constamment le point de contact de la came et du pilon, il faudra que la face MN de la came qui conduit le pilon soit formée par la développée du cercle dont CM est le rayon.

Engrenage d'une roue de chan avec une lanterne. Pl. B, Fig. 17.

§ 6. La fig. 17 est une projection faite sur le plan passant par les axes de la roue et de la lanterne, représentés par les lignes OC, OC′ qui se rencontrent en O. Les lignes MN, MN′ perpendiculaires aux premières, qui les coupent en deux parties égales, représentent les cercles primitifs de la roue et de lanterne, dont les centres sont en C, C′. Les axes des fuseaux de la lanterne doivent être dirigés suivant les arêtes de son *cône primitif*, dont le cercle MN′ est la base et O le sommet. Le cône dont le cercle MN est la base et dont le sommet est aussi en O est le cône primitif de la roue. Cela posé, on voit d'abord que les surfaces par lesquelles la lanterne et la roue se pousseront mutuellement devront nécessaire-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Voici une machine pour voiturer ou élever un poids considérable, dont l'application, qui peut avoir lieu dans l'architecture hydraulique, va nous donner encore un exemple de la manière de calculer les frottements et la roideur des cordes. Il est question d'un levier singulier,

---

ment être des surfaces coniques décrites par des lignes passant toutes par le point O, et qui se toucheront suivant des arêtes passant par ce point. De plus, par les mêmes considérations employées dans le paragraphe 1, on verra que ces surfaces devront toujours être telles que le plan normal commun qui leur serait mené par leur arête de tangence aille toujours passer par l'arête de contact OM des deux cônes primitifs.

Pl. B, Fig. 18. Or si l'on imagine ici que le cône primitif de la lanterne roule sur le cône primitif de la roue, leurs sommets se confondant toujours dans le point O, le cercle MN′ roulera sur le cercle MN, et un point de ce cercle décrira dans ce mouvement une épicycloïde sphérique qu'on peut concevoir tracée sur la surface de la sphère dont O est le centre et OM le rayon. Soit PR une des positions que prendrait le cercle MN′ dans ce mouvement, et QR la portion d'épicycloïde sphérique qu'il décrit. Le cône dont cette épicycloïde sphérique serait la base jouira évidemment de cette propriété, que si on lui mène un plan normal par l'arête OR suivant laquelle il est coupé par le cône roulant, ce plan ira toujours passer par l'arête de contact OP de ce cône roulant avec le cône primitif de la roue sur lequel il roule. On conclut de-là que l'engrenage de la roue et de la lanterne doit être tel qu'il fasse décrire aux axes des fuseaux des portions de cône dont le sommet serait en O et dont la base serait l'épicycloïde sphérique dont on vient d'indiquer la génération. Par conséquent la surface extérieure de la roue

Pl. B, fig. 17. étant formée par la sphère dont O est le centre et OM le rayon, et le cercle MN étant tracé sur cette sphère, on marquera en uv l'épaisseur des dents, et on tracera des portions vx, ux de l'épicycloïde spérique qui serait décrite par le roulement du cercle MN′ sur le cercle MN. On tracera ensuite en dedans de ces courbes d'autres courbes qui leur soient parallèles et qui en soient distantes d'une quantité égale au rayon des fuseaux de la lanterne. Ces dernières courbes, considérées comme les bases de cônes dont le sommet serait en O, serviront à tailler les faces des dents. Il est évident d'ailleurs que les fuseaux de la lanterne devront être des cônes à base circulaire ayant leur sommet en O.

Engrenage d'une roue de chan avec un pignon. § 7. D'après ce qui précède et ce qu'on a vu § 3, l'engrenage d'une roue de chan avec un pignon ne peut offrir aucune difficulté. Pour faire d'abord conduire le pignon par la roue, il est évident que les flancs des dents du pignon étant formés par des plans passant par son axe, les dents de la roue sont encore taillées suivant des cônes ayant pour base des portions d'une épicycloïde sphérique; mais que cette courbe est ici décrite par un cercle ayant un diamètre moitié moindre que le cercle primitif du pignon, et qui roule sur le cercle primitif de la roue. Pour que le pignon puisse aussi conduire la roue, il faudra donner aux dents de cette roue des flancs qui seront également formés par des plans passant par son axe, et tailler la partie saillante des dents du pignon suivant une épicycloïde sphé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'on appelle communément le levier de *la Garousse*. Comme je ne l'ai vu nulle part bien développé, je crois que les curieux ne seront pas fâchés de le trouver ici.

Description du levier de la Garousse.

Planche 4. Fig. 2, 3, 4 et 5.

320. Ce levier est composé de trois choses principales, d'une roue dentée ayant à son centre un arbre ou treuil H autour duquel file la corde qui répond au poids, d'un balancier AB dont l'appui est dans le milieu C, et de deux crochets DO et EP qui accrochent alternativement les dents de la roue. Quant aux pièces qui servent à assembler les parties de cette machine, elles sont assez distinctement exprimées pour n'avoir pas besoin de détail, puisque l'on voit bien que le tout compose une espèce de petit chariot, dont le plan est représenté par la troisième figure, lequel, étant porté sur des roulettes, peut être aisément conduit où l'on veut. En voici la manœuvre.

Supposons qu'on veuille voiturer un bloc de pierre X d'une extrême pesanteur, posé sur un assemblage de charpente Y porté sur des roulettes V. D'abord on enfonce un pilot R, afin d'avoir un point fixe pour y attacher la machine. On fait passer une corde sur la poulie S, dont un des bouts T est attaché à une pièce de la machine, et l'autre file sur le treuil H. Comme les deux crochets peuvent se mouvoir librement autour des boulons D et E, il est constant qu'une puissance ne peut faire

---

rique, qui serait décrite par un cercle roulant sur le cercle primitif du pignon, et ayant un diamètre moitié moindre que le cercle primitif de la roue.

Remarque sur quelques modifications à apporter dans la pratique aux règles précédentes.

En appliquant dans la pratique les principes précédents, il faut avoir égard à l'imperfection inévitable dans l'éxécution matérielle des engrenages. Il faut donc laisser plus ou moins de jeu entre les dents des deux roues, suivant que cette exécution sera moins ou plus soignée. De plus s'il arrivait, comme cela est possible, que les dents de la roue qui conduit ne pousassent pas les autres aussi loin qu'il faudrait au-delà de la ligne des centres, alors les dents suivantes se rencontreraient trop-tôt, et il en résulterait des arc-boutements. On prévient ce danger en donnant dans l'exécution à la roue qui conduit un diamètre un peu plus grand qu'elle ne devrait l'avoir, et en sacrifiant ainsi quelque chose de la régularité du mouvement.

Il est aussi fort important, pour obtenir plus de douceur et d'uniformité dans le mouvement des roues, de leur donner un grand diamètre, et de faire les dents petites et en grand nombre, afin qu'il y en ait toujours plusieurs engrenées à-la-fois. On ne donne plus guères actuellement dans les machines qui se construisent en Angleterre, même dans les plus puissantes, que 5 centimètres environ à l'intervalle de deux dents, et l'on porte l'épaisseur des roues jusqu'à 25 ou 30 centimètres pour obtenir la force nécessaire. Cette disposition est considérée comme un des perfectionnements les plus importants. On a aussi reconnu que le mouvement était plus doux quand les dents des grandes roues étaient en bois dur, et celles des pignons en fer fondu (voy. l'*Encyclopédie* du docteur Reiss, art. *Machinery*).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

baisser l'extrémité A du balancier, sans que le point E ne monte, et que le point D ne baisse. Réciproquement, lorsqu'une seconde puissance fait baisser l'autre extrémité B du balancier, le point E baisse aussi, et le point D monte. Alors il arrive que quand le point E monte, le crochet P contraint la roue dentée de tourner tant soit peu. Le crochet O descend et glisse le long de quelques dents; mais aussitôt que le point D monte, le crochet O fait la même manœuvre que le précédent qui descend à son tour sans agir. Or, comme la roue dentée ne peut tourner sans que le treuil H ne tourne aussi, on voit que le poids avance à mesure que la corde NS file autour de ce même treuil; ce qui se fait lentement à la vérité, mais si l'on perd du temps on gagne de la force à proportion.

En construisant cette machine, il faut, après avoir déterminé le rayon HG de la roue et la longueur des crochets depuis leurs centres de suspension, placer les boulons D et E de façon que les lignes de direction GI et FK soient tangentes à la roue. D'un autre côté, si l'on détermine aussi le rayon HN du treuil, et la longueur AB du balancier, on n'aura pas de difficulté à calculer l'effet de cette machine, comme on le va voir.

Calcul de la machine précédente.

321. Je suppose que le poids X est de cent mille livres; ainsi le frottement des essieux sur les roulettes sera de 33333 qu'il faut multiplier par le rapport du rayon de l'essieu au rayon des roulettes que je suppose $\frac{2}{9}$: le produit donnera 7407 liv. $\frac{1}{3}$ pour la puissance qui pousserait ou tirerait le chariot Y selon une direction parallèle à l'horizon (256), dans l'état d'équilibre; c'est-à-dire que si ce chariot était sur un plan fort uni, pour peu que la puissance fût augmentée, elle le ferait avancer.

Remarquez que la poulie S cheminant avec le poids, et l'un des bouts de la corde étant attaché au point fixe T, les brins TZ et NS partageront également la résistance du poids. Par conséquent la puissance qui sera appliquée au brin SN ne sera que de 3704 liv., à quoi il faut ajouter la résistance causée par la roideur du brin TZ et le frottement de la poulie sur son boulon (*bg*).

Pour commencer par le premier de ces deux obstacles, nous supposerons que la poulie a quatre pouces de rayon, et la corde 16 lignes de diamètre : c'est pourquoi il faut (314) diviser 3704 liv. par le nombre 32, multiplier le quotient par 16, diamètre de la corde, diviser le pro-

---

Remarque sur le calcul de l'art. 321.

(*bg*) Les exemples calculés dans la note (*bc*) paraissant suffire pour mettre à même d'appliquer les nouveaux résultats exposés dans les notes précédentes, je ne referai point les calculs de l'auteur sur cette machine. J'observerai seulement qu'il n'est permis de prendre la moitié de la charge de la poulie pour la tension du cordon SN, qu'en supposant les deux cordons ZT, SN parallèles, ce qui est suffisamment exact tant que le chariot est éloigné du treuil.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

duit par 4, rayon de la poulie. Il viendra 464 liv. pour la résistance causée par la roideur de la corde.

D'autre part, considérez que l'axe de la poulie se trouve chargé du poids de 7408 liv., à quoi il faut ajouter 464 liv. pour la pression que causera la roideur de la corde. Ainsi la pression totale sera de 7872 liv., dont il faut prendre la moitié qu'on multipliera par le rapport du rayon du boulon au rayon de la poulie, que je suppose $\frac{1}{10}$. On aura environ 394 liv. pour ce frottement réduit à l'extrémité du rayon de la poulie (254). Ainsi la puissance appliquée à la corde sera composée, 1° de 3704 liv., 2° de 464 liv., 3° de 394 liv., qui font ensemble 4562 liv.

La corde ne pouvant se ployer sur le treuil, sans que la puissance appliquée à la circonférence de la roue n'en surmonte encore la roideur, il faut comme ci-devant diviser 4562 liv. par 32, multiplier le quotient par 16 lignes, diamètre de la corde, et diviser le produit par 5 pouces, rayon du treuil : on aura 456 liv. pour la roideur de la corde, qui, étant ajoutées à 4562 liv., donneront 5018 liv. pour la résistance réunie au point N. Cette résistance étant multipliée par rayon du treuil de 5 pouces, et le produit divisé par celui de la roue qui est ici de 24 pouces, on aura environ 1045 liv. pour l'effort de la puissance qui serait appliquée au point F ou G de la circonférence.

Comme l'effort des puissances qui agissent aux points F et N fait naître une pression des tourillons du treuil contre leur palier, laquelle est à-peu-près égale à la somme des mêmes puissances (*bh*), c'est-à-dire à 6064 liv., il en faut prendre la moitié pour le frottement, qui sera de 3032 liv. ; lesquelles étant multipliées par le rapport du rayon du boulon au rayon de la roue, que je suppose être $\frac{1}{24}$, il vient 126 liv. pour ce frottement réduit (251). Si on l'ajoute avec 1045 liv., il vient 1171 liv. pour l'effort que feront les crochets aux points F ou G.

Les crochets agissants selon les directions FK et GI, la puissance appliquée au point A sera à la résistance qu'oppose la dent F, dans la raison réciproque de la perpendiculaire CM, abaissée du point d'appui C

(*bh*) On doit remarquer que la pression sur l'axe n'est égale à la somme des puissances qui agissent autour de lui qu'autant que ces puissances sont parallèles entre elles. Ici elles sont au contraire à-peu-près perpendiculaires, et cette supposition de l'auteur (qui d'ailleurs tend à faire estimer la puissance trop grande) n'est point exacte. Il faudrait donc recourir aux formules de la note (*aq*), où l'on mettrait pour Q la tension de la corde SN, pour P l'effort du crochet DO ou EP, pour α l'angle que l'un ou l'autre de ces crochets forme avec SN, pour r'' le rayon des tourillons de l'axe H, pour r' celui de cet axe, et pour r celui de la roue. On négligerait le poids du treuil, ce qui n'aurait aucun danger eu égard aux grands efforts qui ont lieu dans la machine.

Remarque sur la manière de calculer le frottement des axes quand les forces ne sont point parallèles.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sur sa direction FK, au bras de levier CA (44); ou comme CL est à CB, s'il s'agit de la puissance appliquée au point B. Or supposant que la perpendiculaire CL ou CM soit la dixième partie du bras CA ou CB, chacune des puissances appliquée aux extrémités A et B sera la dixième partie de la résistance réduite au point F ou G, par conséquent d'environ 117 liv.

Pour avoir aussi égard au frottement du tourillon C servant de point d'appui au levier AE ou BD, il faut ajouter ensemble le poids et la puissance qui seraient appliqués à ses extrémités, c'est-à-dire, 1045 liv. et 117 liv., et y joindre le poids du balancier AB compris celui des crochets, que je suppose ensemble de 200 liv. On aura 1362 liv., dont il faut prendre la moitié; laquelle étant multipliée par 9 lign., rayon du tourillon, et le produit divisé par la longueur CB du levier, donne environ 5 liv. pour le frottement réduit à une des extrémités A ou B (249); ce qui étant ajouté avec 117 liv., donne 122 liv. pour la force de la puissance appliquée à chacune des mêmes extrémités. Comme ce poids est moindre que celui d'un homme, on voit qu'il n'en faudrait qu'un appliqué à chaque extrémité pour mettre la machine en mouvement (*bi*).

Remarque sur la manière différente dont on doit estimer l'action des hommes quand il s'agit d'un effort momentané, ou d'un travail continu.

(*bi*) Cela est vrai s'il ne s'agit que de rompre l'équilibre, et de faire avancer le poids quelque peu. Mais s'il faut lui faire parcourir une grande distance, et produire un travail continu, il n'en sera pas de même à beaucoup près. On reviendra dans la suite sur ces importantes considérations auxquelles tiennent la véritable théorie des machines, et les vraies lois de leur établissement (voyez l'addition placée à la fin de ce premier livre).

Indication d'une espèce particulière de treuil, au moyen duquel le rapport entre les efforts de la puissance et de la résistance peut être varié à volonté.

J'ajouterai que les machines du genre des précédentes sont actuellement peu employées, tant par l'embarras qu'elles causent, qu'à raison de la manière désavantageuse dont la force des hommes y est appliquée. On se sert ordinairement pour élever les poids d'un treuil garni d'une manivelle ou d'une grande roue, et pour les tirer horizontalement d'un cabestan mu avec des barres horizontales. Si l'appareil dont on dispose n'offre pas le moyen d'employer une force proportionnée à l'effort qu'on veut faire, on multiplie cette force avec le secours d'un palan. Ces derniers appareils, dont l'usage ne saurait, en général, être trop recommandé, ont le défaut d'augmenter beaucoup la résistance par l'effet du frottement sur les axes des poulies, et de la roideur de la corde qui se plie dans leurs gorges. On peut les remplacer par une disposition qui n'a pas les mêmes inconvénients, et que j'indique ici parcequ'on ne la trouve point dans l'*Essai sur la composition des machines*. Elle consiste à composer l'arbre du treuil ou du cabestan de deux parties ayant des diamètres différents. On fixe au fardeau une poulie de renvoi, et les deux extrémités de la corde passant dans cette poulie sont attachées en sens contraire sur chacune des parties du treuil, de manière que le bout fixé sur la partie du plus gros diamètre s'enroule, tandis que l'autre se déroule. On voit qu'alors, à chaque tour du treuil, le fardeau avance d'une quantité égale à la moitié de la différence entre les circonférences de ses deux parties, et que l'effort de la

Pl. B. Fig. 19.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

322, La sixième figure représente une manière de se servir du même mouvement pour élever un poids. AF est un levier dont le point d'appui est en B, accompagné des deux crochets AD, CE, qui accrochent encore alternativement la roue dentée par l'action de la puissance appliquée au point F, laquelle décrit en montant et en descendant l'arc FG pour faire tourner la roue, et par conséquent le treuil autour duquel file la corde qui répond au poids.

Description de quelques machines dans le goût de la précédente.

Pl. 4, Fig. 6.

323. La première figure, dont l'objet est le même que celui de la précédente, offre une différence dans la manière de faire tourner la roue, parce qu'à l'extrémité F du levier FH dont le point d'appui est en G, on a suspendu un crochet FD et un rayon solide FE. Quand la puissance qui est à l'extrémité H agit de haut en bas, le crochet D tire de bas en haut pour faire tourner la roue; et au contraire lorsque la puissance agit de bas en haut, le rayon solide pousse de haut en bas contre les dents pour faire aussi tourner la roue : par conséquent il n'y a point de temps perdu.

Figure 7.

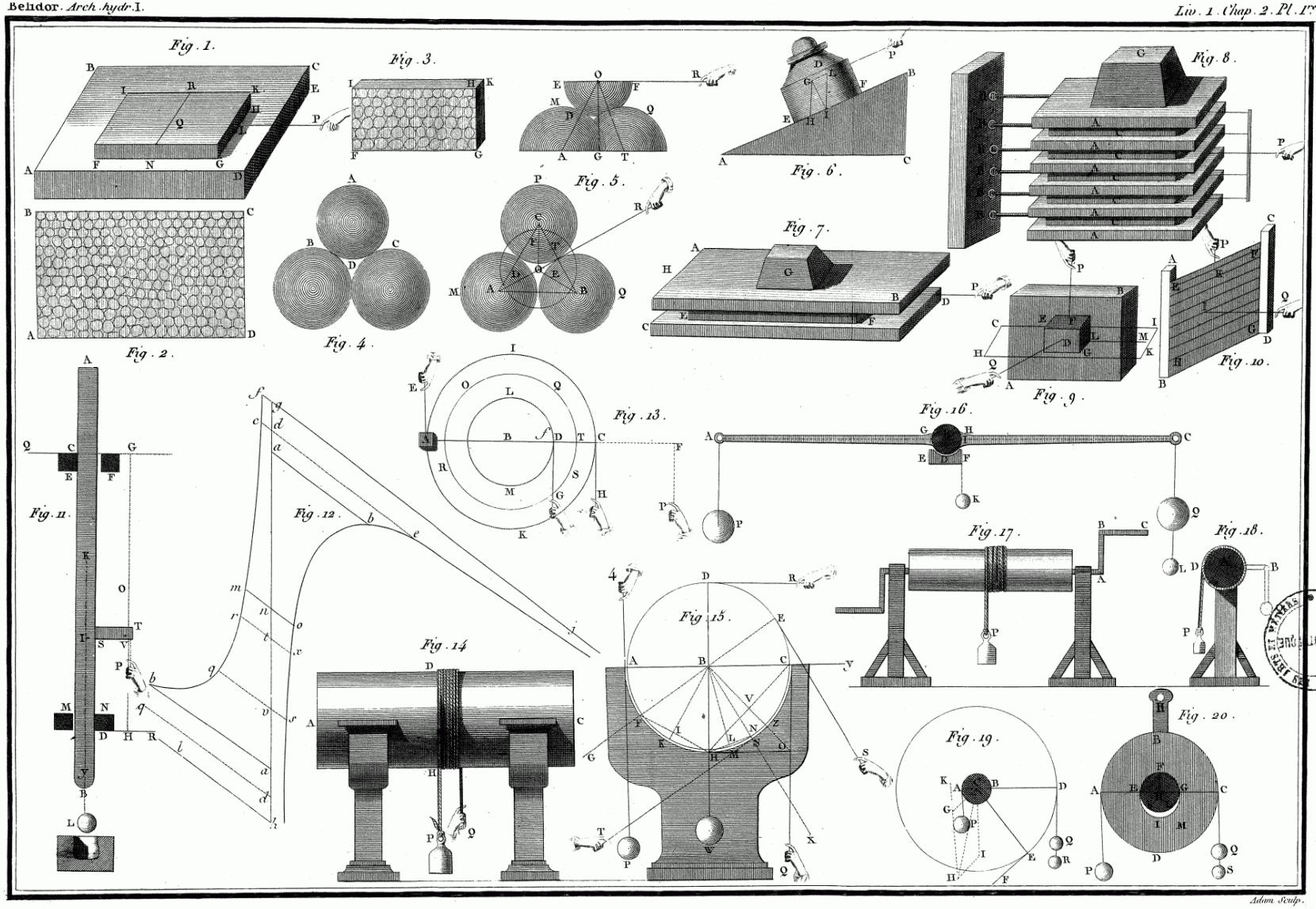
324. Enfin la figure septième comprend une roue dentée selon la direction des rayons, et qui s'engrène avec un pignon R dont l'essieu répond à une manivelle V, qu'une puissance appliquée à la poignée S fait tourner pour élever le poids. Je ne m'arrête point à calculer ces trois dernières machines, les exemples précédents devant suffire pour juger de la manière dont il faudra s'y prendre.

---

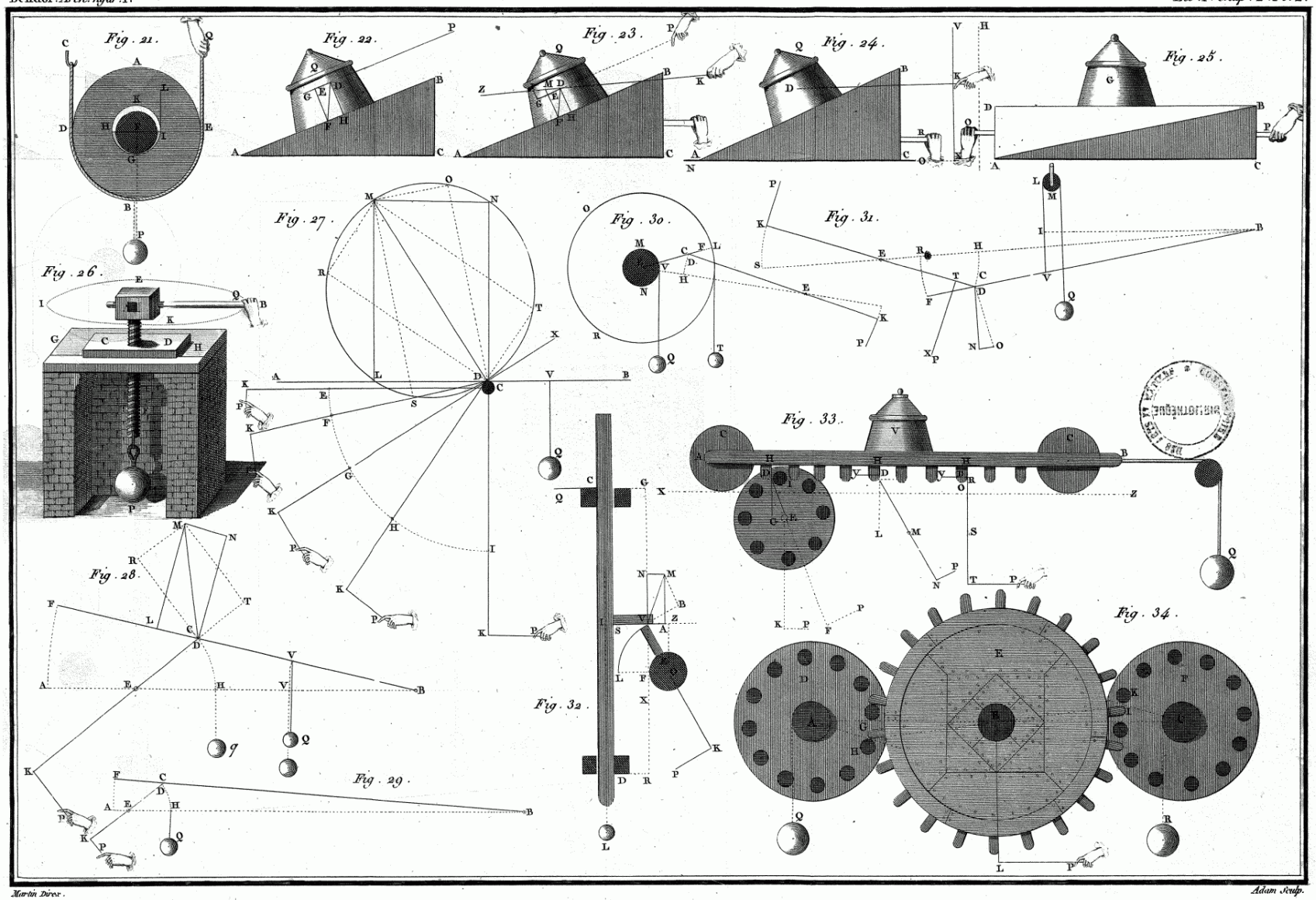
puissance est à celui de la résistance comme le rayon de la manivelle à la moitié de la différence entre les rayons des deux parties de l'arbre du treuil. On peut donc en variant la différence de ces rayons, varier le rapport de la puissance à la résistance; et un treuil sur l'axe duquel on pourrait placer ainsi des tambours composés de deux parties ayant des diamètres plus ou moins différents, offrirait avec beaucoup plus de simplicité et d'avantage, les mêmes ressources que l'emploi de palans composés de divers nombres de poulies. Cette invention a paru en Angleterre sous le nom de G. Eckhardt, mais M. Gregory observe qu'elle est anciennement connue en Chine. (*A treatise of mechanics*, t. 2, p. 2).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

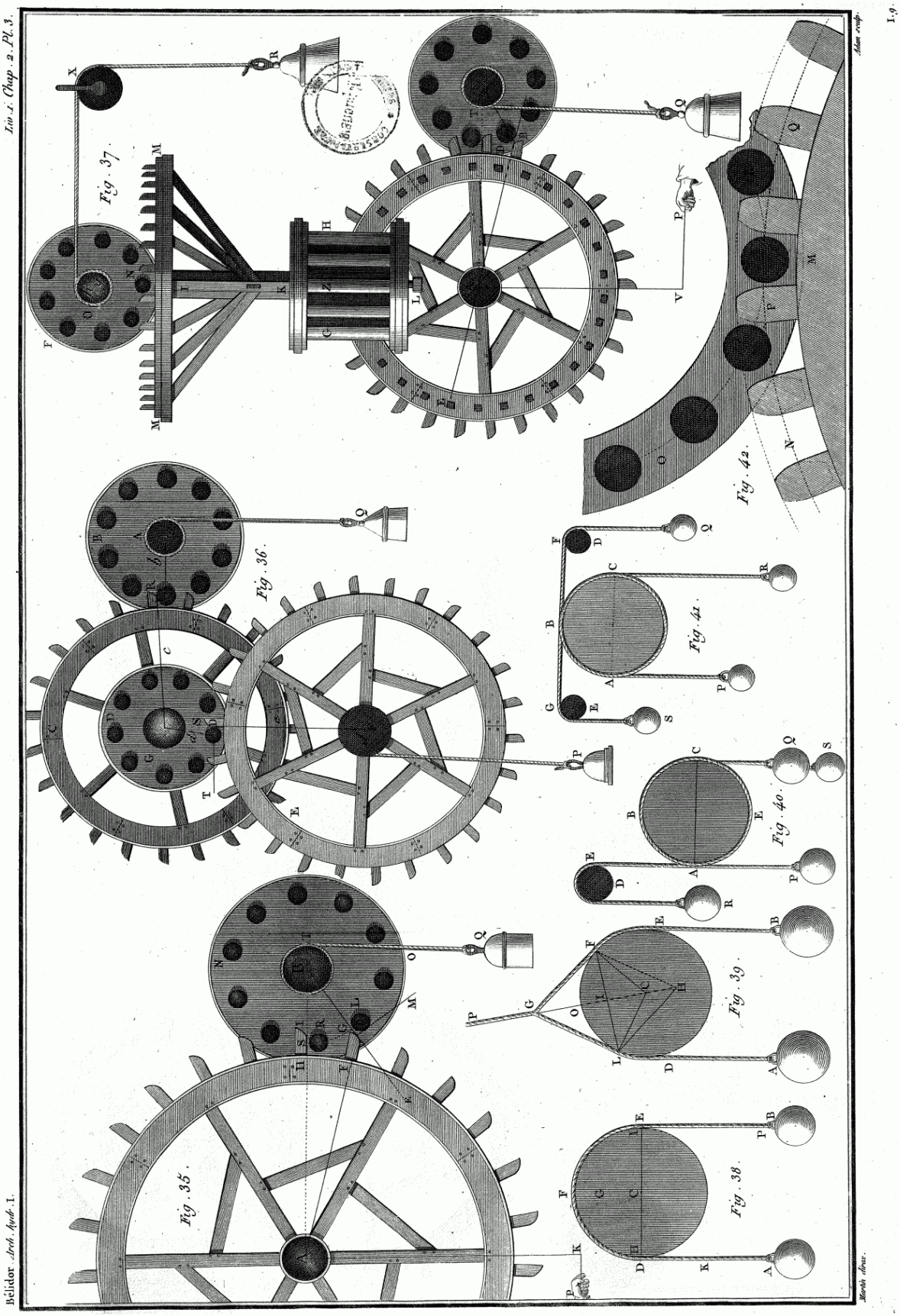


Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

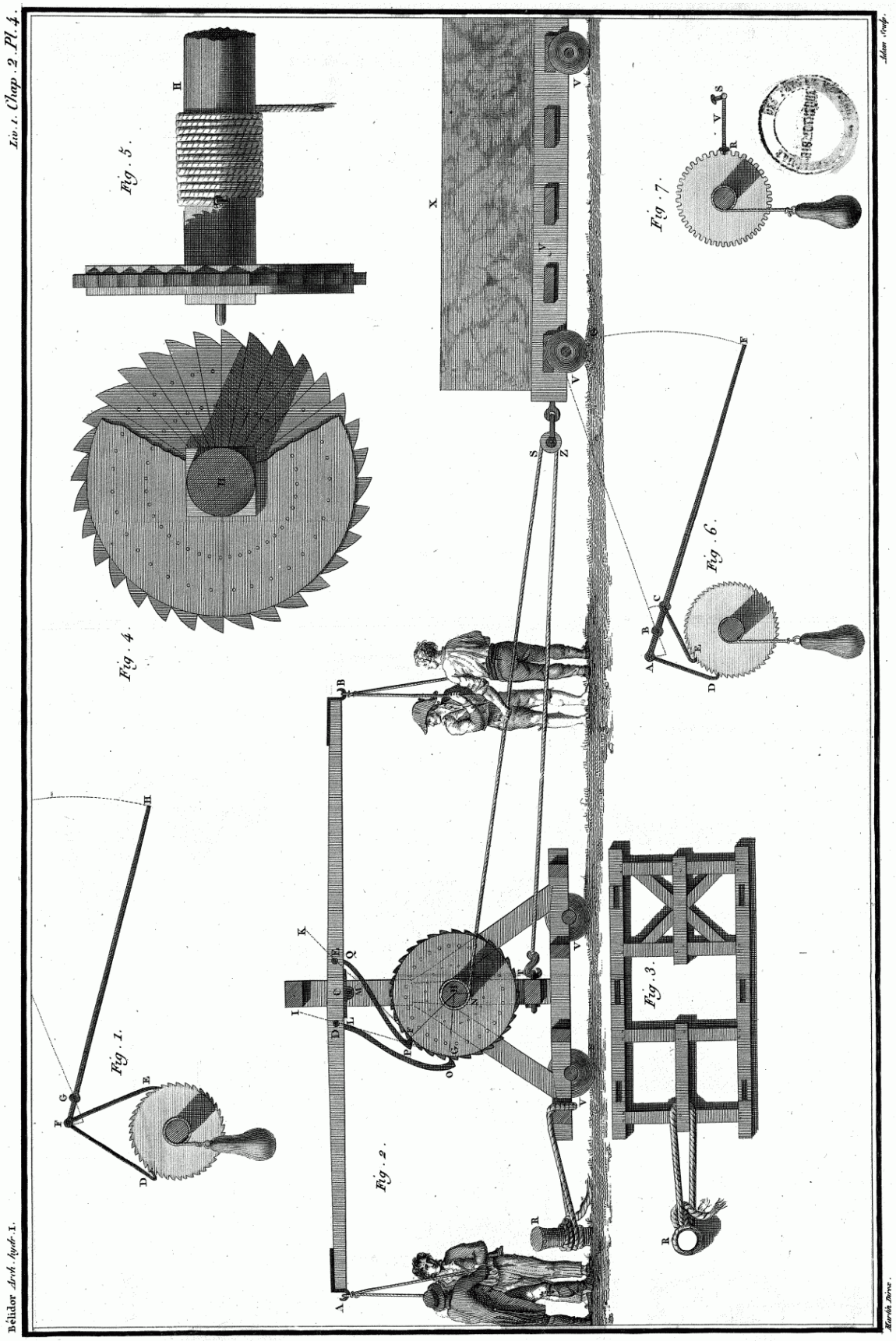


Martin Direx. *Adam Sculp.*

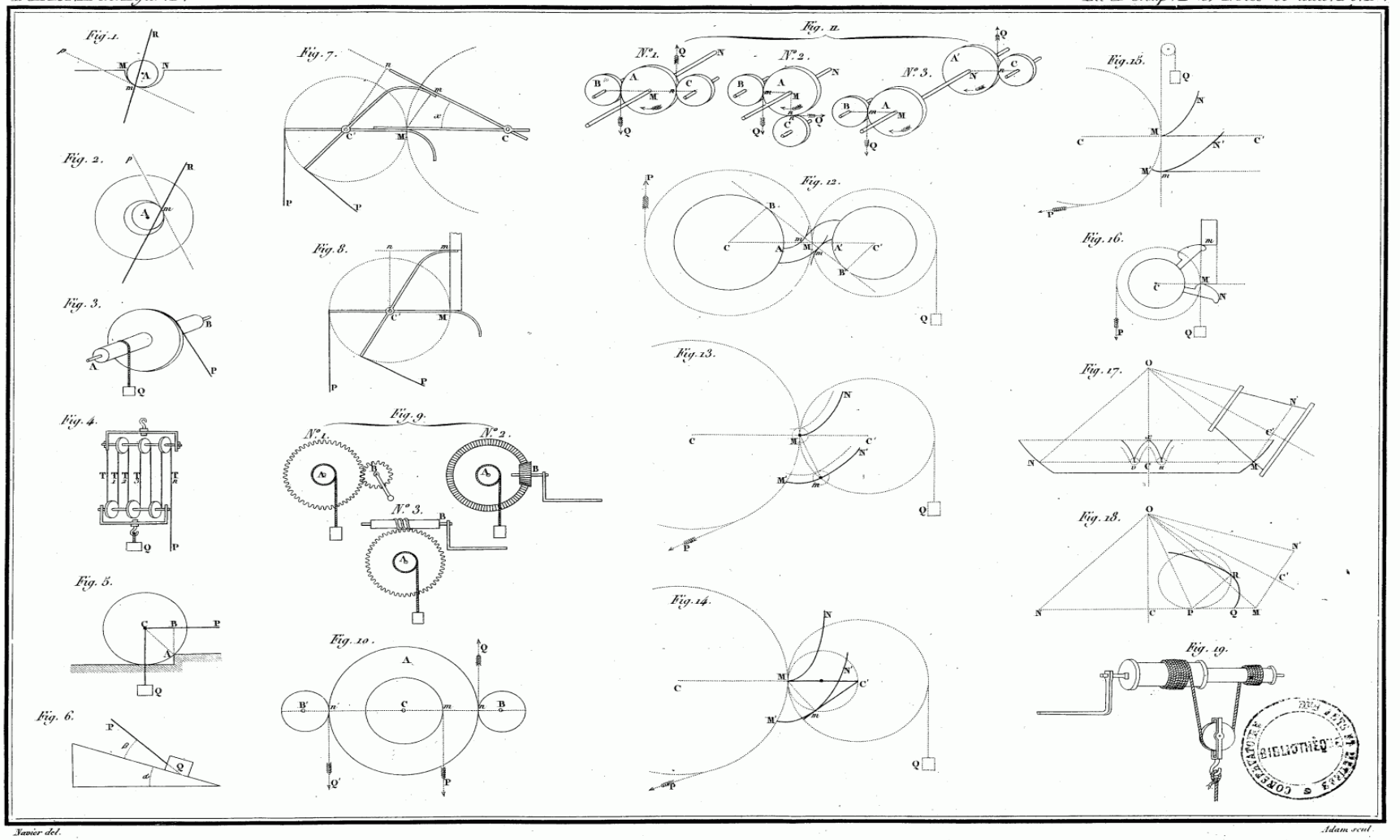
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



BIBLIOTHÈQUE

Xavier del. Adam sculp.

I. B.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE III.

Où l'on enseigne les principes et les règles de l'Hydraulique.

Il conviendrait de donner au commencement de ce chapitre une connaissance exacte de la nature des liqueurs, pour faire voir la cause de leur fluidité; mais comme on n'en peut juger par les sens, qui ne s'étendent pas jusques-là, et qu'on n'a pas encore imaginé d'hypothèse qui satisfasse pleinement (*bk*), il faudra nous contenter de déduire de l'expérience et du raisonnement les règles nécessaires pour la conduite des eaux, en commençant par expliquer la cause qui fait qu'une liqueur contenue dans un vase se met toujours de *niveau*, c'est-à-dire que tous les points de sa surface se trouvent également éloignés du centre de la terre (*bl*).

SECTION PREMIÈRE.

Du niveau des liqueurs, et de leur équilibre.

325. Il est constant que les liqueurs, comme les autres corps pesants, tendent vers le centre de la terre, et descendent tant qu'elles peuvent, à moins que quelques obstacles ne les en empêchent. De l'eau versée dans un vase, abandonnée à elle-même, doit toujours s'y mettre de niveau; car s'il y a d'abord une partie de sa surface plus élevée que l'autre, elle descendra vers la plus basse comme le long d'un plan incliné; ou comme le long de plusieurs plans inclinés contigus, si elle fait une espèce de courbe. S'il se trouve encore des endroits plus élevés que les autres, il arrivera pour chacun en particulier la même chose: les parties les plus élevées, si peu

Lorsqu'une liqueur est renfermée dans un vase, sa surface se met toujours de niveau.

(*bk*) Sans prétendre expliquer la vraie nature des fluides, on doit faire connaître celles de leurs propriétés qui ont été constatées par l'observation. La principale, et la seule presque sur laquelle les lois de leur équilibre et de leurs mouvements soient fondées, consiste en ce que leurs molécules cèdent, sans résistance sensible, aux efforts qui tendent à leur faire changer de situation les unes par rapport aux autres. Il en résulte que quand une masse de fluide est en équilibre, ou toutes les molécules sont également pressées dans toutes les directions, ou si une molécule est plus pressée d'un côté que d'un autre, c'est qu'elle est animée par des forces particulières, dont la résultante est égale et directement opposée à l'excédent de pression que cette molécule supporte.

Propriété fondamentale des fluides.

(*bl*) Cette définition du niveau n'est point exacte. Une *surface de niveau* est celle qui, dans tous ses points, est perpendiculaire à la direction de la pesanteur.

Définition de la surface de niveau.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'elles le soient, descendront au plus bas où elles puissent arriver; et lorsqu'il n'y aura plus d'agitation sensible dans la surface, elle se trouvera de niveau, puisque ses points seront également éloignés du centre de la terre, et se maintiendront toujours dans cet état, à moins qu'ils ne soient agités par quelques causes étrangères.

On peut supposer les liqueurs divisées par colonnes; et lorsque ces colonnes ont leurs surfaces de niveau, elles sont en équilibre entre elles.

Pl. 1, Fig. 1.

326. Lorsque la surface d'une liqueur est de niveau, toutes les colonnes dont cette liqueur est composée sont en équilibre entre elles. Pour en juger, nous supposerons qu'on a versé de l'eau dans un vaisseau prismatique B C, et qu'on a divisé par la pensée toute cette eau en colonnes de bases égales.

Pour que la surface AE de la première colonne BE soit de niveau avec la surface EF de la seconde, il faut que ces colonnes se contrebalancent, et tendent à se soulever mutuellement par un effort égal sur leurs bases. Autrement, si la première l'emporte sur la seconde, la surface de cette seconde s'élevant au-dessus de celle de la première, ne pourra se maintenir dans cette situation; parce que, n'étant point soutenue par les côtés, elle tombera sur la première pour se mettre de niveau (325). De même la seconde colonne EM ne pourra par son poids l'emporter sur la troisième MG, sans que la surface de cette dernière ne monte et que celle de l'autre ne descende. Mais ces deux colonnes étant d'une égale pesanteur, il n'y a pas de raison que l'une l'emporte sur l'autre. Si l'on fait le même raisonnement pour toutes celles qui suivent, on verra la nécessité qu'elles se soutiennent toutes réciproquement en équilibre.

De-là vient que lorsqu'on mêle ensemble deux liqueurs dont l'une est plus légère que l'autre, comme de l'huile et de l'eau, la plus pesante contraint la plus légère de s'élever vers la surface. Cependant il semble que ce soit l'huile qui se sépare de l'eau, parce que l'action de l'eau ne frappe point nos sens, au lieu que le mouvement de l'huile s'aperçoit.

Une petite colonne de liqueur peut être en équilibre avec une plus grosse, pourvu que leurs surfaces soient de niveau.

327. Quoique les colonnes EM, MG, GO, OI, IQ, QD semblent s'unir contre la seule BE pour la surmonter, cette dernière ne laisse pas de faire elle seule équilibre avec toutes les autres ensemble ou séparées, parce qu'elles se divisent entre elles, et tendent à se soulever les unes les autres; c'est-à-dire, que les colonnes EM, MG, GO, OI, IQ s'unissent de même avec la première BE contre la seule QD; parce que, si chacune de ces colonnes est combattue par toutes les autres, elle est aussi aidée par toutes ces autres, pour agir contre chacune d'entre elles. D'où il suit que la colonne ELCD composée de plusieurs petites, n'a pas plus d'avantage sur la seule BE que celle-ci sur la précédente; ce qui fait voir qu'une colonne de liqueur, quelque grosse qu'elle soit, doit demeurer en équilibre avec le moindre filet de la même liqueur, lorsque l'une et l'autre sont de niveau; parce que la colonne plus grosse est composée de filets semblables aux premiers qui se combattent entre eux, et s'unissent avec

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le premier contre chacun d'eux, comme ils s'unissent entre eux contre le premier. On peut donc conclure *que, si toutes les colonnes d'une même liqueur sont en équilibre entre elles, leurs surfaces sont de niveau; et que, si leurs surfaces sont de niveau, ces colonnes sont en équilibre.*

328. Si le vaisseau est tout autre que prismatique, il ne s'agira que de le concevoir divisé par tranches horizontales, depuis le fond X jusqu'au bord AC, en sorte que chaque tranche puisse être regardée comme un petit prisme. Versant doucement de la liqueur le long du bord du vaisseau, elle se mettra de niveau dans le prisme RXT; ensuite dans le second NT qui aura pour base le premier; de-là dans le troisième IP qui aura pour base le second; et ainsi de suite jusqu'au dernier AG. PLANCHE I. FIGURE 2.

329. Si l'on a un siphon, dont on supposera d'abord les branches ABCD, EFGH, verticales et de même grosseur, on ne peut douter que la liqueur versée dans la première branche AC jusqu'à une certaine hauteur LM, ne monte dans l'autre branche EH à une hauteur NO égale à la précédente. Car à cause du tuyau de communication CIKE, la colonne LC soulevera la colonne NG jusqu'à ce qu'elle lui fasse équilibre: ces deux colonnes étant égales en grosseur, il faudra qu'elles se trouvent aussi de même hauteur pour peser également; les deux tuyaux AC et EG pouvant être regardés comme les bassins d'une balance qui contiennent des poids égaux, et le tuyau de communication comme le fléau autour duquel les deux colonnes d'eau sont en équilibre, et par conséquent ont leurs surfaces de niveau (327). Une liqueur versée dans un siphon se met de niveau et en équilibre dans les deux branches, qu'elles soient de même grosseur ou non. FIGURE 3.

330. A l'égard du tuyau de communication, il est évident que sa longueur ne fait rien à l'équilibre des deux colonnes, et qu'on peut en faire abstraction, comme si les deux branches du siphon étaient contiguës et séparées seulement par un diaphragme; car tant que la communication sera horizontale, l'eau qu'elle contient ne pourra augmenter celle d'une des branches au préjudice de l'autre.

331. Si la première branche ABCD était plus petite que la seconde EFPQ, les colonnes d'une même liqueur KC et MP n'en seraient pas moins en équilibre entre elles; puisque, si l'on retranche par la pensée de la seconde colonne une autre MG, de même grosseur que la première, il est évident que celle-ci n'aura à combattre que la seule MG qui a même base qu'elle (327). Or comme la colonne MG sera en équilibre avec le reste de la liqueur de la branche EP, et aussi avec la colonne KC, cette dernière sera donc en équilibre avec toute la colonne MP. FIGURE 4.

332. Ce que nous venons de dire des liqueurs versées dans des siphons subsistera encore, quelque figure et quelque disposition qu'on donne à leurs branches; ce que l'on peut démontrer d'une manière générale, et par une voie des plus simples. Autre manière de démontrer qu'une liqueur versée dans un siphon, s'y met de niveau et en équilibre, de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

quelque grosseur et figure qu'en soient les branches.

PLANCHE I. FIG. 5, 6, 7 et 8.

Ayant un vaisseau ABCD rempli de quelque liqueur que ce soit jusqu'au niveau IK, imaginons que, dans ce vaisseau, il se forme avec la même liqueur un siphon de glace GEMNFHQPG servant de diaphragme. Il est évident que la liqueur que contiendra ce siphon doit être dans le même état qu'elle était auparavant d'être séparée de ce qui reste dans le vaisseau; mais comme, avant la formation du siphon, les parties de la liqueur qu'il contient étaient en équilibre entre elles, et les surfaces GE et FH de niveau, les mêmes choses subsisteront encore.

La liqueur renfermée dans le siphon n'ayant rien de commun avec celle qui reste dans le vaisseau, si on suppose que cette dernière soit anéantie, et que le siphon de glace soit changé en quelque autre matière, comme de cuivre ou de fer-blanc, on verra qu'une liqueur versée dans un siphon de figure quelconque se mettra de niveau dans les deux branches, et s'y maintiendra en équilibre, quelque inégale que soit la grosseur de ses branches (*bm*). Cependant, malgré cette loi de la nature, il y a des cas où les liqueurs ne laissent pas que de s'élever au-dessus de leur niveau, comme on en va juger.

Dans les tuyaux capillaires, l'eau s'élève au-dessus de son niveau.

333. Si l'on a un tuyau ouvert par les deux bouts, et qu'on en plonge une partie perpendiculairement dans l'eau, elle y entre et s'y maintient au niveau de la surface, puisqu'on peut la regarder comme une colonne qui est en équilibre avec celles de dehors, de la même manière qu'elle l'était avant d'être enfermée dans le tuyau (327). Mais ce qu'il y a de surprenant, c'est de voir que cela n'arrive point avec toutes sortes de tuyaux, et qu'aux

---

Principes de l'équilibre de la surface des fluides.

(*bm*) Les raisonnements présentés depuis l'art. 325 pour établir qu'un fluide incompressible et pesant est en équilibre quand sa surface est de niveau, sont loin d'être satisfaisants, et ne peuvent pas passer pour une démonstration. Cette proposition, comme tous les premiers principes, n'est pas facile à mettre à l'abri de toute objection, ainsi qu'on peut le voir dans le *Traité des fluides* de d'Alembert. Pour s'en rendre complètement raison, il faudrait développer les conséquences de la composition intime que les phénomènes conduisent à attribuer aux corps fluides. Ainsi en considérant ces corps comme composés de molécules qui en même temps tendent à s'approcher les unes des autres en vertu d'une force d'attraction inhérente à la nature de la matière, à s'écarter en vertu d'une force de répulsion due au principe de la chaleur, et que ces actions contraires maintiennent à de petites distances qui varient avec les intensités respectives de ces deux forces, on pourrait établir les lois de leur équilibre. On trouverait en général, la pression qui peut être exercée extérieurement contre la surface du fluide étant supposée nulle ou constante dans toute l'étendue de cette surface, que l'équilibre ne peut avoir lieu qu'autant que les forces appliquées à chaque molécule sont par-tout normales à la surface, et proportionnelles à la somme des valeurs inverses de ses deux rayons de courbure. Ainsi quand ces forces sont égales et parallèles, comme dans le cas d'un fluide pesant, la surface doit être plane et horizontale.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tuyaux *capillaires*, c'est-à-dire qui ont un fort petit diamètre, comme ceux que l'on emploie aux baromètres et thermomètres, l'eau y monte au-dessus du niveau de celle qui est dehors, et d'autant plus que le diamètre est petit.

Messieurs Geoffroy et Carré ont fait plusieurs expériences, rapportées dans les Mémoires de 1705, par lesquelles on connaît que l'eau s'est élevée de 10 lignes dans un tuyau de $\frac{1}{3}$ de ligne de diamètre, de 18 lignes dans un autre dont le diamètre était de $\frac{1}{6}$ de ligne, et de 30 dans un autre dont le diamètre n'était que de $\frac{1}{10}$ de ligne. Si on plonge les mêmes tuyaux dans d'autres liqueurs, elles ne s'y élèvent pas autant que fait l'eau.

Plusieurs savants ont donné de ce phénomène des explications différentes. La seule qui s'est rencontrée juste, est celle qui attribue l'élévation de l'eau dans ces sortes de tuyaux à l'adhérence de la même eau aux parois intérieures, contre lesquelles elle est en partie soutenue. Mais cette raison ne pouvait passer que pour une conjecture qui avait besoin d'une preuve qui la fît valoir à l'exclusion de tout ce qui avait été dit là-dessus, et M. Carré l'a donnée.

Raison de la propriété des tuyaux capillaires.

334. Nous venons de voir que toutes les colonnes d'eau tendent par leur pesanteur à descendre et à s'élever les unes les autres, et que ce n'est que l'égalité de leur force qui les met toutes de niveau (327). Or s'il arrivait qu'une de ces colonnes se trouvât moins pesante que les autres, aussitôt elle devrait être élevée au-dessus des autres, jusqu'à la hauteur nécessaire pour l'équilibre. Quand on met sur la surface de l'eau un tuyau capillaire, les gouttes d'eau comprises dans son ouverture s'attachant dans l'intérieur du petit cercle qui la forme, en sont soutenues en partie, et par conséquent d'autant moins pesantes par rapport à toute l'eau qui pèse librement sur le fond du vaisseau. Alors la colonne d'eau qui répond à l'ouverture du tuyau capillaire exerce moins sa pesanteur sur le fond du vaisseau, que les autres colonnes dont elle est environnée; ainsi ces dernières la doivent élever dans le tuyau capillaire, jusqu'à une hauteur où elle regagne par une plus grande quantité d'eau le poids qu'elle a de moins étant en partie soutenue par les gouttes d'eau qui sont adhérentes au tuyau. Il suit que plus le diamètre du tuyau est petit, plus l'eau qui est dedans doit s'élever au-dessus du niveau de l'autre, parce qu'ayant plus de surface à proportion, un plus grand nombre de gouttes d'eau y seront soutenues, et celles du milieu auront d'autant plus de point d'appui de la part des précédentes, que le tuyau est plus étroit. Le corps humain étant une machine hydraulique composée d'une infinité de tuyaux, qui sont presque tous capillaires, la connaissance de ces tuyaux est très-importante pour la perfection de l'anatomie (*bn*).

(*bn*) L'attraction du verre pour l'eau, ou la force avec laquelle ce fluide adhère

On renvoie à la Mécanique céleste

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les liqueurs montent d'elles-mêmes le long d'une bande d'étoffe, et sortent du vase où elles sont renfermées.

335. Voici encore une expérience qui paraît contraire à l'équilibre que les liqueurs gardent entre elles. Ayant un vase AB de figure arbitraire, dans lequel on a mis de l'eau ou toute autre liqueur jusqu'à une hauteur quelconque CD, si l'on prend une bande d'étoffe, qu'on la trempe dans de l'eau ou dans une pareille liqueur, et qu'ensuite on mette cette bande sur le bord du vase en sorte qu'une partie GH trempe dans la liqueur, et que l'autre FE soit hors du vase, et assez longue pour que son extrémité E soit au-dessous de la surface CD de la liqueur, on verra cette liqueur monter le long de la bande, se répandre goutte à goutte par l'extrémité E, et le vase se vider totalement si l'extrémité H atteint jusqu'au fond.

Pl. 1, Fig. 9.

Cette expérience est si commune, que les jardiniers s'en servent pour arroser continuellement des plantes qui ont besoin d'être entretenues humides; mais les chimistes en font un usage qui mérite d'être rapporté par sa singularité. Lorsqu'ils ont plusieurs liqueurs mélées qu'ils veulent séparer, ils trempent des bandes d'étoffe, chacune dans une de ces liqueurs pure, disposent ensuite ces bandes sur le bord du vase, et chacune distille la liqueur où elle a été trempée. Ce phénomène arrivant dans le vide comme dans le plein, on n'en a pas encore aperçu la cause, qu'on ne peut attribuer à une impression inégale de l'air extérieur et intérieur au vase (*bo*).

Avant de continuer ce que nous avons à dire sur les différents effets des liqueurs, il est à propos d'en déterminer le poids, et particulièrement celui de l'eau, afin d'être plus à portée d'entendre les calculs numériques par lesquels nous appliquerons la théorie à la pratique, pour en rendre les règles plus familières.

Manière de mesurer exactement la pesanteur spécifique des liqueurs. Figure 10.

336. Pour comparer les pesanteurs *spécifiques* de différentes liqueurs, on se sert d'un instrument appelé *aréomètre*, imaginé par M. Homberg. Il est composé d'une petite phiole E qui a deux goulets AB, DC fort étroits, mais dont le second doit l'être encore plus que le premier. On verse par

---

pour la théorie des phénomènes capillaires.

à la surface du verre quand il l'a mouillée, jointe à la force avec laquelle les molécules de l'eau s'attirent mutuellement, est sans doute la cause de l'élévation de l'eau dans les tubes capillaires. Mais cette explication vague ne suffit point pour rendre raison de ce genre de phénomènes. Leur véritable théorie, après diverses tentatives faites par des savants distingués, a été donnée pour la première fois par M. Laplace, dans le *Supplément au* 10^e^ *livre de la mécanique céleste*. C'est dans cet ouvrage qu'il faut l'étudier, si l'on ne se contente point des expositions élémentaires de cette théorie qui ont été insérées depuis dans les traités de physique.

Remarque sur le mécanisme de l'élévation de l'eau le long d'une étoffe.

(*bo*) L'action de l'air n'entre pour rien dans ce phénomène, dont la cause est l'attraction de la matière de l'étoffe pour l'eau. Le fluide monte le long de l'étoffe et retombe par son extrémité inférieure, comme il ferait par un tube capillaire disposé en syphon.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'ouverture A, avec un entonnoir F, la liqueur qu'on veut peser, laquelle, à mesure qu'elle tombe dans la capacité E, en chasse l'air par le tuyau CD. On marque exactement un endroit G sur le goulet AB où la liqueur arrive, et ayant pesé la fiole avec cette liqueur dans de bonnes balances, on en retranche le poids de l'aréomètre vide, ce qui donne le poids de la liqueur qu'on y a versée. On vide ensuite l'aréomètre, et l'ayant bien nettoyé, on le remplit jusqu'à la même marque G d'une autre liqueur qu'on pèse comme la première, pour avoir le rapport de leurs pesanteurs spécifiques; et ainsi des autres.

On a beaucoup perfectionné les instruments dont on se sert pour connaître les pesanteurs spécifiques de différentes liqueurs. Celui dont on se sert le plus communément pour cet usage se nomme *pèse-liqueur*, et n'est autre chose qu'une espèce de sphéroïde de verre surmonté d'un tuyau creux, dans lequel est renfermée une échelle divisée en degrés. Au bas du sphéroïde, il y a un autre petit vaisseau de verre soudé au premier, et dans lequel on a renfermé une petite masse de mercure fluide, qui y a été introduite avant de le fermer hermétiquement. Le but de ce petit poids additionnel est principalement de tenir le pèse-liqueur dans une situation verticale, lorsqu'il est plongé dans un fluide. Le poids de ce pèse-liqueur étant toujours le même, dans quelque fluide qu'il soit plongé, et d'ailleurs le volume du fluide déplacé étant aussi toujours égal à la partie du pèse-liqueur enfoncée dans le fluide, il est visible que plus ce volume est grand, ou, ce qui revient au même, plus le pèse-liqueur s'enfonce, moins la pesanteur spécifique du fluide est grande. On connaît donc par les divisions enfermées dans le tube le rapport des pesanteurs spécifiques des différents fluides (*bp*).

(*bp*) On peut voir dans la *Nouvelle architecture hydraulique*, t. 1, p. 292, la théorie de l'aréomètre que Bélidor vient de décrire. Cet instrument, ou plutôt la manière de s'en servir, ont été modifiés par Fahrenheit, dont il a pris le nom. Le tube dont le sphéroïde de verre est surmonté porte à son extrémité supérieure un petit bassin. Sur ce tube est une marque très-fine, et dans chaque expérience on met dans le bassin les poids nécessaires pour faire enfoncer l'instrument jusqu'à cette marque, de manière que le volume de fluide déplacé est constant. Cela posé, en nommant P le poids de l'instrument, p, p' les poids ajoutés dans le bassin dans deux expériences, il est évident que le rapport des pesanteurs spécifiques des deux fluides essayés sera $\frac{P+p}{P+p'}$. Sur l'aréomètre

Cela suffit pour des recherches dans lesquelles on n'a pas besoin d'une grande précision, mais il n'en serait pas de même pour des expériences de physique délicates. Il faut alors que le poids P de l'instrument soit son poids absolu, c'est-à-dire pris dans le vuide, ou augmenté du poids de l'air qu'il déplace. De plus on doit, dans les diverses expériences, tenir compte des variations que le volume

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Un vase rempli d'une même liqueur en contient plus en hiver qu'en été.

337. Comme les liqueurs sont sujettes à se dilater dans le chaud, et à se resserrer dans le froid, M. Homberg rapporte des expériences sur le poids des liqueurs, où il marque combien elles ont pesé dans la plus grande chaleur de l'été et dans le plus grand froid de l'hiver, afin que par-là on puisse savoir, à peu de chose près, la différence qu'il pourra y avoir de ces deux extrémités, au temps dans lequel on veut se servir de l'aréomètre.

338. Pour l'intelligence de cette table, on remarquera que la livre vaut 2 marcs ou 16 onces, l'once 8 gros ou 8 dragmes, le gros 3 deniers ou scrupules, et le denier 24 grains; ainsi le gros vaut 72 grains. J'ajouterai que le quintal est un poids de 100 liv., que le tonneau, en terme de marine, pèse 2000 liv., la barrique 500 liv., et que le leste est de deux tonneaux ou de 4000 liv..

En France, on parle par tonneau, pour exprimer le port des vaisseaux: quand on dit qu'un vaisseau est du port de 100 tonneaux, on entend qu'il peut porter une charge de 200000 liv..

---

de l'aréomètre éprouve par le changement de la température. Enfin la densité des fluides étant aussi susceptible de varier avec la température, il faut, d'après la connaissance que l'on a de leur dilatation, ramener les résultats à une certaine température fixe. On peut voir sur ce sujet le tome 1 du *Traité de physique* de M. Biot, page 412 et suivantes.

On a joint à la table rapportée par l'auteur, dans l'art. 338, deux colonnes extraites de la table de M. Brisson, et contenant des pesanteurs spécifiques déterminées très-exactement, à la température moyenne de Paris. Les nombres de la dernière colonne expriment le poids du centimètre cube de chaque matière en grammes, et en avançant la virgule de trois rangs vers la droite, on a le poids du mètre cube en kilogrammes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Table du poids de plusieurs liqueurs d'usage, pour un pouce cubique.

NOMS DES LIQUEURS.	Pour l'été.			Pour l'hiver.			Colonnes ajoutées d'après la table de M. Brisson.			
							Poids du pouce cube.			Pesant. spécifique.
	onc.	gros.	grains.	onc.	gros.	grains.	onc.	gros.	grains.	
Mercure	8	5	60	8	6	8	8	6	25	13,5681
Huile de vitriol (acide sulfurique).	0	7	59	0	7	71	1	1	39	1,8409
Esprit de vitriol	0	5	33	0	5	38				
Esprit de sel (acide muriatique)	0	5	49	0	5	55	0	6	14	1,1940
Esprit de nitre	0	6	24	0	6	44				
Eau-forte (acide nitrique)	0	6	23	0	6	35	0	6	43	1,2715
Esprit de soufre	0	5	34	0	5	39				
Vinaigre commun	0	5	15	0	5	21	0	5	18	1,0135
Vinaigre distillé	0	5	11	0	5	15	0	5	17	1,0095
Vin de Champagne	0	4	66	0	4	70	0	5	13	0,9979
Vin de Bourgogne	0	4	67	0	4	75	0	5	10	0,9915
Eau-de-vie	0	4	48	0	4	57	0	4	53	0,9131
Esprit-de-vin (alcool du commerce).	0	4	32	0	4	42	0	4	25	0,8371
Bierre blanche	0	5	1	0	5	9	0	5	22	1,0231
Bierre rouge	0	5	2	0	5	7	0	5	26	1,0338
Cidre	0	5	0	0	5	6	0	5	20	1,0181
Lait de vache	0	5	20	0	5	25	0	5	25	1,0324
Lait de chèvre	0	5	24	0	5	28	0	5	26	1,0341
Lait d'ânesse	0	5	17	0	5	21	0	5	27	1,0355
Petit-lait	0	5	14	0	5	19	0	5	20	1,0193
Urine	0	5	14	0	5	19	0	5	17	1,0106
Esprit d'urine	0	5	45	0	5	53				
Huile de tartre (potasse)	0	7	27	0	7	43	0	7	41	1,4594
Huile d'olives	0	4	53	Ces deux huiles congelées n'ont pu entrer dans l'aréometre.			0	4	54	0,9153
Huile d'amandes	0	4	52				0	4	54	0,9170
Huile de térébenthine	0	4	39	0	4	46	0	4	37	0,8697
Eau de mer	0	6	12	0	6	18	0	5	23	1,0263
Eau de rivière	0	5	10	0	5	13	0	5	13,4	1,00015
Eau de pluie	0	5	11	0	5	14	0	5	13 $\frac{1}{3}$	1,0000
Eau distillée	0	5	8	0	5	11	0	5	13 $\frac{1}{3}$	1,0000

Autre Table de plusieurs liqueurs les plus utiles, pour un pied cubique, tirée de la précédente.

NOMS DES LIQUEURS.	En été.		En hiver.		D'après la table de M. Brisson.		
	livres.	onces.	livres.	onces.	livres.	onces.	gros.
Mercure	942	14	946	10	949	12	2
Vinaigre commun	70	5	71	7	70	15	1
Vin de Champagne	66	6	67	2	69	13	5
Vin de Bourgogne	66	9	68	1	69	6	4
Eau-de-vie	63	0	64	11	63	14	5
Bierre blanche	67	11	69	3	71	9	7
Bierre rouge	67	14	68	13	72	5	7
Cidre	67	8	68	10	71	4	2
Huile d'olives	63	15			64	1	1
Eau de mer	83	4	84	6	71	3	3
Eau de rivière	69	6	69	14	70	0	1
Eau de pluie	69	9	70	2	70	0	0

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En France un certain volume d'air pèse en hiver le double de ce qu'il pèse en été.

339. Quoique l'air ne doive pas être mis au rang des liqueurs, puisqu'il est un fluide et non pas un liquide, j'ajouterai cependant qu'en France un pied cube d'air pèse en été 7 gros 9 grains, et en hiver 14 gros 19 grains. Ainsi en hiver il pèse à peu-près le double de ce qu'il pèse en été, selon les expériences de M. Homberg, comme nous le ferons voir dans le quatrième chapitre (*bq*).

Expériences de divers auteurs sur le poids de l'eau douce.

340. Comme le poids de l'eau nous intéresse plus que celui de toutes les autres liqueurs, par le fréquent usage que nous en ferons par la suite, voici le résultat de plusieurs expériences qui ont été faites à ce sujet.

M. Mariotte, dans son *Traité du mouvement des eaux*, rapporte qu'il a trouvé qu'un pied cube d'eau douce pèse 70 liv.

On le déduit des expériences de M. Roëmer de 69 liv. 12 onces.

De celles de M. Homberg de 69 liv. 10 onces, pris moyennement.

De celle de M. l'abbé Picard de 69 liv. 9 onces, 3 dragmes, 20 grains.

De celles de MM. de la Hire et Boulduc, de 69 liv. 1 once, 4 dragmes, 20 grains.

Ces variétés viennent sans doute des différentes températures de l'air dans le temps que ces expériences ont été faites.

Le poids le plus ordinaire d'un pied cube d'eau douce est de 70 liv.

Nous prendrons avec M. Mariotte le poids d'un pied cube d'eau douce de 70 liv. Je n'ai pas fait difficulté de le supposer quelquefois de 70 liv. $\frac{1}{2}$

Valeur exacte de la pesanteur spécifique de l'air.

(*bq*) La pesanteur de l'air a été déterminée dans ces derniers temps avec beaucoup plus d'exactitude. En prenant pour unité le poids de l'eau distillée à son maximum de densité (lequel n'a pas lieu à la température de la glace fondante, mais à quelques degrés au-dessus), le poids de l'air sec à la température de la glace fondante, la hauteur du mercure dans le baromètre étant $0^m,76$, est 0,0012979. Par conséquent le mètre cube d'air pèse dans ces circonstances 1,2979 kilogramme.

On sait ensuite que si la hauteur du mercure dans le baromètre varie, le poids de l'air varie dans le rapport inverse; et que si la température baisse ou s'élève, ce poids, en représentant sa valeur à zéro par p, devient à la température n, comptée à partir de zéro en degrés du thermomètre centigrade, égal à $p(1 \pm 0{,}00375\,n)$.

Ainsi, le baromètre marquant toujours $0^m,76$, le poids d'un mètre cube d'air, à la température moyenne de 12° centigrades, deviendra $1{,}2979(1 - 12 \times 0{,}00375) = 1{,}2395$ kil. Cela revient pour un pied cube à $0^{liv.},086796$, ou 1 once 3 gros 8 grains.

Dans l'atmosphère l'air n'est jamais ou presque jamais parfaitement sec. Le mélange de vapeurs aqueuses qu'il contient diminue un peu son poids. On trouvera dans le 2e volume toutes les notions nécessaires pour soumettre ces circonstances au calcul. Je remarquerai seulement ici qu'en supposant que l'air contînt à 12° centigrades la plus grande quantité de vapeur possible, le poids du mètre cube, qu'on vient de trouver de 1,2395 kil., se trouverait réduit à 1,2286 kilogramme. Si la température était plus élevée, la diminution serait beaucoup plus sensible.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou $\frac{1}{4}$, selon que j'en ai tiré plus de facilité pour dresser les tables qu'on trouvera par la suite, ayant cru pouvoir en user de la sorte dans le calcul des machines mises en mouvement par l'action des courants, sans tomber dans aucune erreur sensible, vu que M. de la Hire, et après lui M. Pitot, l'ont supposé de 72 liv., pour éviter l'embarras que donnent les fractions.

Poids des différentes mesures qui sont en usage pour le calcul des eaux.

341. Le pied cube d'eau pesant 70 liv., le pied *cylindrique* pesera 55 liv..

Une colonne d'eau qui aurait un pouce quarré de base sur un pied de hauteur, étant la cent quarante-quatrième partie d'un pied cube, pesera 7 onces, 6 gros, 16 grains. Par la même raison, une colonne qui aurait pour base un cercle d'un pouce de diamètre, et pour hauteur un pied, pesera 6 onces et 64 grains; mais nous l'estimerons de 6 onces et un gros, pour nous en servir plus commodément, la différence de 8 grains ne méritant point qu'on en tienne compte, vu qu'elle n'aurait pas lieu si le pied cylindrique était estimé de 55 liv. 2 onces, ou le pied cube de 70 liv. 2 onces et environ 4 gros.

La toise cubique d'eau pesera 15120 liv..

La toise cylindrique 11880 liv..

Le pouce cubique 5 gros et 13 grains.

Le pouce cylindrique 4 gros et 5 grains.

La pinte de Paris, d'eau douce, pèse 31 onces 64 grains; mais on l'estime ordinairement de 2 liv., la différence n'étant que de 8 grains. Ainsi le pied cube d'eau contient 35 pintes.

Le muid d'eau contient 8 pieds cubes, et pèse 560 liv.; il contient par conséquent 280 pintes.

Le pouce d'eau est une mesure de 14 pintes, ou de 28 liv. d'eau écoulée dans le temps d'une minute.

342. Pour estimer la quantité d'eau que fournit continuellement une fontaine ou une machine, on se sert d'une mesure que l'on nomme communément *pouce d'eau*, qui est principalement en usage parmi les fontainiers : *cette mesure est de* 14 *pintes*, *ou de* 28 liv. *d'eau écoulée pendant une minute*. Par exemple, si l'on avait une machine qui fît monter au réservoir dans chaque minute 140 liv. d'eau, ou 70 pintes, ou deux pieds cubes; divisant le premier nombre par 28, ou le second par 14, le quotient donnera 5 pour la quantité de pouces d'eau que fournit cette machine (*br*).

Sur les diverses évaluations du pouce d'eau.

(*br*) Pour mettre le lecteur à même d'entendre les divers ouvrages d'hydraulique où il est question du *pouce d'eau*, il est nécessaire d'entrer ici dans quelques détails.

Les premiers fontainiers qui ont adopté cette mesure, entendaient par pouce d'eau le produit d'un orifice d'*un pouce circulaire*, percé dans un paroi mince, le niveau du réservoir étant maintenu à *une ligne* au-dessus du sommet de l'orifice. Mariotte ayant recherché par l'expérience la valeur de ce produit, la fixa à 14 *pintes pesant* 2 *livres chacune par minute* (*Traité du mouvement des eaux*, page 260), ce

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le poids d'un pied cube d'eau est à celui d'un pied cube de mercure, à-peu-près dans le rapport de 2 à 27.

343. Si, en suivant la seconde table, on prend le rapport du poids de l'eau à celui du mercure, comme 70 est à 946, qui est à-peu-près celui de 2 à 27, il faudra, pour qu'une colonne d'eau soit en équilibre avec une colonne de mercure de même base, que la hauteur de la première soit à celle de la seconde, comme 27 est à 2, ou comme $13\frac{1}{3}$ est à 1; *ainsi ayant une colonne de mercure d'un pied de hauteur, il faut, pour que la colonne d'eau de même base lui fasse équilibre, qu'elle ait* 13 *pieds* 4 *pouces de hauteur* (*bs*).

SECTION II.

De l'action verticale de l'eau contre les parois des vaisseaux qui la contiennent.

Une des propriétés des liqueurs qu'il importe le plus de bien développer, est l'effort qu'elles font en tout sens contre les parois des vais-

---

qui est le résultat adopté par Bélidor, et revient à 576 pieds cubes en 24 heures. On voit d'ailleurs, par le texte du *Traité du mouvement des eaux*, que Mariotte savait que cette évaluation surpassait un peu le véritable produit de l'orifice indiqué ci-dessus.

Couplet a ensuite appelé *pouce d'eau* un produit par minute de $13\frac{1}{3}$ pintes, ayant chacune 48 pouces cubes (*Mémoires de l'Académie des sciences*, 1732).

Une évaluation assez généralement admise dans ces derniers temps était celle de 14 pintes par minute valant chacune 48 pouces cubes, ce qui revient à 560 pieds cubes $= 19^{m.c},19527$ en 24 heures.

M. Perronet dans son mémoire sur l'Yvette, et M. Gauthey dans ses jauges pour le canal du centre, prennent pour le pouce d'eau 72 muids de 8 pi. cubes, ou 576 pi. cub. $= 19^{m.c},7437$ en 24 heures, conformément à l'estimation de Mariotte, adoptée par Bélidor.

M. Bossut ayant recherché par une expérience exacte le véritable produit du pouce d'eau, l'a trouvé de 628 pouces cubes en une minute (*Hydrodynamique*, tome 2, page 30), ce qui revient à $17^{m.c},9388$ en 24 heures.

Ce qu'on appelle la *ligne d'eau* est la 144^{e} partie du pouce. Le *point d'eau* est la 144^{e} partie de la ligne. M. de Prony a donné dernièrement des remarques sur l'analogie du pouce d'eau avec l'*once d'eau* qui est la mesure actuellement usitée à Rome, et le *quinaire* antique, et fait voir que la première de ces mesures avait vraisemblablement été formée à l'imitation des deux autres, dont elle ne diffère pas beaucoup par sa valeur absolue (*Annales de Chimie*, 1816, t. 3).

Valeur exacte le la densité du mercure.

(*bs*) Le véritable rapport du poids du mercure à celui de l'eau est, à une température moyenne, conformément au résultat que j'ai inséré dans les tables ci-dessus, celui de 13,5681 à 1. Ce résultat, eu égard à la variation que la densité du mercure subit quand la température change, s'accorde avec ceux que des expériences très-précises ont donnés depuis. Le rapport précédent est aussi celui des hauteurs des colonnes d'eau et de mercure qui se font réciproquement équilibre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

seaux qui les renferment; ce qui vient du mouvement perpétuel de leurs parties, qui, étant détachées les unes des autres, ne cherchent qu'à s'échapper. La cause de ce mouvement, comme je l'ai déja dit, n'a pas encore été bien expliquée; mais sans nous en mettre en peine, le fait nous suffit, ne voulant point entrer dans une dissertation physique, qui ne ferait que nous distraire de notre objet principal, sans nous éclairer davantage (*bt*).

Manière de calculer l'effort d'une puissance appliquée à un piston. Pl. 1, Fig. 11.

344. Ayant un tuyau droit ABCD ouvert par les deux bouts, maintenu fixe contre une surface verticale, je dis que si on introduit dans ce tuyau par le bout d'en bas un piston GHI, pour lui servir de fond, et qu'on verse de l'eau jusqu'à une hauteur quelconque EF, la puissance appliquée à ce piston soutiendra un poids égal à celui de la colonne d'eau renfermée dans le tuyau.

Si l'on fait attention que les liqueurs ont cela de propre, que le mouvement de leurs parties en tout sens et l'effort qu'elles font de côté pour se dérober à la pression de celles dont elles sont chargées, ne diminue rien de l'action de leur pesanteur, qui les fait tendre vers le centre de la terre comme tous les autres corps, on verra que la puissance P se trouvant dans la ligne de direction KL tirée du centre de gravité de la colonne GEFH, ne peut empêcher cette colonne de descendre sans en soutenir tout le poids.

Une autre preuve encore que cette puissance est en équilibre avec le poids de la colonne d'eau qu'elle soutient, c'est que si elle poussait le piston de bas en haut pour le faire monter, cela ne pourrait arriver sans que la colonne d'eau n'eût la même vîtesse, par conséquent la même quantité de mouvement (89).

Pour estimer l'effort que fait la puissance, nous supposerons que le

---

Remarque sur la supposition d'un mouvement perpétuel dans les molécules des fluides.

(*bt*) Je ne puis passer sous silence cette assertion de l'auteur, que la pression des fluides contre les parois des vases vient *du mouvement perpétuel de leurs parties*. On imaginait effectivement autrefois que les fluides étaient composés de molécules dans une agitation continuelle, et on peut voir encore des traces de cette idée au commencement de la section 10^{e} de l'*Hydrodynamique* de Daniel Bernouilly. Mais indépendamment de ce que l'assertion de Bélidor est probablement très-fausse en elle-même, elle est ici d'autant plus déplacée qu'il s'agit des fluides incompressibles, tandis que l'hypothèse que je viens d'indiquer avait été faite pour les fluides élastiques, dont on croyait expliquer par-là la force d'élasticité.

Inexactitude des démonstrations des art. 344, 355 et 369.

J'observerai ici que les démonstrations suivantes manquent d'exactitude et de rigueur, particulièrement celles des art. 344, 355 et 369; mais, sauf les cas où le texte pourrait induire en erreur, je ne m'arrêterai point à chacun de ces endroits, préférant donner en peu de mots dans la note (*bx*) les notions exactes qu'il est nécessaire d'établir sur cette matière.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diamètre du tuyau ou celui du piston est de 5 pouces, et que la hauteur EG est de 18. Les superficies des cercles étant comme les quarrés de leurs diamètres, on peut, en se servant du poids d'un pied cylindrique d'eau, que nous avons trouvé de 55 liv. (341), dire : comme le quarré de 12 est au quarré de 5, ou comme 144 est à 25, ainsi 55 est à un quatrième terme, qu'on trouvera de 9 livres 8 onces 6 gros et $\frac{2}{9}$, pour le poids d'un cylindre d'eau qui aurait pour base un cercle de 5 pouces de diamètre, et pour hauteur un pied. Mais comme la colonne dont il s'agit a un pied et demi de hauteur, son poids sera donc de 14 livres, 5 onces 1 gros $\frac{1}{3}$.

Pl. 1, Fig. 12.

345. On remarquera que si le cercle GH du piston était plus petit que le fond AD, la puissance P ne soutiendrait plus que le poids de la colonne d'eau LIKM, qui a pour base le cercle du piston et pour hauteur celle du niveau de l'eau au-dessus du même piston, puisqu'il ne peut soutenir que les filets d'eau auxquels il sert d'appui, tous les autres qui font la différence des colonnes AEFD et LIKM étant appuyés sur le fond AD. On peut ajouter que si la puissance faisait jouer le piston pour élever la colonne qu'elle soutient, elle aurait plus d'aisance que si cette colonne était renfermée dans un tuyau où il faudrait surmonter la résistance que peut causer le frottement, ou pour mieux dire la friction de l'eau contre ses parois.

Ces exemples nous serviront dans la suite pour calculer l'effort d'une puissance appliquée à une pompe refoulante. Comme les autres qu'on va voir ne sont pas rapportés sans dessein, je prie ceux qui font peu de cas des détails de ne point trouver à redire s'il paraît que j'y entre un peu trop.

L'eau pousse de bas en haut avec une force déterminée les corps qui l'empêchent de monter à son niveau.

Figure 13.

346. Ayant un syphon composé de deux branches AB, CD de même diamètre, qu'il y ait dans la seconde un piston ILK, placé à une hauteur déterminée IK; versant de l'eau dans la première branche jusqu'à la hauteur EF, elle ne pourra se mettre de niveau dans la seconde, à cause de l'obstacle que présente le piston. Si l'on tire la ligne horizontale GK, les colonnes AH et MK ayant leurs surfaces de niveau, seraient en équilibre, si elles faisaient un effort égal sur leur base pour se surmonter l'une l'autre. Mais comme la première soutient tout le poids de la colonne GF, celle AF, qui est composée des deux, étant plus haute que l'autre MK, poussera, avec le poids de la partie GF, cette dernière de bas en haut, pour la faire monter au niveau EQ. Ainsi faisant abstraction du frottement et de la pesanteur du piston, il faudra, pour empêcher qu'il ne cède à l'effort que fait la colonne MK pour s'élever, qu'il soit chargé d'un poids égal à celui de la colonne GF; ce qui est trop naturel pour avoir besoin d'autre preuve.

Une petite colonne, ou un filet

347. Nous avons vu (331) que, quoique les branches d'un syphon

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fussent d'inégale grosseur, l'eau de la petite OQ n'en était pas moins en équilibre avec celle de la grosse MK, dès que leurs surfaces étaient de niveau, parce que la petite colonne est en équilibre avec toutes celles dont la grosse est composée. Si l'on verse de l'eau dans le petit tuyau RO jusqu'à la hauteur N, la colonne NO fera effort pour élever toutes celles de la branche MK jusqu'au niveau EQ, lesquelles pousseront le piston IK de bas en haut avec autant de force que le faisait la colonne GF. Par conséquent il faudra, pour maintenir le piston à la hauteur IK, qu'il soit encore chargé d'un poids égal à celui de cette colonne.

d'eau, peut élever un corps fort pesant.

Pl. 2, Fig. 14.

Comme la grosseur de la branche NO est indifférente, on voit que si elle était réduite à ne contenir qu'un filet d'eau, ce filet seul soutiendrait en équilibre le poids dont le piston est chargé; ce qui est aisé à démontrer.

Nous supposerons que la superficie du cercle du filet NQ est la millième partie de celle du diamètre GH ou IK; ainsi la pesanteur de ce filet sera la millième partie de la colonne GF, ou du poids dont le piston est chargé. Si l'on suppose que le piston descende de la hauteur d'une ligne, cela ne pourra arriver sans qu'il ne passe dans le tuyau OR mille petites colonnes qui auront chacune une ligne de hauteur, et pour diamètre celui du filet NQ, et sans que ce filet ne monte dans le tuyau, et ne fasse dans le même temps un chemin mille fois plus grand que celui qu'aura fait le piston; d'où il suit que le poids du filet et celui du piston étant dans la raison réciproque de leurs vîtesses, ces deux poids sont en équilibre (89).

Il suit que si le filet NQ avait 10 pieds de hauteur, et le piston IK un pied de diamètre, il faudrait que le poids dont le piston serait chargé fût de 550 liv. pour être en équilibre avec ce filet, quand même il ne contiendrait que la pesanteur d'une once d'eau; c'est pourquoi cette machine est nommée levier d'eau.

348. Un seul filet d'eau pouvant être en équilibre avec une infinité d'autres unis ou séparés, on remarquera qu'ayant un tuyau FN, plus gros dans le bas que dans le reste de sa hauteur, pour y adapter tout autour une quantité d'autres petits tuyaux AB, répondants à un cylindre DE, fermé par un piston; versant de l'eau par l'orifice F pour remplir tous ces tuyaux et leurs cylindres; le filet GN ayant 10 pieds de hauteur et chaque cylindre un pied de diamètre, ce filet seul soutiendra autant de fois 550 liv. que cette machine, qui ressemble assez à un lustre, aura de branches.

Figure 15.

Puisque la longueur et la grosseur du tuyau de communication OM (fig. 14) ne contribue qu'indirectement à l'effet que nous avons décrit dans l'article 329, on peut supprimer ce tuyau (330), et faire voir les mêmes choses avec une machine encore plus simple que le syphon.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pl. 2, Fig. 16.

L'effort d'une puissance qui soutient un piston, est toujours égal au poids de la colonne d'eau qui aurait pour base le cercle du piston, et pour hauteur celle du niveau de l'eau au-dessus du même piston.

349. Il s'agit d'un cylindre ABCD attaché à une surface verticale, ayant pour fond le cercle KL d'un piston, et fermé par le haut avec une plaque de métal, soudée de façon à ne pouvoir être détachée, quelque effort qu'elle ait à soutenir. Au milieu est un trou répondant à un tuyau FE, qui n'aura, si l'on veut, qu'une ligne de diamètre. Je dis que si l'on remplit avec de l'eau ce cylindre et le tuyau sur la hauteur EG, la puissance appliquée au piston soutiendra un poids égal à celui d'une colonne KHIL, qui aurait pour base le cercle du piston, et pour hauteur celle du filet GN.

Pour le prouver, remarquez que le filet GN étant plus haut que tous les autres OR renfermés dans le cylindre LBCL, ces derniers tendant à s'élever au niveau HI, pousseront la surface BC de bas en haut, avec une force égale au poids de la colonne BHIC, moins la pesanteur du filet GE.

Si l'on fait attention qu'une puissance, de quelque nature qu'elle soit, ne peut faire aucun effort, en poussant ou en pressant un corps, sans un point d'appui, qui est toujours chargé de l'effort que fait cette puissance, on verra que tous les filets comme OR ayant pour appui le cercle du piston, ne pourront pousser de bas en haut la surface BC qu'ils ne poussent de haut en bas avec la même force le fond KL. Par conséquent la puissance aura à soutenir l'action d'une force égale au poids d'une colonne d'eau, telle que BHIC; et comme d'autre part elle soutient réellement le poids de celle qui est contenue dans le cylindre KBCL, elle soutiendra donc l'action d'une force équivalente au poids de la colonne KHIL.

On peut ajouter, pour seconde preuve, que si le cercle du filet GN était la millième partie de celui du piston, la puissance ne pourrait faire descendre ce piston d'une ligne, sans que le niveau G du filet GN ne fît en descendant un chemin mille fois plus grand; et comme dans l'état d'équilibre, le poids de ce filet et la puissance P doivent être dans la raison réciproque de leurs vîtesses, ou des espaces parcourus dans le même temps (89), il suit qu'il faut nécessairement que la puissance soit équivalente au poids d'un filet mille fois plus grand que celui de GN, ou à celui de la colonne d'eau KHIL.

Figure 17.

Supposant le cylindre ABCD semblable en tout au précédent, avec cette différence seulement que le tuyau, au lieu d'être situé sur le fond supérieur BC soit adapté à la surface BA, je dis qu'il arrivera encore la même chose. Pour en être convaincu, il faut prolonger la ligne horizontale NM, et prendre la ligne MQ pour un diaphragme qui partage le cylindre KBCL en deux parties. Si l'on regarde les tuyaux FN et MBCQ comme les branches d'un syphon dont NM est la communication, le seul filet d'eau GN sera cause que tous ceux dont la branche MBCQ est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

composée, pousseront de bas en haut la surface BC, avec une force égale au poids de la colonne d'eau qui aurait pour base le cercle BC et pour hauteur GE ou HB (347). Mais comme nous venons de voir que cela ne peut arriver sans que le fond MQ ne soit pressé de bas en haut par une force équivalente au poids de la colonne MHIQ, si l'on supprime le diaphragme MQ, la pression précédente n'ayant alors d'autre appui que le cercle KL du piston, qui est aussi chargé du poids de l'eau comprise dans la partie KMQL, le piston soutiendra un poids égal à celui de la colonne d'eau KHIL.

350. Il suit de l'article précédent, que si l'on a un vaisseau AH, semblable à l'étui d'un miroir de toilette, bien fermé de toute part, et qu'à une des petites faces EH on ait adapté un tuyau recourbé KNF, versant de l'eau par l'orifice F pour remplir le vaisseau et le tuyau jusqu'à la hauteur G, le seul filet GN fera que le fond ARQE sera pressé par un poids équivalent à celui de l'eau que pourrait contenir le parallélepipède AMPQ, qui aurait ce fond pour base, et pour hauteur celle du niveau G de l'eau du tuyau au-dessus du même fond; et que la surface supérieure sera poussée de bas en haut avec une force égale au poids de l'eau que peut contenir le parallélepipède CMOD. Pl. 2, Fig. 18.

351. Comme la distance DE des deux surfaces opposées RE et BH est indifférente à l'action de l'eau qui pousse la seconde de bas en haut, on voit qu'on les peut approcher l'une de l'autre aussi près que l'on voudra, pourvu qu'elles ne se touchent point; l'eau du tuyau fera toujours son effet. Par conséquent, dans ce cas-ci comme dans les précédents, ce n'est pas la quantité de l'eau dont on se sert qui en augmente l'action, laquelle ne dépend que de son élévation dans le tuyau, et de l'étendue de la base sur laquelle elle est répandue. La force de l'eau qui agit selon une direction verticale ne dépend pas de sa quantité, mais seulement de sa hauteur, et de l'étendue de la surface qu'elle pousse.

Supposant que les surfaces CD et AQ soient chacune d'une toise quarrée, et si près l'une de l'autre qu'on puisse faire abstraction de leur intervalle, donnant 24 pieds de hauteur au filet GN, chaque surface sera poussée dans un sens opposé par une force de 60480 liv., et, ce qu'il y a de plus surprenant, c'est qu'un tel effet peut être produit par le seul poids de 3 ou 4 onces d'eau.

352. Il faut avouer qu'il n'y a rien dans la nature qui soit plus digne d'admiration et qui tienne plus du merveilleux que cette propriété des liqueurs, dont il n'est pas aisé de persuader la plupart des gens, quoique fort éclairés sur toute autre chose, comme je l'ai éprouvé dans plusieurs occasions. Cependant c'est un fait attesté par l'expérience, et auquel la raison ne peut rien opposer de solide; j'en ai fait plusieurs de différentes espèces, en voici une qui suffira pour juger des autres. Expérience sur la poussée de l'eau.

Je me suis servi de deux planches ayant chacune un pied en quarré

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sur 30 lignes d'épaisseur : les ayant placées l'une au-dessus de l'autre à la distance de 3 pouces, j'ai cloué tout autour une bande de cuir, en appliquant du *calfas* sur les bords, et en ai formé une espèce de soufflet qui avait la figure d'un parallélepipède. Après avoir pris toutes les précautions convenables pour empêcher que l'eau dont il devait être rempli ne pût s'échapper par les côtés, on a attaché horizontalement et d'une manière inébranlable la surface supérieure à une poutre posée sur deux appuis, de façon qu'on pouvait faire jouer le fond inférieur de bas en haut. Aux quatre coins de ce fond étaient des anneaux de fer répondans à des cordes suspendues à un bras de balance. Ensuite on a chargé l'autre bras autant qu'il le fallait pour que le fond inférieur de la machine fût appliqué contre le supérieur. Ce dernier était percé de deux trous, à l'un desquels était adaptée verticalement une fontaine ou robinet qui devait être ouvert seulement pour laisser évacuer l'air, lorsqu'on versait l'eau qui devait entrer dans le soufflet. A l'autre était un tuyau de cuivre, ayant intérieurement 3 lignes de diamètre sur 10 pieds de hauteur, attaché le long d'une solive arrêtée solidement par ses deux bouts.

La question était de savoir si, en versant de l'eau dans le tuyau elle enleverait un poids de 700 liv., qui est celui d'une colonne d'eau qui aurait un pied quarré de base et 10 pieds de hauteur. C'est ce qui est arrivé dès qu'on a eu versé environ 3 pintes d'eau. On remarquait même que la vîtesse du poids devenait plus sensible à mesure qu'il s'élevait; car comme en versant de l'eau on avait soin d'entretenir toujours plein un entonnoir soudé au sommet du tuyau, l'eau dont le soufflet se remplissait augmentait par son poids l'action de celle du tuyau.

Explication de la cause qui fait bomber les radiers des grandes écluses.

353. On ne doit plus s'étonner si l'on voit quelquefois les radiers des écluses se bomber, c'est-à-dire s'élever dans leur milieu, comme cela est arrivé aux grandes écluses de Mardick quelque temps avant leur démolition, ce qui était cause qu'on ne pouvait manœuvrer les portes d'aval qu'avec de grandes difficultés. J'ai vu d'habiles gens fort en peine pour en découvrir la cause; et comme elle n'était point sensible, ils l'attribuaient à des circonstances fort éloignées.

Comme les portes du côté du canal soutenaient souvent jusqu'à 22 et 23 pieds d'eau, tandis que la mer était basse, il arrivait que simples filets passant sous le seuil et venant à s'insinuer et à se répandre sous le radier, et même sous la fondation de l'étendue des sas, cette eau ne trouvant point d'issue pour s'échapper, poussait de bas en haut tout ce qui l'empêchait de monter au niveau du canal, et faisait fléchir les grillages malgré leur poids et leur solidité. Nous reprendrons ce sujet quand nous parlerons de la construction des écluses.

La base d'un tuyau cylindrique incliné est autant

354. Ayant un tuyau cylindrique ABCD, incliné sur la base AD supposée horizontale, et plein d'eau jusqu'à une hauteur quelconque EF,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

elle chargera autant le fond AD que si elle était dans un cylindre droit AGHD de même base. Tirez par un point quelconque P de la hauteur FI la ligne horizontale LM, et considérez que l'eau renfermée dans l'espace AEG est soutenue par le côté EA, puisque tous les filets KL dont elle est composée ont chacun pour appui un point L de la surface inclinée EA, par conséquent la base AD n'en est nullement chargée.

chargée par l'eau que ce tuyau contient, que s'il était droit.

Pl. 2, Fig. 19.

355. Il n'en est pas de même de celle que comprend l'espace opposé IFD; car comme le filet FI agit sur les autres plus petits MN pour les élever à la hauteur du niveau EH, en étant empêchés par la surface FD, chacun d'eux poussera de bas en haut tous les points M de cette surface avec une force équivalente au poids du filet FP, différence de FI à MN; et comme la hauteur FP est égale à KL, le point M sera autant poussé de bas en haut que le point L l'est de haut en bas. Ce qui fait voir que les surfaces EA et FD sont poussées dans un sens opposé avec une force équivalente au poids de l'eau renfermée dans l'espace AEG, ou son égal DFH. Mais comme tous les filets dont la surface FD soutient l'action ne peuvent la presser de bas en haut, sans qu'ils ne pressent autant de haut en bas la partie ID du fond qui leur sert d'appui (349), on voit que si l'on joint à cette pression le poids même des filets que renferme l'espace IFD, chaque point du fond AD sera chargé d'un poids équivalent à celui du filet FI.

Figure 20.

De quelque figure que soit un vaisseau rempli d'eau, et quelle que soit la quantité qu'il en contient, le fond est toujours chargé du poids d'une colonne à laquelle elle servirait de base, et qui aurait pour hauteur celle du niveau de l'eau au-dessus du même fond.

356. Il suit de l'article 354 qu'ayant un vaisseau BCDE, semblable à un cône tronqué renversé, auquel on a adapté un bout de tuyau ABEF pour y loger un piston servant de fond, remplissant ce vaisseau avec de l'eau, la puissance appliquée au piston ne soutiendra que le poids de la colonne BGHE, puisque tout le reste de l'eau sera appuyé à la ronde sur les côtés CB et DE.

Cette conséquence fait voir l'erreur de la plupart des fontainiers, qui font leurs tuyaux de descente plus gros en haut qu'en bas, dans le dessein de donner plus d'élévation au jet d'eau auquel ce tuyau aboutit, ne faisant point attention que celle qui s'appuie sur les côtés du tuyau ne peut contribuer à donner plus de chasse à celle qui descend. Cependant cette pratique peut avoir son utilité, lorsque l'*ajutage*, c'est-à-dire le trou par où sort le jet, est fort grand, parce que le tuyau de descente fournissant une plus grande quantité d'eau dans le même temps, le jet en est plus beau : nous reprendrons ce sujet dans le second volume, en parlant des eaux jaillissantes pour la décoration des jardins.

Figure 21.

357. Si le piston répondait au grand cercle du vaisseau précédent, il arriverait au contraire (par l'art. 355) qu'étant rempli d'eau, la puissance soutiendra un poids égal à celui de la colonne AIKC. Si de plus on ferme l'orifice EH, et qu'on y ajoute un tuyau FB rempli d'eau jusqu'à la hauteur G, tous les points de la base du fond AC étant pressés avec la même

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

force que le filet GN presse le point N, la puissance soutiendra un poids égal à celui de l'eau que comprendrait la colonne ALMC, pourvu, comme je l'ai déja dit (349), que ce vaisseau soit attaché à un endroit fixe. Car une puissance ne pouvant agir selon quelque direction que ce soit sans un point d'appui, il faut, pour qu'elle puisse pousser le piston de bas en haut avec la même force que l'eau le repousse de haut en bas, que la machine soit arrêtée. Autrement l'action de l'eau éleverait le vaisseau, et lui ferait abandonner le piston qui resterait seul entre les mains de la puissance. Car on remarquera que si l'eau venait à se geler, se trouvant alors sans action, le point d'appui deviendrait inutile, et la puissance ne serait chargée que du poids réel de l'eau et de la machine.

Pl. 2, fig. 19. 358. Comme la démonstration de l'article 354 n'a lieu que dans le cas où les triangles AEG et IFD sont renfermés entre les même parallèles EF et AD, il nous reste à faire voir que le principe établi dans cet article est général pour toutes sortes de cas.

Figure 22. Nous prendrons un autre tuyau ABCD, où aucun des points du niveau EF de l'eau ne répond au fond AD, et nous supposerons qu'on a divisé la colonne AEFD en plusieurs autres plus petites GF, IH, AK, par des plans GH, IK parallèles à l'horizon. Considérez que la première colonne GEFH étant dans le cas de l'article 354, sa base GH sera chargée d'un poids égal à celui de la colonne droite GLMH. Si l'on supprime le diaphragme GH, le filet ON n'ayant plus d'autre appui que le sommet N du filet NI, ces deux ensemble n'en composant plus qu'un seul OI, qui communique avec tous ceux que renferme l'espace ITK, ces derniers presseront chacun la base IK avec autant de force que fait le premier OI (355). Ainsi cette base sera chargée d'un poids égal à celui de l'eau que comprendrait la colonne IOPK. De même, puisque le point Q de la base IK est pressé avec une force égale au poids du filet OI ou RQ, supprimant encore le diaphragme IK, les filets RQ et QA n'en composant plus qu'un seul RA, qui est en équilibre avec tous ceux que comprend l'espace AVD, le fond AD sera autant chargé par l'eau de la colonne oblique AEFD, qu'il le serait si cette colonne était la droite ARSD.

Pl. 3, Fig. 23. 359. Si l'on avait un tuyau dont les parties BD, DF, FQ fussent disposées en zig-zag, et que ce tuyau, qu'on suppose appliqué contre une ou plusieurs surfaces verticales, fût rempli d'eau, il arriverait encore que le fond BE serait chargé d'un poids égal à celui d'une colonne d'eau BKOE, qui aurait pour base le même fond, et pour hauteur la ligne BK qui exprime l'élévation du niveau HQ de l'eau au-dessus de sa base BE. Regardant la ligne FG comme le fond du tuyau FQ, l'eau de ce tuyau chargera autant ce fond que celle que contiendrait la colonne droite FLIG (358). Supprimant le diaphragme FG, la colonne LG n'ayant d'autre appui que

De quelque figure et grosseur que soient les parties d'un tuyau posé sur un plan vertical, ou incliné, sa base est toujours chargée du poids d'une colonne d'eau de même base, et qui aurait pour hauteur celle du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la lame FG, augmentera de tout son poids celui de la colonne FD, et le fond CD sera chargé d'un poids égal à celui de la colonne CMND. Par un raisonnement semblable, on verra que la base BE étant chargée du poids des colonnes droites et inclinées MD et DB, sera dans le même cas que si elle servait de fond à la colonne BKOE.

niveau de l'eau au-dessus de la même base.

Si le tuyau, au lieu d'être en zig-zag, allait en serpentant, le même principe subsisterait encore; car en divisant l'eau de ce tuyau par tranches horizontales (328), on en composera de petits cylindres droits ou inclinés, qui étant contigus, pourront être regardés comme les parties d'un tuyau tel que le précédent.

360. On peut conclure en général des articles 356, 357, 358, 359, que, *quelque grosseur qu'ait un tuyau, uniforme ou non sur son étendue, dans quelques dispositions que soient ses parties, posées contre un plan vertical ou contre un plan incliné, la puissance appliquée au piston d'un diamètre égal, plus grand ou plus petit que le fond du tuyau, sera toujours chargée du poids d'une colonne qui aurait pour base le cercle du piston, et pour hauteur celui du niveau de l'eau au-dessus du même piston.*

PL. 3, FIG. 24.

Conclusion d'où l'on déduit une règle générale pour l'effort que soutient une puissance appliquée à un piston servant de fond à un tuyau.

SECTION III.

De l'action de l'eau contre les surfaces verticales et rectangulaires.

Après avoir montré la manière dont l'eau agit pour surmonter la résistance des surfaces qui l'empêchent de descendre vers le centre de la terre ou de s'élever à son niveau, il nous reste à exposer selon quelle loi elle pousse *de côté* les parois des vaisseaux qui la contiennent. Mais auparavant il faut être prévenu que cette poussée se fait toujours selon une direction horizontale (*bu*).

361. Imaginons un cylindre d'eau suspendu en l'air, sans être renfermé dans aucun vase, composé d'un grand nombre de lames circulaires de même épaisseur. La première lame agissant de tout son poids sur la seconde, tend à se confondre avec elle; ce qui ne peut arriver en lui conservant toujours la même épaisseur et la figure circulaire, qu'autant que toutes ses parties seraient poussées suivant la direction des différens rayons, pour occuper une circonférence plus grande. Si cette dernière, ainsi augmentée, se confondait de même avec la troisième, les parcelles d'eau seraient encore poussées en avant selon la direction des rayons pour occuper une circonférence plus grande que celle de la seconde. Faisant

Raisonnement pour prouver que l'eau qui agit sur une surface verticale, la pousse selon des directions horizontales.

(*bu*) La *poussée* ou pression des fluides contre les parois des vases se fait toujours suivant une direction normale à ces parois. Elle est horizontale si la paroi est verticale.

Remarque sur la direction de la pression que les fluides exercent

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le même raisonnement pour la suite de toutes les lames d'eau dont le cylindre est composé, la circonférence de la dernière serait d'autant plus augmentée, que le nombre de ces lames serait plus grand, ou que le cylindre aurait plus de hauteur.

Si ce cylindre est renfermé dans un tuyau, tous les cercles d'eau ayant la même tendance pour se confondre ensemble, feront effort pour s'élargir. Mais comme cet effort ne peut s'exercer que contre les parois du tuyau, on voit *qu'ils seront poussés du centre à la circonférence, par conséquent selon des directions horizontales, avec une force qui ira toujours en augmentant depuis le haut jusqu'au bas du tuyau*, parce que la circonférence qu'une certaine quantité de cercles d'eau tendront à occuper, sera d'autant plus grande, que le nombre de ces cercles sera plus grand.

La poussée de l'eau contre une surface verticale et rectangulaire, va en croissant depuis son niveau, selon l'ordre des termes d'une progression arithmétique.

Pl. 3, Fig. 25.

362. Prenant au lieu d'un cylindre un prisme droit AE, dont l'eau soit divisée en un nombre infini de lames d'une épaisseur insensible, les supérieures feront effort pour se confondre avec celles de dessous, et ces dernières tendant à s'élargir, pousseront la surface du prisme selon des directions horizontales. Comme nous supposerons que ces lames ont un poids égal, la seconde se trouvant chargée de celui de la première poussera le rectangle 2 qui la soutient avec la force double de celle qui pousse le rectangle 1, quelle qu'en soit la mesure. De même la troisième lame étant chargée du poids de la première et de la seconde, poussera le rectangle 3 avec une force triple de celle qu'a la première, et ainsi des autres, dont la poussée sera proportionnée au poids dont elles sont chargées. Or, comme ces poids augmentent selon l'ordre des termes d'une progression arithmétique, les poussées augmentant aussi dans le même ordre, pourront être exprimées par les éléments d'un triangle ALD, qui a pour hauteur celle de l'eau. Ainsi on pourra dire que les poussées qui répondent aux éléments NO et PQ de la surface ABCD, sont dans la raison des éléments FG et HI du triangle ALD ou des hauteurs LR et LS de l'eau au-dessus des mêmes éléments, puisque FG:HL :: LR:LS.

Lorsque deux surfaces ont la même base, les poussées sont dans la raison des quarrés des hauteurs de l'eau.

363. Il suit de-là que la somme de toutes les pressions qui règnent sur la hauteur LR, ou la poussée que soutient la surface NBCO, sera à la somme de toutes les pressions qui règnent sur la hauteur LM, ou à la poussée que soutient la surface ABCD, comme la superficie du triangle FLG est à celle du triangle ALD, ou comme le quarré de la perpendiculaire LR est à celui de la perpendiculaire LM. Ainsi *lorsque les surfaces ont la même base, leurs poussées, en commençant depuis le niveau de l'eau, sont dans la raison des quarrés des hauteurs de l'eau qu'elles soutiennent.* La poussée qui répond à la hauteur RS et que soutient la surface PNOQ, pouvant être exprimée par le trapèze HFGI, différence des triangles HLI et FLG, *on voit qu'elle pourra l'être aussi par la différence des quarrés des hauteurs* LS *et* LR *de l'eau.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

364. La ligne BC exprimant le niveau de l'eau, si on la prolonge de C en R pour servir d'axe à une demi-parabole CLO, décrite avec un paramètre à volonté, menant à la ligne BR les parallèles FH, IL, AM en aussi grand nombre que l'on voudra, *les poussées que soutiendront les surfaces BG, BK, BD, seront entre elles dans la raison des ordonnées GH, KL, DM, tirées de la tangente à la parabole :* ce qui est bien évident, puisque ces ordonnées sont dans la raison des quarrés des coupées CG, CK, CD, qui marquent la hauteur de l'eau que soutiennent ces surfaces. Par conséquent, *si des points H et L on mène à la tangente les parallèles HP et LQ, les lignes GH, PL, QM, qui expriment la différence des ordonnées, seront entre elles dans la raison des poussées que soutiennent les surfaces correspondantes BG, FK, ID.* J'ajouterai que la poussée que soutient la surface BD est à celle que soutient la partie ID, comme DM est à QM; et ainsi des autres.

On peut exprimer les poussées de l'eau par les ordonnées d'une parabole comptées de la tangente au sommet.

Pl. 3, Fig. 26.

365. Les pressions des lames que comprend la hauteur LM allant en progression arithmétique, il y aura une pression moyenne entre la plus grande et la plus petite, qui étant multipliée par la grandeur qui exprime le nombre des lames, donnera un produit égal à la pression totale. Or comme cette moyenne est égale à la moitié de la plus grande, on aura $\frac{AD}{2} \times LM$ pour cette pression, qui étant égale à $\frac{LM}{2} \times AD$, *on pourra supposer que toutes les lames poussent avec une force égale, et que cette force est exprimée par la hauteur moyenne LZ, moitié de LM.*

Figure 25.

On peut supposer que toutes les lames d'eau poussent avec une force uniforme, exprimée par une ligne égale à la moitié de la hauteur de l'eau.

366. La poussée que soutient le rectangle APQD étant exprimée par le trapèze AHID, l'élément moyen entre HI et AD exprimera la poussée moyenne; et comme cet élément ne peut être que la ligne TV, qui passe par le milieu de la hauteur SM de ce trapèze, *on pourra encore, en supposant uniforme la pression de chaque lame que soutient la surface APQD, l'exprimer par la hauteur LY, moyenne arithmétique entre LS et LM.*

Autre manière de déterminer la hauteur moyenne de l'eau, lorsqu'on prend la poussée au-dessous de son niveau.

367. En supposant que les lames qui répondent à une même surface agissent uniformément, il suit que *les poussées que soutiendront deux surfaces différentes, mais rectangulaires, seront dans la raison composée de l'étendue des mêmes surfaces et des hauteurs moyennes qui leur répondent.* Ainsi lorsque les surfaces seront égales, les poussées seront comme les hauteurs moyennes, et lorsque les hauteurs moyennes seront égales, les poussées seront dans la raison des surfaces.

Les poussées de l'eau contre des surfaces différentes, sont dans la raison composée de l'étendue de ces surfaces et des hauteurs moyennes qui leur répondent.

368. Pour faire voir présentement comment on doit calculer la poussée de l'eau contre les surfaces verticales, nous nous servirons d'un siphon composé de deux branches ABCD et EFGH, droites, prismatiques et d'égale grosseur, unies ensemble par un tuyau de communication horizontal IADLM, de même figure et grosseur que chacune des branches,

Application du siphon à la manière de calculer la poussée de l'eau.

Figure 27.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

séparé en deux parties par un diaphragme NOPQ parallèle et égal au plan RSDT.

369. Si l'on verse de l'eau dans la première branche, pour remplir seulement la partie IADPN de la communication, elle ne fera aucun effort pour monter au-dessus de son niveau AP, et son action se réduira à pousser les surfaces qui la soutiennent, entre autres le diaphragme NOPQ, pour s'aller répandre de l'autre côté. Mais si l'on remplit la même branche jusqu'à la hauteur VX, la colonne AVXD pressera l'eau de la communication, laquelle sera poussée de I en N selon une direction horizontale, et tendra à passer dans l'autre branche pour s'élever au niveau YZ, où elle s'éleverait en effet si elle était toujours entretenue à la même hauteur VX, et si elle n'était point empêchée par la surface NOPQ, laquelle soutiendra non-seulement la poussée de l'eau contenue dans la communication, mais encore toute celle que peut causer le poids entier de la colonne AVXD; ce qui est bien évident. En effet, comme nulle autre force que le poids de cette colonne n'agit ici pour faire monter l'eau dans l'autre branche, et s'y maintenir à la hauteur YZ au-dessus du niveau AH, il faut nécessairement que la superficie NOPQ soit poussée selon une direction horizontale par tout l'effort de la puissance qu'elle empêche d'agir.

PLANCHE 3. FIGURES 27 et 28.

Comme la longueur du bout du tuyau RDOQ est indifférente à l'effort que fait l'eau pour monter dans la seconde branche, on pourra la raccourcir autant qu'on voudra, et même confondre la surface NOPQ avec son égale (330) RSDT, que nous prendrons pour un autre diaphragme, afin de détacher le prisme IBCT du siphon. Comme ceci ne change rien à l'action de l'eau qui s'y trouve renfermée, la surface KSDT sera poussée avec la même force que l'était le diaphragme NOPQ.

FIGURE 28.

La poussée de l'eau contre une surface rectangulaire, est toujours égale au poids d'une colonne qui aurait pour base cette surface, et pour hauteur la hauteur moyenne.

370. La poussée que soutient la surface RSDT de la part de l'eau que renferme l'espace IADT, indépendamment de celle que cause la colonne AVXD, pouvant être exprimée par le produit de cette surface et de la hauteur moyenne PQ (367), et le poids de la colonne par le produit de sa base AD et de sa hauteur OP, il suit que ces deux produits valant pris ensemble celui de la surface RD par la hauteur OQ, composée des précédentes OP et PQ, il exprimera seul la poussée que soutient la surface RD (*bv*).

Remarque sur l'art. 370.

(*bv*) Ce raisonnement est fautif, en ce que l'auteur a bien dit dans l'article 367 que les poussées souffertes par diverses surfaces étaient entre elles comme les produits de ces surfaces par la hauteur moyenne de l'eau, mais non que ces produits exprimassent la valeur absolue de ces poussées, comme le produit de la base d'une colonne par sa hauteur (multiplié par le poids de l'unité de volume) exprime la valeur absolue du poids de cette colonne.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Comme le dernier produit n'est autre chose que la solidité du prisme FVXL, on voit que si la poussée que cause en particulier la colonne d'eau AVXD contre la surface RD doit être exprimée par son poids, toute celle que soutient la même surface le sera par celui de la colonne FVXL, qui a pour base le plan FHLG égal à cette surface, et pour hauteur la ligne OQ moyenne arithmétique entre OP et ON; ce qui fait voir que si la surface RD était de 4 pieds, et la hauteur OQ de 10, cette surface serait poussée par une force équivalente au poids de 2800 liv. $= 4 \times 10 \times 70$ liv.

371. Si des deux branches du siphon, on laisse la première comme elle est, et qu'on rapproche les surfaces opposées IHXL et BGZM pour rendre le prisme IHZA beaucoup plus étroit que l'autre, cela n'empêchera pas qu'en versant de l'eau dans ce nouveau siphon elle ne se mette de part et d'autre au même niveau VY, et que celle de la seconde branche ne soit en équilibre avec celle de la première, parce que la petite colonne IEYA n'aura jamais à combattre qu'une autre colonne de même base que la sienne (331), et que toutes les autres que comprend la grosse branche sont en équilibre avec cette dernière.

On peut encore démontrer l'article précédent, quoique les branches du siphon soient d'inégale grosseur. Pl. 3, Fig. 29.

Comme ces colonnes feront sur leurs bases des efforts égaux pour se surmonter les unes les autres, l'eau de la communication sera poussée de E en B par la grosse colonne, avec la même force qu'elle le sera de B en E par la petite. Ainsi faisant survenir le diaphragme NOPQ, il se trouvera poussé avec des forces égales et opposées.

Présentement, si l'on suppose deux autres diaphragmes RSDT et KILC, et qu'on supprime le tuyau de communication pour en détacher les deux branches, la surface RSDT sera poussée de E en R avec la même force que la surface KILC égale à la précédente le sera de B en K, l'une et l'autre se trouvant dans le même cas que l'était ci-devant le diaphragme NOPQ, puisque la face était indifférente à la poussée qu'elle soutenait.

372. Il suit de-là, que quoiqu'il y ait beaucoup moins d'eau dans le second prisme que dans le premier, la surface KILC soutiendra comme l'autre une poussée égale au poids d'une colonne d'eau, qui aurait cette surface pour base, et pour hauteur la moyenne arithmétique entre EI et EK (367).

373. Les poussées de l'eau étant dans la raison composée des surfaces qui les soutiennent et des hauteurs moyennes qui y répondent (367), *on voit que sans se mettre en peine de la dimension IR, par conséquent de la quantité d'eau que contient le vaisseau IBCT, il y aura même raison du produit de la surface RSDT par la hauteur moyenne OQ, au produit de la surface RZXT par la hauteur moyenne OY, que de la poussée que soutient la première surface à celle que soutient la deuxième. Or puisque la*

Figure 28. Pour calculer la poussée contre une surface verticale, il ne faut avoir nul égard à l'étendue du plan qui sert de base à l'eau, mais seulement à la surface poussée et à la hauteur moyenne qui y répond.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

poussée que soutient la première est équivalente au poids des pieds cubes d'eau que donne le produit qui lui est relatif, la poussée que soutiendra la deuxième sera donc aussi équivalente au poids du nombre des pieds cubes d'eau du produit qui lui appartient. Ainsi supposant la base RT de cette surface de 2 pieds, et la hauteur ON de 12, elle sera de 24 pieds quarrés, qui étant multipliés par la hauteur moyenne OY de 6 pieds, et le produit par 70 liv., donne 1008o liv. pour le poids équivalent à la poussée qu'elle soutiendra (*bx*).

374. Si le vaisseau, au lieu d'être prismatique, était un tuyau ou un

---

Des pressions supportées par les molécules d'un fluide pesant contenu dans un vase.

(*bx*) Je vais rétablir ici d'une manière rigoureuse, et compléter les notions imparfaites données par l'auteur dans tout ce qui précède.

J'observerai en premier lieu qu'il résulte du contenu de la note (*bk*), que si l'on conçoit un fluide incompressible enfermé dans un vase inflexible, et que, par une ouverture pratiquée dans la paroi de ce vase, on exerce sur la surface du fluide une pression, cette pression se transmettra dans toute la masse du fluide. En sorte que si chaque molécule située à l'ouverture souffrait une pression exprimée par P, toute autre molécule du fluide souffrirait également dans tous les sens une pression égale à P. Cela résulte immédiatement de ce qu'une masse de fluide ne peut être en équilibre sans que toutes les molécules ne supportent dans tous les sens des pressions égales.

Il a été prouvé de plus dans la note (*bm*) que la surface libre d'un fluide incompressible et pesant contenu dans une vase devait nécessairement être un plan horizontal.

Pl. C, Fig. 1.

Cela posé, soit ABCD un vase contenant une portion de fluide incompressible et pesant en équilibre. Imaginons le fluide partagé par des plans horizontaux *ab*, *cd*, *ef*, *gh*.... en tranches infiniment minces d'égale épaisseur. Le plan *ab* formant la surface du fluide n'éprouvera aucune pression. Le plan *cd* portera le poids de la tranche *abcd*, et si l'on nomme *dz* la hauteur des tranches, et Π le poids de l'unité de volume du fluide (qui est une quantité constante dans toute l'étendue du vase), l'unité de surface du plan *cd* supportera une pression exprimée par Π*dz*, laquelle sera transmise dans tout le reste du fluide, où toutes les molécules la supporteront dans tous les sens. Il est à remarquer qu'on prend ici pour le volume de la tranche *abcd* le volume d'un prisme de même hauteur dont la section *cd* serait la base. Cela est permis par les principes du calcul différentiel, puisque ces deux volumes, qui sont infiniment petits, ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre, tant que la courbure des parois du vase est continue. Le plan *ef* supportera la pression Π*dz*, plus le poids de la seconde tranche *cdef;* la pression sur l'unité de surface de ce plan sera donc Π.2*dz*, et elle sera transmise dans tout le reste du fluide. De même le plan *gh* supportera la pression Π.2*dz*, plus le poids de la tranche *efgh*, c'est-à-dire que la pression qui aura lieu sur l'unité de sa surface sera Π.3*dz*. En continuant ainsi, on voit que pour un plan horizontal quelconque *lm*, la pression est la même pour toutes les molécules, et égale pour l'unité de surface à Π multiplié par la somme des épaisseurs des tranches situées

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cylindre droit, il faudrait, pour avoir la poussée que soutiendrait sa surface, multiplier cette surface par la moitié de la hauteur de l'eau.

---

au-dessus de lm, c'est-à-dire à Πz, z étant la distance En du plan lm à la surface du fluide.

Cette démonstration n'est sujette à aucune difficulté, tant que la surface du vase est continue. Dans le cas contraire, supposons que dans le plan ef la largeur du vase change brusquement. On verra, comme ci-dessus, que les molécules dans le plan cd souffrent la pression Πdz qui est transmise au-dessous de ce plan dans tout le fluide. Les molécules situées dans le plan $e'f'$ supportent donc la pression Πdz, plus celle résultant du poids de la tranchée $cde'f'$, c'est-à-dire qu'elles sont pressées sur l'unité de surface avec la force $\Pi.2dz$. Cette pression se transmettant dans tout le fluide situé au-dessous de $e'f'$, on voit que les molécules du plan gh doivent la supporter, plus la pression résultant du poids de la tranche $efgh$, en sorte que leur pression totale est pour l'unité de surface $\Pi.3dz$, comme ci-dessus. Pl. C, Fig. 2.

Il est donc démontré qu'une molécule quelconque, située dans l'intérieur d'un fluide pesant, supporte dans tous les sens une pression dont la valeur, rapportée à l'unité de surface, est celle d'une colonne de fluide qui aurait cette unité pour base, et pour hauteur la distance de la molécule à la surface du fluide. De-là il résulte immédiatement que les divers points des parois des vases supportent des pressions normales dont la valeur est celle qu'on vient d'indiquer. C'est ce qui s'exprime communément en disant que *chaque point d'une masse fluide ou de ses parois supporte une presssion due à la hauteur du fluide au-dessus de ce point;* et il faut se familiariser avec cette expression.

Ces notions doivent être substituées à celles que l'auteur a données dans les articles précédents, et particulièrement dans l'article 361, où son raisonnement manque absolument de rigueur. J'ajouterai quelques mots sur les cas d'équilibre qui ont lieu par l'effet de la pression atmosphérique.

De l'équilibre et de la pression dans le fluide en ayant égard au poids de l'atmosphère.

On a supposé plus haut que la surface supérieure du fluide ne souffrait aucune pression. Dans l'état naturel des choses, elle supporte la pression atmosphérique, qui est l'effet du poids de l'air dont la terre est entourée, et sans laquelle beaucoup de corps ne pourraient subsister à l'état de fluide. Cette pression n'empêche pas que, dans le cas de l'équilibre, la surface du fluide en contact avec l'air ne doive se mettre dans un plan horizontal, parce qu'elle est normale à cette surface, et la même pour tous ses points; mais elle se transmet dans l'intérieur du fluide, en sorte que chacune des molécules supporte véritablement la pression atmosphérique, plus la pression due au poids du fluide. De plus elle donne lieu à certains états d'équilibre qui n'existeraient point sans elle.

Considérons, par exemple, le vase ABCD formé de deux parties communiquant entre elles, l'une ouverte et l'autre fermée par le haut, l'air ayant été chassé de cette dernière. Pour que le fluide soit en équilibre dans le vase, il faudra évidemment qu'une molécule quelconque y supporte la même pression, en considérant cette pression comme due au fluide contenu dans l'une ou dans l'autre des parties du vase. Or le point M, placé au niveau de la surface ab, n'éprouve aucune pression Pl. C, Fig. 3.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Manière de calculer la force qu'il faut pour lever

375. Voici l'occasion de faire voir à quoi se réduit la difficulté d'élever une vanne, dont il a été fait mention dans l'article 229. Nous la suppose-

---

de la part du fluide contenu dans la partie à gauche du vase, et ce fluide lui transmet seulement la pression atmosphérique qui agit sur la surface *ab*. Donc il faudra que le fluide situé dans la partie à droite du vase fasse aussi éprouver au point M une pression égale à la pression atmosphérique, en sorte qu'il s'élevera dans cette partie jusqu'à un niveau *cd*, tel que la pression due à la hauteur MN soit égale à la pression atmosphérique.

Si la portion à droite du vase, où le liquide s'élève ainsi, n'était pas assez élevée pour qu'il pût atteindre la hauteur dont on vient de parler, il viendrait en toucher la paroi supérieure, et exercer contre elle de haut en bas une certaine pression.

Nommons ζ la hauteur d'une colonne du fluide capable de faire équilibre à la pression atmosphérique, et z la distance mM au niveau $aba'b'$ d'un point quelconque m situé au-dessous de ce niveau. Il est évident que la pression totale qui a lieu en ce point est due à la hauteur $\zeta+z$, ou égale pour l'unité de surface à $\Pi(\zeta+z)$.

A l'égard d'un point n situé au-dessus de ce niveau, il est clair que l'espace au-dessus de *cd* étant vide, la pression qui a lieu en ce point n'est due qu'à la hauteur de fluide Nn, en sorte qu'elle est égale à $\Pi.$Nn, ou parce que NM$=\zeta$, à $\Pi(\zeta-n$M$)$; ou en représentant en général par z la distance de tous les points du fluide au niveau de la surface libre *ab*, à $\Pi(\zeta-z)$. On voit par-là que la même formule $\Pi(\zeta\pm z)$ exprime la pression qui a lieu dans tous les points du fluide, en prenant le signe + ou le signe —, suivant que ces points sont situés au-dessous ou au-dessus du niveau *ab*. Cette formule servira également quand le vase ne sera pas assez haut pour qu'il reste un espace vide au-dessus de *cd*, car si l'on coupait par un diaphragme la colonne $a'b'cd$, cette circonstance ne pourrait rien changer à l'état d'équilibre du fluide, ni aux pressions que ses molécules supportent.

Des cas où la valeur de la pression devient négative.

La formule qui exprime la pression qui a lieu dans l'intérieur d'un fluide peut dans certains cas devenir négative. Il y a eu, pour fixer le sens qu'on devait lui attribuer alors, des discussions qui à la verité portaient plutôt sur les mots que sur le fonds des choses. On peut, d'après ce qui précède, se former des notions très-claires à cet égard. Supposons d'abord le fluide abandonné à lui-même : si l'expression Πz de la pression devient négative, il faudra en conclure que les molécules ne pressent plus les unes contre les autres et contre les parois, et ne doivent plus demeurer en contact avec elles. Supposons maintenant que la pression atmosphérique est transmise dans l'intérieur du fluide : alors si la pression Πz due au poids du fluide devient négative, la valeur totale de la pression, qui est maintenant $\Pi(\zeta-z)$, pourra être encore positive, pourvu que z soit $<\zeta$; le fluide restera donc encore en contact avec les parois, et il ne s'en détacherait qu'autant que z deviendrait $>\zeta$.

Daniel Bernouilli, dans les circonstances où la valeur de la pression due au seul poids du fluide, prenait des valeurs négatives, disait que la pression se changeait en *suction*. Il avait adopté cette expression, parce qu'il y a cette différence, que si l'on pratique une petite ouverture dans la paroi du vase au-dessous du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rons de 5 pieds de largeur, soutenant 8 pieds de hauteur d'eau. Ainsi la surface poussée aura 40 pieds quarrés, qui étant multipliés par 4 pieds, hauteur moyenne, donneront 160 pieds cubes, ou 11200 liv., pour la poussée de l'eau ou la pression de la vanne contre les coulisses. Il en faut prendre le tiers pour le frottement qui sera d'environ 3733 liv., qui étant ajoutées au poids de la vanne, donneront la résistance qu'il faudra que la puissance surmonte au premier instant qu'elle agira; car dans les instants suivants, elle deviendra toujours moindre, parce que la poussée et le frottement iront en diminuant dans la raison des quarrés des hauteurs de l'eau que soutiendra la vanne (363).

une vanne qui soutient de l'eau.

376. Il est à remarquer que la vanne en montant rencontrera un point d'élévation où son poids se trouvera en équilibre avec le frottement, et que ce ne sera qu'autant qu'on l'élevera à une certaine hauteur au-dessus de ce point, qu'elle pourra en descendant acquérir une assez grande quantité de mouvement ou de force pour arriver jusqu'au seuil du pertuis. Car comme le frottement augmentera dans la raison des quarrés des hauteurs de l'eau (363), tandis que cette force ne croîtra que dans la raison des racines quarrées des mêmes hauteurs (171), si la vanne ne tombe point d'assez haut, elle demeurera suspendue en chemin sans pouvoir descendre, à moins de quelque secours étranger.

Remarque sur ce qui peut arriver quand on lève et baisse les vannes.

377. Pour rendre encore plus sensible que nous n'avons fait l'action de l'eau contre une surface verticale ABCD, nous nous servirons du parallélepipède régulier ABCDEFLM, dont une des dimensions AM sera, si l'on veut, plus petite ou plus grande que la hauteur BA de l'eau. Nous supposerons qu'on a pris sur les lignes DI et AK les parties DH et AG, chacune égale à la hauteur BA de l'eau, et qu'on a tiré les lignes CH et BG pour former le solide ABCDHG, lequel exprimera un volume d'eau, dont le poids sera équivalent à la poussée que soutient la surface ABCD. Ce qui est bien évident, puisque, pour avoir la valeur de ce solide, il faut multiplier la même surface par la moitié de AG ou de AB. Si l'on suppose la hauteur BA divisée en un grand nombre de parties égales, et que par chaque point de division, il passe un plan parallèle à la base AH, le solide ABCDHG sera partagé en un nombre de tranches ou prismes, et la surface ABCD en un même nombre de rectangles égaux entre eux. Alors le poids de l'eau de chaque tranche exprimera la poussée que soutiendra le petit rectangle qui lui répond dans la surface, et ces tranches ou prismes ayant la même hauteur BC, leurs poids, ou les pous-

Manière de rendre sensible la poussée de l'eau contre une surface.

Pl. 3, Fig. 30.

---

niveau *ab*, l'eau sortira par cette ouverture, tandis que si l'on en pratique une au-dessus du même niveau, l'eau ne sortira point; l'air au contraire entrera dans le vase, et y sera aspiré comme par l'effet de la suction.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sées qu'ils mesurent, seront dans la raison des trapèzes qui servent de bases à ces prismes.

Une petite quantité d'eau peut être capable d'une force prodigieuse.

Planche 3. Figures 29 et 31.

378. Puisqu'on peut approcher les surfaces KHXC et BGZM aussi près l'une de l'autre qu'on voudra, pourvu seulement qu'elles ne se touchent point (373), on voit *qu'avec une très-petite quantité d'eau, le plan KILC sera poussé avec autant de force que si leur distance était fort éloignée.* Par conséquent, si l'on avait un vaisseau prismatique, dont deux de ses faces parallèles et opposées comme ABCD (fig. 31) fussent chacune d'une toise quarrée, placées à la distance d'une ligne seulement l'une de l'autre, remplissant ce vaisseau avec de l'eau, les deux surfaces soutiendront ensemble un effort de 15120 liv., ce qui est assurément aussi merveilleux que ce qu'on a vu dans les articles 349, 350, 351. Mais ce qui le paraîtra encore davantage, c'est que si on ferme ce vaisseau pour y adapter un tuyau GF de telle hauteur qu'on voudra, *le remplissant d'eau, les surfaces seront poussées avec la même force que si le vaisseau était rempli d'eau jusqu'à la hauteur HI;* ce qui est bien évident, car chacune des colonnes contenues dans le vaisseau AE qui aurait pour base celle du tuyau FG, étant pressée de haut en bas avec la même force que celle du tuyau presse la colonne FK, fera le même effort contre les parois du vaisseau que la même colonne FK en ferait contre ceux qui la soutiendraient. Ainsi, supposant GF de 10 pieds, la hauteur moyenne GL sera de 13, qui étant multipliée par 36 pieds quarrés, et le produit par 70, donnera 65520 liv. pour l'effort que l'eau fera contre les deux surfaces ensemble, quoique son poids aille tout au plus à 18 liv.

La poussée de l'eau contre une surface verticale ne dépend pas de la quantité qu'en contient le vaisseau qui la renferme, mais seulement de l'étendue de la surface poussée, et de la hauteur moyenne qui lui répond.

379. *On peut dire encore, comme dans l'article* 351, *que la poussée de l'eau contre une surface verticale, ne dépend pas de la quantité qu'en contient le vaisseau qui la renferme, mais seulement de l'étendue de cette surface, et de la hauteur moyenne de l'eau qui lui répond.*

SECTION IV.

De l'action de l'eau contre les surfaces inclinées.

N'ayant considéré jusqu'ici que l'action de l'eau contre les surfaces verticales, nous allons examiner quelle est la poussée que soutiendraient celles qui seraient *inclinées.*

Pl. 4, Fig. 32.

380. Je suppose que le trapèze ABCD représente le profil d'un vaisseau plus large en haut qu'en bas, composé de surfaces planes et rempli d'eau jusqu'au niveau BC. Il s'agit de mesurer la poussée que soutiendra la surface inclinée CD, de la largeur de laquelle nous faisons abstraction. Il faut du point D mener la perpendiculaire DF sur l'horizontale BC, prendre la partie FE égale à cette perpendiculaire, et tirer la ligne ED pour avoir le triangle rectangle et isoscèle EFD.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour peu qu'on y fasse attention, on verra que tous les points H de la surface DC sont poussés par des filets d'eau GH, selon deux directions différentes, l'une verticale et l'autre horizontale; que la première pourra être exprimée par la superficie du triangle DFC (354), et la seconde par celle du triangle DFE (377); et comme ces deux triangles sont dans la raison de leurs bases FC et FE, puisqu'ils ont la même hauteur FD, on pourra prendre leur base au lieu de leur superficie. Alors la poussée verticale sera à l'horizontale comme FC est à FE, ou comme FC est à FD, puisque EF=FD.

Menant du point H la ligne horizontale HI et la perpendiculaire HL sur le côté DC, faisant le parallélogramme KI, on aura les triangles semblables HIL et DFC qui donnent DF : FC : : HI : IL. Ainsi on pourra prendre le côté IL ou HK pour exprimer la puissance qui soutient en équilibre la poussée verticale, et le côté HI pour exprimer celle qui soutient la poussée horizontale. Alors la diagonale HL exprimera l'action d'une troisième puissance, en équilibre avec le résultat du concours des poussées verticales et horizontales.

381. Il suit que la poussée horizontale sera à toute celle que soutiendra la surface DC comme HI est à HL, ou comme DF est à DC. Par conséquent si l'on élève sur l'extrémité D de la ligne CD la perpendiculaire DM égale à EF, et qu'on tire la ligne CM, les triangles EFD et CDM ayant des hauteurs égales, seront dans la raison de leurs bases DF et DC, ou comme la poussée horizontale est à la poussée entière que soutient la surface DC. Or comme la première de ces poussées est exprimée par la superficie du triangle DEF, la seconde le sera donc par celle du triangle DCM, ou, si l'on veut, par un poids équivalent à celui d'un prisme d'eau qui aurait pour base ce triangle, et pour hauteur la largeur de la surface (377).

La poussée de l'eau contre les surfaces inclinées se mesure de la même manière que si ces surfaces étaient verticales.

382. Comme il faut, pour avoir la valeur du prisme dont nous venons de parler, multiplier la surface DC par la moitié de DM ou de son égal DF, *on voit que la règle pour mesurer la poussée de l'eau contre les surfaces inclinées est la même que celle que nous avons établie pour les verticales* dans les articles 372 et 373, puisqu'elle se réduit encore à multiplier la superficie de la surface par la moitié de la hauteur FD de l'eau. Ainsi toutes les conséquences que nous avons tirées de cette règle pourront s'appliquer aussi aux surfaces inclinées. Par exemple, si l'on voulait savoir quelle est la poussée de l'eau qui agit sur la partie HD de la surface DC, il faudrait du point H mener la ligne horizontale HN, et multiplier cette partie par la moyenne arithmétique entre FN et FD.

383. Si le vaisseau STBA contigu au précédent était plus large en bas qu'en haut, la surface BA serait autant poussée de bas en haut par tous les filets que comprend le triangle BXA, qui tendent à monter au niveau

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TB, que la même surface le sera de haut en bas par tous les filets contenus dans le triangle BVA égal au précédent (355).

384. Il suit que si le vaisseau STBA ne contenait de l'eau que jusqu'à la hauteur YO, et que l'autre ABCD fût tout plein, les poussées opposées que soutiendrait la surface BA, seraient comme les quarrés de BA et OA, si les surfaces dont ces lignes expriment les hauteurs avaient la même base (363); et comme la plus grande poussée serait diminuée de toute l'action de la plus petite, celle de l'eau du vaisseau ABCD ne serait plus exprimée que par la différence de ces deux quarrés, puisqu'il en est des surfaces inclinées comme des verticales (382).

Manière de calculer la poussée de l'eau contre la surface d'un cône.

385. Si le vaisseau ABCD avait la figure d'un cône tronqué, il faudrait, pour avoir la poussée que soutiendrait toute sa surface, multiplier la circonférence moyenne arithmétique OP entre BC et AD par le côté DC, et le produit par la moitié de la hauteur FD de l'eau; et si le cône était entier, comme BQC, il faudrait multiplier la moitié de la circonférence BC de sa base par le côté QC, et le produit par la moitié de son axe RQ.

On verra dans la suite de cet ouvrage, principalement dans la seconde partie, combien il importe de savoir calculer la poussée de l'eau que doivent soutenir les *bâtardeaux*, les *portes des écluses*, les *digues*, *levées*, etc. afin d'en proportionner la résistance à l'effort qu'ils auront à soutenir, relativement à la nature et à la quantité des matériaux. Autrement, si l'on ignore jusqu'où peut aller l'effet de la puissance qui *agit*, comment pouvoir estimer celle qu'il faudra lui *opposer*? Qu'on ne nous dise pas que la pratique donne ces connaissances, des événements toujours fâcheux montrent souvent le contraire.

Examen de la poussée de l'eau contre des surfaces opposées, pour faire voir les forces qui se détruisent. Pl. 4, Fig. 33.

386. Ayant un vaisseau prismatique ABFG, dont les faces opposées sont égales, parallèles et verticales, le remplissant d'eau, toutes les petites colonnes ayant la même hauteur, presseront également le fond ADGH, lequel étant soutenu par un plan horizontal et inébranlable MNOQ, sera cause que le vaisseau ne pourra descendre. D'autre part, les surfaces opposées ABCD, HEFG étant poussées également dans un sens contraire par l'action de l'eau, et une de ces puissances ne pouvant l'emporter sur l'autre, il n'y a pas de raison pour que le vaisseau soit mû vers la droite ou la gauche. Les surfaces DCFG et ABEH étant dans le même cas, et le vaisseau ne pouvant non plus être mû en avant ou en arrière, il faudra nécessairement qu'il reste en repos.

Figure 34.

387. Si l'on coupe le même vaisseau obliquement par un plan AIDK, pour ne plus considérer que l'eau renfermée dans la partie ABCDFIKE, que nous prendrons pour un nouveau vaisseau posé librement sur un plan incliné LMNO, il arrivera qu'indépendamment de la pente que tous les corps ont à descendre le long des plans inclinés qui les soutiennent, ce vaisseau en aura plus, étant rempli d'eau, que s'il l'était par un corps

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dur de même pesanteur, parce que la poussée que soutiendra la surface ABCD est autant supérieure à celle que soutiendra son opposée KEFI, que le quarré de la hauteur BA est plus grand que le quarré de la hauteur EK (363). Ainsi la surface sera poussée selon une direction horizontale avec une force qu'on pourra exprimer par la différence des mêmes quarrés (384); c'est-à-dire, par exemple, que si BA était double de EK, elle serait poussée avec une force équivalente aux trois quarts du poids du prisme d'eau qui aurait pour base cette surface, et pour hauteur la moitié de BA.

Manière de calculer une puissance qui soutient, à l'aide d'un plan incliné, un vaisseau où il y a de l'eau.

Pl. 4, Fig. 34.

388. N'ayant égard qu'à l'action de la pesanteur, il sera indifférent à la puissance P, qui soutient le vaisseau selon une direction horizontale SP, qu'il soit rempli par une liqueur ou par un corps dur, puisque le poids sera toujours à la puissance, comme la base LR du plan est à sa hauteur RO (83). Or si l'on suppose les lignes BA, BC, BE égales entre elles, le volume d'eau que comprendra le vaisseau, sera les trois quarts du cube de la hauteur BA, ainsi l'on aura $LR:RO :: \frac{3}{4} \times \overline{BA}^3 : P$; ou $\frac{3RO}{4LR} \times \overline{BA}^3 = P$, en faisant abstraction de la pesanteur propre du vaisseau. Mais comme il faut que la puissance soutienne encore la différence de la poussée contre les surfaces BD et EI, ou un poids équivalent au volume d'eau exprimé par $\frac{3}{4}\overline{BA}^2 \times \frac{BA}{2} = \frac{3}{8}\overline{BA}^3$; on aura donc $\frac{3RO}{4LR} \times \overline{BA}^3 + \frac{3}{8}\overline{BA}^3 = P$ (*by*).

Quant à l'action de l'eau sur le fond ADIK du vaisseau, on voit que, selon l'article 382, elle doit être exprimée par le produit de la superficie de ce fond et de la hauteur TV, moyenne arithmétique entre BA et EK. Mais comme il ne s'agit ici que de la pesanteur absolue de l'eau que soutient le même fond, le produit précédent n'a aucune relation avec la puissance P.

Rectification de l'art. 388.

(*by*) Cette conclusion et l'assertion de l'article 387 sur laquelle elle est fondée sont fausses. Quelle que soit la forme d'un vase, les pressions horizontales souffertes par les parois qui ont lieu dans deux sens opposés, sont nécessairement égales entre elles, et se détruisent réciproquement. Sans cela, un vase plein d'eau suspendu par son centre de gravité pourrait prendre de lui-même du mouvement, ce qui est contraire à l'expérience. L'erreur de l'auteur vient de ce qu'il n'a pas fait attention que la pression soufferte par le fond AI du vase pouvait être conçue composée de deux parties, l'une verticale, l'autre horizontale; et que cette dernière partie étant ajoutée à la pression exercée contre la face KF, donnait une somme parfaitement égale à la pression exercée en sens contraire contre la face AC, en sorte que les pressions exercées dans les deux sens se détruisaient entre elles. La force P agit donc comme si le vase contenait un solide du même poids que le fluide.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On ne sent point le poids de l'eau qui est renfermée dans un vaisseau cubique, mû sur un plan horizontal, lorsque ce vaisseau n'a point de fond.

PL. 4, FIG. 33.

389. Reprenant le vaisseau ABFG, que nous supposerons sans fond, posé sur un plan horizontal MNOQ aussi poli qu'on en puisse avoir dans l'usage, en sorte que la base ADGH lui soit intimement unie, remplissant d'eau ce vaisseau, *la puissance qui le tirera selon une direction horizontale ne fera pas plus d'effort pour le faire glisser que s'il était vide.* Car le vaisseau n'ayant point de fond, ce plan sera chargé de toute la pesanteur de l'eau, dont les parties étant extrêmement déliées glissèront sans frottement sensible, parce que toutes celles qui pourraient être arrêtées par les parties saillantes du plan, n'empêcheront pas les colonnes de dessus de se mouvoir horizontalement sur la surface d'une lame d'eau, qui applanira tous les obstacles. Ainsi il ne pourra y avoir de résistance que de la part de la pression des bords du vaisseau sur le plan, qui donnera lieu à un frottement inévitable, parce que les parties qui se rencontreront n'étant point fluides, ne peuvent se trouver dans le cas de celles de l'eau.

Quand un vaisseau sans fond est posé sur un plan incliné, la puissance ne soutient que la différence des poussées opposées.

FIGURE 35.

390. *Il suit que si le vaisseau précédent était posé sans fond sur un plan incliné, et que l'eau s'appuyât immédiatement sur ce plan, la puissance n'aurait à soutenir selon une direction* SP *parallèle au plan que la différence des poussées de la même eau contre les surfaces* ABCD *et* HKIG (*bz*). Ainsi supposant que AD ou HG soit de 30 pouces, AB de 20, HK de 12, et la hauteur TA de l'eau de 18, il faut pour avoir la puissance P commencer par chercher le poids du volume d'eau qui exprime la poussée que soutient la surface ABCD qu'on trouvera de $218\frac{3}{4}$ liv., quarrer les hauteurs BA et CH des surfaces, ôter le petit quarré du grand, dire comme 400 quarré de BA est à $218\frac{3}{4}$ liv., ainsi 256 différence des deux quarrés est à la différence des poussées qu'on trouvera de $78\frac{3}{4}$ liv., auxquelles on ajoutera ce qu'il faut pour surmonter le frottement de la base du vaisseau.

On ne doit pas regarder ce qui précède comme de simple curiosité : on en verra l'usage lorsque nous ferons mention des moulins à chapelets qui agissent sur des plans inclinés, le plus grand service qu'on en peut tirer dépendant de la perfection qu'il faut leur donner, à laquelle on ne

---

Remarque sur l'art. 390.

(*bz*) Cette dernière assertion est vraie, et l'auteur n'avait pas besoin de distinguer le cas d'un vase sans fond de celui qui en a un. La valeur de la puissance est la même dans ces deux cas. Elle doit toujours faire équilibre au poids de l'eau décomposé dans le sens du plan incliné. Or il est facile de s'assurer que le poids de l'eau, décomposé dans le sens du plan incliné, est toujours numériquement égal à la différence des pressions supportées par les faces AC et KF (fig. 34), ou par les faces AC et HF (fig. 35). On voit par-là que dans l'article 388 l'auteur donne à P une valeur précisément double de ce qu'elle doit être, en comptant le même effort de deux manières différentes.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

peut parvenir que par une théorie fort délicate, comme on en va juger par le problême suivant.

Recherche de l'angle sous lequel un plan doit être incliné pour y faire monter le plus d'eau qu'il est possible dans le temps le plus court.

Pl. 4, Fig. 35.

391. Le vaisseau ABFG ayant un fond ou non, étant posé sur un plan incliné, ne contiendra pas autant d'eau que si le plan était horizontal, et d'autant moins qu'il sera plus roide. Cependant, comme on suppose ne lui avoir donné cette situation que pour procurer à une puissance plus de facilité à élever l'eau à la hauteur donnée OR, moins le plan sera incliné, plus il aura de longueur, et plus il faudra de temps à cette puissance pour amener le vaisseau du pied de la rampe au sommet. Or il s'agit de combiner la plus grande quantité d'eau que contiendra le vaisseau avec le chemin le plus court, de façon qu'elle monte de la hauteur RO du plan dans le moins de temps qu'il est possible; parce que si des vaisseaux comme celui-ci, enchaînés, se suivaient immédiatement avec une vîtesse uniforme, il en résulterait que dans un temps déterminé, et avec une vîtesse aussi déterminée, la puissance tirerait du réceptacle qui serait au pied du plan la plus grande quantité d'eau qu'il est possible dans le même temps.

392. La ligne BK qui marque le niveau de l'eau étant parallèle à la base LR, le triangle rectangle BEK sera toujours semblable au triangle LOR. D'autre part, sans avoir égard à la largeur du vaisseau, on pourra prendre le trapeze ABKH pour exprimer la quantité d'eau qui sera contenue dans le vaisseau. Tirant la ligne AK, ce trapeze sera divisé en deux triangles, dont le premier ABK aura toujours une même superficie, à quelque point de la ligne EH qu'aille aboutir son sommet K, au lieu que le second AKH qui a pour base la ligne constante AH augmentera ou diminuera dans la raison de sa hauteur KH. Ainsi l'accroissement ou la diminution du trapeze, ou de l'eau que contiendra le vaisseau sous les différentes inclinaisons du plan, pourra être exprimé par la ligne HK. D'autre part, le temps qu'il faudra à la puissance pour faire monter le vaisseau de L en O dépendra de la longueur du chemin LO, ou du sinus de l'angle OLR; car plus ce sinus sera petit par rapport au sinus total, plus le point K approchera de E, et plus il y aura d'eau dans le vaisseau, mais en récompense le chemin sera plus long. Au contraire, plus ce sinus approchera d'égaler le sinus total, moins il y aura d'eau; mais aussi la longueur LO approchant davantage d'égaler la hauteur OR, il faudra moins de temps à la puissance pour la faire monter. Or puisque la plus grande quantité d'eau dépend de la ligne KH et le chemin le plus court du sinus de l'angle OLR, *on voit qu'il faut que le produit de ces deux lignes soit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formés par les mêmes lignes.*

Ayant fait OV égal à OR, et mené du point V la ligne VY parallèle à LR, OV pourra être pris pour le sinus total, VY pour celui de l'angle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

VOR, et OY pour celui de l'angle OVY ou OLR. Ainsi, nommant OR ou OV a, OY x, VY sera $\sqrt{(a^2-x^2)}$. Quant aux lignes BE et EH, que nous supposerons égales, comme la longueur en est indifférente, nous l'exprimerons par l'unité. Considérez que les triangles semblables VOY et BKE donnent $VY=\sqrt{(a^2-x^2)} : YO=x :: BE=1 : EK=\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$; d'où l'on tire $EH-EK=KH=1-\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, qui étant multiplié par $OY=x$, donne $x-\frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, dont il faut prendre la différentielle et l'égaler à 0, ce qui donne $dx-\frac{2xdx\sqrt{(a^2-x^2)}+x^3dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{a^2-x^2}=0$. Divisant tout par dx, et multipliant ensuite par a^2-x^2, on aura d'abord $a^2-x^2-2x\sqrt{(a^2-x^2)}-\frac{x^3}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=0$; ou multipliant encore tous les termes par $\sqrt{(a^2-x^2)}$, et transposant, $(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}-2x(a^2-x^2)=x^3$; laissant $(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$ dans le premier membre, puis élevant tout au quarré et faisant le développement de $(a^2-x^2)^3$, on trouvera en dernier lieu, après toutes les réductions, $x^6-\frac{7}{2}a^2x^4+\frac{7}{2}a^4x^2-\frac{1}{2}a^6=0$. Si l'on suppose $x^2=ay$, on trouvera, après les substitutions convenables et après avoir tout divisé par a^3, que l'équation devient $y^3-\frac{7}{2}ay^2+\frac{7}{2}a^2y-\frac{1}{2}a^3=0$, ce qui est l'équation la plus simple à laquelle le problème puisse être réduit.

Pl. 4, fig. 35. Comme on peut supposer la ligne OR divisée en autant de parties égales qu'on voudra, prenant le nombre 10 pour exprimer la valeur de a, on trouvera en suivant les règles ordinaires $y=1,7$. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à multiplier les valeurs de a et de y de la même façon qu'elles le sont dans l'équation précédente, on trouvera $y^3+\frac{7}{2}a^2y=599,913$ et $\frac{7}{2}ay^2+\frac{1}{2}a^3=601,150$, ce qui montre que la somme des termes positifs diffère assez peu de celle des termes négatifs pour qu'on puisse les regarder comme étant égales.

Pour le plus grand effet, il faut que la hauteur du plan incliné soit les $\frac{2}{5}$ de la longueur, ou que ce plan forme avec l'horizon un angle de 24° 21′.

Ayant supposé $x^2=ay$ ou $\frac{x^2}{a}=y$, et $a=10$, on aura $x^2=17$ et $x=\sqrt{17}=4,1231$; ce qui fait voir que $OV=a$ doit être à $OY=x$, comme 10 est à 4,1231, ou à-peu-près comme 5 est à 2, qui est un rapport qu'on peut suivre dans la pratique. Ainsi l'on voit que, *pour le plus grand effet, il faut que la hauteur du plan incliné soit les $\frac{2}{5}$ de sa longueur* LO. Alors on trouvera que la base LR du même plan est à sa hauteur OR, comme 23 est à 10, ou comme $4\frac{3}{5}$ est à 2.

Prenant le côté $OV=10$ pour le sinus total, $OY=4,1231$ sera celui de l'angle $OVY=OLR$, qui répond dans les tables à 24° 21′, ce qui est la valeur de l'angle que le plan incliné doit former avec l'horizon.

393. Au reste il est facile d'arriver plus promptement à l'équation du troisième degré qu'on ne l'a fait ici : car en examinant bien l'état de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

question, on voit que tout se réduit à déterminer une quantité la plus grande possible qui soit en raison composée de la directe de l'espace ABKH et de l'inverse de la ligne LO.

Soit donc EK$=x$, AB$=b$, la hauteur donnée$=a$, et la largeur BE ou AH$=c$. On aura, à cause des triangles semblables BEK et LRO, EK:BK::OR:OL; ou $x:\sqrt{(c^2+x^2)}::a:\frac{a}{x}\sqrt{(c^2+x^2)}=$OL. La ligne HK étant égale à $b-x$ et la ligne AB étant b, le volume d'eau sera proportionnel au trapèze ABKH qui est exprimé par $(b-\frac{1}{2}x)c$. Donc $\frac{cx(2b-x)}{2a\sqrt{(c^2+x^2)}}$ est la quantité qu'il faut rendre un maximum. Ainsi prenant la différenticlle de cette fraction et l'égalant à zéro, on aura d'abord $\frac{4acdx(b-x)(c^2+x^2)^{\frac{1}{2}}-2acx^2dx(2b-x)(c^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{4a^2(c^2+x^2)}=0$; divisant tout par $2acdx$, multipliant par $4a^2(c^2+x^2)$, et par $\sqrt{(c^2+x^2)}$, réduisant et ordonnant, il vient pour équation finale $x^3+2c^2x-2bc^2=0$.

On pourrait être surpris que la hauteur donnée a ne se trouve plus dans l'équation; mais il faut remarquer que lorsqu'une fois l'angle sera tel que la quantité d'eau soit la plus grande possible, le problême sera aussi résolu pour une hauteur donnée a (*ca*).

SECTION V.

De l'action de l'eau contre les surfaces circulaires, verticales et inclinées.

Il me reste à parler de l'action de l'eau contre les surfaces circulaires, pour montrer de quelle manière on en doit calculer la poussée. Comme

---

(*ca*) Cette prétendue explication n'en est pas une. Il fallait dire que la hauteur a ne doit pas entrer dans l'équation qui donne x, parce que la valeur de cette dernière quantité, qui fixe l'inclinaison du plan incliné, doit être la même quelle que soit la hauteur de ce plan.

Remarque sur les solutions données par l'auteur du problême de l'inclinaison la plus avantageuse d'un plan le long duquel on fait monter de l'eau. Pl. 4, Fig. 35.

Au surplus, cette dernière solution (qui ne se trouve point dans la première édition de 1737, mais qui a été insérée dans les éditions postérieures) est exacte. On peut seulement remarquer que l'équation finale eût été plus simple, en prenant pour inconnue la tangente de l'inclinaison du plan. En effet, en nommant α l'angle OLR, on a $x=c$ tang. α, ce qui change cette équation en tang.$^3\alpha+2$ tang. $\alpha-\frac{2b}{c}=0$. Elle n'a qu'une racine réelle dont la valeur, lorsque $b=c$, ou quand l'intervalle des palettes est égal à leur hauteur, diffère peu de tang. $\alpha=0{,}77$; ce qui apprend que la hauteur du plan incliné doit être alors les 0,77 de sa base.

Quant à la solution de l'article 392, indépendamment de ce qu'elle ne serait pas générale, parce que les lignes BE, EH ont été supposées égales, elle est entièrement fautive. Son défaut provient de ce que l'auteur suppose le volume de l'eau élevée proportionnel à la ligne KH, tandis que ce volume est proportionnel à l'aire du trapèze ABKH.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

elle est toujours équivalente au poids d'un volume d'eau exprimé par les parties d'un cylindre coupé, avec des circonstances relatives à la figure et à la situation de ses surfaces, je commencerai par exposer les connaissances préliminaires dont nous pourrons avoir besoin.

Pl. 4, Fig. 36. 394. Soit un cylindre droit ABCD, coupé d'abord en deux parties égales par un plan EFGH passant par l'axe IK, ensuite par un autre ROBM qui forme une ellipse; enfin par deux autres plans parallèles à la base formant deux cercles, dont le premier OLMN passe par le petit axe OM de l'ellipse, et le second QPVR par l'extrémité R du grand axe.

Cela posé, considérez que toutes ces sections font naître plusieurs solides : premièrement l'onglet ROMNR formé par le demi-cercle OMN, la demi-ellipse OMR, et une portion MYNRTO de la surface du cylindre.

2° Un autre onglet OLBMO (fig. 36, 37) égal et semblable au précédent, puisqu'il est aussi formé par le demi-cercle OLM, la demi-ellipse OBM, et une portion OLBM de la surface du cylindre.

3° Le solide RQOMVR (fig. 36, 39), formé par le demi-cercle RQV, le rectangle QOMV, la demi-ellipse OMR, et de deux portions VMYRV, QOTRQ de la surface du cylindre, je nommerai ce solide complément de l'onglet ROMN, parce que c'est la partie qui lui manque pour valoir le demi-cylindre QOMNRVQ.

4° Le solide BMROQPB (fig. 36, 40), formé par le cercle PR, l'ellipse OBMR, et la portion du cylindre comprise entre ces deux plans.

5° Le solide (fig. 36, 41) ABMRDEOB.

6° Les deux solides OEABMHE, et OEDRMHE (fig. 36, 42, 43).

Figure 37. 395. Si l'on examine chacun de ces solides en particulier, on pourra considérer l'onglet OLBMO comme composé d'une infinité de rectangles DEFC, qui auraient pour base la double ordonnée CF du demi-cercle OLM, et pour hauteur l'élément correspondant GH du triangle rectangle BLX. Ainsi l'on trouvera la somme de tous ces rectangles de la même manière que l'on trouve la solidité de l'onglet.

Figure 38. 396. On peut aussi imaginer l'onglet composé d'une infinité de triangles rectangles FHG, d'une épaisseur infiniment petite, ayant pour base les ordonnées FG du demi-cercle, et pour hauteur l'élément correspondant FH de la surface. Pour avoir la somme de ces triangles, nous nommerons le rayon DL ou DO a, la hauteur LB b, DG x, GF y; Gg ou Kf sera dx, FK dy, et FH $\frac{by}{a}$.

La solidité de l'onglet est égale aux deux tiers du parallélepipède, compris sous le quarré du rayon, 397. Multipliant le triangle $FHG = \frac{by^2}{2a}$ par dx, le produit donnera $\frac{by^2\,dx}{2a}$ pour le solide différentiel de l'onglet; et comme la propriété du demi-cercle donne $a^2 - x^2 = y^2$, substituant la valeur de y^2 dans l'expression

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

précédente, on aura $\frac{b\,dx}{2a}(a^2-x^2)$, dont l'intégrale est $\frac{bx}{2a}(a^2-\frac{1}{3}x^2)$, ou $\frac{ab}{2a}(a^2-\frac{1}{3}a^2)=\frac{1}{3}a^2b$ lorsque $x=a$, ce qui donne la moitié de l'onglet; par conséquent on aura $\frac{2}{3}a^2b$ pour la valeur de l'onglet. Elle devient $\frac{2}{3}a^3$ lorsque $b=a$, *ce qui fait voir que dans ce cas l'onglet est égal aux deux tiers du cube du rayon.*

et sous la hauteur de l'onglet.

398. Selon ce qu'on vient de voir (396) on pourra regarder la superficie infiniment petite FHfh comme le *rectangle différentiel* de la surface de l'onglet, dont on aura l'expression de la base Ff en tirant le rayon DF, et en considérant que les triangles semblables FDG et FfK donnent FG$=y$: FD$=a$ :: fK$=dx$: fF$=\frac{a\,dx}{y}$, dont le quatrième terme étant multiplié par FH$=\frac{by}{a}$, devient $\frac{ab\,y\,dx}{ay}$, ou simplement $b\,dx$, dont l'intégrale est bx, ou ba lorsque $x=a$ pour la moitié de la surface de l'onglet; on a par conséquent $2ab$ pour *la surface entière, qui se trouve égale au rectangle compris sous le diamètre* MO *et la hauteur* BL *de l'onglet.* Je ne fais mention de cette surface présentement, que parce qu'il est nécessaire de la connaître pour l'intelligence de ce qu'on verra dans la suite.

La surface de l'onglet est égale au rectangle compris sous le diamètre de l'onglet et sous sa hauteur.

Pl. 4, Fig. 38.

399. Considérant le complément RQOMV de l'onglet comme composé d'une infinité de rectangles ABCD, qui auraient pour base la double ordonnée AD, et pour hauteur l'élément correspondant EF du triangle rectangle XYR, on trouvera leurs sommes en retranchant du demi-cylindre QOMBVR l'onglet qui en fait la différence. Ainsi supposant XY$=$YR$=a$, et la demi-circonférence QRV$=b$, on aura $\frac{1}{2}a^2b$ pour la solidité du demi-cylindre, par conséquent $\frac{1}{2}a^2b-\frac{2}{3}a^3$, ou $\frac{a^2}{6}(3b-4a)$ pour la valeur du complément de l'onglet. Ainsi le rapport de ces deux solides sera $\frac{4a^3}{3a^2b-4a^3}$ ou $\frac{a}{\frac{3}{4}b-a}$, ce qui montre que *l'onglet est à son complément comme le diamètre du cercle est à la différence du même diamètre aux trois quarts de la circonférence.* Il suit de-là que si l'on pouvait trouver la valeur exacte du complément de l'onglet, on aurait la quadrature du cercle.

La solidité de l'onglet est à celle de son complément comme 14 est à 19.

Figure 39.

Pour avoir en nombres le rapport de l'onglet à son complément, supposant $a=7$, il viendra $b=22$, par conséquent $\frac{a}{\frac{3}{4}b-a}=\frac{14}{19}$, ce qui fait voir que *l'onglet est à son complément, comme* 14 *est à* 19.

400. Considérant aussi le solide exprimé par la 40^e figure, comme composé d'une infinité de plans EFGH, compris sous la double ordonnée EH et l'élément IK du triangle PBR, on aura la somme de tous ces plans en multipliant le cercle HVQR par l'élément moyen DC servant d'axe

Figure 40.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

au cylindre PLNR, parce que les onglets OLBM et ROMN étant égaux, *le solide dont il s'agit sera égal à ce cylindre.*

401. Coupant le même solide en deux parties par le plan QOMV qui passe par l'axe DC, et dont la base QV est perpendiculaire au diamètre PR, la grande partie OQPBMV sera à la petite OQVMR comme 47 est à 19.

Supposant BP=PR, on aura BL=LD et DC=CR. Par conséquent si l'onglet OLBM est exprimé par 14, son complément OQRVM le sera par 19; et comme ces deux solides ensemble valent le demi-cylindre OQPLMV, il pourra être exprimé par la somme des deux nombres précédents, à laquelle ajoutant celui de l'onglet, on aura 47 pour la plus grande partie OQPBMV, et 19 pour la petite OQRVM.

Pl. 4, Fig. 41. 402. Pour avoir la somme de tous les plans CFHL, compris sous la double ordonnée CL et sous l'élément GI du trapèze ABRD, *il faudra, comme dans le cas précédent, multiplier encore la superficie du cercle* AD *par l'élément moyen* XK *servant d'axe au cylindre* ALND, puisque ce cylindre est égal au solide dont nous parlons.

Figures 42 et 43. 403. Quant aux solides exprimés par les figures 42 et 43, on voit que *pour le premier on aura la somme de tous les plans* DING, *en ajoutant à la solidité du demi-cylindre* ALMHO *celle de l'onglet* OLBM, et qu'on aura celle du second *en retranchant du cylindre* EOMNHD, *la valeur de l'onglet* MNRO.

Manière de mesurer la poussée de l'eau contre un demi-cercle, eu égard à sa situation.

Pl. 5, Fig. 44. 404. Il sera aisé présentement de calculer la poussée de l'eau contre toutes sortes de surfaces circulaires. Par exemple, voulant savoir celle que soutient la superficie du demi-cercle ABC dont le diamètre AC répond au niveau RZ de l'eau, remarquez qu'en faisant le triangle rectangle et isoscele DBE, dont tous les éléments représentent les hauteurs des lames d'eau qui répondent à tous les points de la hauteur DB, on aura la poussée qui agit contre la double ordonnée FG en multipliant cette ligne par l'élément correspondant IH. Or comme la somme de tous ces produits sera égale à la solidité d'un onglet qui aurait pour base le demi-cercle ABC, et pour hauteur la ligne BE égale au rayon, *cette poussée pourra donc être exprimée par un volume d'eau égal aux deux tiers du cube du rayon* DB (397).

405. Si le demi-cercle était situé dans un sens opposé au précédent, comme KLM, on verra que puisqu'il faut encore, pour avoir l'action de toutes les lames d'eau contre les doubles ordonnées OP, multiplier chacune de ces lignes par l'élément correspondant QR du triangle KLN, que la poussée que soutiendra ce demi-cercle pourra être exprimée par le complément d'un onglet qui aurait pour base ce même demi-cercle, et pour hauteur le rayon. Ainsi on la trouvera (399) en disant 14 est à 19

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

comme $\frac{2}{3}\overline{LN}^3$ est à $\frac{19}{21} \times \overline{LN}^3$; *ce qui fait voir que cette poussée est égale aux dix-neuf vingt-unièmes du volume d'eau exprimé par le cube du rayon.*

Il suit que, si les deux demi-cercles sont égaux, la poussée que soutiendra le premier est à celle que soutiendra le second comme 14 est à 19 (399).

406. Si les deux demi-cercles étaient au-dessous du niveau RZ, comme ABCD et HRS, les lignes IB et OX exprimant la plus grande hauteur de l'eau, faisant les triangles rectangles et isosceles IBN et OXL, il faudra multiplier les doubles ordonnées FG et QT par les éléments correspondants HE et PV des trapezes NKDB et LMRX. Alors la somme des produits, pour le demi-cercle ABC, étant exprimée par un solide semblable à celui de la 42^e^ figure, *il faudra multiplier sa superficie par la ligne* DK *ou* DI, *qui marque la plus petite hauteur de l'eau, pour avoir le demi-cylindre dont il a été fait mention dans l'article* 403, *et y ajouter celle de l'onglet, c'est-à-dire les deux tiers du cube du rayon, ce qui donnera le volume d'eau dont ce demi-cercle soutient la pesanteur.* Pl. 5, Fig. 45.

407. Quant à l'autre demi-cercle HRS, comme la somme des produits dont nous venons de parler sera exprimée par un solide semblable à celui de la 43^e^ figure, *on voit que, pour avoir la poussée qu'il soutient, il faut multiplier sa superficie par la ligne* XL *ou* XO *pour avoir la solidité du cylindre dont nous avons fait mention dans l'article* 403, *de laquelle il faudra retrancher celle de l'onglet, c'est-à-dire les deux tiers du cube du rayon.*

Manière de mesurer la poussée de l'eau contre les surfaces circulaires, eu égard à leur position.

408. Enfin, si l'on avait deux cercles, dont l'un répondît au niveau DL de l'eau, et l'autre plus bas, faisant les triangles rectangles et isosceles CDB et NLM, la somme des produits des doubles ordonnées EF par les éléments correspondants GH du triangle CDE, pourra être exprimée par un solide semblable à celui de la 39^e^ figure. C'est pourquoi *il faudra, pour avoir la poussée que soutient le premier cercle, multiplier sa superficie par l'élément moyen* IK, *qui n'est autre chose que le rayon* KD, *qui marque la hauteur de l'eau, au-dessus du centre* K (400). Figure 46.

409. Si l'on se rappelle ce qui a été dit dans l'article 401, on verra que *la poussée que soutient le demi-cercle inférieur* IBZ, *est à celle que soutient le supérieur* IDZ, *comme* 47 *est à* 19.

410. On verra de même que la somme de tous les produits des doubles ordonnées QR, par les éléments correspondants OP du trapeze NSTM, pourra être exprimée par un solide semblable à celui de la 41^e^ figure. C'est pourquoi *il faudra, pour avoir la poussée que soutient le second cercle, multiplier sa superficie par l'élément moyen* VX, *ou par son égal* XL, *qui marque la hauteur de l'eau au-dessus du centre* X (402).

Dans quelque situation que soit une surface circu-

411. Il suit qu'ayant un tuyau AB recourbé par le bas, pour y adapter une espèce d'entonnoir GECDFH fermé par un piston, et versant de l'eau

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

laire, la poussée qu'elle soutient est toujours égale au poids d'une colonne d'eau qui aurait cette surface pour base, et pour hauteur celle du niveau de l'eau au-dessus du centre du cercle.

dans ce tuyau jusqu'à la hauteur K, *la puissance* P *appliquée au piston, soutiendra une poussée équivalente au poids d'une colonne d'eau qui aurait pour base le cercle* EF *du piston, et pour hauteur la ligne* KB *qui marque l'élévation du niveau de l'eau, au-dessus du centre* I, *quelque petit que soit le diamètre du tuyau. Ainsi cette puissance sera dans le même cas que si elle était appliquée au piston de la* 48^e *figure, comme dans l'art.* 357.

Si les surfaces précédentes, au lieu d'être verticales, étaient inclinées, tout ce que nous venons de dire n'en subsisterait pas moins, ayant montré (382) que la poussée contre les unes et les autres devait se mesurer de la même manière.

PLANCHE 5. FIGURES 47 et 48.

FIGURE 49.

412. Il suit de-là que si on avait un tuyau incliné ABCD rempli d'eau, et que le fond AD fût fermé par un piston, que *la puissance qui lui serait appliquée soutiendrait un poids équivalent à celui d'une colonne d'eau qui aurait pour base le cercle du piston, et pour hauteur la perpendiculaire* EF, *qui marque la plus grande élévation de l'eau au-dessus du centre* F, *de quelque figure que soit le tuyau, et sans se mettre en peine de sa grosseur* (360).

SECTION VI.

Des centres d'impression.

FIGURE 50.

413. Puisque, selon l'article 362, l'action de toutes les lames d'eau contre une surface ABCD peut être exprimée par les éléments d'un triangle isoscele AED, il est constant qu'il y a un point M dans la perpendiculaire EF où une puissance P étant appliquée selon une direction opposée PM, les soutiendra toutes en équilibre; et pour peu qu'on y fasse attention, on verra que ce point que je viens de nommer ici *centre d'impression*, ne peut être que le centre de gravité du triangle AED. *D'où il suit que le centre d'impression d'une surface rectangulaire* ABCD *est placé aux deux tiers de la ligne* EF *qui la divise en deux également, et qui marque la hauteur de l'eau* (100).

414. N'ayant égard qu'à la poussée que doit soutenir le rectangle AGHD, qu'on pourra regarder comme la vanne d'une écluse, l'eau ayant toujours la même hauteur EF, le centre d'impression de cette surface sera le même que le centre de gravité O du trapeze AIKD. Pour le trouver, nous supposerons que le point N marque celui du triangle IEK: nommant EF a, EL b, EO x, on aura $EM = \frac{2}{3}a$, $EN = \frac{2}{3}b$, $MN = \frac{2}{3}(a-b)$, et $MO = x - \frac{2}{3}a$.

Si à la place de la superficie des triangles semblables IEK et AED, on prend les quarrés de leurs perpendiculaires EL et EF, la différence de ces deux quarrés, ou $a^2 - b^2$, exprimera la superficie du trapeze AIKD (363); ainsi l'on aura (54) $a^2 - b^2 : b^2 :: \frac{2}{3}(a-b) : x - \frac{2}{3}a$; d'où l'on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tire $x-\frac{2}{3}a=\frac{2b^2(a-b)}{3(a^2-b^2)}$, ou $x=\frac{2}{3}\left\{\frac{b^2(a-b)}{a^2-b^2}+a\right\}$. Si l'on multiplie la grandeur a par a^2-b^2 on aura $x=\frac{2}{3}.\frac{ab^2-b^3+a^3-ab^2}{a^2-b^2}$, ou $x=\frac{2}{3}.\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$, d'où l'on tire cette règle générale.

415. *Pour avoir l'intervalle de la surface de l'eau au centre d'impression d'une vanne, il faut mesurer exactement la plus grande et la plus petite hauteur de l'eau, cuber ces deux hauteurs, soustraire le petit cube du grand, prendre les deux tiers de la différence, ensuite diviser cette quantité par la différence du quarré de la plus grande hauteur de l'eau, à celui de la plus petite : le quotient donnera ce que l'on cherche.*

Par exemple si la hauteur EF était de 6 pieds et la plus petite EL de 4: soustrayant 64 (cube de 4) de 216 (cube de 6), on aura 152 pour la différence, dont il faut prendre les deux tiers ($101\frac{1}{3}$) qu'il faut diviser par la différence des quarrés de 6 et de 4, (qui est 20). Le quotient donnera $5\frac{1}{15}$, c'est-à-dire 5 pieds 9 lignes 7 points et $\frac{1}{5}$ de point pour l'intervalle EO. On verra par la suite l'usage des centres d'impression pour le calcul des machines mues par un courant.

Comme les centres d'impression des surfaces circulaires sont les mêmes que les centres de gravité des solides qui expriment ces impressions, et qu'on ne peut avoir ces derniers centres sans connaître celui de l'onglet, je vais examiner ce solide sous une autre face que dans l'article 396. Pour cela il faut considérer la solidité d'un cylindre droit ABCD comme composé de plusieurs surfaces EFGH, d'une épaisseur infiniment petite, lesquelles vont toujours en croissant depuis l'axe IK jusqu'à la plus grande surface ABCD. J'entends que si l'on imagine que le cercle qui sert de base au cylindre soit composé d'une infinité de circonférences concentriques, formant autant de couronnes d'une épaisseur infiniment petite, chacune d'elles servira de base à l'élément correspondant du cylindre. Pl. 6, Fig. 51.

416. En suivant cette idée, si l'on coupe le cylindre par un plan MLNDOM passant par le centre I et par l'extrémité D du diamètre AD, ce plan en détachera un onglet qui aura pour base le demi-cercle MLC. Or comme tous les cylindres qui vont en croissant depuis l'axe jusqu'à la surface ABCD auront été coupés de la même manière que le précédent, chacun d'eux fournissant aussi un onglet, il s'ensuit que le plus grand pourra être considéré comme étant composé d'une infinité d'autres onglets semblables entre eux, allant tous en croissant depuis le plus petit qui répond au centre I jusqu'au plus grand : je dis semblables entre eux, puisque tous les triangles IGP marqueront leurs coupes par le milieu. Par conséquent on pourra considérer l'onglet qui répond au plus grand triangle ICD comme étant composé d'une infinité de portions de surfaces cylindriques, semblables, concentriques, et d'une épaisseur infiniment

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

petite, dont chacune sera égale au rectangle compris sous le diamètre du demi-cercle qui lui sert de base, et sous l'élément correspondant GP du triangle IDC (398).

Pl. 6, fig. 52.

417. Pour avoir de cette manière la solidité de l'onglet qui a pour base le demi-cercle ABC, décrivant les demi-circonférences FGE et *fge*, infiniment près l'une de l'autre, nommons DB ou BI a, DG ou GP x, Gg sera dx. Ainsi on aura pour l'élément différentiel de l'onglet EF×GP×Gg $=2x^2dx$, dont l'intégrale est $\frac{2}{3}x^3$, ou $\frac{2}{3}a^3$ quand $x=a$, et donne la solidité de l'onglet.

418. Pour avoir son centre de gravité, il faut multiplier le solide différentiel $2x^2dx$ par le rayon DG$=x$; ce qui donne $2x^3dx$, dont l'intégrale est $\frac{1}{2}x^4$, ou $\frac{1}{2}a^4$, qui étant divisée par $\frac{2}{3}a^3$, solidité de l'onglet, donne $\frac{3}{4}a$; ce qui fait voir que *le centre de gravité de l'onglet est situé dans un plan éloigné du centre de son demi-cercle des trois quarts du rayon* (*cb*).

Figure 53.

419. Pour avoir le centre de gravité du complément de l'onglet, nous n'aurons égard qu'au demi-cercle VRQ commun à ces deux solides, et au centre de gravité du demi-cylindre, celui de l'onglet et celui de son complément étant dans le rayon YR perpendiculaire au diamètre VQ. Nous supposerons que le premier est au point B, le second au point C, et le troisième au point D; sur quoi il est à remarquer que la position des deux premiers est connue; car (selon l'article 106) la demi-circonférence VRQ est à son diamètre VQ, comme les deux tiers du rayon YR est à l'intervalle YB. Le demi-cylindre étant composé d'une infinité de demi-cercles égaux dont tous les centres de gravité passent par la même ligne, on pourra supposer tous ces cercles ou le demi-cylindre, réunis dans le poids P. D'autre part, comme on aura la position du centre de gravité de l'onglet en faisant YC égal aux trois quarts du rayon YR (418), on pourra supposer aussi sa solidité réunie dans le poids T, et celle de son complément dans le poids S.

Cela posé, considérant le point B comme l'appui d'un levier DC, autour duquel sont en équilibre les poids S et T, dont le premier est au deuxième comme 19 est à 14 (399), on aura 19 : 14 :: BC : BD $=\frac{14}{19}$ BC (51).

Si l'on fait un angle à volonté YCK, prenant la ligne CE de telle grandeur que l'on voudra, il faut la diviser en 19 parties égales, faire EF égal

---

Remarque sur les art. 415, 416 et 417.

(*cb*) Le dernier alinéa de l'article 415 et les articles 416 et 417 sont absolument fautifs. Le calcul, dont le résultat est d'ailleurs exact, est établi en considérant l'onglet comme formé d'éléments rectangulaires, de la manière indiquée à l'article 395, considération qui n'a aucun rapport avec le contenu des articles cités, ni avec les figures 51 et 52. On ne peut se dissimuler qu'ici l'auteur ne s'entendait pas lui-même.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à 14 de ces parties, tirer la ligne EB, et par le point F lui mener la parallèle FD qui donnera le point D, centre de gravité du complément de l'onglet, puisque CE=19:EF=14:: CB: BD.

420. Ayant un solide comme celui de la 42e figure, composé d'un demi-cylindre OEALMH et d'un onglet OLBM, on trouvera dans le rayon AK le point par où doit passer la ligne de direction du centre de gravité de ce solide. Car (en nous servant de la 53e figure) prenant le poids P pour celui du demi-cylindre, et le poids T pour celui de l'onglet, on dira : Comme la somme des deux poids, qui n'est autre chose que le solide dont il s'agit (403), est à l'intervalle BC, ainsi le poids T ou l'onglet est à l'intervalle BG du centre de gravité du demi-cylindre à celui que l'on cherche (51). Pl. 4, Fig. 42.

421. Pour trouver de même dans le rayon KD de la base du solide de la 43e figure, le point par où doit passer la ligne de direction de son centre de gravité, on remarquera que ce solide étant composé du demi-cylindre EQVRDH et du complément RQOMV d'un onglet, on pourra, en prenant encore dans la 53e figure le poids P pour celui du demi-cylindre, et le poids S pour celui du complément de l'onglet, dire: Comme la somme de ces deux poids (403) est à l'intervalle DB, ainsi le poids S, ou la solidité du complément de l'onglet (399), est à l'intervalle BH du centre de gravité du demi-cylindre à celui du solide entier. Figure 43.

422. Si dans la 40e figure on retranche du cylindre PLNR les onglets égaux MNRO, MLPO, il restera un solide régulier POMVRQO, et l'axe DC passant par son centre de gravité, on pourra supposer ce solide réuni dans le poids Y. Prenant la ligne DA égale aux trois quarts du rayon DL, le centre de gravité commun des onglets égaux MBLO, ou MPLO étant au point A (418), on pourra aussi le supposer réuni dans le poids X. On dira donc: Comme la somme des poids X et Y, ou la solidité du cylindre PLNR (400), est à l'intervalle DA, ainsi le poids X, ou la somme des deux onglets, est à l'intervalle DS du centre du cercle LN au centre de gravité du solide PBR. Figure 40.

423. Enfin on trouvera de la même manière le centre de gravité du solide représenté par la 41e figure, en retranchant le double onglet OGBM, et en faisant XY égal aux trois quarts du rayon, afin de pouvoir dire: Comme le cylindre ALND est à l'intervalle XY, ainsi la somme des deux onglets est à l'intervalle XS du centre du demi-cercle au centre de gravité S que l'on cherche. Figure 41.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

SECTION VII.

De la mesure des eaux qui coulent par le fond des tuyaux ou des réservoirs.

Les parties de l'eau renfermée dans un vaisseau, s'empressent de toutes parts à couler du côté le plus faible.

424. Pour bien établir les principes qui vont faire l'objet de cette section, il convient de remarquer que les parties de l'eau renfermée dans un vaisseau se pressent mutuellement en tous sens avec des forces égales dans chaque couche horizontale, et que, s'il vient à s'en échapper par une ouverture pratiquée au fond, toutes les autres dont elles sont environnées s'empressent à couler de ce côté-là, avec une certaine gradation de vîtesse qui dépend de la force de celles qui les suivent, ou si l'on veut du poids dont elles sont chargées (344). Or, comme la force qui presse la surface de l'eau pour la faire descendre peut être regardée comme nulle par rapport à la pression que soutient la lame qui sert de base à la colonne d'eau qui répond à l'orifice, on ne peut pas dire que ce soit cette colonne, sans cesse renouvelée par la surface, qui s'échappe, mais que généralement toute celle du vaisseau concourt à la dépense.

Quand un réservoir percé par le fond est toujours entretenu à la même hauteur, ce n'est pas la colonne d'eau qui répond à l'orifice, sans cesse renouvelée, qui fournit à la dépense, mais généralement toute l'eau du vaisseau y concourt.

Pl. 6, Fig. 54.

425. Pour mettre ceci dans un plus grand jour, supposons un vaisseau ABCD, rempli d'eau jusqu'à la hauteur IK. Si on y plonge jusqu'au fond un tuyau EFGH ouvert par les deux bouts, sa surface sera poussée selon des directions horizontales (361) avec des forces égales et opposées, qui iront en croissant selon l'ordre des termes d'une progression arithmétique (362); car traçant sur les côtés FE, GH du tuyau les triangles rectangles et isosceles FES et GHT, leurs éléments représenteront l'action de l'eau contre la surface extérieure. Comme le point X sera poussé avec une force exprimée par l'élément VX, et le point Y opposé au précédent avec une force exprimée par la hauteur FY égale à VX (377), et qu'il en sera de même de tous les autres points pris à la ronde dans une même couche horizontale LM, on voit que l'eau du vaisseau fera autant d'effort pour entrer dans le tuyau, que celle du tuyau en fera pour en sortir.

Comme l'étendue de la base AD est indifférente à la poussée dont nous parlons, on voit que si le vaisseau était lui-même un tuyau OPQR, un peu plus gros que celui qu'on plongera dedans, la surface de ce dernier sera toujours poussée avec la même force, quelque petite que soit la différence des deux cercles OR et EH, pourvu que leurs circonférences ne se confondent point (379).

L'effort que fait l'eau pour occuper la place de la colonne, est à l'action de cette colonne pour descendre, comme sa hauteur est au rayon de sa base.

426. Si l'on supprime le tuyau du milieu pour n'avoir égard qu'à la colonne qui s'y trouve renfermée, la surface sera pressée par l'eau dont elle est environnée avec la même force que l'était celle du tuyau. Pour connaître le rapport de cette force à l'action du poids de la colonne sur le fond du vaisseau, nous nommerons r le rayon NH du cercle EH, c sa

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

circonférence, et h la hauteur FE de l'eau. Ainsi l'on aura $\frac{1}{2}ch^2$ pour la poussée que soutient la surface (374)) et $\frac{1}{2}chr$ pour son poids, d'où l'on tire $\frac{1}{2}ch^2 : \frac{1}{2}chr :: h : r$, ce qui montre que *l'effort que fait l'eau du vaisseau pour occuper la place de la colonne, est à l'action de cette colonne pour descendre, comme sa hauteur est au rayon de sa base.*

427. On peut conclure que lorsque la hauteur de la colonne excédera son demi-diamètre, les parties de l'eau qui la composent ne pourront jamais sortir toutes ensemble par une ouverture égale à sa base, parce que la force avec laquelle elle tendra à descendre sera moindre que celle de l'eau qui tend à la remplacer, ce qui montre que cette colonne, dans le temps de l'écoulement, aura toujours la même pesanteur, puisque les parties qui s'en échapperont seront à l'instant remplacées par celles qui cherchent à sortir à leur tour.

L'eau d'un vaisseau, entretenue au même niveau, coule toujours avec une vîtesse uniforme, étant chassée par une force constante.

428. Il suit que lorsque l'eau d'un vaisseau sera continuellement entretenue au même niveau, celle qui sortira par un orifice pratiqué au fond aura toujours la même vîtesse, puisqu'elle sera chassée par tout le poids de la colonne qui la presse, qu'on peut regarder comme *une force constante* qui agit *uniformément* sur toute l'étendue de l'orifice.

Quand un tuyau vertical dont l'ouverture est égale à la base, vient à se vider, la surface de l'eau acquiert en descendant une vîtesse qui croît comme celle des corps graves qui tombent librement.

429. Il n'en est pas de même de l'eau d'un tuyau droit qui se vide par une ouverture égale à la base, parce qu'elle tombe tout d'une pièce, comme un cylindre de glace, c'est-à-dire qu'en sortant elle a d'abord une très-petite vîtesse, qui va en croissant comme celle qu'acquièrent les corps graves depuis l'instant de leur chute. En effet, comme l'eau de la colonne n'est point remplacée ni par le haut ni par les côtés, sa surface répondant immédiatement à celle du vaisseau, elle se trouve dans le cas de tous les corps graves; par conséquent elle doit suivre la loi de leur accélération (154), ne se rencontrant ici aucune circonstance qui puisse faire naître quelque changement dans cette chute. Le temps qu'un pareil tuyau mettra à se vider totalement sera égal à celui qu'il faudra à un corps pour parcourir, en descendant librement, le même espace que parcourra dans le tuyau la surface supérieure de l'eau (175).

430. Comme on peut toujours rendre *uniforme* une vîtesse retardée ou accélérée, *en prenant la moitié de la plus grande vîtesse* (160), il faudra en user de la sorte lorsqu'on voudra comparer la dépense d'un tuyau tel que le précédent avec celle d'un autre toujours entretenu plein.

Les vîtesses de l'eau sont dans la raison des racines quarrées des hauteurs de la même eau.

Pl. 6, Fig. 55.

431. Si la surface de l'eau contenue dans un tuyau ou réservoir, après avoir été entretenue pendant un certain temps au même niveau BC, l'était ensuite au niveau FG, malgré la dépense qui s'en fera par l'orifice EH pratiqué au fond du vaisseau, *sa vîtesse uniforme dans le premier cas sera à sa vîtesse uniforme dans le second, comme la racine quarrée de la hauteur* IE *est à la racine quarrée de la hauteur* KE.

Pour s'en convaincre, il faut considérer que les quantités ou masses

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'eau, qui s'écoulent d'un même orifice en temps égaux, doivent être comme les vîtesses qu'elles ont à leurs sorties, puisqu'il est naturel qu'une vîtesse double ou triple fournisse dans le même temps une quantité d'eau double ou triple. Ainsi nommant V la grande vîtesse, M la masse ou la quantité d'eau qu'elle fournit dans un certain temps, u la petite vîtesse et m la masse qu'elle fournit dans le même temps, on aura $V : u :: M : m$; par conséquent $m = \frac{Mu}{V}$. D'autre part, nommant F le poids de la colonne IH, et f celui de la colonne KH, l'une et l'autre ayant la même base donneront $F : f :: IE : KE$; et les forces F, f étant comme les quantités de mouvement qu'elles causent (149), c'est-à-dire comme le produit des masses d'eau qu'elles font sortir en temps égaux multipliées chacune par sa vîtesse, on aura $F : f :: VM : \frac{u \cdot uM}{V}$. Par conséquent $\frac{FMu^2}{V} = fMV$, ou $Fu^2 = fV^2$; ce qui donne $V^2 : u^2 :: F : f$, ou $V^2 : u^2 :: IE : KE$, ou enfin $V : u :: \sqrt{IE} : \sqrt{KE}$, ce qui montre que *les vîtesses de l'eau sont comme les racines quarrées des hauteurs de la surface au-dessus de l'orifice* (*cc*).

Remarque sur la démonstration sur laquelle est fondée l'expression de la vîtesse du fluide à l'orifice d'un vase.

(*cc*) Cette démonstration, la première qu'on ait eue de la proposition dont il s'agit, laquelle avait été établie sur l'expérience par Toricelli, a été donnée en 1695 par Varignon, dans un petit écrit inséré dans le *tome 2e des anciens Mémoires de l'Académie des Sciences*. Elle est fondée sur cette considération, que la tranche située à l'orifice supporte une pression mesurée par le poids de la colonne d'eau dont cette tranche est la base, et prend le mouvement que cette pression tend à lui imprimer. Mais cette considération n'est exacte qu'autant qu'on suppose le fluide stagnant dans le vase, car s'il est en mouvement, la pression soufferte par la tranche n'aura plus la valeur qu'on lui donne. La démonstration ne peut donc être admise qu'autant que, l'orifice étant infiniment petit par rapport aux sections du vase, la vîtesse du fluide dans le vase est insensible. C'est effectivement ce que l'expérience confirme, et les formules auxquelles cette démonstration conduit ne sont suffisamment exactes qu'autant que la section de l'orifice ne surpasse pas le $\frac{1}{20}$ environ de la plus petite section du vase.

Planche C. Figures 4 et 5.

Il faut observer aussi que cette démonstration suppose tacitement que la forme de la paroi du vase aux environs de l'orifice *cd* est telle que les divers filets de molécules qui s'y rendent de toutes les parties du vase y parviennent suivant des directions parallèles entre elles. C'est ce qui arrive quand la paroi étant évasée comme le représente la figure 4, la veine de fluide, après avoir franchi l'orifice, conserve sa grosseur et ne se contracte point. Si cette condition n'est pas remplie, comme dans la figure 5, l'effet de la convergence des directions des filets de molécules, à l'instant où elles franchissent l'orifice *cd*, est de faire contracter la veine en *ef* à quelque distance de cet orifice. Dans ce cas, c'est la section *ef* de la plus grande contraction qui devient le véritable orifice du vase, et c'est à cet endroit que la vîtesse est due à la charge. Par conséquent elle est moindre en *cd*. On reviendra plus loin sur ce sujet.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La démonstration du principe général du mouvement des eaux, a été trouvée par M. Varignon.

432. On a fait long-temps usage de ce principe sans en connaître la véritable cause, qui n'a été découverte qu'en 1695 par M. Varignon, parce qu'on en était détourné par la ressemblance qui se rencontre entre l'expression des vîtesses de l'eau et celles qui résultent de la chute des corps graves. On voulait que la vîtesse de l'eau qui s'échappe vînt de l'impression de la chute accélérée de la surface, sans faire réflexion que toutes les parties de la colonne qui répond à l'orifice étant contiguës, celles d'en haut ne pouvaient avoir plus de vîtesse que celles d'en bas pour leur en communiquer, et qu'au contraire les premières devaient en avoir moins que les autres (424).

Les vîtesses de l'eau peuvent être exprimées par les racines quarrées des hauteurs des réservoirs.

PLANCHE 6. FIGURES 56 et 57.

433. On voit en général qu'ayant deux tuyaux ou réservoirs, dans chacun desquels l'eau soit toujours remplacée pour entretenir sa surface au même niveau IL et KP, mais à des hauteurs différentes, *les vîtesses de celle qui sortira par les orifices* O, *o seront comme les racines quarrées des hauteurs* IG *et* KG.

On pourra donc, quand on le jugera à-propos, au lieu des vîtesses de l'eau, prendre les racines des hauteurs des tuyaux ou réservoirs; j'entends ici par la hauteur des réservoirs celle de l'eau au-dessus de leur fond.

Que les tuyaux soient droits ou inclinés, les vîtesses de l'eau doivent toujours s'exprimer par les racines quarrées de la hauteur de son niveau au-dessus de l'orifice.

434. Le principe précédent est général, que le vaisseau soit *droit* ou *incliné*, parce que la pression de l'eau sur le fond de ce dernier étant la même que s'il était droit (412), les forces seront aussi les mêmes, par conséquent les vîtesses qu'elles causent; d'où il suit que lorsqu'on voudra calculer la quantité d'eau qui s'écoule par le fond d'un tuyau posé sur un plan incliné, de quelque figure que soit ce tuyau, *il faudra n'avoir égard qu'à la perpendiculaire qui exprime la hauteur de la surface de l'eau au-dessus du centre de l'écoulement, et pour le reste agir comme si le tuyau était droit.*

FIGURE 55.

435. Si après avoir rempli d'eau le vaisseau ABCD, on la laissait couler par l'orifice EH, il suit que les vîtesses à chaque instant seront comme les racines des hauteurs où sa surface se rencontrera au-dessus du fond (431) (*cd*).

Remarque sur les art. 433, 434 et 435.

(*cd*) Pour relever autant qu'il est possible toutes les inexactitudes de l'auteur, il faut remarquer ici d'abord que ce n'est que pour les orifices infiniment petits que les vîtesses sont comme les racines des charges; ensuite qu'en supposant même cette proposition vraie pour un orifice quelconque, dans le cas où un vase est entretenu constamment plein, il ne serait pas permis de l'étendre au cas où un vase se vide. En effet dans ce dernier cas le fluide du vase acquiert par sa descente un mouvement propre, qui influe nécessairement sur la vîtesse à l'orifice. Mais si l'on suppose toujours l'orifice infiniment petit, la vîtesse dans le vase étant alors considérée comme nulle, le mouvement dont on vient de parler se trouve détruit à chaque instant, et la vîtesse à l'orifice est seulement due à la hauteur du fluide dans le vase.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La vîtesse de l'eau à la sortie d'un orifice est la même que celle qu'un corps aurait acquise en tombant de la hauteur du réservoir.

436. Puisque les vîtesses de l'eau qui s'écoule des tuyaux ou réservoirs toujours entretenus pleins, peuvent être exprimées par les racines quarrées des hauteurs, comme celles qu'acquièrent les corps graves qui tombent librement (169), on voit que les règles de Galilée sur l'accélération peuvent être appliquées au mouvement des eaux en général, en regardant leurs vîtesses à la sortie des orifices comme ayant été acquises par une chute dont la hauteur serait égale à celle du niveau de l'eau au-dessus de ces orifices. D'autant mieux que tout le monde sait que les jets d'eau remontent à-peu-près à la hauteur du niveau de leurs réservoirs, qu'ils atteindraient précisément sans la résistance de l'air qu'ils sont obligés de fendre, ce qui prouve qu'à la sortie de l'ajutage, ils ont la même vîtesse que celle qu'aurait acquise un corps par une chute égale à la hauteur du réservoir, qui est celle qu'il lui faudrait pour remonter d'où il était tombé (161).

Quand un vaisseau est toujours entretenu plein, il se dépense par le fond une colonne d'eau double de celle qui aurait pour base l'orifice, et pour hauteur celle de l'eau, dans le temps qu'il faudrait à un corps pour parcourir cette hauteur, en tombant librement

Pl. 6, fig. 55.

437. Si la colonne d'eau IEHL était renfermée dans un tuyau de même grosseur, et qu'on lui laissât tout-à-coup la liberté de s'échapper par l'ouverture EH égale à sa base, nous avons vu (430) que sa vîtesse moyenne serait la moitié de celle qu'un corps acquerrait en tombant de la hauteur IE, ensuite qu'elle peut être exprimée par $\frac{1}{2}\sqrt{IE}$, et que le temps de cette chute serait égal à celui qu'il faudrait au tuyau pour se vider (429).

Si l'on fait abstraction du tuyau, que l'eau soit toujours remplacée et entretenue au même niveau BC, la vîtesse uniforme de celle qui sortira par la même ouverture EH devant être exprimée par $\sqrt{IE}$ (433) double de $\frac{1}{2}\sqrt{IE}$, on voit que la dépense de l'orifice dans le temps qu'un corps mettrait à tomber de la hauteur IE, sera double de celle qui sortira dans le même temps du tuyau dont nous venons de parler (157), par conséquent double de la colonne EILH, parce que les orifices égaux donnent dans le même temps des quantités d'eau qui sont en même raison que leurs vîtesses.

438. On peut donc dire que *la dépense d'un tuyau ou d'un réservoir, pendant la durée du temps qu'il faudrait à un corps pour tomber librement de la hauteur du niveau de l'eau au-dessus du fond, est égale à une colonne d'eau qui aurait pour base l'orifice, et pour hauteur une ligne égale au chemin que peut parcourir un corps d'un mouvement* (158) *uniforme dans le temps de sa chute avec la vitesse acquise par cette chute* (*ce*).

De la vîtesse d'un fluide qui s'écoule par l'orifice d'un vase entretenu constamment plein.

(*ce*) Je vais reprendre ici la démonstration de l'article 431, en présenter le résultat sous une forme plus simple et plus appropriée au calcul que les analogies à la manière de Varignon que l'auteur donne dans les articles suivants, et l'étendre au cas où l'orifice d'écoulement n'est pas infiniment petit.

Cas où l'orifice est infiniment petit.

Pl. C, Fig. 4.

Supposons l'orifice infiniment petit, et la paroi évasée, comme il est dit dans la note (*cc*); nommons Ω l'aire de l'orifice *cd*, *z* la hauteur constante de la surface supérieure *ab* au-dessus de cet orifice, U la vîtesse que le fluide prend à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

439. Ayant un vaisseau rempli d'eau, si on lui laisse la liberté de se vider par un orifice pratiqué au fond sans y rien ajouter, et qu'ensuite on l'entretienne toujours plein, *il en sortira deux fois autant d'eau qu'il*

Un vaisseau toujours entretenu plein, dépense deux fois autant d'eau qu'il en con-

---

l'orifice, g la force accélératrice de la pesanteur $= 9^m,8088$. L'espace parcouru par chaque tranche dans l'instant dt, ou l'épaisseur de la tranche, sera $U\,dt$, et le volume de cette tranche $\Omega U\,dt$. Le volume de la colonne d'eau dont cette tranche est la base sera Ωz, et (en prenant les volumes pour les masses) le poids de cette colonne sera $g\Omega z$. C'est la force par laquelle la tranche est poussée constamment. Donc, d'après les notions établies dans le § 2 de la note (*ai*), elle reçoit dans l'instant dt la *quantité d'action* $g\Omega z.U\,dt$. D'un autre côté la *force vive* acquise par cette tranche au bout de cet instant est (en prenant toujours le volume pour la masse) $\Omega U\,dt.U^2$. Or, d'après la note citée, la force vive acquise est numériquement égale au double de la quantité d'action imprimée : donc $\Omega U\,dt.U^2 = 2g\Omega z.U\,dt$, ou en supprimant les facteurs communs, $U^2 = 2gz$, d'où l'on déduit pour la vîtesse du fluide à l'orifice $U = \sqrt{2gz}$, ce qui apprend, conformément à la manière de s'exprimer indiquée dans la note (*ab*), que *la vîtesse du fluide est due à sa hauteur sur l'orifice.*

Le résultat précédent suppose, ou que le vase est placé dans le vide, ou que l'atmosphère, exerçant sa pression sur la surface supérieure du fluide et sur la tranche placée à l'orifice, les efforts qui en résultent se font réciproquement équilibre, et n'ont aucune influence sur le mouvement du fluide. Supposons maintenant que l'eau sortant du vase, au lieu de couler dans l'air, coule dans un autre vase où le niveau du fluide serait entretenu constamment en $a'b'$. Nommons toujours z la hauteur du niveau ab sur cd, et z' la hauteur du niveau $a'b'$ sur cd. Alors la tranche placée en cd, supportant de bas en haut une pression due à la charge z', qui détruit une partie de la charge qu'elle supporte de haut en bas, le mouvement de cette tranche n'est plus dû qu'à la pression d'une colonne dont la hauteur est $z - z'$. On a donc alors pour la vîtesse à l'orifice $U = \sqrt{2g(z-z')}$.

Pl. C, Fig. 6.

Passons à-présent au cas où l'orifice ne serait plus infiniment petit, mais aurait une grandeur comparable à celle des sections du vase. En conservant les dénominations précédentes, appelons de plus O l'aire de la section supérieure du vase ab. Comme le fluide est incompressible, il faut qu'il passe en même temps par toutes ses sections une même quantité de fluide, ou que la vîtesse soit dans toutes en raison inverse de leurs aires. Ainsi la vîtesse en cd ou l'aire est Ω étant U, la vîtesse en ab où l'aire est O sera $\frac{\Omega U}{O}$, et c'est avec cette vîtesse qu'il faut concevoir le fluide arrivant à la surface ab, pour entretenir le vase constamment plein. Or d'après ce qui précède, on ne peut réaliser physiquement cette circonstance qu'en faisant de la section ab l'orifice d'un vase infiniment grand, où le fluide serait entretenu au-dessus de cette section à la hauteur due à la vîtesse $\frac{\Omega U}{O}$, c'est-à-dire à une hauteur exprimée par $\frac{\Omega^2 U^2}{2gO^2}$ (voyez la note (ab)). Mais de cette manière, l'orifice d'écoulement cd devient celui d'un vase infiniment grand, où le fluide est entretenu

Cas où l'orifice a une grandeur comparable à celle des sections du vase.

Pl. C, Fig. 4.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tient, dans un temps égal à celui qu'il mettrait à se vider.

en contient, dans un temps égal à celui qu'il lui faudrait pour se vider totalement, parce que les vîtesses de l'eau d'un vaisseau qui se vide allant en décroissant comme celles d'un corps qui est poussé de bas en haut, si

---

à la hauteur $z+\frac{\Omega^2 U^2}{2gO^2}$. Donc la vîtesse U qui aura lieu en cd sera due à cette hauteur, en sorte qu'on aura $U=\sqrt{2g\left(z+\frac{\Omega^2 U^2}{2gO^2}\right)}$, d'où l'on tire pour la valeur de la vîtesse, dans le cas où l'orifice n'est pas très-petit, $U=\sqrt{\frac{2gz}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}$.

Expression du volume de fluide écoulé dans l'unité de temps.

La vîtesse à l'orifice étant connue, la dépense l'est aussi : en effet, la valeur de cette dépense est exprimée pour une seconde qui est l'unité de temps, par ΩU, c'est-à-dire si l'orifice est très-petit par $\Omega\sqrt{2gz}$.

et s'il surpasse le $\frac{1}{20}$ de la section du vase par $\Omega\sqrt{\frac{2gz}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}$.

Du Mouvement de l'eau dans un vase qui se vide.

Je considérerai seulement cette question dans le cas où l'orifice est très-petit, comme cela arrive ordinairement dans les applications, et je renverrai pour la solution générale, qui comporte une analyse particulière, à la *Nouvelle Architecture hydraulique de M. de Prony*, tome 1^er^ page 353, ou à sa *Mécanique philosophique*, art. 421 et suivants. La vîtesse du fluide dans le vase étant donc considérée comme nulle, et appelant z la hauteur variable du fluide sur l'orifice, la vîtesse à l'orifice sera à chaque instant $U=\sqrt{2gz}$. O étant toujours la section du vase à la surface supérieure du fluide, et dz la quantité dont cette surface s'abaisse dans l'instant dt, $O\,dz$ sera le volume d'eau écoulé dans cet instant : mais ce volume est aussi exprimé par $\Omega U\,dt$, en sorte qu'on a (en faisant attention que z diminue quand t croît, et que leurs variations sont de signes contraires) la relation $O\,dz=-\Omega U\,dt$; d'où l'on tire $dt=-\frac{O\,dz}{\Omega U}$, et en integrant $t=-\int\frac{O\,dz}{\Omega U}+const.$, où O est en général une quantité variable, qui doit être censée donnée en fonction de z, d'après la forme du vase. Mettant pour U la valeur ci-dessus, il vient $t=-\int\frac{O\,dz}{\Omega\sqrt{2gz}}+const.$, d'où l'on pourra toujours déduire l'expression du temps de l'écoulement en fonction de la hauteur z du fluide contenu dans le vase.

Par exemple si la forme du vase est un prisme ou un cylindre vertical, auquel cas O est constante, la formule ci-dessus donne $t=-\frac{2O\sqrt{z}}{\Omega\sqrt{2g}}+const.$ A l'instant où le mouvement commence, on a $t=0$ et $z=z'$, en nommant z' la hauteur du fluide sur l'orifice qui a lieu à cet instant. Donc $const.=\frac{2O\sqrt{z'}}{\Omega\sqrt{2g}}$, et l'on a, pour le temps que le fluide met à s'abaisser de la hauteur z' à la hauteur z, $t=\frac{2O}{\Omega\sqrt{2g}}(\sqrt{z'}-\sqrt{z})$.

En faisant $z=0$, cette formule donnera le temps total que le vase emploie à se

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce corps peut parcourir d'un mouvement uniforme, en conservant sa première vîtesse, un espace double de celui où il serait monté pour la perdre (157), la dépense de l'eau doit être double dans le même temps, dès que sa première vîtesse reste la même.

Un vaisseau toujours entretenu plein, dépense autant d'eau qu'il en contient, dans la moitié du temps qu'il mettrait à se vider.

440. Comme un corps qui est tombé d'une certaine hauteur peut, avec la vîtesse acquise, remonter d'un mouvement uniforme au point d'où il est parti, dans la moitié du temps qu'il a mis à descendre (160, 161), *il arrivera aussi qu'un vaisseau entretenu plein d'eau en dépensera autant qu'il en contient, dans la moitié du temps qu'il emploierait à se vider.*

441. Prévenu qu'un corps, en tombant, parcourt dans des temps égaux des espaces qui vont en croissant selon les nombres impairs, 1, 3, 5, 7, 9, etc. (161, 164), et qu'en remontant il parcourt les mêmes espaces, mais dans un ordre renversé, il suit que les quantités d'eau d'un vaisseau prismatique ou cylindrique qui se vide par le fond, *doivent diminuer en temps égaux dans le même ordre que les espaces parcourus par un corps poussé de bas en haut*, puisque la proportion des vîtesses est la même. Supposant que le vaisseau se vide totalement en 5 minutes, si la quantité d'eau qui sera écoulée dans la première est exprimée par 9, elle le sera dans la seconde par 7; dans la troisième, par 5; dans la quatrième, par 3; et dans la cinquième par 1.

Manière de trouver le temps qu'un vaisseau emploiera à se vider, et celui qu'un corps mettra à tomber de la hauteur du vaisseau.

442. On pourra déterminer le temps qu'un vaisseau prismatique ou cylindrique emploiera à se vider, en disant : *Comme la superficie de l'orifice est à celle de la base du vaisseau, ainsi le temps qu'un corps emploiera à tomber de la hauteur de l'eau* (174) *est à celui qu'on cherche ;* car si l'on imagine toute l'eau divisée en autant de colonnes égales à celle qui répond à l'orifice que cet orifice peut être contenu de fois dans la base du vaisseau, on verra que le temps de l'écoulement doit être proportionné au nombre des colonnes. Cependant, comme dans l'expérience l'écoulement ne sera pas aussi régulier sur la fin qu'au commencement, il faut, pour plus de précision, observer le temps que le vaisseau emploiera à se vider seulement jusqu'au quart ou au tiers de sa hauteur, ensuite soustraire de la première hauteur de l'eau celle où elle se trouvera après l'observation, et dire : *Comme la racine de la différence de ces deux hauteurs est à la racine de la plus grande, ainsi le temps qu'on aura trouvé est au temps qu'on cherche.*

---

vider, qui sera $t = \frac{O}{\Omega}\sqrt{\frac{2z'}{g}}$. Ce résultat s'accorde avec l'art. 442, car, d'après la note (ab), $\sqrt{\frac{2z'}{g}}$ est le temps qu'un corps emploie à tomber de la hauteur z'.

Au moyen de cette analyse, on détermine facilement la forme que doit avoir un vase pour que la surface supérieure du fluide prenne, pendant qu'il se vide, un mouvement donné. Voyez la *Nouvelle Architecture hydraulique*, *tome* 1, *page* 338.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On pourra donc connaître le temps qu'il faudra à un corps pour tomber de la hauteur du vaisseau par celui que ce vaisseau mettra à se vider totalement, en disant : *Comme sa base est au temps de l'écoulement, ainsi la superficie de l'orifice est au temps que le corps emploiera pour sa chute.*

Quand deux vaisseaux se communiquent, il faut le double du temps au premier pour remplir le second, que si celui-ci était au-dessous de l'autre.

443. Ayant deux vaisseaux prismatiques posés sur un même plan horizontal unis par un tuyau de communication, si l'on entretient le premier plein d'eau en remplaçant celle qu'il dépensera, et qu'on lui laisse tout-à-coup la liberté de s'écouler dans le second, *il faudra à ce dernier pour se remplir le double du temps qu'il lui aurait fallu s'il avait été placé immédiatement au-dessous du premier*, parce que la vîtesse diminuera à mesure que la surface de l'eau approchera de son niveau, dans le même ordre que diminue celle d'un corps qui remonte vers le point d'où il est descendu, ou comme diminuerait celle de l'eau d'un même vaisseau, si après en avoir été rempli on la laissait couler par le fond : cela montre qu'il faudra autant de temps pour le remplir que pour le vider (441). Cet article nous servira dans la suite pour connaître le temps qu'il faut pour remplir les sas des écluses des canaux.

Conclusion pour faire voir la conformité des règles du mouvement des eaux avec la doctrine de Galilée sur la chûte des corps.

444. Ces exemples font voir la parfaite conformité qui se rencontre entre le mouvement des eaux et celui des corps graves, ce qui procède de ce principe si simple, *que les effets sont toujours proportionnés à leurs causes* (11). Car toute la doctrine de Galilée roule sur ce que *les espaces parcourus sont entre eux comme la somme des vîtesses acquises depuis le repos*, et toute la théorie du mouvement des eaux sur ce que *leur dépense par des orifices égaux est comme les sommes des vîtesses.* Ainsi dans le second objet les quantités d'eau écoulées tiennent lieu des espaces parcourus dans le premier, et par conséquent les mêmes règles doivent leur être communes en tout point.

Formule générale d'où l'on peut tirer toutes les règles pour la mesure des eaux.

PLANCHE 6. FIGURES 56 et 57.

445. Lorsqu'à deux réservoirs de différentes hauteurs, les orifices O, *o* sont inégaux en superficie, les petits *prismes d'eau* qui en sortent dans *un même instant* peuvent être exprimés par O V et *ou*, parce qu'ils ne peuvent avoir pour base que celles des colonnes qui les chassent, et pour hauteur l'espace qu'une lame détachée des mêmes colonnes peut parcourir d'un mouvement uniforme dans cet instant. Or comme ces espaces seront dans la raison des vîtesses qui ont lieu dans le même instant (147), les vîtesses pourront tenir lieu des espaces, puisqu'il ne s'agit ici que du rapport de ces prismes.

446. Comme les colonnes ou masses M, *m*, que les orifices dépenseront en deux temps différents T, *t*, contiendront autant de fois les petits prismes OV, *ou*, qu'il se sera écoulé d'instants dans la durée des temps T, *t*, on aura $\frac{M}{T} = OV$, et $\frac{m}{t} = ou$, d'où l'on tire $\frac{M}{T} : \frac{m}{t} :: OV : ou$, qui donne $\frac{Mou}{T} = \frac{mOV}{t}$ ou $Motu = mOTV$, ce qui est une formule générale qui com-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

prend *les masses* ou *quantités d'eau*, leurs *vîtesses*, les *temps* de leur écoulement, et *la grandeur des orifices*, c'est-à-dire toutes les circonstances qui entrent dans la mesure des eaux, de laquelle on pourra tirer autant d'analogies qu'elle comprend de racines, et autant des conséquences particulières qu'on pourra faire de suppositions différentes. Par exemple, les analogies générales sont :

1° $M : m :: OTV : otu$. 2° $T : t :: Mou :: mOV$.
3° $O : o :: Mtu : mTV$. 4° $V : u :: Mot :: mOT$.

Règles générales tirées de la formule précédente, pour la mesure des eaux.

447. La première montre que les *masses* ou *quantités d'eau* sont entre elles dans la raison composée des orifices, des temps et des vîtesses.

448. La seconde, que les *temps* sont dans la raison composée des quantités ou masses d'eau prises directement, des orifices et des vîtesses réciproquement.

449. La troisième, que les *orifices* sont dans la raison composée des quantités d'eau prises directement, des temps et des vîtesses réciproquement.

450. La quatrième, que les *vîtesses* sont dans la raison composée des quantités d'eau prises directement, des orifices et des temps réciproquement.

Analogies particulières selon les différentes hypothèses qui peuvent se rencontrer dans la mesure des eaux.

451. Quant aux analogies ou règles particulières, si l'on suppose $V = u$, et qu'on supprime ces lettres de la formule, on en tirera $M : m :: OT : ot$, qui montre que lorsque les *vîtesses* ou *les hauteurs des réservoirs* sont égales, les quantités d'eau qui s'en écoulent sont dans la raison composée des temps et des orifices.

452. De même, supposant $T = t$, on aura $M : m :: OV : ou$, c'est-à-dire que lorsque les *temps* sont égaux, les quantités d'eau sont dans la raison composée des orifices et des vîtesses.

453. Supposant aussi $O = o$, il vient $M : m :: TV : tu$, qui montre que lorsque les *orifices* sont égaux, les quantités d'eau qu'ils dépensent sont dans la raison composée des temps et des vîtesses, ou des temps et des racines quarrées des hauteurs des réservoirs.

454. Si l'on suppose encore $M = m$, on aura $V : u :: ot : OT$, qui montre que lorsque la *dépense* des réservoirs est égale, les vîtesses de l'eau sont dans la raison réciproque des produits des temps et des orifices.

455. Si $Mt = mT$, on aura $O : o :: u : V$, qui montre que lorsque *les quantités d'eau sont réciproques aux temps*, les orifices sont dans la raison réciproque des vîtesses. Par conséquent, lorsque les orifices sont dans la raison réciproque des vîtesses, ou des racines quarrées des hauteurs des réservoirs, ils dépensent en temps égaux des quantités d'eau égales.

456. Ayant de même $tu = TV$, il viendra $M : m :: O : o$, qui montre que lorsque les *vîtesses* sont égales, et par conséquent les hauteurs des réser-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

voirs, les quantités d'eau qui s'en écouleront dans le même temps ou dans des temps égaux seront dans la raison des orifices.

457. Supposant aussi $ou = OV$, $oh = OH$, on aura $M : m :: T : t$, qui fait voir que lorsque *les vîtesses* ou *les hauteurs des réservoirs* sont égales, les quantités d'eau qui sortiront par des *orifices égaux* sont dans la raison des temps de l'écoulement.

458. Supposant $OT = ot$, on aura $M : m :: V : u :: \sqrt{H} : \sqrt{h}$, c'est-à-dire que lorsque les *temps* seront égaux ainsi que les *orifices*, ou que les temps seront en raison inverse des orifices, les quantités d'eau qui en sortiront seront dans la raison des vîtesses, ou dans la raison des racines quarrées des hauteurs des réservoirs.

459. De même si $Mo = mO$, on aura $u : V :: T : t$, c'est-à-dire que lorsque les *quantités d'eau* sont égales, ainsi que les *orifices*, les vîtesses sont dans la raison réciproque des temps.

460. Enfin si $Mu = mV$, on aura $o : O :: T : t$, qui montre que lorsque *les quantités d'eau* sont égales, ainsi que *les vîtesses*, ou *les hauteurs des réservoirs*, les orifices sont dans la raison réciproque des temps.

Tout ce qu'on vient de dire n'en subsistera pas moins, soit que l'eau coule de haut en bas ou qu'elle jaillisse de bas en haut comme aux jets d'eau, pourvu que *le plan de l'orifice soit horizontal*, parce que *les poussées ou les forces, qui sont exprimées par les mêmes hauteurs d'eau, agissant également quelles qu'en soient les directions*, les vîtesses qu'elles causent seront égales.

Manière de déterminer la valeur des grandeurs constantes de la formule.

461. Les analogies précédentes comprenant toutes les règles d'où dépend la mesure des eaux, il sera aisé, *en faisant abstraction de tout accident*, de les appliquer à la pratique, dès qu'on connaîtra *la hauteur, l'orifice* d'un certain réservoir toujours entretenu au même niveau, et par l'expérience ou le raisonnement *sa dépense dans un temps déterminé.* Alors la valeur des quatre grandeurs T, O, V, M, tirées de la règle générale (446), pourra servir dans tous les cas.

462. Comme le temps, la grandeur de l'orifice, la vîtesse de l'eau ou la hauteur du réservoir sont arbitraires, nous supposerons pour la facilité du calcul que le temps est d'une seconde, l'orifice d'un pouce de diamètre, la vîtesse de l'eau de 26 pieds correspondante à un réservoir de 11 pieds 3 pouces de hauteur, parce que (selon l'article 176) on aura $\sqrt{15} : 30 :: \sqrt{11\frac{1}{4}} : x$, ou $15 : 900 :: 11\frac{1}{4} : x^2$, ce qui donne $x^2 = 676\frac{2}{3}$, d'où $26 = x$, en négligeant la fraction. Ainsi l'orifice dépensera par seconde une colonne d'eau d'un pouce de diamètre sur 26 pieds de hauteur, qui étant multipliée par 6 onces 1 gros (341), donne 10 livres d'eau. On aura donc T = une seconde, O = 144 lignes, V = 26 pieds, M = 10 livres.

463. Il m'a paru qu'il convenait de prendre le temps d'une seconde préférablement à tout autre pour mesurer la dépense, parce que la multi-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pliant par 60, on l'aura pendant une minute. J'ai cru devoir aussi exprimer cette dépense en livres, parce qu'ensuite il sera aisé de la réduire à telle mesure que l'on voudra. Par exemple, divisant par 2 le nombre qu'on aura, il viendra des *pintes* (341), par 70 des *pieds cubes*, et par 28 des *pouces d'eau* lorsque le temps de l'écoulement sera d'une minute (342).

Application de la première analogie générale à un exemple.

464. On a un réservoir de 4 pieds de hauteur, percé par le fond d'un orifice de 9 lignes de diamètre; on demande *la quantité d'eau qu'il dépensera en 45 secondes.*

Il faut chercher (176) la vîtesse uniforme par seconde acquise par une chute de 4 pieds, on la trouvera à-peu-près de 15 pieds 6 pouces. Ainsi on aura $t=45$ secondes, $o=81$ lignes, quarré du diamètre de l'orifice; $u=15$ pieds 6 pouces, vîtesse de l'eau.

Les dépenses étant comme les produits des orifices, ou des quarrés de leur diamètre, par les temps et les vîtesses (447), nommant x la quantité d'eau qu'on cherche, on aura $\mathrm{OTV}=144\times1\times26 : otu=81\times45\times15\frac{1}{2} :: \mathrm{M}=10 : m=x$, ou $3744 : 56497\frac{1}{2} :: 10 : x=151$ livres ou $75\frac{1}{2}$ pintes, pour la dépense que l'on demande.

Manière de faire usage de la formule pour trouver la grandeur de l'orifice, connaissant sa dépense dans un temps déterminé, et la hauteur du réservoir.

456. On peut si l'on veut se servir de l'équation ou règle générale $\mathrm{M}otu=m\mathrm{OTV}$, pour trouver la *dépense*, le *temps*, l'*orifice*, la *vîtesse* ou la *hauteur* de l'eau d'un réservoir quelconque, dès qu'on connaîtra trois de ces termes, qui doivent toujours être représentés par les *petites lettres*, en substituant x dans l'équation à la place du terme que l'on cherche, parce que les autres grandeurs T, O, V, M étant déterminées, on n'aura qu'à dégager x sans faire aucune analogie, *observant d'effacer les lettres semblables lorsque leur valeur se trouvera la même*, afin de rendre le calcul plus simple.

466. Par exemple, ayant un réservoir de 4 pieds de hauteur, on demande *quel doit être l'orifice* pour qu'en 45 secondes il dépense 151 liv. d'eau. Je substitue x à la place de o dans l'équation, pour avoir $\mathrm{M}xtu=m\mathrm{OTV}$, ou $x=\frac{m\mathrm{OTV}}{\mathrm{M}tu}$, ou $x=\frac{151\times144\times1\times26}{10\times45\times15\frac{1}{2}}=\frac{565344}{6975}=81$ pour le quarré du diamètre, en négligeant un reste qui n'aurait pas lieu, si la dépense du réservoir avait été de 150 liv. et environ $\frac{9}{10}$ au lieu de 151 comme je l'ai supposé dans la règle précédente. Extrayant la racine quarrée du nombre qu'on vient de trouver, on aura 9 lignes pour le diamètre de l'orifice.

Autre application de la formule pour trouver la hauteur du réservoir, connaissant l'orifice, le temps et la dépense.

467. Un réservoir dépense 10 pouces par un orifice de 8 lignes, on demande *la hauteur de l'eau au-dessus de cet orifice.*

Comme le temps de l'écoulement est ici d'une minute ou de 60 secondes, puisqu'il est question de pouces d'eau, on aura $t=60$, et la quantité d'eau que comprend un pouce pesant 28 livres, on aura $m=280$, et $o=64$. Quant à la hauteur que l'on cherche, comme on ne peut la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trouver que par la connaissance de la vîtesse qu'aura l'eau à la sortie de l'orifice, nous la nommerons x. Ainsi on aura $Motx = mOTV$, ou $x = \frac{mOTV}{Mot}$; qui donne $x = \frac{280 \times 144 \times 1 \times 26}{10 \times 64 \times 60} = 27$ pieds 3 pouces 7 lignes pour la vîtesse, qui répond à une chute de 12 pieds 5 pouces, comme on le trouvera en faisant le calcul indiqué dans l'article 177.

Autre application de la formule pour trouver le temps, connaissant la dépense, la grandeur de l'orifice, et la hauteur de l'eau.

468. Un réservoir de 6 pieds de hauteur a dépensé 400 pintes ou 800 livres d'eau par un orifice de 6 lignes de diamètre : on demande *en combien de temps.*

Nommant x le temps que l'on cherche, on aura $Moxu = mOTV$, ou $x = \frac{mOTV}{Mou}$, $m = 800$ liv., $o = 36$, et $u = 19$ pieds pour la vîtesse, comme on le trouvera par l'article 176. Faisant le calcul indiqué par les lettres, il viendra 7 minutes 17 secondes et 53 tierces pour le temps de l'écoulement.

Usage d'une table où l'on trouve la vîtesse uniforme d'un corps par secondes, acquise par toutes les chûtes, depuis celle d'une ligne jusqu'à celle de 15 pieds.

469. Pour faciliter le calcul de la dépense des eaux j'ai dressé plusieurs tables fort utiles, dont la première comprend *les chutes* et *les vîtesses uniformes* qui leur sont relatives, pendant la durée *d'une seconde* (*cf*). Les chutes sont en progression arithmétique, commençant par celle qui n'aurait qu'une ligne de hauteur, et vont en croissant jusqu'à un pied selon l'ordre des nombres naturels, pour mesurer avec plus de précision la vîtesse des eaux coulantes, comme on le verra par la suite. Mais comme cette table eût été d'un calcul trop ennuyeux si je l'avais continuée de même jusqu'à une chute de 15 pieds de hauteur, qui est la plus grande qui se rencontre ici, j'ai cru qu'il suffirait que toutes les autres qui suivaient celles d'un pied se surpassassent seulement de deux lignes, parce que dans l'usage que nous en ferons l'exactitude sera poussée aussi loin qu'on le peut souhaiter.

Comme toutes ces chutes sont accompagnées des vîtesses uniformes qui leur répondent, on trouvera tout-d'un-coup celle d'un corps par seconde, après être tombé de telle hauteur que l'on voudra. Par exemple, voulant savoir quelle vîtesse il aura acquise par une chute de 6 pouces 9 lignes, on verra dans la page 268 qu'elle répond à 5 pieds 9 pouces 4 lignes

---

Indication de diverses tables des hauteurs dues aux vîtesses.

(*cf*) On trouve dans la *Nouvelle Architecture hydraulique* des tables des *vîtesses dues à différentes hauteurs*, et des *hauteurs dues à différentes vîtesses*, exprimées en *pieds-de-roi* et en ses parties décimales. On en trouve d'autres dans le *Traité d'Hydrodynamique de Bossut*, où les vîtesses et les hauteurs sont exprimées en *pouces*. Il m'a paru utile d'insérer ici, à la suite de celles de Bélidor, une table des hauteurs dues aux vîtesses, où elles sont exprimées en mètres : je ne crois pas qu'on en ait encore imprimé de semblable. On a supprimé, pour abréger, celle des vîtesses dues aux hauteurs, l'autre pouvant en tenir lieu, comme Bélidor le remarque art. 472.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

5 points. De même voulant connaître celle qu'il acquerra par une chute de 6 pieds 4 pouces 8 lignes, on la trouvera dans la page 270 de 19 pieds 6 pouces 11 lignes 2 points, et ainsi des autres.

Cette table a les mêmes propriétés que la parabole, eu égard aux ordonnées menées à l'axe.

Pl. 6, Fig. 58.

470. Si l'on avait une *parabole* ADC dont l'*axe* AB fût supposé de 15 pieds et sa plus grande *ordonnée* BC de 30, cette parabole aurait les mêmes propriétés que la table dont nous parlons; car cette courbe donnant $AE : AG :: \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$, par conséquent $\sqrt{AE} : \sqrt{AG} :: EF : GH$, on voit que puisque d'une part les racines des *chutes* sont comme les *vitesses* correspondantes (169), et que de l'autre les racines des *abscisses* sont comme les *ordonnées* qui leur répondent, ces abscisses pourront être prises pour les chutes, et les ordonnées pour les vîtesses acquises. On peut donc regarder la colonne des chutes comme exprimant l'axe AB divisé en autant de parties que cette colonne comprend de termes, et la colonne des vîtesses comme exprimant la valeur en pieds, pouces et lignes des ordonnées qui répondent aux abscisses formées par la progression des parties de l'axe. Alors le *paramètre* AI sera de 60 pieds, puisqu'on aura $\div AB = 15 : BC = 30 : AI = 60$.

Manière de trouver, à l'aide de la table suivante, les vîtesses acquises pour telles chûtes que l'on voudra au-dessus de 15 pieds.

471. Quoique nous ayons terminé cette table à une chute de 15 pieds, c'est-à-dire à celle qu'un corps parcourt depuis son repos pendant une seconde (172), qu'on peut regarder comme la plus grande hauteur de l'eau des réservoirs, ou comme la plus grande élévation où elle puisse être soutenue pour faire tourner la roue d'une machine, nous ne laisserons pas de montrer qu'on peut en deux traits de plume, avec la même table, trouver la vîtesse qui doit répondre à une chute beaucoup plus grande. Pour cela, il faut diviser la chute donnée par le quarré d'un des nombres 2, 3, 4, 5, etc., en sorte que le diviseur soit assez grand pour qu'il donne moins de 15 pieds; après quoi on cherchera dans la table une chute pareille au quotient, on prendra la vîtesse qui lui répond, et on la multipliera par la racine quarrée du diviseur pour avoir celle qui appartient à la chute proposée.

Par exemple, pour connaître la vîtesse uniforme dont un corps peut être capable après être tombé de la hauteur de 130 pieds, il faut diviser le nombre par 9, quarré de 3 : on trouvera 14 pieds 5 pouces 4 lignes pour le quotient, qui répond dans la table à une vîtesse de 29 pieds 5 pouces 3 lignes 2 points, laquelle étant multipliée par 3 (racine du diviseur 9) donne 88 pieds 3 pouces 9 lignes 6 points pour celle que l'on cherche.

Si au lieu de diviser la chute de 130 pieds par 9, on la divisait par 16 (quarré de 4), le quotient donnerait 8 pieds 1 pouce 6 lignes, qui est une chute qui répond à une vîtesse de 22 pieds 11 lignes 4 points, laquelle étant multipliée par 4 (racine du diviseur), donne 88 pieds 3 pouces 9 lignes 4 points, qui ne diffère que de deux points du nombre précé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dent. On voit que l'on peut toujours diviser la chute proposée par le quarré de tel nombre que l'on voudra, pourvu qu'il vienne moins de 15 pieds au quotient, parce que s'il était plus grand on ne le trouverait pas dans la table.

La raison des opérations précédentes est tirée de ce que les vîtesses sont entre elles comme les racines quarrées des chutes (169). Or comme dans le premier cas la chute de 14 pieds 5 pouces 4 lignes est à celle de 130 pieds comme 1 est à 9, et que les racines quarrées des deux termes de ce rapport sont comme 1 est à 3, la vîtesse qui doit répondre à la chute de 130 pieds doit être triple de celle qui répond à la chute de 14 pieds 5 pouces 4 lignes. Par la même raison, le rapport de la chute de 8 pieds 1 pouce 6 lignes, à celle de 130 pieds, étant comme 1 est à 16, celui des vîtesses qui répondent à ces deux chutes doit être comme 1 est à 4.

On peut, avec le secours de la même table, connaître les chûtes qui doivent répondre à une vîtesse uniforme quelconque.

472. Quoiqu'on trouvera dans la suite une autre table qui donne les chûtes qui doivent répondre à de telles vîtesses uniformes que l'on peut proposer, je ne laisserai pas de faire remarquer en passant que celle-ci peut servir au même usage, mais non pas d'une manière aussi commode ni aussi exacte. Par exemple, voulant connaître la chute d'un corps pour acquérir une vîtesse uniforme de 20 pieds 6 pouces par seconde, il faudra chercher dans la colonne des vîtesses celle qui en approche le plus : on trouvera qu'elle répond à une chute de 7 pieds 2 lignes; et ainsi des autres.

Si la vîtesse dont on veut avoir la chute surpassait 30 pieds, qu'elle fût par exemple de 400, il faudrait la diviser par un nombre assez grand pour que le quotient soit moins de 30, comme par 20. Il viendra 20 pieds, qui répondent dans les colonnes des vîtesses à une chute de 6 pieds 8 pouces, qu'il faut multiplier par le quarré du diviseur, c'est-à-dire par 400 : on aura 2666 pieds 8 pouces pour la hauteur de la chute que l'on demande; car les vîtesses étant entre elles comme les racines quarrées des chutes (169), il y aura même raison de la vîtesse de 20 pieds à celle de 400, que de la racine quarrée de 1 à la racine 20. Par conséquent les chutes seront comme le quarré de ces racines, c'est-à-dire comme 1 est à 400, ou comme 6 pieds 8 pouces est à 2666 pieds 8 pouces.

Usage de la table des chûtes et des vîtesses qui leur répondent, pour estimer la quantité d'eau que doit dépenser un réservoir dont on connaît la hauteur et l'orifice.

473. Il suit que lorsqu'on connaîtra la hauteur de l'eau d'un réservoir et la superficie de l'orifice pratiqué au fond, si le niveau de l'eau est toujours entretenu à la même hauteur, on trouvera sur le champ la quantité qui s'en écoulera par seconde, puisque au moyen de la hauteur du réservoir, qui tient lieu de chute, on aura la vîtesse de l'eau ou la hauteur de la colonne qui aurait pour base l'orifice. Il ne s'agira plus que de connaître le poids de cette colonne, pour la réduire à telle mesure que l'on voudra (463).

Usage d'une seconde table pour

474. J'ai cru devoir accompagner cette première table d'une autre qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

comprend la pesanteur d'une colonne d'eau qui aurait pour base *un cercle d'un pouce de diamètre*, et pour hauteur depuis un pied jusqu'à 400. Voulant savoir par le moyen de cette table quel est le poids d'une colonne d'eau de même base, qui aurait 240 pieds de hauteur, il faut chercher cette hauteur au rang des pieds : on trouvera pour son poids 91 livres 14 onces.

connaître la quantité d'eau que comprend une colonne dont la hauteur et le diamètre sont donnés.

475. Comme cette table ne comprend point de pouces, et qu'il s'en rencontre presque toujours, aussi-bien que des lignes, dans la hauteur des colonnes dont on cherche le poids, on fera attention que son premier terme étant une colonne d'un pied de hauteur dont le poids se trouve de 6 onces 1 gros (341), chaque pouce d'eau cylindrique peut être regardé comme d'une demi-once. Ainsi lorsqu'on aura pris dans la table le poids d'une colonne dont la hauteur est exprimée en pieds, il faudra ajouter au poids autant de demi-onces qu'on aura de pouces, c'est-à-dire que si la colonne précédente était de 240 pieds 8 pouces, il faudrait ajouter à 91 livres 14 onces le produit de 8 pouces par une demi-once, pour avoir le poids total de 92 liv. 2 onces. De même, lorsqu'on aura des lignes, il faudra si l'on veut en tenir compte chercher le poids qu'elles doivent donner par rapport à celui d'un pouce.

476. Si l'orifice ou la base de la colonne, que je suppose toujours circulaire, avait plus d'un pouce de diamètre, on n'en aura pas moins le poids de l'eau par le moyen de la seconde table. Par exemple, s'il s'agissait d'une colonne de 120 pieds 9 pouces 6 lignes de hauteur, ayant pour base un cercle de 6 pouces de diamètre, on supposera pour un instant qu'il n'est que d'un pouce, alors la colonne sera de 46 livres 3 onces 6 gros. Comme les cercles sont dans la raison des quarrés de leurs diamètres, multipliant le quarré de 6 pouces, qui est 36, par le poids précédent, le produit donnera celui de la colonne que l'on cherche.

Méthode pour connaître, à l'aide de la seconde table, le poids des colonnes d'eau qui ont plus ou moins d'un pouce de diamètre.

477. Si au contraire le diamètre de l'orifice a moins d'un pouce, il faudra en faire le numérateur d'une fraction dont le dénominateur doit être 12 lignes, réduire cette fraction s'il est possible, ensuite en quarrer les deux termes, et multiplier ce quarré par le poids de la colonne qui aurait un pouce de diamètre. Par exemple, si celui de la précédente n'était que de 9 lignes, on aura $\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$, dont le quarré est $\frac{9}{16}$, qui étant multiplié par 46 livres 3 onces 6 gros, donnera ce que l'on demande. On peut aussi se servir de cette méthode lorsque le diamètre de l'orifice a plus de 12 lignes.

478. Voulant connaître *la dépense par seconde* d'un réservoir toujours entretenu à une hauteur de 7 pieds 6 pouces, par un orifice de 2 pouces de diamètre, il faut chercher dans la première table la vîtesse qui répond à une chute de 7 pieds 6 pouces, qu'on trouvera de 21 pieds 2 pouces 6 lignes 8 points; prendre dans la seconde le poids d'une colonne de 21 pieds de hauteur, qui se trouve de 8 livres 5 gros, à quoi ajoutant ce

Usage de la première et seconde table pour connaître la dépense d'un réservoir dont on a la hauteur, le diamètre de l'orifice, et le temps de l'écoulement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'il faut pour les 2 pouces 6 lignes 8 points (475), on aura 8 livres 2 onces et un gros, qui étant multipliés par 4 (quarré du diamètre), donnent 33 livres 4 gros pour la dépense qu'on cherche.

Manière de se servir de ces deux tables pour trouver la hauteur des réservoirs dont on connaît la dépense et le diamètre de l'orifice.

479. De même ayant un réservoir dont la dépense soit de 10 pintes ou de 20 liv. d'eau en une seconde, par un orifice de 18 lignes de diamètre, *voulant connaître la hauteur de l'eau*, il faudra supposer pour un moment que le diamètre de l'orifice n'est que d'un pouce, et chercher dans la seconde table la hauteur d'une colonne du poids d'environ 20 liv. On la trouvera de 52 pieds, qu'il faut diviser par le quarré de $\frac{18}{12}$ ou de $\frac{3}{2}$, qui est $\frac{9}{4}$ (477); le quotient donnera 23 pieds 1 pouce 4 lignes pour la vîtesse de l'eau, qui répond dans la première table à une chute de 8 pieds 10 pouces 10 lignes.

Autre usage des mêmes tables pour trouver quel doit être le diamètre d'un orifice, pour qu'il dépense une certaine quantité d'eau déterminée, connaissant la hauteur du réservoir, et le temps de l'écoulement.

480. Si la hauteur d'un réservoir était de 5 pieds, *et qu'on voulût savoir quel devrait être le diamètre de l'orifice, pour qu'il dépensât* 30 *pintes ou* 60 *liv. d'eau par seconde*, il faudrait chercher cette hauteur dans la première table, où l'on trouvera qu'elle répond à une vîtesse d'environ 17 pieds 4 pouces; prendre dans la seconde le poids d'une colonne qui aurait cette hauteur sur un pouce de diamètre, on trouvera qu'il doit être de 6 livres 10 onces, ensuite on dira: Comme 6 liv. 10 onces ou $\frac{53}{8}$ est à 144 (quarré du diamètre d'un pouce), ainsi 60 liv. (dépense du réservoir) est au quarré du diamètre de l'orifice qu'on trouvera de 1304 $\frac{1}{3}$, dont la racine quarrée est d'environ 3 pouces un point pour le diamètre que l'on cherche.

Usage des mêmes tables pour connaître le temps qu'il faudra à un réservoir dont on connaît la hauteur et l'orifice, pour dépenser une quantité d'eau déterminée.

481. Un réservoir étant toujours entretenu à 3 pieds de hauteur, a dépensé sans interruption 40 pintes ou 80 livres d'eau par un orifice de 6 lignes de diamètre, *on demande en combien de temps*. Il faut chercher dans la première table la vîtesse qui répond à une chute de 3 pieds: on la trouvera de 13 pieds 5 pouces, et l'on verra dans la seconde que le poids d'une colonne qui aurait cette hauteur est de 5 livres 2 onces 1 gros. Divisant la dépense de l'orifice par le poids de cette colonne, le quotient donnera 15 secondes et $\frac{25}{41}$ de secondes pour le temps de l'écoulement par un orifice d'un pouce. Mais comme celui dont il s'agit n'a que 6 lignes, il faudra quadrupler le quotient, parce que les orifices doivent être dans la raison réciproque des temps (460): il viendra 62 secondes et $\frac{18}{41}$ pour la durée de l'écoulement.

Usage des mêmes tables pour savoir le temps qu'un vaisseau prismatique mettra à se vider.

482. Un réservoir prismatique de 4 pieds de hauteur contient 190 pintes $\frac{1}{2}$ ou 381 livres d'eau; ayant au fond un orifice d'un pouce de diamètre, *on demande quel est le temps qu'il mettra à se vider, en laissant couler l'eau sans interruption*. On cherchera dans la première table la vîtesse qui répond à une chute de 4 pieds, qui se trouve de 15 pieds 6 pouces, laquelle servant de hauteur à une colonne d'un pouce de diamètre, donnera dans la seconde table environ 5 liv. 15 onces pour la dépense de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'orifice par seconde, si l'eau était toujours entretenue à la hauteur de 4 pieds. Divisant par cette quantité le poids de celle du réservoir, il viendra 64 $\frac{1}{16}$ secondes pour le temps qu'il faudra à l'orifice, afin de fournir autant d'eau que le réservoir en contient, et comme le temps qu'il mettra à se vider sera double de celui-ci (442), il sera donc de 2 minutes et 8 $\frac{1}{8}$ secondes.

Connaissant le temps qu'un vaisseau mettra à se vider, ainsi que la quantité d'eau qu'il contient, trouver ce qu'il doit en sortir dans chaque partie égale du temps total.

483. Un vaisseau prismatique contenant 540 pintes d'eau s'est vidé totalement par le fond en 30 minutes, *on demande combien il s'en est écoulé dans les* 5 *premières, combien dans les* 5 *suivantes, et toujours de* 5 *en* 5 *jusqu'aux* 5 *dernières.*

Le temps de l'écoulement pouvant être divisé en 6 parties égales, si on les considère selon leur ordre naturel on aura 1, 2, 3, 4, 5, 6. Comme le nombre des pintes qui seront dépensées pendant chacun de ces temps sera dans le rapport de la différence des quarrés des mêmes temps, mais dans un ordre renversé (441), c'est-à-dire comme 11, 9, 7, 5, 3, 1, il y aura même raison de la somme 36 de tous les termes à la quantité d'eau que contient le vaisseau, que de son plus grand terme au nombre de pintes qui se seront écoulées dans le premier temps : faisant la règle, on en trouvera 165. Comme il y aura encore même rapport de 36 à 540, que du second terme 9 de cette progression au nombre de pintes qui se seront écoulées dans le second temps, qu'on trouvera de 135, on voit qu'il s'en sera écoulé dans le second temps 30 de moins que dans le premier, ce qui est la différence des termes de la progression : on aura donc 165, 135, 105, 75, 45, 15 pintes pour la quantité qui répond à chaque temps pris immédiatement de suite.

Voici un problême d'hydraulique qui m'est venu en pensée, et que je n'aurai peut-être pas occasion de placer ailleurs. Il est vrai qu'il paraît n'avoir pas grand rapport au sujet que je traite ici; mais je compte que l'on me passera ce petit écart en faveur de la méthode dont je me sers pour le résoudre, qui peut avoir son application dans bien des cas, comme on en jugera par quelques exemples rapportés dans le quatrième chapitre.

Problême d'hydraulique sur le mélange des liqueurs.

484. On a un tonneau contenant 100 pintes de vin, on en tire d'abord une par la fontaine, qu'on remplace d'une autre d'eau par le bondon; et supposant que l'eau se mêle parfaitement avec le vin, on tire ensuite une pinte de ce mélange, que l'on remplace par une seconde pinte d'eau; on tire encore une autre pinte du nouveau mélange, que l'on remplace par une troisième partie d'eau; continuant de même, on demande combien il faudra mettre de pintes d'eau dans le tonneau pour qu'il y en ait autant que de vin?

On peut dire en général que quand le vin est mêlé avec l'eau, il est plus *rare* ou plus *dilaté* qu'il n'était auparavant, de toute la quantité

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'eau qui en a augmenté le volume. Par exemple si l'on a un verre à demi-plein de vin, et qu'on achève de le remplir d'eau, faisant abstraction de cette eau, le vin occupera un volume double de celui qu'il occupait auparavant : ainsi *ce problème se réduit à faire en sorte que le vin soit dilaté dans le tonneau au double de ce qu'il l'est naturellement.*

Après qu'on aura tiré du tonneau une pinte de vin, il en restera 99, et quand on y aura mis une pinte d'eau, on pourra dire que la dilatation naturelle du vin est à celle où il se trouve après la première opération, comme 99 est à 100. Voilà une progression géométrique, dont les termes qui expriment la dilatation du vin, iront toujours en augmentant dans le rapport de 99 à 100, à mesure que l'on mettra une nouvelle pinte d'eau dans le tonneau. Il est donc question de connaître quel sera le terme double du premier 99, et l'exposant de ce terme donnera la quantité de pintes d'eau qu'il faudra mettre dans le tonneau pour que le vin y soit dilaté au double, ou, ce qui revient au même, pour qu'il y en ait autant que d'eau.

485. Supposant $a=99$, $b=100$, les deux premiers termes de cette proportion seront a et b. Mais par la propriété de la progression géométrique, *le premier terme élevé à une certaine puissance est toujours au second élevé à la même puissance, comme le premier terme est à un autre terme autant éloigné du premier que l'exposant de la puissance où l'on a élevé le premier a d'unités.* Ainsi le terme que nous cherchons dépend de l'exposant de la puissance où il faudra élever le premier et le second terme. Cet exposant n'étant point connu, nous le nommerons x : alors nous aurons $a^x : b^x :: 1a : 2a$, qui donne $\frac{ab^x}{a^x}=2a$, ou bien $\frac{b^x}{a^x}=2$: nommant m le logarithme de b, n celui de a, et p celui du nombre 2, l'exposant x deviendra le coëfficient des logarithmes de a et de b; ainsi au lieu de $\frac{b^x}{a^x}=2$, on aura $xm-xn=p$, ou $x=\frac{p}{m-n}$. Prenant, dans les tables ordinaires, les logarithmes exprimés ici par les lettres m, n, p, c'est-à-dire ceux des nombres 100, 99 et 2, on aura $x=\frac{3010300}{20000000-19956352}$, ou $x=\frac{3010300}{43648}$, ce qui donne $x=68$, *c'est-à-dire que quand on aura mis dans le tonneau environ* 68 *pintes d'eau, elle sera mêlée par moitié avec le vin.*

Nous n'avons considéré jusqu'ici que l'action de l'eau, sans parler de celle des autres liqueurs, parce qu'elle fait l'unique objet de ce chapitre : cependant je ne laisserai pas de montrer ce qui doit leur arriver lorsque leur pesanteur *spécifique* est différente, *c'est-à-dire lorsqu'une certaine mesure de liqueur pèse plus ou moins que la même mesure d'une autre.*

Les pesanteurs absolues de deux

486. Pour peu qu'on y fasse attention, on concevra que *les pesanteurs*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

absolues de deux liqueurs sont dans la raison composée de leur volume et de leur pesanteur spécifique; par exemple, si le volume de la première était à celui de la seconde comme 1 est à 2, et leur pesanteur spécifique comme 1 à 3, la pesanteur absolue de la première sera à la pesanteur absolue de la seconde, comme 1 est à 6 : ainsi il faudrait que le volume de la première fût triple de celui de la seconde, pour que les pesanteurs absolues de ces liqueurs fussent égales, *parce qu'alors leur volume et leur pesanteur spécifique seront en raison réciproque.*

liqueurs différentes, sont dans la raison composée de leurs volumes et de leurs pesanteurs spécifiques.

487. Ayant deux colonnes de liqueurs différentes BA et DC, répondant à des orifices égaux, les volumes de ces colonnes seront dans la raison de leur hauteur EB=H et FD=h, puisqu'elles ont la même base. Si la pesanteur spécifique de la première est à la pesanteur spécifique de la seconde comme p est à q, les pesanteurs absolues de ces colonnes, ou les forces dont elles sont capables, seront comme Hp est à hq, d'où l'on tire $F : f :: Hp : hq$. Mais comme d'autre part on a $F : f :: V^2 : u^2$ (431), on aura donc $V^2 : u^2 :: Hp : hq$; par conséquent $V : u :: \sqrt{Hp} : \sqrt{hq}$, ce qui montre que, *quelles que soient les liqueurs qui coulent du fond des tuyaux ou réservoirs, leurs vitesses sont comme les racines quarrées des produits des pesanteurs spécifiques de ces liqueurs multipliées par leur hauteur* (*cg*).

Les vîtesses de deux liqueurs différentes sont comme les racines quarrées des produits de leur pesanteur spécifique par leur hauteur.

PLANCHE 6. FIGURES 56 et 57.

488. Il suit, 1° que lorsque les hauteurs et les pesanteurs spécifiques des liqueurs sont égales, les vîtesses, à la sortie des orifices, le sont aussi.

Conséquences tirées du principe précédent.

489. 2° Que lorsque les hauteurs sont égales, les vîtesses sont comme les racines des pesanteurs spécifiques.

490. 3° Lorsque les pesanteurs spécifiques seront égales, les vîtesses seront comme les racines des hauteurs, ce qui retombe dans le principe général (431).

Si la liqueur GL était de l'eau, et l'autre GP du mercure, que la hauteur EB fût à la hauteur FD comme 7 est à 4, le rapport de la pesanteur

---

(*cg*) Le contenu de cet article, aussi-bien que les conclusions qui en sont déduites, est absolument défectueux. La faute provient de ce que l'auteur à bien remarqué que les pesanteurs des colonnes de fluide qui chassent la tranche placée à l'orifice étaient entre elles comme les hauteurs H, h multipliées par les pesanteurs spécifiques p, q; mais qu'il n'a point fait attention que les forces F, f étant proportionnelles aux masses des tranches chassées, on n'avait plus ici, comme dans l'art. 431, où il ne s'agissait que d'un même fluide, $F : f :: V^2 : u^2$, mais bien $F : f :: pV^2 : qu^2$, d'où $pV^2 : qu^2 :: Hp : hq$, et $V : u :: \sqrt{H} : \sqrt{h}$. D'où il suit que les vîtesses *demeurent proportionnelles aux racines des hauteurs, quelle que soit la pesanteur spécifique du fluide;* proposition qui semblera évidente si l'on fait attention que la masse du fluide qui reçoit le mouvement varie dans le même rapport que la force qui le lui imprime, et par conséquent que la vîtesse doit demeurer la même, quelque variation qu'éprouve la pesanteur spécifique.

Rectification de l'art. 487. La vîtesse des fluides demeure la même quand leurs densités varient.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

spécifique de ces deux liqueurs étant comme 2 est à 27 (343), celui de leur vitesse sera comme $\sqrt{7}$ est à $\sqrt{54}$. Si ces deux colonnes avaient la même hauteur (489), la vîtesse de l'eau serait à celle du mercure comme $\sqrt{2}$ est à $\sqrt{27}$, ou comme 7 est à 26; par conséquent si les orifices sont égaux, et que celui par où coule l'eau en dépense 7 pintes dans une seconde, celui par où coule le mercure en dépensera 26 dans le même temps. Au reste je ne m'arrêterai point à rapporter d'autres exemples, ce principe étant plus curieux qu'utile, puisque dans l'usage il n'est question que de la connaissance du mouvement des eaux.

TABLE PREMIÈRE,

Qui comprend les vîtesses uniformes par seconde, qu'un corps peut acquérir pour une chute donnée.

Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.			
pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point
0	0	1	0	7	8	10	0	3	5	4	1	7	1	0	6	9	5	9	4	5	0	10	1	7	1	2	4
0	0	2	0	10	11	3	0	3	6	4	2	2	4	0	6	10	5	10	1	7	0	10	2	7	1	6	6
0	0	3	1	1	4	11	0	3	7	4	2	9	4	0	6	11	5	10	6	6	0	10	3	7	1	10	9
0	0	4	1	3	5	9	0	3	8	4	3	2	10	0	7	0	5	10	11	10	0	10	4	7	2	2	11
0	0	5	1	5	3	9	0	3	9	4	3	11	6	0	7	1	5	11	4	11	0	10	5	7	2	8	1
0	0	6	1	6	11	7	0	3	10	4	4	6	5	0	7	2	5	11	9	11	0	10	6	7	2	11	3
0	0	7	1	8	5	9	0	3	11	4	5	1	2	0	7	3	6	0	2	10	0	10	7	7	3	3	5
0	0	8	1	9	10	9	0	4	0	4	5	7	11	0	7	4	6	0	7	11	0	10	8	7	3	7	5
0	0	9	1	11	2	9	0	4	1	4	6	2	6	0	7	5	6	1	0	9	0	10	9	7	3	11	7
0	0	10	2	0	5	10	0	4	2	4	6	9	2	0	7	6	6	1	6	10	0	10	10	7	4	3	8
0	0	11	2	1	8	1	0	4	3	4	7	3	8	0	7	7	6	1	10	9	0	10	11	7	4	7	10
0	1	0	2	2	9	11	0	4	4	4	7	10	2	0	7	8	6	2	3	3	0	11	0	7	4	11	10
0	1	1	2	3	11	1	0	4	5	4	8	4	7	0	7	9	6	2	8	4	0	11	1	7	5	4	0
0	1	2	2	4	11	9	0	4	6	4	8	10	11	0	7	10	6	3	1	1	0	11	2	7	5	7	11
0	1	3	2	6	0	0	0	4	7	4	9	5	3	0	7	11	6	3	5	10	0	11	3	7	6	0	0
0	1	4	2	6	11	7	0	4	8	4	9	11	7	0	8	0	6	3	10	7	0	11	4	7	6	3	10
0	1	5	2	7	11	2	0	4	9	4	10	5	7	0	8	1	6	4	3	5	0	11	5	7	6	7	11
0	1	6	2	8	10	3	0	4	10	4	10	11	9	0	8	2	6	4	8	1	0	11	6	7	6	11	9
0	1	7	2	9	9	0	0	4	11	4	11	5	11	0	8	3	6	5	0	9	0	11	7	7	7	3	10
0	1	8	2	10	10	2	0	5	0	5	0	0	0	0	8	4	6	5	5	2	0	11	8	7	7	7	8
0	1	9	2	11	4	11	0	5	1	5	0	5	10	0	8	5	6	5	10	1	0	11	9	7	7	11	7
0	1	10	3	0	3	10	0	5	2	5	0	11	10	0	8	6	6	6	2	8	0	11	10	7	8	3	6
0	1	11	3	1	1	6	0	5	3	5	1	5	11	0	8	7	6	6	7	4	0	11	11	7	8	7	6
0	2	0	3	1	11	3	0	5	4	5	1	11	7	0	8	8	6	6	11	9	1	0	0	7	8	11	5
0	2	1	3	2	8	8	0	5	5	5	2	5	4	0	8	9	6	7	4	4	1	0	2	7	9	7	0
0	2	2	3	3	5	10	0	5	6	5	2	11	1	0	8	10	6	7	8	10	1	0	4	7	10	2	8
0	2	3	3	4	2	11	0	5	7	5	3	4	9	0	8	11	6	8	1	5	1	0	6	7	10	10	6
0	2	4	3	4	11	9	0	5	8	5	3	10	4	0	9	0	6	8	5	11	1	0	8	7	11	4	11
0	2	5	3	5	8	6	0	5	9	5	4	3	11	0	9	1	6	8	10	4	1	0	10	8	0	2	0
0	2	6	3	6	5	0	0	5	10	5	4	9	7	0	9	2	6	9	2	8	1	1	0	8	0	8	11
0	2	7	3	7	1	5	0	5	11	5	5	3	2	0	9	3	6	9	7	2	1	1	2	8	1	4	3
0	2	8	3	7	9	8	0	6	0	5	6	0	0	0	9	4	6	9	11	7	1	1	4	8	1	11	7
0	2	9	3	8	6	0	0	6	1	5	6	2	1	0	9	5	6	10	4	0	1	1	6	8	2	6	11
0	2	10	3	9	3	10	0	6	2	5	6	7	5	0	9	6	6	10	8	5	1	1	8	8	3	2	3
0	2	11	3	9	9	9	0	6	3	5	7	0	11	0	9	7	6	11	0	9	1	1	10	8	3	9	2
0	3	0	3	10	5	8	0	6	4	5	7	6	3	0	9	8	6	11	5	1	1	2	0	8	4	4	8
0	3	1	3	11	1	4	0	6	5	5	7	11	5	0	9	9	6	11	9	4	1	2	2	8	5	0	2
0	3	2	3	11	8	11	0	6	6	5	8	4	9	0	9	10	7	0	1	7	1	2	4	8	5	6	11
0	3	3	4	0	4	5	0	6	7	5	8	10	1	0	9	11	7	0	5	10	1	2	6	8	6	2	0
0	3	4	4	0	11	9	0	6	8	5	9	3	3	0	10	0	7	0	10	2	1	2	8	8	6	9	0

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.			
pieds	po.	lig.	pieds	po.	lg.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point
1	2	10	8	7	4	0	2	1	2	11	2	7	2	2	11	6	13	3	10	3
1	3	0	8	7	11	0	2	1	4	11	3	0	6	2	11	8	13	4	2	11
1	3	2	8	8	5	11	2	1	6	11	3	5	10	2	11	10	13	4	7	5
1	3	4	8	9	0	8	2	1	8	11	3	11	2	3	0	0	13	4	11	10
1	3	6	8	9	7	7	2	1	10	11	4	4	6	3	0	2	13	5	4	4
1	3	8	8	10	2	9	2	2	0	11	4	9	8	3	0	4	13	5	8	9
1	3	10	8	10	9	2	2	2	2	11	5	3	0	3	0	6	13	6	1	3
1	4	0	8	11	4	0	2	2	4	11	5	8	3	3	0	8	13	6	5	9
1	4	2	8	11	10	6	2	2	6	11	6	1	4	3	0	10	13	6	10	0
1	4	4	9	0	5	2	2	2	8	11	6	6	9	3	1	0	13	7	2	6
1	4	6	9	0	11	9	2	2	10	11	6	11	11	3	1	2	13	7	7	0
1	4	8	9	1	6	4	2	3	0	11	7	4	11	3	1	4	13	7	11	3
1	4	10	9	2	1	0	2	3	2	11	7	10	2	3	1	6	13	8	3	9
1	5	0	9	2	6	4	2	3	4	11	8	3	4	3	1	8	13	8	8	1
1	5	2	9	3	2	0	2	3	6	11	8	8	6	3	1	10	13	9	0	5
1	5	4	9	3	8	5	2	3	8	11	9	1	7	3	2	0	13	9	4	10
1	5	6	9	4	3	0	2	3	10	11	9	7	0	3	2	2	13	9	9	2
1	5	8	9	4	9	5	2	4	0	11	9	11	9	3	2	4	13	10	1	6
1	5	10	9	5	3	7	2	4	2	11	10	4	10	3	2	6	13	10	5	10
1	6	0	9	5	9	11	2	4	4	11	10	9	10	3	2	8	13	10	10	2
1	6	2	9	6	4	3	2	4	6	11	11	2	2	3	2	10	13	11	2	5
1	6	4	9	6	10	7	2	4	8	11	11	7	11	3	3	0	13	11	6	9
1	6	6	9	7	4	10	2	4	10	12	0	0	10	3	3	2	13	11	11	1
1	6	8	9	7	11	0	2	5	0	12	0	5	10	3	3	4	14	0	3	3
1	6	10	9	8	5	2	2	5	2	12	0	10	11	3	3	6	14	0	7	7
1	7	0	9	9	0	1	2	5	4	12	1	3	10	3	3	8	14	0	11	11
1	7	2	9	9	5	7	2	5	6	12	1	8	8	3	3	10	14	1	4	1
1	7	4	9	9	11	7	2	5	8	12	2	1	9	3	4	0	14	1	8	5
1	7	6	9	10	5	10	2	5	10	12	2	6	8	3	4	2	14	2	0	7
1	7	8	9	10	11	10	2	6	0	12	2	11	6	3	4	4	14	2	4	10
1	7	10	9	11	5	11	2	6	2	12	3	4	5	3	4	6	14	2	9	3
1	8	0	10	0	0	0	2	6	4	12	3	9	4	3	4	8	14	3	1	3
1	8	2	10	0	5	10	2	6	6	12	4	3	5	3	4	10	14	3	4	5
1	8	4	10	0	11	9	2	6	8	12	4	7	0	3	5	0	14	3	9	7
1	8	6	10	1	5	10	2	6	10	12	4	11	10	3	5	2	14	4	1	9
1	8	8	10	1	11	9	2	7	0	12	5	4	7	3	5	4	14	4	6	0
1	8	10	10	2	5	7	2	7	2	12	5	9	6	3	5	6	14	4	10	2
1	9	0	10	2	11	5	2	7	4	12	6	2	3	3	5	8	14	5	2	4
1	9	2	10	3	5	3	2	7	6	12	6	7	0	3	5	10	14	5	6	6
1	9	4	10	3	11	1	2	7	8	12	6	11	11	3	6	0	14	5	10	8
1	9	6	10	4	4	11	2	7	10	12	7	4	8	3	6	2	14	6	2	10
1	9	8	10	4	10	9	2	8	0	12	7	9	5	3	6	4	14	6	6	11
1	9	10	10	5	4	6	2	8	2	12	8	2	2	3	6	6	14	6	11	1
1	10	0	10	5	10	3	2	8	4	12	8	6	9	3	6	8	14	7	3	1
1	10	2	10	6	3	9	2	8	6	12	8	11	6	3	6	10	14	7	7	3
1	10	4	10	6	9	7	2	8	8	12	9	4	3	3	7	0	14	7	11	4
1	10	6	10	7	3	3	2	8	10	12	9	8	11	3	7	2	14	8	3	5
1	10	8	10	7	9	0	2	9	0	12	10	6	2	3	7	4	14	8	7	6
1	10	10	10	8	2	0	2	9	2	12	10	8	1	3	7	6	14	8	11	7
1	11	0	10	8	8	1	2	9	4	12	10	10	10	3	7	8	14	9	3	8
1	11	2	10	9	1	10	2	9	6	12	11	3	2	3	7	10	14	9	7	9
1	11	4	10	9	7	4	2	9	8	12	11	8	4	3	8	0	14	9	11	9
1	11	6	10	10	0	9	2	9	10	13	0	0	10	3	8	2	14	10	3	10
1	11	8	10	10	8	9	2	10	0	13	0	5	5	3	8	4	14	10	7	10
1	11	10	10	10	11	10	2	10	2	13	0	10	0	3	8	6	14	10	11	10
2	0	0	10	11	5	4	2	10	4	13	1	2	8	3	8	8	14	11	3	11
2	0	2	10	11	10	10	2	10	6	13	1	7	1	3	8	10	14	11	7	11
2	0	4	11	0	4	3	2	10	8	13	1	11	9	3	9	0	15	0	0	0
2	0	6	11	0	9	7	2	10	10	13	2	3	9	3	9	2	15	0	3	10
2	0	8	11	1	3	1	2	11	0	13	2	8	9	3	9	4	15	0	7	11
2	0	10	11	1	8	7	2	11	2	13	3	1	3	3	9	6	15	1	0	0
2	1	0	11	2	1	11	2	11	4	13	3	4	8	3	9	8	15	1	3	10

Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.			
pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point
3	9	10	15	1	7	10							
3	10	0	15	1	11	9							
3	10	2	15	2	3	9							
3	10	4	15	2	7	8							
3	10	6	15	2	11	6							
3	10	8	15	3	3	6							
3	10	10	15	3	7	5							
3	11	0	15	3	11	4							
3	11	2	15	4	3	3							
3	11	4	15	4	7	3							
3	11	6	15	4	11	2							
3	11	8	15	5	3	0							
3	11	10	15	5	6	8							
4	0	0	15	5	10	8							
4	0	2	15	6	2	7							
4	0	4	15	6	6	5							
4	0	6	15	6	10	4							
4	0	8	15	7	2	3							
4	0	10	15	7	6	1							
4	1	0	15	7	9	10							
4	1	2	15	8	1	9							
4	1	4	15	8	5	6							
4	1	6	15	8	9	10							
4	1	8	15	9	1	1							
4	1	10	15	9	5	0							
4	2	0	15	9	8	9							
4	2	2	15	10	0	6							
4	2	4	15	10	4	4							
4	2	6	15	10	8	1							
4	2	8	15	10	11	10							
4	2	10	15	11	3	7							
4	3	0	15	11	7	4							
4	3	2	15	11	11	1							
4	3	4	16	0	2	10							
4	3	6	16	0	6	7							
4	3	8	16	0	10	4							
4	3	10	16	1	2	1							
4	4	0	16	1	5	10							
4	4	2	16	1	9	7							
4	4	4	16	2	1	4							
4	4	6	16	2	5	0							
4	4	8	16	2	8	8							
4	4	10	16	3	0	5							
4	5	0	16	3	4	0							
4	5	2	16	3	7	9							
4	5	4	16	3	11	4							
4	5	6	16	4	3	1							
4	5	8	16	4	6	8							
4	5	10	16	4	10	5							
4	6	0	16	5	2	0							
4	6	2	16	5	5	9							
4	6	4	16	5	9	4							
4	6	6	16	6	1	0							
4	6	8	16	6	4	7							
4	6	10	16	6	8	2							
4	7	0	16	7	0	0							
4	7	2	16	7	3	6							
4	7	4	16	7	7	1							
4	7	6	16	7	10	9							
4	7	8	16	8	2	4							
4	7	10	16	8	5	11							
4	8	0	16	8	9	6							

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.			
pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point
4	8	2	16	9	1	1	5	6	6	18	2	9	8	6	4	10	19	7	2	4	7	3	2	20	10	6	1
4	8	4	16	9	4	7	5	6	8	18	3	1	0	6	5	0	19	7	5	5	7	3	4	20	10	9	0
4	8	6	16	9	8	2	5	6	10	18	3	4	3	6	5	2	19	7	8	5	7	3	6	20	10	11	10
4	8	8	16	9	11	9	5	7	0	18	3	7	7	6	5	4	19	7	11	5	7	3	8	20	11	2	9
4	8	10	16	10	3	4	5	7	2	18	3	10	9	6	5	6	19	8	2	7	7	3	10	20	11	5	7
4	9	0	16	10	6	10	5	7	4	18	4	2	1	6	5	8	19	8	5	7	7	4	0	20	11	8	6
4	9	2	16	10	10	5	5	7	6	18	4	5	5	6	5	10	19	8	8	8	7	4	2	20	11	11	5
4	9	4	16	11	1	7	5	7	8	18	4	8	7	6	6	0	19	8	11	8	7	4	4	21	0	2	1
4	9	6	16	11	5	6	5	7	10	18	4	11	10	6	6	2	19	9	2	8	7	4	6	21	0	5	0
4	9	8	16	11	9	1	5	8	0	18	5	3	2	6	6	4	19	9	5	9	7	4	8	21	0	7	11
4	9	10	17	0	0	6	5	8	2	18	5	6	4	6	6	6	19	9	8	9	7	4	10	21	0	10	9
4	10	0	17	0	4	2	5	8	4	18	5	9	8	6	6	8	19	9	11	9	7	5	0	21	1	1	8
4	10	2	17	0	7	7	5	8	6	18	6	0	10	6	6	10	19	10	2	9	7	5	2	21	1	4	4
4	10	4	17	0	11	2	5	8	8	18	6	4	2	6	7	0	19	10	5	10	7	5	4	21	1	7	3
4	10	6	17	1	2	8	5	8	10	18	6	7	4	6	7	2	19	10	8	10	7	5	6	21	1	10	2
4	10	8	17	1	6	1	5	9	0	18	6	10	7	6	7	4	19	10	11	10	7	5	8	21	2	0	10
4	10	10	17	1	9	8	5	9	2	18	7	1	9	6	7	6	19	11	2	11	7	5	10	21	2	3	9
4	11	0	17	2	1	2	5	9	4	18	7	5	0	6	7	8	19	11	5	11	7	6	0	21	2	6	8
4	11	2	17	2	4	7	5	9	6	18	7	8	3	6	7	10	19	11	8	11	7	6	2	21	2	9	4
4	11	4	17	2	8	3	5	9	8	18	7	11	5	6	8	0	20	0	0	0	7	6	4	21	3	0	3
4	11	6	17	2	11	8	5	9	10	18	8	2	9	6	8	2	20	0	2	10	7	6	6	21	3	3	2
4	11	8	17	3	3	2	5	10	0	18	8	5	11	6	8	4	20	0	5	10	7	6	8	21	3	5	10
4	11	10	17	3	6	7	5	10	2	18	8	9	1	6	8	6	20	0	8	11	7	6	10	21	3	8	9
5	0	0	17	3	10	0	5	10	4	18	9	0	2	6	8	8	20	0	11	11	7	7	0	21	3	11	6
5	0	2	17	4	1	6	5	10	6	18	9	3	5	6	8	10	20	1	2	9	7	7	2	21	4	2	4
5	0	4	17	4	4	11	5	10	8	18	9	6	7	6	9	0	20	1	5	10	7	7	4	21	4	5	1
5	0	6	17	4	8	5	5	10	10	18	9	9	11	6	9	2	20	1	8	10	7	7	6	21	4	8	0
5	0	8	17	4	11	10	5	11	0	18	10	1	1	6	9	4	20	1	11	9	7	7	8	21	4	10	9
5	0	10	17	5	3	4	5	11	2	18	10	4	3	6	9	6	20	2	2	9	7	7	10	21	5	1	5
5	1	0	17	5	6	9	5	11	4	18	10	7	5	6	9	8	20	2	5	9	7	8	0	21	5	4	4
5	1	2	17	5	10	3	5	11	6	18	10	10	7	6	9	10	20	2	8	8	7	8	2	21	5	7	2
5	1	4	17	6	1	7	5	11	8	18	11	1	9	6	10	0	20	2	11	8	7	8	4	21	5	9	11
5	1	6	17	6	5	0	5	11	10	18	11	5	0	6	10	2	20	3	2	8	7	8	6	21	6	0	8
5	1	8	17	6	8	5	6	0	0	18	11	8	1	6	10	4	20	3	5	7	7	8	8	21	6	3	7
5	1	10	17	6	11	11	6	0	2	18	11	11	3	6	10	6	20	3	8	7	7	8	10	21	6	6	4
5	2	0	17	7	3	3	6	0	4	19	0	2	5	6	10	8	20	3	11	6	7	9	0	21	6	9	0
5	2	2	17	7	6	8	6	0	6	19	0	5	7	6	10	10	20	4	2	6	7	9	2	21	6	11	11
5	2	4	17	7	10	2	6	0	8	19	0	8	9	6	11	0	20	4	5	5	7	9	4	21	7	2	8
5	2	6	17	8	1	5	6	0	10	19	0	11	11	6	11	2	20	4	8	3	7	9	6	21	7	5	5
5	2	8	17	8	4	11	6	1	0	19	1	2	11	6	11	4	20	4	11	3	7	9	8	21	7	8	3
5	2	10	17	8	8	3	6	1	2	19	1	6	1	6	11	6	20	5	2	2	7	9	10	21	7	11	0
5	3	0	17	8	11	8	6	1	4	19	1	9	3	6	11	8	20	5	5	2	7	10	0	21	8	1	9
5	3	2	17	9	3	0	6	1	6	19	2	0	5	6	11	10	20	5	8	2	7	10	2	21	8	4	6
5	3	4	17	9	6	5	6	1	8	19	2	3	7	7	0	0	20	5	10	11	7	10	4	21	8	7	2
5	3	6	17	9	9	9	6	1	10	19	2	6	8	7	0	2	20	6	2	0	7	10	6	21	8	10	1
5	3	8	17	10	1	1	6	2	0	19	2	9	10	7	0	4	20	6	4	10	7	10	8	21	9	0	10
5	3	10	17	10	4	6	6	2	2	19	3	1	0	7	0	6	20	6	7	9	7	10	10	21	9	3	7
5	4	0	17	10	7	10	6	2	4	19	3	4	0	7	0	8	20	6	10	9	7	11	0	21	9	6	4
5	4	2	17	10	11	2	6	2	6	19	3	7	2	7	0	10	20	7	1	8	7	11	2	21	9	9	0
5	4	4	17	11	2	7	6	2	8	19	3	10	2	7	1	0	20	7	4	6	7	11	4	21	9	11	9
5	4	6	17	11	5	11	6	2	10	19	4	1	4	7	1	2	20	7	7	5	7	11	6	21	10	2	6
5	4	8	17	11	9	3	6	3	0	19	4	4	4	7	1	4	20	7	10	3	7	11	8	21	10	5	3
5	4	10	18	0	0	6	6	3	2	19	4	7	7	7	1	6	20	8	1	4	7	11	10	21	10	8	0
5	5	0	18	0	3	10	6	3	4	19	4	10	7	7	1	8	20	8	4	2	8	0	0	21	10	10	9
5	5	2	18	0	7	2	6	3	6	19	5	1	9	7	1	10	20	8	7	1	8	0	2	21	11	1	5
5	5	4	18	0	10	6	6	3	8	19	5	4	9	7	2	0	20	8	9	11	8	0	4	21	11	4	2
5	5	6	18	1	1	9	6	3	10	19	5	7	11	7	2	2	20	9	0	10	8	0	6	21	11	6	11
5	5	8	18	1	5	1	6	4	0	19	5	10	11	7	2	4	20	9	3	8	8	0	8	21	11	9	8
5	5	10	18	1	8	5	6	4	2	19	6	2	0	7	2	6	20	9	6	7	8	0	10	22	0	0	5
5	6	0	18	1	11	9	6	4	4	19	6	5	2	7	2	8	20	9	9	4	8	1	0	22	0	3	2
5	6	2	18	2	3	0	6	4	6	19	6	8	2	7	2	10	20	10	0	4	8	1	2	22	0	5	10
5	6	4	18	2	6	4	6	4	8	19	6	11	2	7	3	0	20	10	3	3	8	1	4	22	0	8	7

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.			
pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point
8	1	6	22	0	11	4	8	11	10	23	2	7	6	9	10	2	24	3	8	2	10	8	6	25	4	1	11
8	1	8	22	1	2	1	9	0	0	23	2	10	1	9	10	4	24	3	10	7	10	8	8	25	4	4	4
8	1	10	22	1	4	10	9	0	2	23	3	0	8	9	10	6	24	4	1	1	10	8	10	25	4	6	8
8	2	0	22	1	7	5	9	0	4	23	3	3	3	9	10	8	24	4	3	6	10	9	0	25	4	9	0
8	2	2	22	1	10	2	9	0	6	23	3	5	10	9	10	10	24	4	6	0	10	9	2	25	4	11	5
8	2	4	22	2	0	10	9	0	8	23	3	8	5	9	11	0	24	4	8	5	10	9	4	25	5	1	9
8	2	6	22	2	3	7	9	0	10	23	3	11	1	9	11	2	24	4	10	10	10	9	6	25	5	4	2
8	2	8	22	2	6	4	9	1	0	23	4	1	8	9	11	4	24	5	1	4	10	9	8	25	5	6	6
8	2	10	22	2	8	11	9	1	2	23	4	4	1	9	11	6	24	5	3	9	10	9	10	25	5	8	9
8	3	0	22	2	11	8	9	1	4	23	4	6	8	9	11	8	24	5	6	2	10	10	0	25	5	11	3
8	3	2	22	3	2	5	9	1	6	23	4	9	3	9	11	10	24	5	8	8	10	10	2	25	6	1	7
8	3	4	22	3	5	2	9	1	8	23	4	11	10	10	0	0	24	5	11	1	10	10	4	25	6	3	10
8	3	6	22	3	7	9	9	1	10	23	5	2	5	10	0	2	24	6	1	7	10	10	6	25	6	6	4
8	3	8	22	3	10	6	9	2	0	23	5	5	1	10	0	4	24	6	4	0	10	10	8	25	6	8	7
8	3	10	22	4	1	2	9	2	2	23	5	7	6	10	0	6	24	6	6	5	10	10	10	25	6	10	11
8	4	0	22	4	3	10	9	2	4	23	5	10	1	10	0	8	24	6	8	11	10	11	0	25	7	1	2
8	4	2	22	4	6	6	9	2	6	23	6	0	8	10	0	10	24	6	11	4	10	11	2	25	7	3	8
8	4	4	22	4	9	2	9	2	8	23	6	3	3	10	1	0	24	7	1	9	10	11	4	25	7	6	0
8	4	6	22	4	11	10	9	2	10	23	6	5	9	10	1	2	24	7	4	3	10	11	6	25	7	8	3
8	4	8	22	5	2	7	9	3	0	23	6	8	4	10	1	4	24	7	6	8	10	11	8	25	7	10	9
8	4	10	22	5	5	2	9	3	2	23	6	10	11	10	1	6	24	7	9	2	10	11	10	25	8	1	0
8	5	0	22	5	7	11	9	3	4	23	7	1	4	10	1	8	24	7	11	7	11	0	0	25	8	3	4
8	5	2	22	5	10	6	9	3	6	23	7	3	11	10	1	10	24	8	2	0	11	0	2	25	8	5	7
8	5	4	22	6	1	3	9	3	8	23	7	6	6	10	2	0	24	8	4	6	11	0	4	25	8	7	11
8	5	6	22	6	3	10	9	3	10	23	7	9	0	10	2	2	24	8	6	11	11	0	6	25	8	10	4
8	5	8	22	6	6	7	9	4	0	23	7	11	7	10	2	4	24	8	9	3	11	0	8	25	9	0	8
8	5	10	22	6	9	2	9	4	2	23	8	2	0	10	2	6	24	8	11	8	11	0	10	25	9	3	0
8	6	0	22	6	11	11	9	4	4	23	8	4	7	10	2	8	24	9	2	1	11	1	0	25	9	5	3
8	6	2	22	7	2	6	9	4	6	23	8	7	2	10	2	10	24	9	4	7	11	1	2	25	9	7	7
8	6	4	22	7	5	3	9	4	8	23	8	9	8	10	3	0	24	9	7	0	11	1	4	25	9	9	11
8	6	6	22	7	7	10	9	4	10	23	9	0	3	10	3	2	24	9	9	4	11	1	6	25	10	0	4
8	6	8	22	7	10	5	9	5	0	23	9	2	8	10	3	4	24	9	11	9	11	1	8	25	10	2	8
8	6	10	22	8	1	2	9	5	2	23	9	5	3	10	3	6	24	10	2	3	11	1	10	25	10	4	11
8	7	0	22	8	3	9	9	5	4	23	9	7	9	10	3	8	24	10	4	8	11	2	0	25	10	7	3
8	7	2	22	8	6	4	9	5	6	23	9	10	4	10	3	10	24	10	7	1	11	2	2	25	10	9	7
8	7	4	22	8	9	1	9	5	8	23	10	0	9	10	4	0	24	10	9	5	11	2	4	25	10	11	10
8	7	6	22	8	11	8	9	5	10	23	10	3	4	10	4	2	24	10	11	10	11	2	6	25	11	2	2
8	7	8	22	9	2	3	9	6	0	23	10	5	10	10	4	4	24	11	2	3	11	2	8	25	11	4	6
8	7	10	22	9	5	0	9	6	2	23	10	8	5	10	4	6	24	11	4	7	11	2	10	25	11	6	9
8	8	0	22	9	7	7	9	9	4	23	10	10	10	10	4	8	24	11	7	1	11	3	0	25	11	9	1
8	8	2	22	9	10	2	9	6	6	23	11	1	4	10	4	10	24	11	9	6	11	3	2	25	11	11	5
8	8	4	22	10	0	11	9	6	8	23	11	3	11	10	5	0	25	0	0	0	11	3	4	26	0	1	8
8	8	6	22	10	3	6	9	6	10	23	11	6	4	10	5	2	25	0	2	3	11	3	6	26	0	4	0
8	8	8	22	10	6	1	9	7	0	23	11	8	11	10	5	4	25	0	4	9	11	3	8	26	0	6	4
8	8	10	22	10	8	8	9	7	2	23	11	11	5	10	5	6	25	0	7	0	11	3	10	26	0	8	7
8	9	0	22	10	11	3	9	7	4	24	0	1	10	10	5	8	25	0	9	6	11	4	0	26	0	10	11
8	9	2	22	11	2	0	9	7	6	24	0	4	5	10	5	10	25	0	11	11	11	4	2	26	1	1	2
8	9	4	22	11	4	7	9	7	8	24	0	6	10	10	6	0	25	1	2	3	11	4	4	26	1	3	6
8	9	6	22	11	7	2	9	7	10	24	0	9	4	10	6	2	25	1	4	8	11	4	6	26	1	5	10
8	9	8	22	11	9	10	9	8	0	24	0	11	11	10	6	4	25	1	7	0	11	4	8	26	1	8	1
8	9	10	23	0	0	5	9	8	2	24	1	2	4	10	6	6	25	1	9	5	11	4	10	26	1	10	5
8	10	0	23	0	3	0	9	8	4	24	1	4	10	10	6	8	25	1	11	10	11	5	0	26	2	0	9
8	10	2	23	0	5	7	9	8	6	24	1	7	5	10	6	10	25	2	2	2	11	5	2	26	2	3	0
8	10	4	23	0	8	2	9	8	8	24	1	9	10	10	7	0	25	2	4	7	11	5	4	26	2	5	4
8	10	6	23	0	10	9	9	8	10	24	2	0	4	10	7	2	25	2	6	11	11	5	6	26	2	7	8
8	10	8	23	1	1	6	9	9	0	24	2	2	9	10	7	4	25	2	9	4	11	5	8	26	2	9	11
8	10	10	23	1	4	1	9	9	2	24	2	5	2	10	7	6	25	2	11	8	11	5	10	26	3	0	1
8	11	0	23	1	6	8	9	9	4	24	2	7	9	10	7	8	25	3	2	1	11	6	0	26	3	2	5
8	11	2	23	1	9	3	9	9	6	24	2	10	3	10	7	10	25	3	4	5	11	6	2	26	3	4	9
8	11	4	23	1	11	10	9	9	8	24	3	0	8	10	8	0	25	3	6	10	11	6	4	26	3	7	0
8	11	6	23	2	2	5	9	9	10	24	3	3	2	10	8	2	25	3	9	2	11	6	6	26	3	9	4
8	11	8	23	2	5	1	9	10	0	24	3	5	7	10	8	4	25	3	11	7	11	6	8	26	3	11	7

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.				Chute.			Vitesse.			
pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point	pieds	po.	lig.	pieds	po.	lig.	point
11	6	10	26	4	1	11	12	5	2	27	3	8	5	13	3	6	28	2	10	6	14	1	10	29	1	8	1
11	7	0	26	4	4	1	12	5	4	27	3	10	9	13	3	8	28	3	0	6	14	2	0	29	1	10	2
11	7	2	26	4	6	5	12	5	6	27	4	0	11	13	3	10	28	3	2	8	14	2	2	29	2	0	4
11	7	4	26	4	8	8	12	5	8	27	4	3	1	13	4	0	28	3	4	10	14	2	4	29	2	2	4
11	7	6	26	4	11	0	12	5	10	27	4	5	3	13	4	2	28	3	6	10	14	2	6	29	2	4	4
11	7	8	26	5	1	2	12	6	0	27	4	7	7	13	4	4	28	3	9	0	14	2	8	29	2	6	4
11	7	10	26	5	3	6	12	6	2	27	4	9	8	13	4	6	28	3	11	2	14	2	10	29	2	8	6
11	8	0	26	5	5	9	12	6	4	27	4	11	10	13	4	8	28	4	1	4	14	3	0	29	2	10	6
11	8	2	26	5	8	1	12	6	6	27	5	2	0	13	4	10	28	4	3	4	14	3	2	29	3	0	6
11	8	4	26	5	10	3	12	6	8	27	5	4	2	13	5	0	28	4	5	6	14	3	4	29	3	2	7
11	8	6	26	6	0	6	12	6	10	27	5	6	6	13	5	2	28	4	7	8	14	3	6	29	3	4	9
11	8	8	26	6	2	10	12	7	0	27	5	8	8	13	5	4	28	4	9	8	14	3	8	29	3	6	9
11	8	10	26	6	5	2	12	7	2	27	5	10	10	13	5	6	28	4	11	10	14	3	10	29	3	8	9
11	9	0	26	6	7	4	12	7	4	27	6	1	0	13	5	8	28	5	2	0	14	4	0	29	3	10	9
11	9	2	26	6	9	7	12	7	6	27	6	3	2	13	5	10	28	5	4	0	14	4	2	29	4	0	9
11	9	4	26	6	11	11	12	7	8	27	6	5	3	13	6	0	28	5	6	2	14	4	4	29	4	2	11
11	9	6	26	7	2	1	12	7	10	27	6	7	5	13	6	2	28	5	8	4	14	4	6	29	4	4	11
11	9	8	26	7	4	4	12	8	0	27	6	9	9	13	6	4	28	5	10	4	14	4	8	29	4	7	0
11	9	10	26	7	6	8	12	8	2	27	6	11	11	13	6	6	28	6	0	6	14	4	10	29	4	9	0
11	10	0	26	7	8	10	12	8	4	27	7	2	1	13	6	8	28	6	2	7	14	5	0	29	4	11	0
11	10	2	26	7	11	2	12	8	6	27	7	4	3	13	6	10	28	6	4	9	14	5	2	29	5	1	2
11	10	4	26	8	1	5	12	8	8	27	7	6	5	13	7	0	28	6	6	10	14	5	4	29	5	3	2
11	10	6	26	8	3	7	12	8	10	27	7	8	7	13	7	2	28	6	8	11	14	5	6	29	5	5	2
11	10	8	26	8	5	11	12	9	0	27	7	10	9	13	7	4	28	6	11	1	14	5	8	29	5	7	2
11	10	10	26	8	8	1	12	9	2	27	8	0	10	13	7	6	28	7	1	1	14	5	10	29	5	9	3
11	11	0	26	8	10	4	12	9	4	27	8	3	0	13	7	8	28	7	3	3	14	6	0	29	5	11	3
11	11	2	26	9	0	8	12	9	6	27	8	5	2	13	7	10	28	7	5	5	14	6	2	29	6	1	3
11	11	4	26	9	2	10	12	9	8	27	8	7	4	13	8	0	28	7	7	5	14	6	4	29	6	3	5
11	11	6	26	9	5	2	12	9	10	27	8	9	6	13	8	2	28	7	9	7	14	6	6	29	6	5	5
11	11	8	26	9	7	4	12	10	0	27	8	11	8	13	8	4	28	7	11	7	14	6	8	29	6	7	5
11	11	10	26	9	9	7	12	10	2	27	9	1	10	13	8	6	28	8	1	9	14	6	10	29	6	9	6
12	0	0	26	9	11	9	12	10	4	27	9	4	0	13	8	8	28	8	3	9	14	7	0	29	6	11	6
12	0	2	26	10	2	1	12	10	6	27	9	6	2	13	8	10	28	8	5	11	14	7	2	29	7	1	6
12	0	4	26	10	4	3	12	10	8	27	9	8	4	13	9	0	28	8	7	11	14	7	4	29	7	3	6
12	0	6	26	10	6	6	12	10	10	27	9	10	6	13	9	2	28	8	10	1	14	7	6	29	7	5	6
12	0	8	26	10	8	8	12	11	0	27	10	0	8	13	9	4	28	9	0	1	14	7	8	29	7	7	7
12	0	10	26	10	11	0	12	11	2	27	10	2	9	13	9	6	28	9	2	3	14	7	10	29	7	9	7
12	1	0	26	11	1	2	12	11	4	27	10	4	11	13	9	8	28	9	4	3	14	8	0	29	7	11	7
12	1	2	26	11	3	6	12	11	6	27	10	7	1	13	9	10	28	9	6	5	14	8	2	29	8	1	7
12	1	4	26	11	5	7	12	11	8	27	10	9	3	13	10	0	28	9	8	5	14	8	4	29	8	3	7
12	1	6	26	11	7	11	12	11	10	27	10	11	5	13	10	2	28	9	10	7	14	8	6	29	8	5	7
12	1	8	26	11	10	1	13	0	0	27	11	1	7	13	10	4	28	10	0	8	14	8	8	29	8	7	8
12	1	10	27	0	0	5	13	0	2	27	11	3	9	13	10	6	28	10	2	9	14	8	10	29	8	9	8
12	2	0	27	0	2	7	13	0	4	27	11	5	11	13	10	8	28	10	4	10	14	9	0	29	8	11	8
12	2	2	27	0	4	9	13	0	6	27	11	8	1	13	10	10	28	10	6	10	14	9	2	29	9	1	8
12	2	4	27	0	7	0	13	0	8	27	11	10	3	13	11	0	28	10	9	0	14	9	4	29	9	3	8
12	2	6	27	0	9	2	13	0	10	28	0	0	3	13	11	2	28	10	11	0	14	9	6	29	9	5	9
12	2	8	27	0	11	6	13	1	0	28	0	2	5	13	11	4	28	11	1	2	14	9	8	29	9	7	9
12	2	10	27	1	1	8	13	1	2	28	0	4	7	13	11	6	28	11	3	2	14	9	10	29	9	9	9
12	3	0	27	1	3	10	13	1	4	28	0	6	9	13	11	8	28	11	5	2	14	10	0	29	9	11	9
12	3	2	27	1	6	1	13	1	6	28	0	8	11	13	11	10	28	11	7	4	14	10	2	29	10	1	9
12	3	4	27	1	8	3	13	1	8	28	0	11	1	14	0	0	28	11	9	4	14	10	4	29	10	3	10
12	3	6	27	1	10	5	13	1	10	28	1	1	2	14	0	2	28	11	11	6	14	10	6	29	10	5	10
12	3	8	27	2	0	9	13	2	0	28	1	3	3	14	0	4	29	0	1	7	14	10	8	29	10	7	10
12	3	10	27	2	2	11	13	2	2	28	1	5	5	14	0	6	29	0	3	7	14	10	10	29	10	9	10
12	4	0	27	2	5	1	13	2	4	28	1	7	7	14	0	8	29	0	5	9	14	11	0	29	10	11	10
12	4	2	27	2	7	4	13	2	6	28	1	9	8	14	0	10	29	0	7	9	14	11	2	29	11	1	11
12	4	4	27	2	9	6	13	2	8	28	1	11	10	14	1	0	29	0	9	9	14	11	4	29	11	3	11
12	4	6	27	2	11	8	13	2	10	28	2	1	11	14	1	2	29	0	11	11	14	11	6	29	11	5	11
12	4	8	27	3	2	0	13	3	0	28	2	4	0	14	1	4	29	1	1	11	14	11	8	29	11	7	11
12	4	10	27	3	4	2	13	3	2	28	2	6	2	14	1	6	29	1	3	11	14	11	10	29	11	9	11
12	5	0	27	3	6	4	13	3	4	28	2	8	4	14	1	8	29	1	6	1	15	0	0	30	0	0	0

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TABLE SECONDE.

De la pesanteur d'une colonne d'eau d'un pouce de diamètre, qui aurait depuis un pied jusqu'à 400 de hauteur.

Pieds.	Livr.	Onc.	Gro.	Pieds.	Livr.	Onc.	Gro.	Pieds.	Livr.	Onc.	Gro.	Pieds.	Livr.	Onc.	Gro.	Pieds.	Livr.	Onc.	Gro.	Pieds.	Livr.	Onc.	Gro.
1	0	6	1	55	21	0	7	109	41	11	5	163	62	6	3	217	83	1	1	271	103	11	7
2	0	12	2	56	21	7	0	110	42	1	6	164	62	12	4	218	83	7	2	272	104	2	0
3	1	2	3	57	21	13	1	111	42	7	7	165	63	2	5	219	83	13	3	273	104	8	1
4	1	8	4	58	22	3	2	112	42	14	0	166	63	8	6	220	84	3	4	274	104	14	2
5	1	14	5	59	22	9	3	113	43	4	1	167	63	14	7	221	84	9	5	275	105	4	3
6	2	4	6	60	22	15	4	114	43	10	2	168	64	5	0	222	84	15	6	276	105	10	4
7	2	10	7	61	23	5	5	115	44	0	3	169	64	11	1	223	85	5	7	277	106	0	5
8	3	1	0	62	23	11	6	116	44	6	4	170	65	1	2	224	85	12	0	278	106	6	6
9	3	7	1	63	24	1	7	117	44	12	5	171	65	7	3	225	86	2	1	279	106	12	7
10	3	13	2	64	24	8	0	118	45	2	6	172	65	13	4	226	86	8	2	280	107	3	0
11	4	3	3	65	24	14	1	119	45	8	7	173	66	3	5	227	86	14	3	281	107	9	1
12	4	9	4	66	25	4	2	120	45	15	0	174	66	9	6	228	87	4	4	282	107	15	2
13	4	15	5	67	25	10	3	121	46	5	1	175	66	15	7	229	87	10	5	283	108	5	3
14	5	5	6	68	26	0	4	122	46	11	2	176	67	6	0	230	88	0	6	284	108	11	4
15	5	11	7	69	26	6	5	123	47	1	3	177	67	12	1	231	88	6	7	285	109	1	5
16	6	2	0	70	26	12	6	124	47	7	4	178	68	2	2	232	88	13	0	286	109	7	6
17	6	8	1	71	27	2	7	125	47	13	5	179	68	8	3	233	89	3	1	287	109	13	7
18	6	14	2	72	27	9	0	126	48	3	6	180	68	14	4	234	89	9	2	288	110	4	0
19	7	4	3	73	27	15	1	127	48	9	7	181	69	4	5	235	89	15	3	289	110	10	1
20	7	10	4	74	28	5	2	128	49	0	0	182	69	10	6	236	90	5	4	290	111	0	2
21	8	0	5	75	28	11	3	129	49	6	1	183	70	0	7	237	90	11	5	291	111	6	3
22	8	6	6	76	29	1	4	130	49	12	2	184	70	7	0	238	91	1	6	292	111	12	4
23	8	12	7	77	29	7	5	131	50	2	3	185	70	13	1	239	91	7	7	293	112	2	5
24	9	3	0	78	29	13	6	132	50	8	4	186	71	3	2	240	91	[illegible]	0	294	112	8	6
25	9	9	1	79	30	3	7	133	50	14	5	187	71	9	3	241	92	4	1	295	112	14	7
26	9	15	2	80	30	10	0	134	51	4	6	188	71	15	4	242	92	10	2	296	113	5	0
27	10	5	3	81	31	0	1	135	51	10	7	189	72	5	5	243	93	0	3	297	113	11	1
28	10	11	4	82	31	6	2	136	52	1	0	190	72	11	6	244	93	6	4	298	114	1	2
29	11	1	5	83	31	12	3	137	52	7	1	191	73	1	7	245	93	12	5	299	114	7	3
30	11	7	6	84	32	2	4	138	52	13	2	192	73	8	0	246	94	2	6	300	114	13	4
31	11	13	7	85	32	8	5	139	53	3	3	193	73	14	1	247	94	8	7	301	115	3	5
32	12	4	0	46	32	14	6	140	53	9	4	194	74	4	2	248	94	15	0	302	115	9	6
33	12	10	1	87	33	4	7	141	53	15	5	195	74	10	3	249	95	5	1	303	115	15	7
34	13	0	2	88	33	11	0	142	54	5	6	196	75	0	4	250	95	11	2	304	116	6	0
35	13	6	3	89	34	1	1	143	54	11	7	197	75	6	5	251	96	1	3	305	116	12	1
36	13	12	4	90	34	7	2	144	55	2	0	198	75	12	6	252	96	7	4	306	117	2	2
37	14	2	5	91	34	13	3	145	55	8	1	199	76	2	7	253	96	13	5	307	117	8	3
38	14	8	6	92	35	3	4	146	55	14	2	200	76	9	0	254	97	3	6	308	117	14	4
39	14	14	7	93	35	9	5	147	56	4	3	201	76	15	1	255	97	9	7	309	118	4	5
40	15	5	0	94	35	15	6	148	56	10	4	202	77	5	2	256	98	0	0	310	118	10	6
41	15	11	1	95	36	5	7	149	57	0	5	203	77	11	3	257	98	6	1	311	119	0	7
42	16	1	2	96	36	12	0	150	57	6	6	204	78	1	4	258	98	12	2	312	119	7	0
43	16	7	3	97	37	2	1	151	57	12	7	205	78	7	5	259	99	2	3	313	119	13	1
44	16	13	4	98	37	8	2	152	58	3	0	206	78	13	6	260	99	8	4	314	120	3	2
45	17	3	5	99	37	14	3	153	58	9	1	207	79	3	7	261	99	14	5	315	120	9	3
46	17	9	6	100	38	4	4	154	58	15	2	208	79	10	0	262	100	4	6	316	120	15	4
47	17	15	7	101	38	10	5	155	59	5	3	209	80	0	1	263	100	10	7	317	121	5	5
48	18	6	0	102	39	0	6	156	59	11	4	210	80	6	2	264	101	1	0	318	121	11	6
49	18	12	1	103	39	6	7	157	60	1	5	211	80	12	3	265	101	7	1	319	122	1	7
50	19	2	2	104	39	13	0	158	60	7	6	212	81	2	4	266	101	13	2	320	122	8	0
51	19	8	3	105	40	3	1	159	60	13	7	213	81	8	5	267	102	3	3	321	122	14	1
52	19	14	4	106	40	9	2	160	61	4	0	214	81	14	6	268	102	9	4	322	123	4	2
53	20	4	5	107	40	15	3	161	61	10	1	215	82	4	7	269	102	15	5	323	123	10	3
54	20	10	6	108	41	5	4	162	62	0	2	216	82	11	0	270	103	5	6	324	124	0	4

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pieds.	Livr.	Onc.	Gro.	Pieds.	Livr.	Onc.	Gro.	Pieds.	Livr.	Onc.	Gro.	Pieds.	Livr.	Onc.	Gro.	Pieds.	Livr.	Onc.	Gro.	Pieds.	Livr.	Onc.	Gro.
325	124	6	5	338	129	6	2	351	134	5	7	364	139	5	4	377	144	5	1	390	149	4	6
326	124	12	6	339	129	12	3	352	134	12	0	365	139	11	5	378	144	11	2	391	149	10	7
327	125	2	7	340	130	2	4	353	135	2	1	366	140	1	6	379	145	1	3	392	150	1	0
328	125	9	0	341	130	8	5	354	135	8	2	367	140	7	7	380	145	7	4	393	150	7	1
329	125	15	1	342	130	14	6	355	135	14	3	368	140	14	6	381	145	13	5	394	150	13	2
330	126	5	2	343	131	4	7	356	136	4	4	369	141	4	1	382	146	3	6	395	151	3	3
331	126	11	3	344	131	11	0	357	136	10	5	370	141	10	2	383	146	9	7	396	151	9	4
332	127	1	4	345	132	1	1	358	137	0	6	371	142	0	3	384	147	0	0	397	151	15	5
333	127	7	5	346	132	7	2	359	137	6	7	372	142	6	4	385	147	6	1	398	152	5	6
334	127	13	6	347	132	13	3	360	137	13	0	373	142	12	5	386	147	12	2	399	152	11	7
335	128	3	7	348	133	3	4	361	138	3	1	374	143	2	6	387	148	2	3	400	153	2	0
336	128	10	0	349	133	9	5	362	138	9	2	375	143	8	7	388	148	8	4				
337	129	0	1	350	133	15	6	363	138	15	3	376	143	15	0	389	148	14	5				

Table des hauteurs correspondantes à différentes vitesses, les unes et les autres étant exprimées en mètres; ajoutée par l'éditeur.

Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitessces.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
0,01	0,00001	0,41	0,0086	0,81	0,0334	1,21	0,0746	1,61	0,1321
0,02	0,00002	0,42	0,0090	0,82	0,0343	1,22	0,0758	1,62	0,1337
0,03	0,00005	0,43	0,0094	0,83	0,0351	1,23	0,0771	1,63	0,1354
0,04	0,00009	0,44	0,0098	0,84	0,0360	1,24	0,0783	1,64	0,1371
0,05	0,00013	0,45	0,0103	0,85	0,0368	1,25	0,0797	1,65	0,1388
0,06	0,00019	0,46	0,0108	0,86	0,0377	1,26	0,0809	1,66	0,1405
0,07	0,00026	0,47	0,0112	0,87	0,0386	1,27	0,0822	1,67	0,1422
0,08	0,00034	0,48	0,0117	0,88	0,0395	1,28	0,0835	1,68	0,1439
0,09	0,00043	0,49	0,0122	0,89	0,0404	1,29	0,0848	1,69	0,1456
0,10	0,00051	0,50	0,0127	0,90	0,0413	1,30	0,0861	1,70	0,1473
0,11	0,00062	0,51	0,0132	0,91	0,0422	1,31	0,0875	1,71	0,1490
0,12	0,00074	0,52	0,0138	0,92	0,0431	1,32	0,0888	1,72	0,1508
0,13	0,00087	0,53	0,0143	0,93	0,0441	1,33	0,0901	1,73	0,1525
0,14	0,00101	0,54	0,0148	0,94	0,0450	1,34	0,0915	1,74	0,1543
0,15	0,00115	0,55	0,0154	0,95	0,0460	1,35	0,0929	1,75	0,1561
0,16	0,00131	0,56	0,0160	0,96	0,0470	1,36	0,0943	1,76	0,1579
0,17	0,00148	0,57	0,0165	0,97	0,0480	1,37	0,0957	1,77	0,1597
0,18	0,00166	0,58	0,0171	0,98	0,0490	1,38	0,0970	1,78	0,1615
0,19	0,00185	0,59	0,0177	0,99	0,0500	1,39	0,0984	1,79	0,1633
0,20	0,00204	0,60	0,0184	1,00	0,0510	1,40	0,0999	1,80	0,1651
0,21	0,00225	0,61	0,0190	1,01	0,0520	1,41	0,1013	1,81	0,1670
0,22	0,00247	0,62	0,0196	1,02	0,0530	1,42	0,1028	1,82	0,1688
0,23	0,00270	0,63	0,0202	1,03	0,0541	1,43	0,1042	1,83	0,1707
0,24	0,00294	0,64	0,0209	1,04	0,0551	1,44	0,1057	1,84	0,1726
0,25	0,00319	0,65	0,0215	1,05	0,0562	1,45	0,1072	1,85	0,1745
0,26	0,00345	0,66	0,0222	1,06	0,0573	1,46	0,1086	1,86	0,1763
0,27	0,00372	0,67	0,0229	1,07	0,0584	1,47	0,1101	1,87	0,1782
0,28	0,00400	0,68	0,0236	1,08	0,0595	1,48	0,1116	1,88	0,1801
0,29	0,00429	0,69	0,0243	1,09	0,0606	1,49	0,1131	1,89	0,1820
0,30	0,00459	0,70	0,0250	1,10	0,0617	1,50	0,1147	1,90	0,1840
0,31	0,00490	0,71	0,0257	1,11	0,0628	1,51	0,1162	1,91	0,1859
0,32	0,00522	0,72	0,0264	1,12	0,0639	1,52	0,1177	1,92	0,1878
0,33	0,00555	0,73	0,0272	1,13	0,0651	1,53	0,1193	1,93	0,1898
0,34	0,00589	0,74	0,0279	1,14	0,0662	1,54	0,1209	1,94	0,1918
0,35	0,00624	0,75	0,0287	1,15	0,0674	1,55	0,1225	1,95	0,1938
0,36	0,00660	0,76	0,0295	1,16	0,0686	1,56	0,1241	1,96	0,1958
0,37	0,00697	0,77	0,0302	1,17	0,0698	1,57	0,1257	1,97	0,1978
0,38	0,00735	0,78	0,0310	1,18	0,0710	1,58	0,1273	1,98	0,1998
0,39	0,00775	0,79	0,0318	1,19	0,0722	1,59	0,1289	1,99	0,2018
0,40	0,00816	0,80	0,0326	1,20	0,0734	1,60	0,1305	2,00	0,2039

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
2,01	0,2059	2,61	0,3472	3,21	0,5252	3,81	0,7400	4,41	0,9913
2,02	0,2080	2,62	0,3699	3,22	0,5285	3,82	0,7438	4,42	0,9958
2,03	0,2100	2,63	0,3726	3,23	0,5318	3,83	0,7478	4,43	1,0003
2,04	0,2121	2,64	0,3753	3,24	0,5351	3,84	0,7517	4,44	1,0048
2,05	0,2142	2,65	0,3580	3,25	0,5384	3,85	0,7556	4,45	1,0094
2,06	0,2163	2,66	0,3607	3,26	0,5417	3,86	0,7595	4,46	1,0140
2,07	0,2184	2,67	0,3634	3,27	0,5450	3,87	0,7634	4,47	1,0185
2,08	0,2205	2,68	0,3661	3,28	0,5484	3,88	0,7674	4,48	1,0231
2,09	0,2226	2,69	0,3688	3,29	0,5517	3,89	0,7713	4,49	1,0276
2,10	0,2248	2,70	0,3716	3,30	0,5551	3,90	0,7753	4,50	1,0322
2,11	0,2269	2,71	0,3744	3,31	0,5585	3,91	0,7763	4,51	1,0368
2,12	0,2291	2,72	0,3771	3,32	0,5618	3,92	0,7803	4,52	1,0414
2,13	0,2313	2,73	0,3799	3,33	0,5652	3,93	0,7843	4,53	1,0460
2,14	0,2334	2,74	0,3827	3,34	0,5686	3,94	0,7883	4,54	1,0507
2,15	0,2356	2,75	0,3855	3,35	0,5721	3,95	0,7953	4,55	1,0553
2,16	0,2378	2,76	0,3883	3,36	0,5755	3,96	0,7993	4,56	1,0599
2,17	0,2400	2,77	0,3911	3,37	0,5789	3,97	0,8034	4,57	1,0646
2,18	0,2422	2,78	0,3939	3,38	0,5823	3,98	0,8074	4,58	1,0692
2,19	0,2444	2,79	0,3967	3,39	0,5858	3,99	0,8115	4,59	1,0739
2,20	0,2467	2,80	0,3996	3,40	0,5893	4,00	0,8156	4,60	1,0786
2,21	0,2490	2,81	0,4025	3,41	0,5927	4,01	0,8197	4,61	1,0833
2,22	0,2512	2,82	0,4054	3,42	0,5962	4,02	0,8238	4,62	1,0880
2,23	0,2535	2,83	0,4082	3,43	0,5997	4,03	0,8279	4,63	1,0927
2,24	0,2557	2,84	0,4111	3,44	0,6032	4,04	0,8320	4,64	1,0974
2,25	0,2580	2,85	0,4140	3,45	0,6067	4,05	0,8361	4,65	1,1022
2,26	0,2603	2,86	0,4169	3,46	0,6102	4,06	0,8402	4,66	1,1069
2,27	0,2626	2,87	0,4198	3,47	0,6138	4,07	0,8444	4,67	1,1117
2,28	0,2649	2,88	0,4228	3,48	0,6173	4,08	0,8485	4,68	1,1164
2,29	0,2673	2,89	0,4257	3,49	0,6209	4,09	0,8527	4,69	1,1212
2,30	0,2696	2,90	0,4287	3,50	0,6244	4,10	0,8569	4,70	1,1260
2,31	0,2720	2,91	0,4316	3,51	0,6280	4,11	0,8611	4,71	1,1308
2,32	0,2743	2,92	0,4346	3,52	0,6316	4,12	0,8653	4,72	1,1356
2,33	0,2767	2,93	0,4376	3,53	0,6352	4,13	0,8695	4,73	1,1404
2,34	0,2791	2,94	0,4406	3,54	0,6388	4,14	0,8737	4,74	1,1452
2,35	0,2815	2,95	0,4436	3,55	0,6424	4,15	0,8779	4,75	1,1501
2,36	0,2839	2,96	0,4466	3,56	0,6460	4,16	0,8821	4,76	1,1549
2,37	0,2863	2,97	0,4496	3,57	0,6497	4,17	0,8864	4,77	1,1598
2,38	0,2887	2,98	0,4526	3,58	0,6533	4,18	0,8906	4,78	1,1647
2,39	0,2911	2,99	0,4557	3,59	0,6569	4,19	0,8949	4,79	1,1695
2,40	0,2936	3,00	0,4588	3,60	0,6606	4,20	0,8992	4,80	1,1744
2,41	0,2960	3,01	0,4618	3,61	0,6643	4,21	0,9035	4,81	1,1793
2,42	0,2985	3,02	0,4649	3,62	0,6680	4,22	0,9078	4,82	1,1842
2,43	0,3010	3,03	0,4680	3,63	0,6717	4,23	0,9121	4,83	1,1891
2,44	0,3034	3,04	0,4711	3,64	0,6754	4,24	0,9164	4,84	1,1941
2,45	0,3060	3,05	0,4742	3,65	0,6791	4,25	0,9207	4,85	1,1990
2,46	0,3085	3,06	0,4773	3,66	0,6828	4,26	0,9251	4,86	1,2040
2,47	0,3110	3,07	0,4804	3,67	0,6866	4,27	0,9294	4,87	1,2090
2,48	0,3135	3,08	0,4835	3,68	0,6903	4,28	0,9337	4,88	1,2139
2,49	0,3160	3,09	0,4866	3,69	0,6940	4,29	0,9381	4,89	1,2189
2,50	0,3186	3,10	0,4899	3,70	0,6978	4,30	0,9425	4,90	1,2239
2,51	0,3211	3,11	0,4930	3,71	0,7016	4,31	0,9469	4,91	1,2289
2,52	0,3237	3,12	0,4962	3,72	0,7054	4,32	0,9513	4,92	1,2339
2,53	0,3263	3,13	0,4994	3,73	0,7092	4,33	0,9557	4,93	1,2389
2,54	0,3289	3,14	0,5026	3,74	0,7130	4,34	0,9601	4,94	1,2440
2,55	0,3315	3,15	0,5058	3,75	0,7168	4,35	0,9646	4,95	1,2490
2,56	0,3341	3,16	0,5090	3,76	0,7206	4,36	0,9690	4,96	1,2541
2,57	0,3367	3,17	0,5122	3,77	0,7245	4,37	0,9734	4,97	1,2591
2,58	0,3393	3,18	0,5155	8,78	0,7283	4,38	0,9779	4,98	1,2642
2,59	0,3419	3,19	0,5187	3,79	0,7322	4,39	0,9823	4,99	1,2693
2,60	0,3446	3,20	0,5220	3,80	0,7361	4,40	0,9869	5,00	1,2744

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
5,01	1,2795	5,61	1,6043	6,21	1,9658	6,81	2,3640	7,41	2,7989
5,02	1,2846	5,62	1,6100	6,22	1,9721	6,82	2,3709	7,42	2,8065
5,03	1,2897	5,63	1,6157	6,23	1,9785	6,83	2,3779	7,43	2,8140
5,04	1,2948	5,64	1,6215	6,24	1,9848	6,84	2,3849	7,44	2,8216
5,05	1,3000	5,65	1,6272	6,25	1,9912	6,85	2,3919	7,45	2,8292
5,06	1,3051	5,66	1,6330	6,26	1,9976	6,86	2,3989	7,46	2,8368
5,07	1,3103	5,67	1,6388	6,27	2,0039	6,87	2,4059	7,47	2,8444
5,08	1,3155	5,68	1,6446	6,28	2,0103	6,88	2,4129	7,48	2,8521
5,09	1,3206	5,69	1,6503	6,29	2,0167	6,89	2,4199	7,49	2,8597
5,10	1,3258	5,70	1,6562	6,30	2,0232	6,90	2,4269	7,50	2,8673
5,11	1,3311	5,71	1,6620	6,31	2,0296	6,91	2,4339	7,51	2,8750
5,12	1,3363	5,72	1,6678	6,32	2,0361	6,92	2,4410	7,52	2,8826
5,13	1,3415	5,73	1,6736	6,33	2,0425	6,93	2,4481	7,53	2,8903
5,14	1,3467	5,74	1,6795	6,34	2,0490	6,94	2,4551	7,54	2,8980
5,15	1,3520	5,75	1,6854	6,35	2,0554	6,95	2,4622	7,55	2,9057
5,16	1,3572	5,76	1,6912	6,36	2,0619	6,96	2,4693	7,56	2,9134
5,17	1,3625	5,77	1,6971	6,37	2,0684	6,97	2,4764	7,57	2,9211
5,18	1,3678	5,78	1,7030	6,38	2,0749	6,98	2,4835	7,58	2,9288
5,19	1,3730	5,79	1,7089	6,39	2,0814	6,99	2,4906	7,59	2,9365
5,20	1,3784	5,80	1,7148	6,40	2,0879	7,00	2,4978	7,60	2,9443
5,21	1,3837	5,81	1,7207	6,41	2,0945	7,01	2,5049	7,61	2,9520
5,22	1,3890	5,82	1,7266	6,42	2,1010	7,02	2,5121	7,62	2,9598
5,23	1,3943	5,83	1,7326	6,43	2,1075	7,03	2,5192	7,63	2,9676
5,24	1,3996	5,84	1,7385	6,44	2,1141	7,04	2,5264	7,64	2,9754
5,25	1,4050	5,85	1,7445	6,45	2,1207	7,05	2,5336	7,65	2,9832
5,26	1,4103	5,86	1,7505	6,46	2,1273	7,06	2,5408	7,66	2,9910
5,27	1,4157	5,87	1,7564	6,47	2,1338	7,07	2,5480	7,67	2,9988
5,28	1,4211	5,88	1,7624	6,48	2,1404	7,08	2,5552	7,68	3,0066
5,29	1,4265	5,89	1,7684	6,49	2,1471	7,09	2,5624	7,69	3,0144
5,30	1,4319	5,90	1,7744	6,50	2,1537	7,10	2,5696	7,70	3,0223
5,31	1,4373	5,91	1,7805	6,51	2,1603	7,11	2,5769	7,71	3,0301
5,32	1,4427	5,92	1,7865	6,52	2,1670	7,12	2,5841	7,72	3,0380
5,33	1,4481	5,93	1,7925	6,53	2,1736	7,13	2,5914	7,73	3,0459
5,34	1,4535	5,94	1,7986	6,54	2,1803	7,14	2,5987	7,74	3,0538
5,35	1,4590	5,95	1,8046	6,55	2,1869	7,15	2,6060	7,75	3,0617
5,36	1,4645	5,96	1,8107	6,56	2,1936	7,16	2,6132	7,76	3,0696
5,37	1,4699	5,97	1,8168	6,57	2,2003	7,17	2,6205	7,77	3,0775
5,38	1,4754	5,98	1,8229	6,58	2,2070	7,18	2,6279	7,78	3,0854
5,39	1,4809	5,99	1,8290	6,59	2,2137	7,19	2,6352	7,79	3,0933
5,40	1,4864	6,00	1,8351	6,60	2,2205	7,20	2,6425	7,80	3,1013
5,41	1,4919	6,01	1,8412	6,61	2,2272	7,21	2,6499	7,81	3,1092
5,42	1,4975	6,02	1,8473	6,62	2,2339	7,22	2,6572	7,82	3,1172
5,43	1,5030	6,03	1,8535	6,63	2,2407	7,23	2,6646	7,83	3,1252
5,44	1,5085	6,04	1,8596	6,64	2,2474	7,24	2,6720	7,84	3,1332
5,45	1,5141	6,05	1,8658	6,65	2,2542	7,25	2,6794	7,85	3,1412
5,46	1,5196	6,06	1,8720	6,66	2,2610	7,26	2,6868	7,86	3,1492
5,47	1,5252	6,07	1,8782	6,67	2,2678	7,27	2,6942	7,87	3,1572
5,48	1,5308	6,08	1,8843	6,68	2,2746	7,28	2,7016	7,88	3,1652
5,49	1,5364	6,09	1,8905	6,69	2,2814	7,29	2,7090	7,89	3,1733
5,50	1,5420	6,10	1,8968	6,70	2,2883	7,30	2,7164	7,90	3,1813
5,51	1,5476	6,11	1,9030	6,71	2,2951	7,31	2,7239	7,91	3,1894
5,52	1,5532	6,12	1,9092	6,72	2,3019	7,32	2,7313	7,92	3,1974
5,53	1,5588	6,13	1,9155	6,73	2,3088	7,33	2,7388	7,93	3,2055
5,54	1,5645	6,14	1,9217	6,74	2,3156	7,34	2,7463	7,94	3,2136
5,55	1,5701	6,15	1,9280	6,75	2,3225	7,35	2,7538	7,95	3,2217
5,56	1,5758	6,16	1,9343	6,76	2,3294	7,36	2,7613	7,96	3,2298
5,57	1,5815	6,17	1,9405	6,77	2,3363	7,37	2,7688	7,97	3,2380
5,58	1,5872	6,18	1,9468	6,78	2,3432	7,38	2,7763	7,98	3,2461
5,59	1,5929	6,19	1,9531	6,79	2,3501	7,39	2,7838	7,99	3,2542
5,60	1,5986	6,20	1,9595	6,80	2,3571	7,40	2,7914	8,00	3,2624

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.	Vitesses.	Hauteurs correspondantes.
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
8,01	3,2705	8,41	3,6053	8,81	3,9565	9,21	4,3239	9,61	4,7076
8,02	3,2787	8,42	3,6139	8,82	3,9654	9,22	4,3323	9,62	4,7174
8,03	3,2869	8,43	3,6225	8,83	3,9744	9,23	4,3417	9,63	4,7272
8,04	3,2951	8,44	3,6311	8,84	3,9834	9,24	4,3511	9,64	4,7370
8,05	3,3033	8,45	3,6397	8,85	3,9925	9,25	4,3615	9,65	4,7469
8,06	3,3115	8,46	3,6483	8,86	4,0015	9,26	4,3710	9,66	4,7567
8,07	3,3197	8,47	3,6570	8,87	4,0105	9,27	4,3804	9,67	4,7666
8,08	3,3280	8,48	3,6656	8,88	4,0196	9,28	4,3898	9,68	4,7764
8,09	3,3362	8,49	3,6743	8,89	4,0286	9,29	4,3993	9,69	4,7863
8,10	3,3445	8,50	3,6829	8,90	4,0377	9,30	4,4088	9,70	4,7962
8,11	3,3527	8,51	3,6916	8,91	4,0468	9,31	4,4183	9,71	4,8061
8,12	3,3610	8,52	3,7003	8,92	4,0559	9,32	4,4278	9,72	4,8160
8,13	3,3693	8,53	3,7090	8,93	4,0650	9,33	4,4373	9,73	4,8259
8,14	3,3776	8,54	3,7177	8,94	4,0741	9,34	4,4468	9,74	4,8358
8,15	3,3859	8,55	3,7264	8,95	4,0832	9,35	4,4563	9,75	4,8458
8,16	3,3942	8,56	3,7351	8,96	4,0923	9,36	4,4659	9,76	4,8557
8,17	3,4025	8,57	3,7438	8,97	4,1015	9,37	4,4754	9,77	4,8657
8,18	3,4108	8,58	3,7526	8,98	4,1106	9,38	4,4850	9,78	4,8756
8,19	3,4192	8,59	3,7613	8,99	4,1198	9,39	4,4945	9,79	4,8856
8,20	3,4275	8,60	3,7701	9,00	4,1290	9,40	4,5041	9,80	4,8956
8,21	3,4359	8,61	3,7789	9,01	4,1381	9,41	4,5137	9,81	4,9056
8,22	3,4443	8,62	3,7876	9,02	4,1473	9,42	4,5233	9,82	4,9156
8,23	3,4526	8,63	3,7964	9,03	4,1565	9,43	4,5329	9,83	4,9256
8,24	3,4610	8,64	3,8052	9,04	4,1657	9,44	4,5425	9,84	4,9356
8,25	3,4695	8,65	3,8141	9,05	4,1750	9,45	4,5522	9,85	4,9457
8,26	3,4779	8,66	3,8229	9,06	4,1832	9,46	4,5618	9,86	4,9557
8,27	3,4863	8,67	3,8317	9,07	4,1924	9,47	4,5715	9,87	4,9658
8,28	3,4947	8,68	3,8405	9,08	4,2017	9,48	4,5811	9,88	4,9758
8,29	3,5032	8,69	3,8494	9,09	4,2109	9,49	4,5908	9,89	4,9859
8,30	3,5116	8,70	3,8583	9,10	4,2212	9,50	4,6005	9,90	4,9960
8,31	3,5201	8,71	3,8671	9,11	4,2305	9,51	4,6102	9,91	5,0061
8,32	3,5286	8,72	3,8760	9,12	4,2398	9,52	4,6199	9,92	5,0162
8,33	3,5371	8,73	3,8849	9,13	4,2491	9,53	4,6296	9,93	5,0264
8,34	2,5455	8,74	3,8938	9,14	4,2584	9,54	4,6393	9,94	5,0365
8,35	3,5541	8,75	3,9028	9,15	4,2677	9,55	4,6490	9,95	5,0466
8,36	3,5626	8,76	3,9117	9,16	4,2771	9,56	4,6588	9,96	5,0568
8,37	3,5711	8,77	3,9206	9,17	4,2864	9,57	4,6685	9,97	5,0668
8,38	3,5796	8,78	3,9295	9,18	4,2958	9,58	4,6783	9,98	5,0770
8,39	3,5882	8,79	3,9385	9,19	4,3051	9,59	4,6880	9,99	5,0872
8,40	3,5968	8,80	3,9475	9,20	4,3145	9,60	4,6978	10,00	5,0975

SECTION VIII.

De la manière d'estimer le déchet causé par le bord des orifices.

491. Comme l'eau doit couler plus vîte vers le milieu des orifices que vers les bords, à cause qu'elle est retardée par la friction, c'est-à-dire par le frottement que ces mêmes bords occasionnent, il en doit moins sortir d'un orifice quelconque pendant un temps déterminé qu'il n'en sortirait si tous les filets avaient une vîtesse uniforme, comme nous l'avons supposé jusqu'ici (428) (*ch*). Les dépenses que donnent les calculs précé-

Le bord des orifices retarde la vîtesse de l'eau : ainsi tous les calculs qu'on a rapportés ci-devant sur leur mesure, ne sont point exacts.

(*ch*) Il y a tout lieu de croire que la cause de la différence qui se trouve entre la dépense effective des orifices percés au travers d'une paroi mince, et la dépense cal-

Inexactitude de la section VIII.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dents sont donc plus grandes que celles qu'on trouvera par l'expérience, et d'autant plus que les orifices seront petits, parce que les circonférences des cercles étant entre elles comme les diamètres, tandis que les superficies sont comme les quarrés des mêmes diamètres, *les petits orifices ayant plus de circonférence à proportion que les grands, retarderont plus la vîtesse de l'eau par rapport à la quantité qui en devrait sortir.*

Le rapport du déchet d'un orifice à sa dépense naturelle, est au rapport du déchet d'un autre orifice à sa dépense naturelle, dans la raison réciproque de leur diamètre.

492. Pour savoir quel est ce rapport, nous prendrons les quarrés des diamètres pour les superficies des orifices, et les côtés de ces quarrés pour leurs circonférences. Ainsi nommant a le diamètre du petit et b celui du grand, on aura $\frac{a}{a^2}$ pour le rapport du circuit du premier à sa superficie, et $\frac{b}{b^2}$ pour le rapport du circuit du second à sa superficie, qui se réduisent à $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$; d'où l'on tire $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}::b:a$, puisque $\frac{a}{a}=\frac{b}{b}$ ou que $ab=ab$, ce qui montre *que le rapport du circuit du premier à sa superficie est au rapport du circuit du second à la sienne, réciproquement comme le diamètre du second est au diamètre du premier.*

493. Il suit que *le rapport du déchet du premier orifice à sa dépense naturelle sera au rapport du déchet du second orifice à sa dépense naturelle, réciproquement comme le diamètre du second est au diamètre du premier.*

J'entends par *dépense naturelle* celle qu'on trouvera par nos règles, en faisant abstraction de tout accident, et par *déchet* l'excès de la dépense naturelle au-dessus de la dépense effective qu'on doit trouver par l'expérience.

Lorsque par une expérience on aura trouvé le rapport du déchet à la dépense naturelle d'un certain orifice, on aura ce rapport pour un orifice quelconque, en disant : *Comme le diamètre de l'orifice proposé est au diamètre de celui de l'expérience, ainsi le rapport du déchet à la dépense naturelle, qu'on a trouvé par cette expérience, est à un quatrième terme, qui donnera ce que l'on demande.*

Expérience de M. Mariotte, par laquelle il a trouvé qu'un tuyau de 13 pieds de hauteur dépensait par un orifice horizontal de 3 lignes de dia-

494. M. Mariotte, dans le second discours de la troisième partie de son *Traité du mouvement des eaux*, rapporte, page 145, qu'il a trouvé par un nombre d'expériences très-exactes, *qu'un orifice horizontal de* 3 *lignes de diamètre étant de* 13 *pieds au-dessous de la surface supérieure de l'eau d'un large tuyau, donnait un pouce, c'est-à-dire qu'il en sortait pendant*

---

culée d'après les règles de la section précédente, n'est point le frottement sur les bords de l'orifice. Toutes les notions données ici par l'auteur, les règles et les calculs qu'il présente, sont absolument erronnés, et le lecteur ne peut mieux faire que de passer entièrement cette section. Il trouvera dans la note (*ck*) les connaissances qu'on a recueillies jusqu'ici sur cette matière importante.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le temps d'une minute 14 *pintes, mesure de Paris, ou* 28 liv. (342). Comme c'est sur cette expérience qu'il appuie tout le reste de son Traité, je crois pouvoir m'en servir comme d'un principe certain. Il serait à souhaiter que cet auteur, qui avait une adresse merveilleuse pour les expériences, nous en eût laissé d'autres sur de plus grands orifices. Cependant on ne doit pas regarder comme un défaut que celui dont nous allons nous servir n'ait eu que 3 lignes, parce que sa circonférence étant fort grande par rapport à sa superficie, le déchet en sera plus sensible, eu égard à la dépense naturelle (491).

mètre, 14 pintes d'eau en une minute.

495. Pour comparer la dépense de cette expérience avec celle qu'on trouvera par nos règles, il faut chercher dans la première table la vîtesse acquise par une chûte de 13 pieds de hauteur, qui est de 27 pieds 11 po. par seconde, ou de 1675 pieds par minute, et diviser ce nombre par 16, pour réduire la colonne d'eau à un pouce de diamètre. Sa hauteur sera de 104 pieds et environ 8 pouces, qui répondent dans la seconde table à 40 liv. 1 once, au lieu que M. Mariotte n'a trouvé que 28 liv.; *ce qui montre que dans ce cas la dépense naturelle est à la dépense effective à-peu-près comme* 10 *est à* 7, *et que le déchet est à la dépense naturelle comme* 3 *est à* 10 : *par conséquent il peut être exprimé par* $\frac{3}{10}$.

Le rapport du déchet à la dépense naturelle d'un orifice de 3 lignes, est comme 3 est à 10.

496. Voulant connaître le rapport du déchet d'un orifice quelconque à sa dépense naturelle, on dira : *Comme le diamètre de l'orifice proposé est à* 3 *lignes, diamètre de l'orifice de l'expérience, ainsi* $\frac{3}{10}$, *rapport du déchet à la dépense naturelle trouvée par l'expérience, est au rapport du déchet à la dépense naturelle pour l'orifice dont il s'agit* (493), lequel sera exprimé par $\frac{9}{10 \times a}$; ce qui montre qu'*en général on aura toujours ce rapport pour un orifice quelconque, en multipliant le dénominateur de* $\frac{9}{10}$ *par son diamètre exprimé en lignes.* Par exemple, s'il était de 2 pouces ou de 24 lignes, la formule deviendrait $\frac{9}{10 \times 24}$, qui se réduit à $\frac{3}{80}$.

Formule générale pour trouver le rapport du déchet à la dépense naturelle d'un orifice quelconque.

497. On remarquera que lorsqu'*on a une fois trouvé le rapport du déchet à la dépense naturelle pour un certain orifice, ce rapport demeure toujours le même, soit qu'on augmente ou qu'on diminue la hauteur de l'eau,* parce qu'il est certain que le déchet augmente ou diminue dans la raison de la dépense naturelle, ou si l'on veut dans la raison de la racine des différentes hauteurs de l'eau. J'entends, par exemple, que si le tuyau dont M. Mariotte s'est servi avait eu 26 pieds de hauteur, ou qu'il n'en eût eu que 6, au lieu de 13, le rapport du déchet à la dépense naturelle se serait toujours trouvé pour un orifice de 3 lignes, celui de 3 à 10. Ce qui montre qu'on peut avoir le rapport du déchet à la dépense naturelle pour un orifice quelconque, sans se mettre en peine de la hauteur de l'eau.

Le rapport du déchet à la dépense naturelle pour un orifice quelconque, reste toujours le même, soit qu'on augmente ou qu'on diminue la hauteur de l'eau.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Manière de connaître la dépense effective, moyennant le rapport du déchet à la dépense naturelle.

498. Quand on aura trouvé les deux termes qui marquent le rapport du déchet à la dépense naturelle, *on n'aura qu'à soustraire le plus petit du plus grand, la différence donnera l'expression de la dépense effective.* Par conséquent son rapport avec la dépense naturelle sera de $\frac{77}{80}$ pour l'exemple de l'article 496.

Après avoir trouvé le rapport de la dépense effective à la dépense naturelle pour un orifice quelconque, il faut ensuite, avec le secours de nos deux tables, chercher la dépense naturelle de cet orifice relativement à la hauteur de l'eau, soit par seconde ou par minute. Ayant ces trois termes, il sera aisé d'avoir la dépense effective. Par exemple, un réservoir de 7 pieds 6 pouces de hauteur devant donner par un orifice de deux pouces de diamètre 32 liv. 7 onces 32 gros d'eau pour la dépense naturelle par seconde (478), et venant de voir que le rapport de la dépense effective à la dépense naturelle de cet orifice était exprimée par $\frac{77}{80}$, on dira : Comme 80 est à 77, ainsi 32 liv. 7 onces 5 gros est à un quatrième terme, qu'on trouvera de 31 liv. 4 onces, pour la dépense effective. Par conséquent le déchet est de 1 liv. 3 onces 5 gros.

De quelle manière on peut suppléer au déchet.

499. Pour qu'un réservoir dépense effectivement une certaine quantité d'eau déterminée dans un temps donné, il faut, si l'on veut se servir de l'orifice qu'on trouvera par la méthode des articles 466 et 480, augmenter la hauteur de l'eau, pour qu'ayant plus de vîtesse, elle fournisse dans le temps prescrit la dépense que l'on demande; ou si la hauteur de l'eau reste la même, prolonger le temps, afin qu'il supplée au déchet; ou si l'on veut que le temps et la hauteur de l'eau demeurent les mêmes, trouver un orifice dont la dépense effective soit égale à celle qu'on demande. Nous allons examiner ces trois cas chacun en particulier.

Résolution du premier cas : en augmentant la hauteur de l'eau, pour que la dépense effective soit égale à la dépense naturelle.

500. Nommons e la dépense effective d'un certain orifice, n sa dépense naturelle, h la hauteur du réservoir, et x celle qu'il faudrait lui donner pour que la dépense effective fût égale à la dépense naturelle. Considérez que *les dépenses étant entre elles comme les vîtesses, ou comme les racines quarrées des hauteurs des réservoirs, lorsque les temps sont égaux ainsi que les orifices* (458), on aura $u : V :: e : n :: \sqrt{h} : \sqrt{x}$; ou $e^2 : n^2 :: h : x$, d'où l'on tire $\frac{n^2 h}{e^2} = x$, ce qui montre que lorsqu'on a le rapport de la dépense effective à la dépense naturelle, il faut pour avoir la hauteur qu'il convient de donner au réservoir pour suppléer au déchet, *quarrer les deux termes, multiplier le plus grand quarré par la hauteur de l'eau, et diviser le produit par le plus petit quarré.* Par exemple, dans l'expérience de M. Mariotte, où nous avons trouvé que par un orifice de 3 lignes de diamètre la dépense effective était à la dépense naturelle comme 7 est à 10 (495), voulant qu'il coule de cet orifice 20 pintes par minute, on aura $\frac{100 \times 13}{49} = x$, ce qui donne 26 pieds 6 pouces 4 lignes et environ $\frac{3}{7}$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de ligne pour la hauteur de l'eau, qui est plus que le double de celle du tuyau dont il s'est servi.

501. On a vu (art. 479) que pour qu'un réservoir dépense 10 pintes en une seconde par un orifice de 18 lignes de diamètre, il fallait que la hauteur de l'eau fût de 8 pieds 10 pouces 10 lignes, en faisant abstraction du déchet. Mais voulant y avoir égard, il faut que la hauteur de l'eau soit plus grande que celle que nous avons trouvée, *dans la raison que la dépense naturelle est plus grande que l'effective.* Pour connaître ce rapport, il faut multiplier le dénominateur de la fraction $\frac{9}{10}$ par 18 lignes diamètre de l'orifice (496), ce qui donne $\frac{1}{20}$, d'où l'on tire $\frac{19}{20}$ (498). On dira donc : Comme 361 (quarré de 19) est à 400 (quarré de 20), ainsi la hauteur (8 pieds 10 pouces 10 lignes) est à celle qu'on cherche, qu'on trouvera de 9 pieds 10 pouces 5 lignes.

Résolution du second cas : en augmentant la durée de l'écoulement.

502. Prévenu que les réservoirs qui ont la même hauteur *dépensent par des orifices égaux des quantités d'eau dans la raison des temps de leur écoulement* (457), on aura pour le second cas $e : n :: t : x$; d'où l'on tire $\frac{nt}{e} = x$; ce qui montre que pour avoir le temps de l'écoulement, afin que la dépense effective soit égale à la dépense naturelle, *il faut multiplier la dépense naturelle par le temps qui répond à la règle qu'on a faite en ne tenant point compte des frottements, et diviser le produit par la dépense effective.* Par exemple, nous avons trouvé (art. 481) que pour qu'un réservoir de 3 pieds de hauteur dépensât 40 pintes d'eau par un orifice de 6 lignes de diamètre, il fallait que le temps de l'écoulement fût de 15 secondes et d'environ 37 tierces; mais comme ce temps doit être prolongé, il faut chercher le rapport des dépenses (496, 498) qu'on trouvera exprimé par $\frac{17}{20}$, et dire : Comme 17 est à 20, ainsi 15 $\frac{25}{41}$ secondes est au temps que l'on cherche, qui est de 18 secondes et environ 22 tierces.

503. De même, ayant trouvé (art. 480) qu'un réservoir de cinq pieds de hauteur devait avoir un orifice de 34 lignes 6 points $\frac{1}{4}$ pour dépenser 30 pintes par seconde, on aura le temps qui doit suppléer au déchet, en cherchant encore le rapport de la dépense effective à la dépense naturelle, qu'on trouvera exprimée par $\frac{112}{115}$; ensuite disant : Comme 112 est à 115, ainsi 60 tierces est au temps que l'on demande, qui est de 61 tierces $\frac{17}{28}$; ainsi des autres. Ces exemples montrent que plus les diamètres des orifices seront grands, plus la dépense naturelle approchera d'égaler la dépense effective que doit donner l'expérience : ce qui prouve l'exactitude des règles que nous avons déduites du principe de la chûte des corps.

On peut prendre les dépenses effectives de deux orifices pour exprimer le rapport de leur superficie réduite.

504. Pour avoir une formule qui convienne au troisième cas, et généralement à tous ceux qu'on peut proposer, relativement aux modifications auxquelles il faut avoir égard dans la pratique, considérez que *lorsque deux réservoirs ont la même hauteur, leur dépense naturelle en temps égaux*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

étant dans la raison des orifices (456), on pourra donc dire que *les dépenses effectives sont entre elles comme les superficies des mêmes orifices, diminuées dans la proportion que leurs dépenses effectives sont moindres que les dépenses naturelles.*

Formule qui comprend généralement tout ce qui peut appartenir à la mesure des eaux. Pl. 6, Fig. 59.

505. Supposant que le cercle AB représente un orifice provenant d'une expérience faite sur la dépense des eaux, divisant son diamètre au point C *dans la raison de la dépense effective au déchet;* nommant AB a et CB b, le quarré DB $= a^2$ exprimera la dépense naturelle; le rectangle FB $= ab$ le déchet, et le rectangle DC $= a^2 - ab$ la dépense effective. De même, nommant d le diamètre d'un autre orifice, d^2 exprimera sa dépense naturelle; *et comme les déchets sont entre eux dans la raison des diamètres*, on aura $a : d :: ab : bd$, d'où l'on tire $d^2 - bd$ pour l'expression de la dépense effective du second orifice (*ci*).

Si l'on prend $a^2 - ab : d^2 - bd$ pour exprimer le rapport des deux *orifices*, M : m pour exprimer celui de leurs *dépenses*, on aura M : m :: $a^2 - ab : d^2 - bd$, lorsque les temps seront égaux, et que les réservoirs auront la même hauteur (504). Nommant V la vîtesse de l'eau de l'orifice de l'expérience, dont la dépense est exprimée par M, et T le temps de l'écoulement; u la vîtesse de l'eau du second réservoir, dont la dépense est exprimée par m, et t le temps de l'écoulement : on aura M : m :: $(a^2 - ab).\mathrm{TV} : (d^2 - bd).tu$; puisque (par l'art. 447) *les dépenses sont dans la raison composée des orifices, des temps et des vîtesses.* D'où l'on tire $(a^2 - ab).\mathrm{TV}\,m = (d^2 - bd).tu\,\mathrm{M}$, qui est une formule qui donnera celle des quatre grandeurs d, m, t, u qui sera inconnue.

Résolution du troisième cas, à l'aide de la formule précédente.

506. Voulant avoir le *diamètre* de l'orifice d'un réservoir dont on connaît *la hauteur*, ou la *vîtesse*, pour qu'il dépense *effectivement* dans *un temps donné* une quantité *d'eau déterminée* et désignée par m, moyennant la connaissance de toutes les autres grandeurs que comprend la formule, on substituera x à la place de d, pour avoir $(a^2 - ab).\mathrm{TV}\,m = (x^2 - bx).tu\,\mathrm{M}$, qui se réduit à $x = \frac{1}{2}b + \sqrt{\left\{\frac{1}{4}b^2 + \frac{(a^2 - ab).\mathrm{TV}\,m}{tu\,\mathrm{M}}\right\}}$.

Application de la formule générale pour trouver la dépense effective.

507. Si le diamètre de l'orifice, la hauteur du réservoir, ou la vîtesse de l'eau, et le temps étaient donnés, et que l'on voulût connaître la *dépense effective*, il faudrait substituer x à la place de m pour avoir $(a^2 - ab).\mathrm{TV}\,x = (d^2 - bd).tu\,\mathrm{M}$, d'où l'on tire $x = \frac{(d^2 - bd).tu\,\mathrm{M}}{(a^2 - ab).\mathrm{TV}}$.

Autre application pour trouver la vitesse ou la hauteur de l'eau.

508. Si le diamètre de l'orifice, sa dépense effective et le temps étaient donnés, et qu'on voulût connaître *la vîtesse de l'eau* par seconde, afin

---

Remarque sur l'art. 505 et les suivants.

(*ci*) Cet article et tout ce qui suit est absolument défectueux, dans les propres idées de l'auteur; mais, d'après ce qui a été dit dans la note précédente, je ne m'arrêterai point à en montrer le défaut.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'en déduire la hauteur du réservoir, il faudrait mettre x à la place de u, pour avoir $x = \frac{(d^2 - db).\mathrm{TVM}}{(a^2 - ab).t\mathrm{M}}$.

Autre application pour trouver le temps de l'écoulement.

509. Enfin, si le diamètre de l'orifice, la dépense, la vîtesse, ou la hauteur du réservoir, étaient donnés, et qu'on voulût connaître le *temps* de l'écoulement, on substituerait x à la place de t, pour avoir $x = \frac{(a^2 - ab).\mathrm{TV}m}{(d^2 - db).u\mathrm{M}}$.

Trouver le rapport que doivent avoir les diamètres de deux orifices, pour que leurs dépenses effectives soient en raison donnée.

510. Lorsqu'il se rencontrera que quelques grandeurs semblables auront la même valeur, il faudra les effacer de la formule, qui, devenant plus simple, rendra le calcul plus aisé. Par exemple, on demande quel *diamètre* il faudrait donner à l'orifice d'un réservoir de 13 pieds de hauteur, pour que sa dépense effective par minute soit quadruple de celle que M. Mariotte a trouvée. Comme on aura $\mathrm{T} = t$, $\mathrm{V} = u$, et $\frac{M}{m} = \frac{4}{1}$; l'équation (506) sera changée en celle-ci $x = \frac{1}{2}b + \sqrt{\{\frac{1}{4}b^2 + 4(a^2 - ab)\}}$. Ayant $a = 3$ lignes, $b = \frac{9}{10}$, et $\frac{1}{2}b = \frac{9}{20}$, faisant le calcul, on trouvera que le diamètre que l'on cherche doit être à-peu-près de $5\frac{1}{2}$ lignes, au lieu de 6 qu'il semble qu'on devrait lui donner.

Pour montrer que l'orifice qu'on vient de trouver dépensera effectivement le quadruple de celui de l'expérience, on dira : Comme 9 (quarré du diamètre de 3 lignes) est à $30\frac{1}{4}$ (quarré du diamètre qu'on vient de trouver de $5\frac{1}{2}$ lignes), ainsi 40 liv. d'eau (dépense naturelle du premier office) est à la dépense naturelle du second, qu'on trouvera de 134 livres $\frac{4}{9}$. Pour en soustraire le déchet, on multipliera le dénominateur $\frac{9}{10}$ par le diamètre $5\frac{1}{2}$, on aura $\frac{99}{55}$ pour le rapport du déchet à la dépense naturelle (496). On dira donc : Comme 55 est à 46, ainsi $134\frac{4}{9}$, dépense naturelle du second orifice, est à sa dépense effective; qu'on trouvera de 112 livres et environ $\frac{1}{4}$, qui est un nombre quadruple de 28, c'est-à-dire de la dépense effective du premier orifice, en négligeant les 4 onces que nous nous trouvons de plus, qui viennent de ce que le diamètre a été estimé un peu plus grand qu'il ne devrait l'être, pour avoir supposé $\frac{49}{100} = \frac{1}{2}$.

Manière de trouver géométriquement le diamètre d'un orifice, en construisant la formule.

Pl. 6, Fig. 60.

511. On aura dans toute la précision géométrique le diamètre que l'on demande, en construisant l'équation $x = \frac{1}{2}b + \sqrt{\{\frac{1}{4}b^2 + 4(a^2 - ab)\}}$. Pour cela il faut tirer la ligne AB égale à $2a$, la prolonger de B en C en sorte que BC soit égale à $2b$; décrire sur AC comme diamètre le demi-cercle ADC, élever la perpendiculaire BD dont le quarré vaudra $4ab$, élever aussi sur l'extrémité A la perpendiculaire AF égale à $\frac{1}{2}b$; tirer la ligne FB, dont le quarré vaudra $4a^2 + \frac{1}{4}b^2$; décrire sur cette ligne le demi-cercle HBF, faire BH égale à BD, ensuite tirer la ligne FH

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'on prolongera de F en G de la longueur de FA : alors la ligne GH sera exactement le diamètre que l'on demande, puisqu'on aura $GH = GF + \sqrt{(\overline{FB}^2 - \overline{BH}^2)}$.

Examen des orifices quarrés.

512. De quelques figures que soient les orifices, semblables ou non, leur dépense naturelle étant toujours dans la raison de leur superficie, et les déchets dans la raison de leur circuit, il suit que lorsque les superficies seront comme les circuits, les dépenses naturelles seront comme les déchets. C'est se qui se rencontre lorsque de deux orifices, l'un est un cercle, et l'autre le quarré de son diamètre. Car nommant d le diamètre et c la circonférence, $\frac{1}{4}cd$ sera la superficie du cercle, et $4d$ le circuit de son quarré; d'où l'on tire $\frac{1}{4}cd : d^2 :: c : 4d$; ce qui fait voir *que le rapport du déchet à la dépense naturelle d'un orifice quarré, qui aurait* 3 *lignes de côté*, peut encore être exprimé par $\frac{9}{10}$. Ainsi lorsque l'on vondra connaître ce rapport pour un orifice quarré quelconque, il faudra multiplier le dénominateur de $\frac{9}{10}$ par le côté du quarré réduit en lignes (496). Par exemple, pour un quarré d'un pouce, on aura $\frac{9}{10 \times 12}$, ou $\frac{3}{40}$.

Examen des orifices rectangulaires.

513. Si l'orifice était un rectangle compris sous les dimensions a et b, son circuit serait $2(a+b)$, et sa superficie ab. Alors on aura : comme 12 lignes (circuit du quarré de l'expérience), est à $2(a+b)$ (circuit de l'orifice rectangulaire), ainsi 3 (expression du déchet du premier orifice), est à $\frac{1}{2}(a+b)$ (déchet du second). D'autre part, comme 9 (superficie de 3 lignes de côté) est à ab (superficie du rectangle), ainsi 10 (expression de la dépense naturelle du premier orifice), est à $\frac{10}{9}ab$ (expression de la dépense naturelle du second); ce qui donne $\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{\frac{10}{9}ab}$, ou $\frac{9 \times \frac{1}{2}(a+b)}{10ab}$, qui est une formule générale pour tous les orifices rectangulaires, et montre que pour avoir le rapport du déchet à leur dépense naturelle, *il faut multiplier le numérateur de* $\frac{9}{10}$ *par la moitié de la somme des deux dimensions du rectangle réduites en lignes, et le dénominateur par la superficie du même rectangle exprimée en lignes quarrées.*

514. Si les dimensions de l'orifice étaient assez grandes pour être exprimées en pouces, la formule deviendrait alors $\frac{3 \times \frac{1}{2}(a+b)}{40ab}$, qui montre que dans ce cas il faut multiplier le numérateur de $\frac{3}{40}$ (512) par la moitié de la somme des deux dimensions du pertuis exprimées en pouces, et le dénominateur par la superficie de l'orifice exprimée en pouces quarrés; comme on le verra lorsque nous ferons usage de cette dernière formule, pour calculer la dépense effective des *pertuis* pratiqués aux écluses.

515. Quand on aura trouvé le rapport du déchet à la dépense naturelle pour un orifice de quelque figure qu'il soit, et ensuite sa dépense effec-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tive, on la substituera dans la formule de l'article 505, pour découvrir quelqu'une des grandeurs qui y sera relative, et on agira comme nous avons fait pour les orifices circulaires.

516. Comme le cercle et le quarré sont les figures qui comprennent le plus d'étendue sous moins de circuit, on voit que les orifices faits ainsi causent moins de déchet que les autres qui auraient la même superficie; au lieu que lorsqu'ils sont rectangulaires, le déchet est d'autant plus grand, à superficie égale, qu'une des dimensions excède l'autre.

Les orifices quarrés et circulaires causent moins de déchet que ceux de toute autre figure qui auraient la même superficie.

Au reste, voilà, ce me semble, ce que l'on peut dire de plus satisfaisant pour unir la théorie à la pratique dans la mesure des eaux (*ck*).

(*ck*) La théorie précédente, dont l'auteur semble si satisfait, paraît au contraire aujourd'hui une des plus défectueuses de son ouvrage. A la vérité on n'avait pas encore, à l'époque où il écrivait, réuni un assez grand nombre d'expériences pour être à même d'établir la mesure exacte du phénomène, mais cela ne justifie point la théorie tout-à-fait vicieuse qu'il en donne, ni la confiance avec laquelle il la présente. Je vais ici exposer les résultats qu'on peut déduire du rapprochement des diverses recherches théoriques et expérimentales publiées sur ce sujet.

§ 1. J'ai supposé dans la théorie de la note (*ce*) que la paroi aux environs de l'orifice était évasée, de manière que tous les filets de fluide avaient en le franchissant des directions parallèles entre elles. Dans ce cas, l'expérience prouve qu'il n'y a aucune réduction sensible à faire sur la *dépense théorique* calculée d'après les formules de cette note. Michelotti, avec des orifices où l'évasement n'était pas complet, et où il devait y avoir encore quelque contraction intérieure, n'a trouvé que des différences de $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{56}$, et plus petites encore, entre les vîtesses effectives et les vîtesses théoriques (*Sperimenti idraulici*, tom. 1, parte 2, cap. 1; voyez aussi Venturi, *Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides*, page 12, exp. 4).

Quelle est la cause de la différence qui a lieu entre la dépense théorique et la dépense effective, quand l'entrée d'un orifice n'est point évasée.

Pl. C, Fig. 4.

Admettons maintenant que le fond du vase au travers duquel l'orifice *cd* est pratiqué, soit un plan horizontal peu épais. L'observation a appris dans ce cas que les molécules du fluide, qui descendent d'abord à partir de la surface *ab* suivant des lignes à-peu-près verticales, étant arrivées près du fond, se dirigent de tous côtés vers l'orifice, comme l'indiquent les lignes ponctuées de la figure (Dan. Bernouilli, *Hydrodynamica*, p. 62; Bossut, *Hydrodynamique*, t. 2, ch. 1). Il n'y a donc que le filet de fluide correspondant au centre de l'orifice qui conserve en le franchissant une direction verticale: tous les autres ont des directions d'autant plus inclinées qu'ils sont plus près des bords de l'orifice. Mais les filets de fluide tendent tous à conserver après leur sortie du vase leurs diretions respectives; d'où il suit que la veine ne peut conserver un diamètre égal à celui de l'orifice, et diminue de grosseur, à partir de la section *cd*, jusqu'à ce que les filets, par l'effet de leur réaction mutuelle, soient devenus tous verticaux et parallèles. L'endroit *ef* où cela arrive est éloigné de la paroi d'une quantité à-peu-près égale au diamètre de l'orifice quand ce dernier est fort petit (Newton, *Principia mathem.*, lib. 2, pr. 36). Quand l'orifice est plus grand, comme les filets du pourtour, les plus inclinés et le plus difficilement ramenés pa-

Pl. C, Fig. 5.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il est essentiel 517. On voit la conséquence d'avoir égard aux déchets pour distribuer

rallèles à l'axe, sont alors moins nombreux comparativement aux autres, le point où la veine cesse de se contracter se rapproche de la paroi, et n'en est plus éloigné que d'un demi-diamètre de l'orifice environ, pour des orifices de 2 centimètres et au-dessus (Michelotti, *Sperimenti idraulici*, parte 1, cap. 6; Bossut, *Hydrodynamique*, t. 2, ch. 1).

Que l'on imagine maintenant qu'on ait ajouté à la paroi du vase un prolongement de la forme de la veine contractée $cdef$, de manière que la section ef soit devenue l'orifice. Le mouvement du fluide demeurera la même, et l'on aura un vase dans lequel l'orifice ef aura son entrée évasée; de manière que les conditions énoncées dans la note (*ce*) étant remplies, on pourra affirmer que la vîtesse du fluide à la section ef est due à la hauteur de la surface ab sur cette section, si l'orifice est fort petit, ou s'il est grand, est exprimée par la formule donnée dans la note citée. Cette conclusion est rigoureusement confirmée, et de plusieurs manières, par l'expérience (voyez les ouvrages cités ci-dessus).

Si l'on fait attention que la vîtesse du fluide doit par-tout être en raison inverse de l'aire des sections, on jugera que la vîtesse en cd est à la vîtesse en ef, réciproquement comme les sections cd et ef. Le rapport de la section de la veine contractée à l'aire de l'orifice est dont véritablement le rapport de la vîtesse effective à la vîtesse théorique (ou *naturelle*, comme l'appelle Bélidor), ou de la dépense effective à la dépense théorique. La nature du phénomène étant ainsi nettement établie, il s'agit maintenant d'interroger l'expérience pour en avoir la mesure.

La contraction de la veine de fluide dépend de la forme de la paroi où l'orifice est pratiqué.

Pl. C, Fig. 7.

La quantité dont la veine se contracte après avoir franchi un orifice, paraît dépendre principalement de la convergence plus ou moins grande des filets de fluide, à l'instant où ils y passent. Si l'orifice est évasé comme celui A, tous les filets ayant des directions parallèles, la contraction est nulle. Elle est peu considérable dans l'orifice conique B, plus grande dans l'orifice C ouvert dans un paroi plane, plus grande encore dans l'orifice divergent D, enfin la plus grande possible dans l'orifice E formé par un tuyau cylindrique pénétrant dans l'intérieur du vase. Il serait à souhaiter qu'on pût la déterminer dans tous les cas d'après la forme de la paroi, mais on est bien loin de posséder la solution de ce problême, et le rapport de la dépense effective à la dépense théorique n'est bien connu que dans un petit nombre de cas particuliers.

Des orifices formés par un tuyau pénétrant dans l'intérieur du vase.

§ 2. Le cas où l'orifice est formé par un tuyau pénétrant dans l'intérieur du vase est, comme on vient de le remarquer, celui où la contraction est la plus grande possible. Il forme à cet égard une sorte de limite, et cette circonstance a permis à Borda de déterminer théoriquement, d'une manière ingénieuse et exacte, le rapport de la dépense effective à la dépense théorique (*Mém. de l'Acad. des sciences*, 1766, p. 586). Il l'a trouvé égal à $\frac{1}{2}$, et ce résultat a été rigoureusement confirmé par ses propres expériences, et depuis par celles de Venturi. On est donc assuré que, pour tous les orifices possibles, ce rapport est compris entre 1 et $\frac{1}{2}$.

Des orifices pratiqués dans une paroi plane et mince.

§ 3. Le cas où l'orifice est pratiqué dans une paroi plane et mince est celui qui se présente le plus fréquemment dans les applications, et il a été le sujet d'un très-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les eaux avec économie, lorsqu'on est obligé d'amener à grands frais d'avoir égard au déchet pour la dis-

grand nombre d'expériences. Je commencerai par donner dans le tableau suivant les résultats de celles que Mariotte a publiées (*Traité du mouvement des eaux*, éd. de 1787), tant parce qu'il n'a point mis en évidence en les décrivant les valeurs qui en résultent pour le rapport de la dépense effective à la dépense théorique, que parce qu'elles paraissent avoir été entièrement négligées par les auteurs qui sont venus après lui.

Tableau contenant les résultats de diverses expériences de Mariotte sur l'écoulement de l'eau par de petits orifices.

Numéros des expérienc.	Indication des pages du traité du mouvement des eaux.	Diamètres des orifices.		Charges sur le centre des orifices.		Dépense effective trouvée par l'expérience.		Rapport de la dépense effective à la dépense théorique.
		en lignes.	en mètres.	en pouces ou en lign.	en mètres.	en anciennes mesures.	en mètres cubes par seconde.	
1	245	12	0,02707	7 lig.	0,01579	13 $\frac{3}{8}$ pint. pes. chac. 2 livres moins 7 gros, par minute	0,00021227	0,6642
2	261	*idem*	*idem*	8	0,01805	1 pied cube en 2 minutes $\frac{1}{2}$	0,00022852	0,6673
3	249	6	0,01354	7	0,01579	15 demi-septiers par minute	0,0000595 15	0,7427
4	263	*idem*	*idem*	39	0,08798	8 $\frac{6}{7}$ pintes par min.	0,00014057	0,7431
5	278	*idem*	*idem*	66 po.	1,786	14 pint. pes. chac. 2 livres, en 23″	0,00059591	0,6992
6	274	*idem*	*idem*	148	4,006	14 pintes en 15″ $\frac{1}{2}$	0,00088426	0,6927
7	283	*idem*	*idem*	292	7,904	14 pintes en 12″ $\frac{1}{2}$	0,00111189	0,6240
8	275	*idem*	*idem*	293	7,931	14 pintes en 11″ $\frac{1}{8}$	0,001232	0,6859
9	282	3	0,00677	66	1,786	14 pintes en 93″	0,00014738	0,6917
10	274	*idem*	*idem*	148	4,006	14 pintes en 61″ $\frac{1}{2}$	0,0002286	0,6984
11	264	*idem*	*idem*	156	4,223	14 pintes en 60″	0,00022844	0,6972
12	283	*idem*	*idem*	292	7,904	14 pintes en 44″ $\frac{1}{2}$	0,000308	0,6871
13	275	*idem*	*idem*	293	7,931	14 pintes en 44″ $\frac{7}{8}$	0,0003062 8	0,6821

Je remarquerai ensuite que le rapprochement des résultats obtenus conduit à penser qu'il faut distinguer dans les orifices 1° ceux qui ont 2 centimètres environ de diamètre et au-dessus, 2° ceux qui ont un diamètre moindre.

1° Mariotte n'a laissé sur des orifices ayant plus de 2 centimètres de diamètre que les expériences n^os^ 1 et 2 du tableau précédent, où la charge était extrêmement petite. Elles indiquent pour la dépense effective une valeur comprise entre 0,66 et 0,67 de la dépense théorique. On a ensuite une expérience de Borda, où la charge était environ dix fois plus grande que le diamètre de l'orifice. Elle lui a donné pour ce rapport la valeur 0,623 (*Académie des sciences*, 1766, page 581). Cas où les orifices pratiqués dans une paroi plane et mince ont plus de deux centimètres de diamètre.

Les expériences de Bossut (*Hydrodynamique*, tome 2, ch. 2), en confirmant le résultat de Borda, ont jeté de nouvelles lumières sur ce sujet. Elles ont appris qu'il fallait distinguer deux cas, savoir celui où la charge sur le centre de l'orifice surpasse dix à douze fois son diamètre, et celui où cette charge est moindre, et où la surface du fluide ne serait qu'à peu de distance du sommet de l'orifice.

Dans le premier cas, il parait par les expériences de Bossut, où les charges ont Lorsque la charge est fort grande par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tribution des eaux des fontaines d'une ville.

celles de plusieurs sources, ou de construire des machines pour la tirer

rapport au diamètre de l'orifice.

varié depuis 1 jusqu'à 4^{m}, et les diamètres des orifices depuis 1,4 jusqu'à 6 centimètres, que la dépense effective diminue un peu quand les charges augmentent par rapport à la grandeur des orifices; et que cette dépense étant 0,621 quand la charge est douze fois le diamètre de l'orifice, elle n'est plus que 0,617 quand cette charge est 180 fois ce diamètre. Le rapport de la dépense effective à la dépense théorique reste d'ailleurs sensiblement le même quand la figure de l'orifice est circulaire, carrée ou rectangulaire. Dans les expériences de Michelotti les diamètres des orifices ont varié depuis 3 jusqu'à 16 centimètres, et les charges depuis 2 jusqu'à 7^{m}. Le rapport dont il s'agit n'a point changé non plus avec la figure de l'orifice, et de plus, comme les charges étaient toutes fort grandes, il n'a point offert de différences sensibles relativement à la grandeur des charges comparées au diamètre des orifices. La valeur moyenne 0,614 a paru convenir également à toutes les expériences (*Sperimenti idraulici*, t. 1, parte 1, cap. 5, et t. 2, disc. 3). Des expériences récentes faites par M. Hachette (*Annales de chimie*, févr. et sept. 1816) ont confirmé ces résultats, tant par rapport à la constance du produit quand la figure de l'orifice varie (pourvu que la figure de cet orifice ne présente pas d'angles rentrants), que par rapport à la valeur de la dépense effective comparée à la dépense théorique.

Lorsque la charge est petite par rapport au diamètre de l'orifice.

Quant au second cas, celui où la charge sur le sommet de l'orifice est petite, on voit par les expériences n^{os} 1 et 2 du tableau précédent que la dépense effective devient alors sensiblement plus grande. Ce résultat est à peu de chose près confirmé par une expérience de Bossut faite pour déterminer la valeur du *pouce d'eau*, où les données étaient les mêmes que celles de l'expérience n° 1 de ce tableau. D'après cette expérience, l'orifice dépense 1 pied cube d'eau en 2 minutes 45 secondes, ou 0^{mc},00020774 par seconde, résultat un peu plus faible que celui de Mariotte (Bossut, *Hydrodynamique*, tome 2, art. 493). La dépense effective est les 0,65 de la dépense théorique. On peut donc admettre que, dans le cas où la charge sur le sommet de l'orifice est $\frac{1}{12}$ de son diamètre, le rapport de la section de la veine contractée à l'aire de l'orifice est environ 0,65. On peut peut-être rendre raison de cette augmentation, en remarquant que dans ce dernier cas les filets de fluide arrivant à la partie supérieure de l'orifice ont très-peu de vîtesse, et par conséquent très-peu de force pour contracter la veine, d'où il suit que la contraction n'est pas la même sur tout le pourtour de l'orifice, comme dans le cas précédent. La dépense effective devant d'ailleurs augmenter graduellement à mesure que la charge diminue, on a dressé, de manière à représenter à-peu-près les expériences et la loi du phénomène, la table suivante, qui peut être employée dans la pratique.

Quand la hauteur de la charge est plus de 200 fois le diamètre de l'orifice, le rapport de la dépense effective à la dépense théorique est.....0,615

Quand cette hauteur est 100 fois ce diamètre	0,618
10 fois	0,620
9 fois	0,621
8 fois	0,622
7 fois	0,623
6 fois	0,625

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

d'une rivière; parce que, en la partageant à des communautés, ou à des

5 fois.....0,627
4 fois.....0,630
3 fois.....0,633
2 fois.....0,637
Une fois.....0,642

Enfin quand cette hauteur ne surpasse le diamètre que d'un dixième ou un douzième.....0,650

Les résultats précédents paraissent devoir s'appliquer à de très-grands orifices.

Les résultats précédents étant fondés sur des expériences où les orifices ont eu jusqu'à 16 centimètres de diamètre, il n'est point douteux qu'ils puissent s'appliquer à des orifices circulaires, carrés ou rectangulaires, ayant jusqu'à 15 ou 20 centimètres de diamètre moyen, avec une précision à-peu-près égale à celle des expériences mêmes. A l'égard des orifices plus considérables, il est à présumer qu'on peut encore se servir de la table précédente sans s'exposer à des erreurs dangereuses dans les applications. Je ne connais aucun fait bien concluant contraire à cette assertion, et il y en a plusieurs qui la confirment. En examinant, par exemple, les observations rapportées par M. Andréossy sur l'écoulement de l'eau au travers des ventelles des portes d'écluse du canal du midi (*Histoire du canal du midi*, t. 1, p. 251), on voit que la charge étant à-peu-près deux fois et demie le diamètre de l'orifice, la moyenne entre les valeurs de la dépense effective, lesquelles offrent d'assez grandes anomalies qui ne peuvent être attribuées qu'aux erreurs des observations, est 0,664. La table ci-dessus donnerait 0,635. La différence ne surpasse guères les erreurs dont on ne peut répondre, même dans des expériences très-soignées. Il était aisé de prévoir d'ailleurs que la contraction devait être ici un peu moindre, parce que le côté inférieur de l'orifice étant peu élevé au-dessus du radier de l'écluse, les filets de fluide arrivaient à ce côté avec des directions moins convergentes. On a aussi une expérience faite par M. Lapeyre sur l'écoulement de l'eau au travers des portes de l'écluse du vieux bassin du Hâvre. Elle a donné pour la dépense effective les 0,625 de la dépense théorique, tandis que la table ci-dessus en donnerait les 0,63, ce qui n'en diffère pas sensiblement.

Je ferai encore mention d'une circonstance remarquable qu'offrent les observations faites au canal du midi. C'est que deux orifices voisins étant ouverts en même temps, chacun paraît faire une dépense un peu moindre que s'il était ouvert seul. Il ne faudra donc point, quand ce cas se présentera, employer les résultats précédents sans précaution.

Cas où les orifices pratiqués dans une paroi plane et mince ont moins de deux centimètres de diamètre.

2° Dans le cas où les orifices ont moins de deux centimètres de diamètre, on voit dans le tableau des expériences de Mariotte rapporté ci-dessus, que les observations faites sur de petits orifices de 13 et 7 millimètres de diamètre, quoique les charges fussent très-grandes, donnent des dépenses effectives beaucoup plus fortes que celles indiquées dans la table précédente. Ce résultat est confirmé par les expériences de Newton qui, faites sur un orifice dont le diamètre était de $\frac{5}{9}$ de pouce anglais = 16 millimètres, l'ont conduit à prendre pour le rapport de la dépense effective à la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

particuliers, il faudra que chacun en ait une quantité proportionnée aux

---

dépense théorique $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}71$ (*Princip. math.*, lib. 2, prop. 36). Il l'est également par les expériences de Daniel Bernouilli, où l'orifice avait près de 9 millimètres de diamètre, et qui ont donné les rapports 0,699 et 0,685 (*Hydrodynamica*, p. 79 et 80). Si un orifice était rigoureusement infiniment petit, en sorte qu'il ne pût sortir à-la-fois qu'une molécule de fluide, il est certain que cette molécule aurait exactement la vîtesse due à la charge, en sorte qu'il n'y aurait aucun déchet sur la dépense théorique. Mais aussitôt qu'un orifice a une grandeur sensible, on ne voit plus par quelle raison la dépense est plus grande pour un orifice plus petit, à moins qu'on ne puisse attribuer cela à l'effet de l'épaisseur de la paroi, d'après ce qu'on verra plus bas. Quoiqu'il en soit, l'expérience prouve que le rapport de la dépense effective à la dépense théorique diminue graduellement, depuis un diamètre infiniment petit, jusqu'à un diamètre de un à deux centimètres, au-delà duquel il paraît que la diminution cesse d'être sensible. Le peu d'accord que présentent les observations ne permet pas encore d'établir exactement la mesure du phénomène. Les dernières expériences connues sont celles de M. Hachette, où le rapport de la dépense effective à la dépense théorique, pour un orifice de un millimètre de diamètre, a varié depuis 0,78 jusqu'à 0,69. Le dernier nombre est celui qu'il regarde comme le plus exact (*Annales de chimie et de physique*, février 1816).

Des orifices pratiqués dans une paroi plane, et prolongés par un tuyau additionnel cylindrique.

Pl. C, Fig. 8.

§ 4. Un orifice, pratiqué dans une paroi plane, peut être prolongé par un tuyau additionnel cylindrique. Ce cas, dont Bélidor ne parle point, et qui se présente fréquemment dans la pratique, a attiré l'attention des savants. Il n'y a point ici de contraction extérieure : les filets de fluide sortent de l'orifice extrême ef du tuyau parallèlement à eux-mêmes. Cependant on observe une dépense moindre que celle qui serait due à la hauteur de la surface ab du fluide sur ef. Cette dépense est d'ailleurs plus grande que si le fluide jaillissait dans l'air à la sortie de l'orifice cd, et que le tuyau additionnel n'existât point. Pour se rendre raison de ces effets qui semblent contradictoires, il faut rechercher la nature du mouvement du fluide. Soit U la vîtesse avec laquelle il franchit l'orifice cd, qui est toujours supposé très-petit par rapport aux sections du vase. Quoique la veine ne jaillisse point dans l'air à la sortie de cet orifice, elle ne se contracte pas moins, et si l'on nomme m le rapport de la section gh, où la contraction est le plus grande, à l'aire de l'orifice cd, la vîtesse en gh sera $\frac{U}{m}$. Mais la section du tuyau étant égale à l'orifice cd, le fluide reprend, après la section gh, la vîtesse U avec laquelle il sort du vase. Cela posé, l'équation du mouvement du fluide doit être établie comme il suit. On verra comme dans la note (ce) que la quantité d'action imprimée à la tranche sortant du vase est $g\Omega z.Udt$, et que la force vive acquise par cette tranche est $\Omega U dt.U^2$. On observera ensuite que chaque tranche qui passe à la section gh avec la vîtesse $\frac{U}{m}$, et qui rencontre immédiatement après des tranches qui n'ont que la vîtesse U, perd contre elles la vîtesse $\frac{U}{m} - U$, ou $U\left(\frac{1}{m} - 1\right)$. Cette perte de vîtesse entraîne une perte de force vive correspondante (voyez le § 8 de la note (ai)), exprimée par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

frais qu'il a faits pour sa part de la dépense totale, ou de ce qu'il paiera

---

$\Omega\,U\,dt.\,U^2\left(\frac{1}{m}-1\right)^2$. Mais (d'après la note citée) le double de la quantité d'action imprimée doit être égale à la force vive acquise, plus la force vive perdue. On a donc $2\,g\,\Omega\,z.\,U\,dt = \Omega\,U\,dt.\,U^2 + \Omega\,U\,dt.\,U^2\left(\frac{1}{m}-1\right)^2$; d'où l'on tire pour la vîtesse du fluide à la sortie du tuyau $U = \sqrt{\frac{2gz}{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}}$.

Expression théorique de la vîtesse du fluide.

La contraction à la section $g\,h$ doit se faire ici de la même manière que pour un orifice percé dans une paroi plane et mince. On doit donc, dans les cas ordinaires, prendre, d'après le § précédent, $m = 0{,}62$. Cette valeur, introduite dans la formule précédente, la change en $U = 0{,}8526\sqrt{2gz}$, d'où il suit que la vîtesse effective, dans le cas d'un petit tuyau additionnel cylindrique, est environ les 0,85 de la vîtesse théorique.

Il a été fait plusieurs expériences sur ce genre d'écoulement. Le résultat de celles de Bossut est que la vîtesse effective est moyennement un peu au-dessus des 0,81 de la vîtesse théorique (*Hydrodynamique*, tome 2, ch. 3). Les expériences de Michelotti lui ont donné pour la valeur moyenne de ce rapport 0,818 (*Sperimenti idraulici*, tomo 1, parte 1, cap. 5). Il en a fait spécialement dans la vue de rechercher l'influence de la longueur du tuyau sur la dépense, dont je vais rapporter les résultats (*Ibidem*, tomo 2, parte 2, cap. 1) : le diamètre du tuyau était de 54 millimètres, et la hauteur de la charge d'environ 2^m, 2.

Expériences faites sur ce genre d'écoulement.

La longueur du tuyau étant	Le rapport de la dépense effective à la dépense théorique a été trouvé de
Nulle	0,6096
La moitié du diamètre	0,6169
Égale au diamètre	0,7671
Deux fois le diamètre	0,8157
Deux fois et demie	0,8221
Trois fois	0,8201
Quatre fois	0,8179
Cinq fois	0,8095
Six fois	0,8070
Sept fois	0,8032
Huit fois	0,7997

Il paraît par ces expériences qu'il faut que le tuyau ait une longueur au moins égale à son diamètre pour qu'il fasse augmenter la dépense. Quand sa longueur est plus petite, l'eau ne coule point *à gueule bée*, et la veine se détachant des parois du tuyau, l'écoulement se fait absolument de la même manière que pour un orifice en mince paroi. Cela se voit aussi par les expériences de Bossut, qui dit même n'avoir jamais pu faire couler l'eau à plein tuyau lorsque (le diamètre de l'orifice étant de 27 ou 54 millimètres) la longueur du tuyau était égale au diamètre : l'eau ne commençait à pouvoir couler à gueule bée qu'autant que la longueur du tuyau était une fois et demie son diamètre. Il y a lieu de penser que ces derniers résultats ne conviennent

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pour la dépense annuelle de l'entretien des eaux; ce qui demande beau-

qu'à des orifices un peu grands, tels que ceux de deux centimètres de diamètre et au-dessus. Quand ils sont plus petits, la contraction étant moins considérable et se faisant plus loin de l'orifice, comme on l'a dit plus haut, les filets extérieurs de la veine sont moins convergents, et tendent moins à se détacher des parois du tuyau, en sorte qu'un tuyau additionnel peut faire croître la dépense, lors même qu'il serait plus court que le diamètre. Les expériences précédentes montrent aussi que la plus grande augmentation de dépense que le tuyau additionnel puisse causer, a lieu quand sa longueur est deux fois et demie ou trois fois son diamètre. En allongeant davantage le tuyau, la dépense diminue de plus en plus, ce qui ne peut provenir que du frottement du fluide sur ses parois. Il résulte au surplus de ce qui précède que, pour estimer dans les applications la dépense d'un orifice prolongé par un tuyau additionnel cylindrique ayant en longueur deux à trois fois le diamètre de cet orifice, il faut prendre les 0,82 de la dépense théorique calculée pour cet orifice, ou considérer la vîtesse comme due seulement aux $(0,82)^2 = 0,67$ ou aux $\frac{2}{3}$ de la charge, à très-peu près. On suppose la charge égale à dix fois le diamètre du tuyau au moins. Si elle était égale à 200 fois le diamètre, il faudrait prendre le rapport 0,815, et si elle ne le surpassait que très-peu, le rapport 0,86.

Je ne m'arrêterai point à considérer l'écoulement par des tuyaux additionnels coniques divergents ou convergents. La théorie est à-peu-près la même que la précédente ; mais elle doit être vérifiée par l'expérience, et les observations qui ont été publiées sont encore en trop petit nombre pour qu'on puisse établir à ce sujet aucun résultat utile.

Il est essentiel de remarquer que tous les résultats précédents sur l'évaluation de l'effet de la contraction, et la comparaison de la dépense effective à la dépense théorique, conviennent également, quelles que soient la situation du plan de l'orifice et la direction du jet de fluide, et soit qu'il dégorge dans l'air, ou dans un vase rempli de fluide.

L'augmentation de dépense causée par un tuyau additionnel n'a pas lieu dans le vide.

§ 5. Un phénomène remarquable, connu depuis long-temps, est que l'augmentation de dépense d'un orifice garni d'un petit tuyau additionnel sur le même orifice pratiqué dans une paroi mince, n'a pas lieu quand l'écoulement se fait dans le vide. On s'est assuré aussi que si l'on pratiquait dans le tuyau, à une distance de son insertion dans le vase égale à-peu-près à son demi-diamètre, un seul petit trou qui permît à l'air extérieur de s'y introduire, la veine de fluide cessait à l'instant de toucher à la paroi du tuyau, et que l'écoulement se faisait alors comme si ce tuyau n'eût pas existé (Dan. Bernouilli, *Hydrodynamica*, sect. 3, § 25 : voy. les exp. relatives p. 57 et 84. Venturi, *Rech. expér. sur la commun. lat. du mouv. dans les fluides*, p. 13, exp. 5). Ces effets paraissent dépendre en grande partie des modifications que présente la pression du fluide dans ce genre d'écoulement. Je n'ai point donné dans ces notes les formules servant à déterminer la pression qui a lieu dans les différentes parties d'un fluide coulant dans un vase, parce que leur démonstration rigoureuse dépend de considérations théoriques dont je n'ai point cru devoir les charger, et qu'on trouvera dans les ouvrages de M. de Prony. J'observerai seulement qu'ayant adapté à un vase un petit tuyau dont la section est censée très-petite par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

coup d'intelligence de la part de ceux qui en sont chargés : autrement il

---

rapport à celles du vase, on démontre facilement que la pression qui a lieu dans un point quelconque du tuyau, en outre de la pression atmosphérique, est due à la charge de fluide qui a lieu sur ce point, moins la hauteur due à la vitesse en ce point. Ainsi, nommant Ω la section extrême du tuyau où la vîtesse est U ; ω une autre section quelconque du tuyau, où la vîtesse sera $\frac{\Omega U}{\omega}$; z la charge constante de fluide qui a lieu sur la section ω; et ζ la hauteur d'une colonne de fluide qui ferait équilibre à la pression atmosphérique : la hauteur due à la pression qui aura lieu à la section ω sera exprimée par $\zeta + z - \frac{U^2 \Omega^2}{2g\omega^2}$.

Cela posé, dans le cas d'un tuyau additionnel cylindrique, en le supposant horizontal, on a par-tout, sauf l'endroit de la plus grande contraction, $\omega = \Omega$, et $U = 0{,}82\sqrt{2gz}$. La formule précédente devient donc $\zeta + 0{,}3276\,z$. Ainsi la pression qui a lieu dans ce tuyau de la part du fluide, n'est due qu'au tiers environ de la charge. Si le fluide est de l'eau, la hauteur ζ due à la pression atmosphérique sera d'environ $10^m{,}3$, en sorte que, dans une expérience où la charge z serait par exemple d'un mètre, la pression ne surpasserait pas dans le tuyau la pression atmosphérique de $\frac{1}{30}$. On voit donc que les parois du tuyau ne sont alors poussées en dedans qu'avec une force assez petite, et si l'on ouvrait un très-petit orifice dans ces parois, l'eau aurait si peu de tendance à sortir, qu'il pourrait se faire que l'adhérence de ses molécules suffît pour l'en empêcher, comme cela s'observe effectivement (Bossut, *Hydrodynamique*, t. 2, art. 715). Cette tendance serait absolument nulle, au moins pour les points de l'arrête supérieure du tuyau, si son entrée était évasée, et qu'il n'y eût point de contraction.

Il faut considérer maintenant la portion du tuyau voisine de son insertion, qui est l'endroit où la contraction a lieu. La section de la veine contractée étant les 0,62 environ de celle du tuyau, on a dans l'endroit de la plus grande contraction $\frac{\Omega^2}{\omega^2} = \left(\frac{1}{0{,}62}\right)^2$. Mettant cette valeur avec celle $U = 0{,}82\sqrt{2gz}$ dans la formule ci-dessus, il vient pour la hauteur à laquelle est due la pression dans cet endroit $\zeta - 0{,}7492\,z$, en sorte que la pression y est moindre que la pression atmosphérique. Donc si l'on fait un ou plusieurs trous à cet endroit dans la paroi du tuyau, l'air extérieur tendra à s'y introduire, et s'y introduira effectivement, entraîné par le mouvement du fluide. La veine d'eau se trouvera détachée des parois, et ne coulera plus à plein tuyau. Mais s'il n'y a point de trou dans la paroi, et que, par une adresse particulière dans la manière de déboucher l'orifice (Bossut, *Hydrodynamique*, tome 2, art. 516, 540 et 541), il arrive que le fluide ait commencé à couler à plein tuyau, l'écoulement continuera de cette manière, à raison du petit excès de la pression intérieure sur la pression atmosphérique qui a lieu vers l'extrémité du tuyau, excès qui tend à y maintenir le fluide en contact avec la paroi. La pression étant plus petite à l'endroit de la contraction que dans les tranches suivantes, le fluide y reflue pour remplir le vide qui tend à se former entre la veine contractée et les parois du tuyau. Ses molécules ont alentour de cette veine des mouvements de rotation

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

arrive que l'un a plus et l'autre moins qu'il ne devrait avoir. Il y a bien des choses à considérer sur ce sujet, que je me réserve de traiter ailleurs.

SECTION IX.

De la mesure des eaux qui coulent par des orifices rectilignes et verticaux (*cl*).

L'eau qui sort des orifices verticaux est chassée selon une direc-

518. Ayant un vaisseau prismatique continuellement rempli d'eau, on a vu (362) que chacune de ses faces était poussée selon une direction horizontale par toutes les lames d'eau qu'elle soutient. Par conséquent si

---

particuliers, et c'est la production de ces mouvements et les frottements qui ont lieu contre la paroi, qui, en consommant une partie de la quantité d'action imprimée au système, empêchent que la vîtesse observée ne soit tout-à-fait égale à celle qui résulte de la formule trouvée dans le § précédent. C'est ce dont on s'est assuré directement, en employant un tuyau rétréci à l'endroit de la contraction suivant la forme qu'y prend la veine de fluide. Cette disposition, en supprimant les mouvements dont on vient de parler, augmente la dépense de $\frac{1}{30}$ (Venturi, *Rech. expér. sur le principe de la communication latérale*, page 32).

Puisque la pression est à l'endroit de la contraction moindre que la pression atmosphérique, il s'ensuit que, si l'on adapte à cet endroit dans le tuyau un tube hmn, plongeant dans un vase M plein du même fluide qui coule dans ce tuyau, le fluide montera dans le tube à une hauteur np, due à l'excès de la pression atmosphérique sur celle qui a lieu en gh. M. Venturi a fait une expérience de ce genre, dans laquelle la charge sur l'axe du tuyau était 32,5 pouces $=0^m,8674=z$. La hauteur np, d'après la formule précédente, devait donc être $0,7492 \times 0,8674 = 0^m,6499$. L'observation a donné $np=24$ pouces $=0^m,6497$ (*idem*, page 13, exp. 6) : le calcul s'accorde donc avec elle.

Pl. C, Fig. 8.

Quand l'écoulement se fait dans le vide, on a la valeur de la pression en faisant $\zeta=0$ dans les formules précédentes. La pression, à l'endroit de la plus grande contraction, est donc dans ce cas due à la hauteur $-0,7492\,z$. Cette quantité étant négative, on voit d'après ce qui a été dit dans la note (*bx*) que les tranches doivent se détacher de la paroi. Le fluide ne peut donc couler ici à plein tuyau, et par conséquent l'augmentation de dépense causée par un tuyau additionnel, ainsi qu'on l'a reconnu par expérience, ne peut avoir lieu dans le vide. Elle n'aurait pas lieu non plus dans l'air atmosphérique, si la charge z était assez grande pour que dans la formule $\zeta - 0,7492\,z$ le second terme surpassât le premier. C'est ce qui arriverait si z était au-dessus de $13^m,7$ environ.

Charge d'eau sous laquelle l'augmentation de dépense causée par un petit tuyau additionnel n'aurait pas lieu dans l'atmosphère.

Remarque sur les sections IX et X.

(*cl*) L'objet de cette section et de la suivante est d'enseigner la manière de calculer la dépense des orifices pratiqués dans les parois latérales d'un vase entretenu constamment plein. Il m'a paru utile de présenter d'abord quelques observations sur ce sujet. Je remarquerai en premier lieu que la démonstration de l'art. 431, ou celle de la note (*ce*), pour le cas d'un orifice infiniment petit, sont absolument indépendantes de l'inclinaison du plan de cet orifice, et conviennent aussi-bien au

Quand l'orifice d'un vase est très-petit, la dépense est toujours indé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cette face est percée de plusieurs trous H, K, etc. dans la verticale EF, l'eau qui en sortira sera chassée selon des directions horizontales, avec

tion horizontale, avec des vîtesses qui peuvent être

---

cas où cet orifice est vertical ou incliné qu'au cas où il est horizontal. Il en est de même de la démonstration donnée dans la note (*ce*) pour le cas où l'orifice d'écoulement d'un vase entretenu constamment plein ne peut pas être censé infiniment petit par rapport aux sections de ce vase. Et en effet, si l'on examine les formules de la solution générale (citées dans la note (*ce*)), on s'apercevra aisément qu'un certain terme de l'équation du mouvement du fluide, dont la valeur dépend essentiellement de la nature des mouvements des particules du fluide dans l'intérieur du vase, et qui seul pourrait varier avec la situation de l'orifice, disparaît dans deux cas, savoir quand l'orifice est infiniment petit, et quand le vase étant entretenu constamment plein la vîtesse du fluide prend une valeur constante. On peut donc employer avec toute confiance les formules de la note (*ce*), quelle que soit l'inclinaison du plan de l'orifice.

pendante de l'inclinaison du plan de l'orifice.

Quand l'orifice n'est pas très-petit, la dépense est également indépendante de l'inclinaison de son plan, toutes les fois que le vase est entretenu constamment plein.

Il faut observer néanmoins que, si le plan de l'orifice n'est pas horizontal, l'évaluation de la charge d'eau z qui entre dans ces formules, demande une attention particulière. Il est évident que la valeur à donner à z est la hauteur due à la vîtesse moyenne qui aura lieu à l'orifice. Pour la déterminer, on remarquera que chaque point de l'orifice, qui est supposé évasé comme dans la note (*ce*), peut être considéré comme un orifice infiniment petit, dans lequel le fluide prend une vîtesse due à la distance de ce point à la surface du fluide; par conséquent la vîtesse ira en augmentant du haut en bas de l'orifice, et sera constante dans tous ses éléments horizontaux. Nommons z la distance à la surface supérieure du fluide d'un point quelconque de l'orifice, et y la distance du même point à un axe vertical tracé dans le plan de l'orifice. L'élément de l'aire de l'orifice en ce point sera $dy\,dz$, et la vîtesse du fluide y sera $\sqrt{2gz}$. Or on aura la vîtesse moyenne à l'orifice en multipliant chaque élément par la vîtesse correspondante, et divisant la somme des produits par la somme des éléments. Donc cette vîtesse est exprimée par $\frac{\int\int dy\,dz\sqrt{2gz}}{\int\int dy\,dz}$, ou $\sqrt{2g}.\frac{\int\int dy\,dz\sqrt{z}}{\int\int dy\,dz}$, et la hauteur qui lui est due, ou la quantité qu'on doit prendre pour la charge de fluide dans les formules de la note (*ce*), est $\left(\frac{\int\int dy\,dz\sqrt{z}}{\int\int dy\,dz}\right)^2$. Tel est l'esprit de tous les calculs contenus dans les sections IX et X.

Comment la hauteur de la charge doit être évaluée pour un orifice dont le plan n'est pas horizontal.

Je remarquerai en second lieu que ces calculs n'offrent quelque utilité, et ne peuvent être admis dans la pratique, qu'autant qu'il s'agit d'orifices sur le sommet desquels il y a une certaine hauteur d'eau. Dans les cas où cela n'a pas lieu, il arrive que la surface du fluide dans le vase ne se soutient point de niveau jusqu'au plan de l'orifice. Elle s'abaisse en se courbant à une certaine distance en avant de ce plan, de manière que la section de la veine fluide est plus petite que l'aire de l'orifice. D'après cette circonstance, les résultats des art. 524, 526, 540, 542 — 547, 550 — 554, sont absolument fautifs et illusoires : ils ne peuvent donner lieu à aucune autre observation. On verra plus loin comment, dans le cas dont il s'agit ici, on a tenté d'estimer la dépense des orifices verticaux rectangulaires.

Les formules ne s'appliquent qu'au cas où il y a une charge de fluide sur le point le plus élevé de l'orifice. Inexactitude des art. 524 à 554.

Lorsque la veine de fluide, en sortant d'un orifice latéral, ne jaillit point dans

Comment on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

exprimées par les ordonnées d'une parabole.

Pl. 7, Fig. 61.

des vîtesses qui pourront être exprimées par les racines des hauteurs EH et EK, ou par les ordonnées correspondantes HI et KL d'une parabole EIG, puisque la propriété de cette courbe donne (470) $\sqrt{EH} : \sqrt{EK} :: HI : KL$. Si l'on suppose le paramètre de cette parabole de 60 pieds, les ordonnées HI et KL exprimeront non-seulement le rapport des vîtesses de l'eau, mais aussi les vîtesses réelles par seconde des filets qui sortiront par les trous H et K (470), que nous supposons fort petits. Alors connaissant en pieds, pouces et lignes les hauteurs EH et EK, on aura, à l'aide de la première table de la septième section, les valeurs en pieds, pouces et lignes des ordonnées HI et KL.

519. Il suit que si tous les filets d'eau qui sortiront par un des orifices H ou K ont la même vîtesse, la dépense naturelle par seconde sera égale à une colonne qui aurait pour base le plan de l'orifice, et pour hauteur l'ordonnée qui lui répond.

La somme des vîtesses avec lesquelles toutes les lames d'eau renfermées dans un vaisseau, tendent à s'échapper par les côtés, peut être exprimée par le produit de la plus grande hauteur de l'eau, multiplié par les deux

520. Si l'on suppose l'axe EF de la parabole ELG divisé en un nombre infini de parties égales, elles composeront une progression arithmétique infinie, c'est-à-dire dont le plus petit terme sera zéro, et le plus grand la hauteur EF de l'eau, qui exprimera en même temps le nombre des termes de cette progression. Tirant par chaque point de division une ordonnée HI ou KL, en commençant du sommet E, toutes ces ordonnées étant dans la raison des racines de leurs abscisses, ou des racines des termes de la progression des parties de l'axe, on trouvera la somme de

---

peut évaluer la dépense, lorsque le fluide tombe dans un vase où il est soutenu à divers niveaux.

Pl. C, Fig. 9.

l'air, mais coule dans un autre vase rempli de fluide, il y a quelque cas où l'estimation de la hauteur à laquelle sera due la vîtesse théorique du fluide pourrait embarrasser. Soit ab le niveau du fluide dans le vase supérieur, et cd l'orifice. Il ne peut y avoir aucune difficulté quand le niveau du fluide dans le second vase est en ef au-dessus du sommet c de l'orifice : alors la vîtesse théorique est due à la distance be des deux niveaux, conformément à ce qu'on a vu dans la note (*ce*). Il n'y en a non plus aucune quand le fluide se tient dans le second vase à un niveau $e'f'$ plus bas que l'extrémité inférieure d de l'orifice, et la vîtesse théorique est alors la même qui si le fluide jaillissait en l'air. Mais quand la hauteur $e''f''$ du fluide dans le second vase est intermédiaire entre les points c et d, les règles précédentes ne peuvent plus s'appliquer. Ce qu'il y a de mieux à faire alors est de concevoir l'orifice partagé dans sa hauteur en deux parties ce'', ed'' par le plan de la surface du fluide dans le second vase. On calculera la dépense de la première portion ce'' comme pour un orifice dont l'eau jaillirait en l'air. A l'égard de la portion $e''d$, la vîtesse théorique y sera due à la hauteur be''. On fera ensuite la somme des deux résultats, à laquelle on appliquera, pour passer de la dépense théorique à la dépense effective, les règles données dans la note précédente.

De la *hauteur vive* et de la *hauteur morte*.

Dans le cas où la surface de l'eau dans le vase inférieur est en $e''f''$, la hauteur ce'' est ce qu'on nomme *hauteur vive*, et la hauteur $e''d$ ce qu'on nomme *hauteur morte*, dans les ouvrages italiens sur l'hydraulique.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

toutes ces racines de la même manière que l'on trouve celles des ordonnées qui composent la superficie d'une parabole, *en multipliant l'axe EF par les deux tiers de la plus grande ordonnée FG. On aura donc aussi la somme de toutes les racines des abscisses correspondantes, ou celle de tous les termes de la progression, en multipliant l'axe EF par* $\frac{2}{3}\sqrt{EF}$, ou $\sqrt{EF}$ *par* $\frac{2}{3}$ EF.

tiers de la racine de la même hauteur, ou par cette racine entière multipliée par les deux tiers de la même hauteur.

Pl. 7, Fig. 65.

Pour démontrer la même règle indépendamment de la parabole, considérez le triangle rectangle et isoscèle EFG, dont la hauteur EF étant prise pour celle de l'eau, tous les éléments MN composeront les termes de la progression précédente, ou, si l'on veut, toutes les différentes hauteurs de l'eau prises depuis son niveau jusqu'au fond du vaisseau. Pour avoir la somme des racines de tous ces éléments, nous nommerons EF h, EM x; ainsi Mm sera dx, qui étant multiplié par $\sqrt{x}$ donne $dx\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}dx$ pour la somme des racines comprises dans le plan différentiel MmNn, dont l'intégrale donne $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, ou $\frac{2}{3}x \times \sqrt{x}$, ou $\frac{2}{3}h \times \sqrt{h}$ lorsque x devient égale à h.

521. Il suit que si l'on pratique dans la surface du vaisseau une fente verticale POEF d'une largeur uniforme, on aura la somme de toutes les vîtesses de l'eau qui sortira par cette fente, *en multipliant la racine de la plus grande hauteur EF par les deux tiers de la même hauteur.*

Figure 61.

522. Comme entre toutes les vîtesses interposées il y en a une *moyenne*, qui, étant multipliée par la grandeur qui en exprime le nombre, donne un produit égal à la somme des mêmes vîtesses, on voit *que cette vîtesse moyenne est égale aux deux tiers de la racine de la plus grande ordonnée FG, ou à* $\frac{2}{3}\sqrt{h}$, quand on prendra les racines des abscisses au lieu des ordonnées de la parabole.

La vîtesse moyenne depuis la surface de l'eau jusqu'au fond, est égale aux deux tiers de la plus grande, et la lame à laquelle elle appartient est située au-dessous du niveau de l'eau des quatre neuvièmes de la plus grande hauteur.

Figure 62.

523. Pour savoir à quel point de la hauteur EF doit répondre la vîtesse moyenne, il n'y a qu'à quarrer $\frac{2}{3}\sqrt{h}$, on aura $\frac{4}{9}h$, ce qui montre que *la lame d'eau qui répond à la vîtesse moyenne est au-dessous du niveau OB des quatre neuvièmes de la hauteur entière EF.*

Manière de mesurer la dépense d'un pertuis vertical, dont le sommet répond au niveau de l'eau.

524. Quand on aura un pertuis rectangulaire ABCD pratiqué dans une surface verticale, que ce pertuis régnera sur toute la hauteur de l'eau, il faut, pour avoir sa dépense pendant un certain temps, *multiplier la superficie du pertuis par les deux tiers de la plus grande ordonnée DG, ou par la vîtesse uniforme qu'un corps aurait acquise pendant ce temps par une chûte CE égale aux quatre neuvièmes de la hauteur de l'eau*, parce que la vîtesse EF sera égale aux deux tiers de la plus grande DG : puisqu'on a $\sqrt{CD} : \frac{2}{3}\sqrt{CD} :: DG : \frac{2}{3}DG$; ou que $CD : \frac{4}{9}CD :: \overline{DG}^2 : \frac{4}{9}\overline{DG}^2$.

525. Supposant que le pertuis ABCD ait 4 pieds de largeur sur 13 pieds 1 pouce 6 lignes de hauteur. Sa superficie sera de 52 pieds 6 pouces,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et les quatre neuvièmes de la hauteur de l'eau donneront 5 pieds 10 pouces, qui est une chûte qui répond, dans la première table de la septième section, à une vîtesse de 18 pieds 8 pouces 6 lignes, laquelle étant multipliée par le produit précédent, donne 982 pieds cubes 2 pouces 3 lignes, pour la quantité d'eau que le pertuis dépensera par seconde.

Manière de mesurer la dépense d'une nappe d'eau droite ou circulaire.

526. Quand on sera dans le cas de mesurer une *nappe d'eau*, comme celles qui se rencontrent dans la décoration des jardins de plaisance, ou comme celles qui se forment aux décharges d'une écluse d'une machine hydraulique, d'un canal, etc., *il faudra de même prendre la superficie du rectangle qui aurait pour base la longueur du bord, et pour hauteur celle de l'eau qui coule au-dessus du même bord, et en multiplier la superficie par la vîtesse qui aurait pour chûte les quatre neuvièmes de la hauteur précédente* (*cm*).

Évaluation théorique de la dépense d'un orifice ouvert à sa partie supérieure.

Pl. C, Fig. 10.

(*cm*) Cette règle, comme celle de l'art. 524, d'après la remarque faite dans la note (*cl*), est absolument fautive. Il serait bien important qu'on pût en donner une bonne, fondée sur un nombre suffisant d'expériences faites en grand. Concevons un vase entretenu constamment plein, à l'une des faces latérales duquel est adapté un orifice rectangulaire, ouvert dans sa partie supérieure, et dont les faces latérales et inférieures sont évasées, de manière que tous les filets de la veine fluide sortent avec des directions parallèles entre elles, et qu'il n'y ait aucune contraction. Il arrivera que la surface du fluide s'abaissera dans le vase (dont l'étendue est supposée considérable par rapport à celle de l'orifice) au-devant de l'orifice, de manière que l'eau, au lieu de couler sur la hauteur entière cd de cet orifice, ne coulera plus que sur une portion de cette hauteur telle que $c'd$. Il est très-vraisemblable d'ailleurs que l'écoulement se fait sur la hauteur $c'd$ comme dans un orifice qui serait fermé par dessus, mais cette hauteur est inconnue.

Pour la déterminer, il paraît qu'on peut faire usage du principe qu'on nomme à-présent de la *moindre action*, et qui consiste en ce que, dans tout système de corps en mouvement où les conditions qui doivent avoir lieu pour l'existence du principe de la conservation des forces vives sont remplies, ce mouvement est toujours tel que la somme des forces vives qu'ont eues les corps, en passant d'une position donnée du système à une autre, est nécessairement un maximum ou un minimum (M. Poisson, *Traité de mécanique*, t. 2, p. 304). Ce principe peut s'appliquer à l'assemblage des molécules qui composent un fluide, et on en conclut qu'ici l'écoulement doit se régler de manière que la force vive de l'eau qui passera dans l'orifice sur la hauteur $c'd$ soit un maximum.

Nommons z' la hauteur de l'eau dans le vase sur le point c', et z sa hauteur sur le fond d de l'orifice. La hauteur de la veine de fluide sera $z-z'$; et, d'après la note (*co*), la charge de fluide à laquelle sera due la vîtesse moyenne sera $\frac{4}{9}\left(\frac{z^{\frac{3}{2}}-z'^{\frac{3}{2}}}{z-z'}\right)^2$. Cette vîtesse sera donc exprimée par $\frac{2}{3}\sqrt{2g}.\frac{z^{\frac{3}{2}}-z'^{\frac{3}{2}}}{z-z'}$. Donc en nommant l la largeur de l'orifice, le volume d'eau qui coulera dans une seconde sera

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

527. Lorsqu'un vaisseau ABCD est percé par le fond, et que l'eau n'y est entretenue qu'à une hauteur médiocre GH, il arrive quelquefois qu'en

Pl. 7, fig. 67.

$\frac{2}{3} l \sqrt{2g}\,(z^{\frac{3}{2}} - z'^{\frac{3}{2}})$, et la force vive de cette eau, en prenant le volume pour la masse, est $\frac{2}{3} l \sqrt{2g}\,(z^{\frac{3}{2}} - z'^{\frac{3}{2}}) \cdot \frac{4}{9}\, 2g \left(\frac{z^{\frac{3}{2}} - z'^{\frac{3}{2}}}{z - z'}\right)^2$; c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à $\frac{(z^{\frac{3}{2}} - z'^{\frac{3}{2}})^3}{(z-z')^2}$, quantité qu'il faut rendre un maximum. En la différenciant par rapport à z', et égalant la différentielle à zéro, il vient $5\,z'^{\frac{3}{2}} - 9\,z\,z'^{\frac{1}{2}} + 4\,z^{\frac{3}{2}} = 0$, équation à laquelle satisfait à très-peu de chose près la valeur $z' = 0{,}2753\,z$. La hauteur $c'd$ sur laquelle l'eau se tient dans l'orifice est donc $(1 - 0{,}2753)\,z = 0{,}7247\,z$, c'est-à-dire un peu plus des $\frac{7}{10}$ de la hauteur de la surface du fluide sur le fond de l'orifice.

En mettant la valeur qu'on vient de trouver pour z' dans l'expression ci-dessus du volume de fluide qui coule dans une seconde, elle deviendra $\frac{2}{3} l \sqrt{2g}\,(1 - (0{,}2753)^{\frac{3}{2}})\,z^{\frac{3}{2}}$, ou (en mettant pour g sa valeur $9^{m},8088$) $2{,}5261\; l z^{\frac{3}{2}}$.

Évaluation de la contraction dans ce genre d'orifices, d'après les expériences de Dubuat.

On a supposé dans la théorie précédente l'entrée de l'orifice évasée. Dans la plupart des applications, particulièrement dans le calcul de la dépense des réversoirs, cet évasement n'a point lieu, et la veine fluide se contracte, ou sur les côtés, ou sur le fond, ou sur le fond et les côtés à-la-fois. Il faudrait alors, en considérant le résultat précédent comme exprimant le véritable produit théorique de l'orifice, lui appliquer des corrections analogues à celles qui ont été indiquées pour d'autres genres d'écoulement dans la note (*ck*). L'expérience seule peut fournir sur ce sujet les lumières nécessaires. Dubuat en a fait quelques-unes sur un orifice dont la largeur était d'environ 50 centim., et où la hauteur de la surface du fluide sur le fond de cet orifice, représentée ci-dessus par z, a varié depuis 5 jusqu'à 25 centimètres environ. Leur résultat est 1° que s'il y a contraction sur les côtés et sur le fond de l'orifice, sa dépense par seconde est exprimée par $\sqrt{128}.\; l\, z^{\frac{3}{2}}$; 2° que s'il y a contraction sur le fond seulement, cette dépense est exprimée par $\sqrt{135}.\; l\, z^{\frac{3}{2}}$: le pouce est l'unité de mesure (*Nouv. Principes d'hydraulique*, art. 414. Les citations de cet ouvrage se rapportent à la 3e édit. en 3 vol. publiée en 1816 par M. Firmin Didot).

Quand on prend le mètre pour unité, comme on l'a fait précédemment, les deux coëfficients de ces formules deviennent respectivement $\sqrt{128 \times 0{,}02707} = 1{,}8614$ et $\sqrt{135 \times 0{,}02707} = 1{,}9117$. En les comparant au coefficient 2,5261 de la formule ci-dessus, on voit qu'il résulterait de ce qui précède que le rapport de la dépense effective à la dépense théorique serait $\frac{1{,}8614}{2{,}5261} = 0{,}737$ quand il y aurait contraction sur le fond et les côtés de l'orifice, et $\frac{1{,}9117}{2{,}5261} = 0{,}757$ quand il y a contraction sur le fond seulement. En rapprochant ces résultats de ce qu'on a vu dans le § 3 de la note (*ck*), ils n'offriront rien que de très-naturel et de très vraisemblable. Dubuat admet que la hauteur de l'eau $c'd$ sur le fond de l'orifice est la moitié de la hauteur totale cd : mais il avertit qu'il ne fonde point ce rapport sur une mesure immédiate. Je présume qu'en l'adoptant il s'est trouvé conduit à estimer la dépense théorique plus petite qu'elle n'est véritablement, et par suite, pour déduire de sa

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sortant elle ne remplit pas entièrement le trou EF, laissant un vide dans le milieu formant un entonnoir NMIQLOP, qui donne lieu à une nappe circulaire dont *la dépense par seconde est égale au volume d'eau compris sous la circonférence du trou EF, sous la hauteur IK, et sous la ligne qui exprimerait la vitesse acquise par la chûte des quatre neuvièmes de la hauteur IK.*

La vîtesse de l'eau qui sort d'un orifice pratiqué au fond du vaisseau, est à la vîtesse de celle qui s'empresse à la remplacer, comme le quart du diamètre de l'orifice est aux deux tiers de la hauteur de l'eau, ou comme les trois huitièmes du même diamètre sont à la hauteur entière de l'eau.

Pl. 7, Fig. 67.

528. Comme cette nappe n'a lieu que lorsque la somme des vîtesses de l'eau, qui tend à remplacer celle de la colonne du milieu, est moindre que la vîtesse uniforme de la même colonne, voici le rapport de ces deux vîtesses.

Nommant h la hauteur IK de l'eau, d le diamètre EF du trou, c sa circonférence; $\frac{1}{4}cd$ en sera la superficie, laquelle représentant celle des lames qui s'échappent lorsque la colonne est entière, on aura $\frac{1}{4}cd\sqrt{h}$ pour la quantité d'eau qui sort à chaque instant (445). D'autre part la surface de la colonne sera ch, qui étant multipliée par $\sqrt{\frac{4}{9}h}$, ou par $\frac{2}{3}\sqrt{h}$, donne $\frac{2}{3}ch\sqrt{h}$ pour la somme des vîtesses de l'eau qui tend à remplacer la colonne; d'où l'on tire $\frac{1}{4}cd\sqrt{h} : \frac{2}{3}ch\sqrt{h} :: \frac{1}{4}d : \frac{2}{3}h$, *qui montre que la vîtesse de l'eau à la sortie du tuyau, est à la vîtesse de*

---

formule des dépenses effectives qui s'accordassent avec les expériences, à employer pour les rapports de ces dépenses aux dépenses théoriques des nombres qui reviennent à 0,969 et 0,983, et que je crois beaucoup trop grands (voy. les *Nouv. principes d'hydraulique*, t. 1, p. 198 et suiv.) En effet, on a vu dans le § 3 de la note (*ck*) que quand un orifice en mince paroi n'avait qu'une très-petite charge sur son sommet, ce qui suppose la contraction à la partie supérieure fort petite, la dépense effective était exprimée par les 0,65 environ de la dépense théorique. Il n'est pas vraisemblable que quand cette contraction à la partie supérieure est supprimée, celle sur le fond et les côtés demeurant à-peu-près la même, le rapport 0,65 passe à la valeur 0,97. Les nombres 0,737 et 0,757 auxquels on est conduit par la théorie précédente me semblent s'accorder mieux avec toutes les notions bien constatées sur ces matières. Ils doivent d'ailleurs varier un peu avec le rapport de la hauteur à la largeur de l'orifice.

On trouve encore quelques expériences de Poleni sur un genre d'écoulement analogue à celui dont il s'agit dans le traité *de Motu aquæ mixto*, lib. 1. Elles ne peuvent servir pour évaluer la dépense effective des reversoirs, mais elles montrent que ces dépenses sont proportionnelles à la puissance $\frac{3}{2}$ de la hauteur de l'eau dans le réservoir, ce qui s'accorde avec la théorie.

Le résultat de cette note est donc que la dépense d'un orifice rectangulaire ouvert par en haut, en nommant l sa largeur et z la charge d'eau sur le fond de cet orifice, est exprimée par $2{,}5261\ lz^{\frac{3}{2}}$, quand on peut négliger la contraction; et qu'il faut prendre à-peu-près les 0,74 de cette quantité quand il y a contraction sur les côtés et sur le fond, et les 0,76 quand il y a contraction sur le fond seulement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

celle qui s'empresse à la remplacer, comme le quart du diamètre de l'orifice est aux deux tiers de la hauteur de l'eau.

Si l'on multiplie les deux derniers termes de la proportion précédente par $\frac{3}{2}$ pour les rendre plus simples, on aura $\frac{1}{4}d : \frac{2}{3}h :: \frac{3}{8}d : h$, qui montre encore *que la vitesse de l'eau de la colonne est à la vitesse de celle qui s'empresse à la remplacer, comme les trois huitièmes du diamètre sont à la hauteur de l'eau.* Ainsi faisant abstraction de tout accident, on voit que *quand la hauteur de l'eau sera plus grande que les trois huitièmes du diamètre de l'orifice, sa dépense sera complète, et qu'au contraire lorsque la hauteur de l'eau sera moindre que les trois huitièmes du diamètre, l'orifice ne sera pas rempli.*

Pour que la dépense d'un orifice soit complète, il faut avoir plus d'égard au rapport du diamètre de l'orifice à la hauteur de l'eau, qu'à celui de la superficie du même orifice à celle du fond du vaisseau.

529. Ceux qui ont écrit jusqu'ici sur le mouvement des eaux, ont insinué qu'il fallait que *l'orifice fût fort petit par rapport à la base du vaisseau*, pour que la vîtesse de l'eau pût être exprimée par la racine de sa hauteur, sans faire nulle mention du rapport que cette hauteur devait avoir avec le diamètre de l'orifice. Cependant c'est de ce rapport qu'elle doit dépendre, car un orifice pourrait être fort petit eu égard à la superficie du fond, et le diamètre fort grand par rapport à la hauteur de l'eau : alors la condition qu'on exige se rencontrerait sans que la règle eût lieu. Cela vient, comme je l'ai déja dit (432), de ce qu'on s'est imaginé que c'était la colonne sans cesse renouvelée par l'eau supérieure qui fournissait à la dépense, et qu'il fallait seulement prendre garde que l'orifice fût assez petit pour empêcher que cette colonne ne sortît tout-à-la-fois, comme s'il était possible que l'eau d'alentour restât soutenue sans se répandre dans le vide qu'elle laisserait.

Lorsque l'eau n'a qu'une hauteur médiocre, et qu'elle coule par un orifice horizontal, il se forme un vide au-dessus de l'orifice qui empêche que la dépense soit complète.

530. Pour voir si l'expérience serait conforme à la règle précédente, je me suis servi d'une cuvette, dont le fond avait environ un pied de superficie, percé d'un trou de 3 lignes de diamètre. L'ayant entretenue pleine d'eau sur la hauteur de 4 pouces, j'ai répandu dessus un peu de sciure de bois, laissant couler l'eau pendant quelque temps, sans y rien ajouter, pour ne point l'agiter : sa surface est restée sans aucun mouvement sensible, mais on voyait l'eau du fond couler vers l'orifice, et toute celle du vaisseau concourir à la dépense, ce qu'on apercevait par le mouvement des petits corps que j'y avais plongés. Mais ce qui m'a fort surpris, c'est de voir que lorsque sa surface fut descendue d'environ 2 pouces, il s'est formé un petit espace vide qui avait la figure d'un tuyau, lequel se terminait en pointe par le bas; à mesure que l'eau baissait, ce vide devenait plus sensible, et son extrémité étant parvenue à l'orifice, il s'est fait un trou dans le milieu de l'eau, sa surface étant encore à 12 ou 13 lignes du fond.

J'ai répété la même expérience plusieurs fois, tantôt en laissant vider le vaisseau sans y rien ajouter, tantôt en entretenant la surface à la dis-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tance du fond où le vide était entièrement formé. Quoique la hauteur de l'eau fût bien plus de trois huitièmes du diamètre de l'orifice, la dépense n'était jamais complète. Ce qu'on trouvera de singulier, c'est qu'en agitant l'eau, le vide n'en subsistait pas moins, allant en serpentant d'une largeur assez uniforme depuis en haut jusqu'à la sortie du trou. Quant à l'eau qui sortait par l'orifice, et qui formait une petite nappe circulaire, on voyait qu'elle venait de toutes les parties du vaisseau fournir à la dépense.

J'ai aussi fait cette expérience avec des vaisseaux beaucoup plus grands, m'en étant servi dont le fond avait jusqu'à huit pieds de superficie, percé dans le milieu d'un orifice d'un pouce de diamètre. J'ai toujours remarqué que lorsque la surface de l'eau n'était qu'à 5 ou 6 pouces du fond, le vide traversait l'orifice, et que l'eau à sa sortie formait encore une nappe circulaire.

531. Ne pouvant concilier ces expériences avec le raisonnement des articles 527 et 528, je me suis imaginé qu'il fallait que quelque cause étrangère à l'action naturelle de l'eau s'en mêlât, et que ce ne pouvait être que le poids de l'air qui répondait au-dessus de l'orifice, lequel donnait, dans un certain cas, à la colonne d'eau plus de force pour descendre que celle qui l'environne n'en pouvait avoir pour la remplacer.

Pour savoir si ma conjecture était juste, j'ai mis un bout d'ais flotter sur l'eau avant que de la laisser couler, il ne s'est point formé de vide, et aussitôt que je l'ai ôté, il s'en est fait un comme auparavant. Si je le posais de nouveau, l'eau se réunissait, parce que la planche étant beaucoup plus grande que l'orifice, avait un trop grand nombre de points d'appui pour que l'air supérieur pût prendre aucun avantage sur celui de dessous. Ainsi il paraît que *ce n'est que dans le vide où il arrive que la dépense d'un orifice pratiqué au fond d'un vaisseau sera complète lorsque les trois huitièmes de son diamètre seront un peu moindres que la hauteur de l'eau, à moins qu'on ne fasse flotter un corps au-dessus de l'orifice* (*cn*).

Pl. 7, Fig. 68. Pour que la dépense d'un orifice horizontal, pratiqué à l'extrémité d'un tuyau recourbé, soit complète, il faut, lorsque ce tuyau répond au

532. Quand un orifice horizontal NO est pratiqué à l'extrémité d'un tuyau recourbé EPLM, la hauteur IQ de la surface GH de l'eau, par rapport au diamètre de l'orifice, est indifférente, parce que la partie recourbée TPVLM du tuyau étant remplie, il ne peut arriver que l'air qui répond au niveau GH sorte par l'orifice. Cependant, quoique l'eau soit

---

Remarque sur les art. 527 et suiv.

(*cn*) Le lecteur ne doit point s'arrêter sur les art. 527 et suivants. La règle donnée dans le premier est absolument fausse. On n'insistera point sur les raisonnements contenus dans les autres. Ils concernent une matière peu utile dans la pratique, et qui n'a pas encore été suffisamment étudiée. Les règles données précédemment pour le calcul de la dépense des orifices supposent essentiellement que la surface du fluide dans le vase demeure horizontale, et que ce fluide ne se divise point.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

entretenue au niveau GH, il ne faut pas conclure que sa vîtesse sera toujours exprimée par la racine de la hauteur IQ, parce que le diamètre de l'orifice NO, celui de la crapaudine XY, la hauteur IQ, et la hauteur IK du niveau de l'eau au-dessus du fond AD du réservoir, pourraient être tels que l'eau ne suffirait pas à la dépense de l'orifice. Car de quelque hauteur que soit la ligne IQ, le réservoir n'en fournira jamais plus que celle qui peut sortir par le trou XY, et pour peu qu'on y fasse attention, on verra que *pour que le jet agisse pleinement, il faut que le produit du quarré du diamètre NO de l'ajutage, et de la racine de la hauteur IQ du niveau du réservoir au-dessus de cet ajutage, soit au plus égal au produit de la racine de la hauteur GA ou IK de l'eau du réservoir par le quarré du diamètre XY de la crapaudine; c'est-à-dire que ces quatre termes doivent être réciproquement proportionnels.*

fond d'un réservoir, que la racine de la hauteur de l'eau dans le réservoir, celle de la hauteur du niveau de l'eau au-dessus de l'orifice, le quarré du diamètre de la crapaudine, et celui du diamètre de l'orifice, soient réciproquement proportionnels.

Il ne faut donc plus s'étonner s'il arrive quelquefois que des réservoirs fort élevés au-dessus d'un ajutage ne forment qu'un jet d'une hauteur médiocre, et fort éloignée de la proportion qu'il devrait avoir, eu égard à la résistance de l'air, parce que le passage de l'eau par la crapaudine étant toujours beaucoup plus petit que le cercle du tuyau de conduite, il n'en faut pas davantage pour empêcher que ce tuyau ne soit toujours plein, et pour être cause que l'eau restera à une certaine hauteur RS, parce que la crapaudine n'en fournira qu'une certaine quantité, qui fera que la dépense de l'orifice sera relative à $\sqrt{RP}$, et non pas à $\sqrt{IQ}$. Nous reprendrons ce sujet dans le second volume, en parlant de la distribution des eaux pour la décoration des jardins.

533. Quand le sommet d'un pertuis rectangulaire se trouve au-dessous du niveau de l'eau, comme MKLN, la somme de toutes les vîtesses des lames d'eau qui en sortiront, pouvant être exprimée par les éléments du segment parabolique FHIG, il y en a un moyen OT, qui, étant multiplié par la hauteur HF, donnera un produit égal à la superficie de ce segment. Comme la position de cet élément déterminera la hauteur moyenne EO, voici comment on pourra la trouver.

Manière de connaître la vitesse moyenne et la dépense d'un pertuis rectangulaire, dont le sommet est au-dessous du niveau de l'eau.

Pl. 7, Fig. 66.

Nommant EF a, EH b, HF c, et la hauteur moyenne EO x; la somme de toutes les vîtesses dont sont capables les lames sur la hauteur EF sera $\frac{2}{3}a\sqrt{a}$, et la somme de toutes les vîtesses qui règnent sur la hauteur EH sera $\frac{2}{3}b\sqrt{b}$ (520). Par conséquent $\frac{2}{3}(a\sqrt{a}-b\sqrt{b})$ exprimera la somme de toutes les vîtesses des lames qui sortiront du pertuis, laquelle étant égale au produit de la vîtesse moyenne $\sqrt{EO}=\sqrt{x}$ par la hauteur $HF=c$, on aura $\frac{2}{3}(a\sqrt{a}-b\sqrt{b})=c\sqrt{x}$, qui étant quarré donne $\frac{4}{9}(a^3-2ab\sqrt{ab}+b^3)=c^2x$, ou $x=\frac{4}{9}\cdot\frac{a^3-2ab\sqrt{ab}+b^3}{c^2}$; d'où l'on tire $9:4::\frac{a^3-2ab\sqrt{ab}+b^3}{c^2}:x$; *ce qui montre que* 9 *est à* 4, *comme la somme des cubes de la plus grande et de la plus petite hauteur de l'eau*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par rapport au pertuis, moins le double de la racine quarrée du produit de ces deux cubes, la différence divisée par le quarré de la hauteur du pertuis, est à la moyenne qu'on cherche (*co*).

Si la hauteur EF $= a$ était de 8 pieds, la hauteur EH $= b$ de 6, la hauteur HF $= c$ serait de 2 pieds. Alors on aura 512 pour le premier cube, et 216 pour le second, dont le produit donne 110592, duquel extrayant la racine quarrée on la trouvera de 332 $\frac{11}{20}$ dont le double est de 665 $\frac{1}{10}$, qui étant soustrait de 728 (somme des deux cubes), reste 62 $\frac{9}{10}$; qui étant divisé par 4 quarré de la hauteur du pertuis, donne 15 $\frac{29}{40}$ pour le troi-

---

(*co*) La formule qui exprime la hauteur x, à laquelle est due la vîtesse moyenne de l'eau dans l'orifice rectangulaire, est plus commode pour le calcul sous cette forme $x = \frac{4}{9}\left(\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{c}\right)^2$. On trouve une table des puissances $\frac{3}{2}$ des nombres dans le *Mémoire sur le jaugeage des eaux courantes* par M. de Prony.

La vîtesse moyenne est $\frac{2}{3}\sqrt{2g} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{c}$. En nommant l la largeur KL de l'orifice, son aire sera cl, et on aura pour le produit par seconde $\frac{2}{3} l \sqrt{2g}(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}})$. Cette formule, en nommant k la charge sur le centre de l'orifice, ce qui donne $k = \frac{1}{2}(a+b)$, et posant pour abréger $A = \frac{2}{3} \cdot \frac{k}{c}\left\{\left(1+\frac{c}{2k}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1-\frac{c}{2k}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$, prend la forme (voyez le mémoire cité, page 8) $A\, cl\sqrt{2gk}$.

Elle fournit alors le moyen le plus prompt de calculer la dépense par seconde d'un orifice rectangulaire, dont la largeur l, la hauteur c, et la charge d'eau k qui a lieu sur son centre sont connues. En effet, le facteur A, dont le calcul paraît d'abord laborieux, et dont la valeur dépend du rapport $\frac{c}{2k}$, a la propriété de ne pouvoir varier que dans des limites très-resserrées; car on a $A = 1$ quand k est infini par rapport à c, et $A = 0{,}94281$ quand $k = \frac{1}{2}c$. Sans pouvoir commettre d'erreur sensible, on se trouvera dispensé dans tous les cas de calculer la valeur de A en faisant usage de la table suivante :

$\frac{c}{2k}$	A.	Log. A.
0,0	1,00000	0,00000
0,1	0,99958	$\bar{1}$,99982
0,2	0,99832	$\bar{1}$,99927
0,3	0,99619	$\bar{1}$,99834
0,4	0,99312	$\bar{1}$,99700
0,5	1,98904	$\bar{1}$,99521
0,6	0,98383	$\bar{1}$,99292
0,7	0,97724	$\bar{1}$,99000
0,8	0,96896	$\bar{1}$,98631
0,9	0,95828	$\bar{1}$,98149
1,0	0,94281	$\bar{1}$,97442

Il faudra ensuite appliquer au résultat donné par la formule $A\, cl\sqrt{2gk}$, qui exprimera la dépense naturelle ou théorique de l'orifice, la correction relative à la contraction de la veine, d'après ce qu'on a vu dans la note (*ck*), et non point d'après le contenu de l'art. 535 du texte.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sième terme de la proportion. On dira donc : comme 9 est à 4, ainsi $15\frac{29}{40}$ est à la hauteur qu'on demande, qu'on trouvera de 6 pieds 11 pouces $10\frac{5}{5}$ lignes, qui répond dans la table à une vîtesse de 20 pieds 5 pouces 8 lignes 2 points.

Autre manière plus simple que la précédente, en se servant de la table dont les chutes donnent les vîtesses.

534. Voici encore une autre manière beaucoup plus simple de trouver la vîtesse moyenne de l'eau d'un pertuis rectangulaire. *Il faut chercher dans la première table les vîtesses qui répondent à la plus grande et à la plus petite hauteur de l'eau ; multiplier chacune de ces vîtesses par sa chute, soustraire le second produit du premier, prendre les deux tiers de la différence, et diviser cette quantité par la hauteur du pertuis : le quotient donnera la vîtesse qu'on demande.* Ainsi, pour l'exemple précédent, on trouvera que les vîtesses qui répondent aux chutes de 8 et de 6 pieds donnent pour la première 21 pieds 10 pouces 10 lignes 9 points, et pour la seconde 18 pieds 11 pouces 8 lignes, lesquelles étant multipliées chacune par leur chute, il viendra 61 pieds 5 pouces 2 lignes pour la différence des produits, dont il faut prendre les deux tiers, qui étant divisés par deux pieds, hauteur du pertuis, donnent 20 pieds 5 pouc. 8 lign. 6 points, pour la vîtesse moyenne par seconde; qui est, à 4 points près, la même que celle que nous avons trouvée par le règle précédente.

535. Supposant que la largeur du pertuis soit de 1 pied 6 pouces, sa superficie sera de 3 pieds quarrés, qui, étant multipliés par la vîtesse moyenne, donnent 61 pieds cubes 5 pouces 1 ligne 6 points, pour le volume d'eau de la dépense naturelle de ce pertuis par seconde.

Application de la règle précédente pour mesurer la dépense du même pertuis.

Pour avoir le rapport du déchet à la dépense naturelle, il faut, selon l'article 514, multiplier le numérateur de la fraction $\frac{3}{40}$ par 21, moitié de la somme des dimensions du pertuis réduites en pouces, et le dénominateur par 432 pouces, superficie du pertuis : on aura $\frac{7}{1920}$ pour le rapport que l'on demande, d'où l'on tire $\frac{1913}{1920}$ pour celui de la dépense effective à la dépense naturelle. On dira donc, comme le dénominateur est au numérateur, ainsi la dépense naturelle qu'on vient de trouver est à la dépense effective.

Lorsque les pertuis ont plus d'un pied de superficie, comme sont ordinairement ceux des écluses, la dépense effective ne différant que très-peu de la dépense naturelle, on peut se dispenser d'avoir égard au déchet, parce que plus ces pertuis sont grands, et plus leurs circuits sont petits par rapport à leurs superficies (*cp*).

La dépense d'un pertuis vertical

536. On peut encore considérer la masse d'eau qui sort par seconde

---

Remarque sur l'art. 535.

(*cp*) Il est peut-être superflu de remarquer encore ici que cet article, conformément à ce qui a été dit au commencement de la note (*ck*), est absolument fautif, et que c'est d'après le contenu de cette note que les effets de la contraction doivent être évalués.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

peut être considérée selon la méthode de la géométrie des indivisibles.

Pl. 7, fig. 66.

du même pertuis, comme égale au volume d'un solide composé d'une infinité de plans, compris sous les éléments VX de sa superficie, et sous les ordonnées OT correspondantes du segment parabolique FHIG, pourvu que le paramètre de la parabole soit de 60 pieds, ou que la plus grande ordonnée FG soit égale à la vîtesse par seconde qu'un corps peut acquérir en tombant de la hauteur EF (470).

La dépense d'un pertuis vertical est égale à celle d'un pertuis horizontal de même superficie, qui répondrait à un réservoir qui aurait pour hauteur la hauteur moyenne.

537. Quand on a une fois trouvé la hauteur moyenne EO, on peut supposer que le fond du vaisseau passe par le point O, comme fait ici le plan PQRS; que ce fond est percé d'un trou horizontal *mkln* égal au pertuis, et résoudre tous les cas qu'on peut proposer pour les pertuis verticaux de la même manière que s'ils étaient horizontaux, en suivant ce qui a été enseigné dans la septième et la huitième section.

Ce n'est que par le calcul intégral que l'on peut parvenir a mesurer la dépense des pertuis verticaux qui ne sont point rectangulaires.

538. Comme ce n'est que par le calcul intégral que l'on peut parvenir à connaître la somme de tous ces plans, je ne puis me dispenser d'y avoir recours pour résoudre les questions que l'on va voir, les ayant tentées vainement par la méthode des anciens.

Bien de gens qui n'entendent point ce calcul seront peut-être peu satisfaits, de voir que j'en ai rempli tout le reste de cette section et la suivante : mais c'est une occasion de leur en faire sentir l'utilité, dans les choses mêmes qui sont de pure pratique. Cependant comme les nouveaux calculs deviennent fort à la mode, et qu'on en connaît plus que jamais la nécessité, je me flatte que ceux qui ne les ont pas familiers seront bien aises d'en trouver une application aussi étendue que celle que je donne, n'ayant rien négligé pour me faire entendre. J'ai même cité les endroits de l'*Analyse démontrée du père Reynau* où l'on trouve expliquées les méthodes dont je me sers, afin que les commençants puissent y avoir recours. Quant à ceux qui voudront se contenter de ce qui peut leur être utile, j'ai tâché de les satisfaire en rapportant les règles que l'on déduit des mêmes calculs, dont ils pourront faire usage avec la confiance que la plupart ont pour les maximes de la géométrie-pratique, quoiqu'ils ignorent la théorie d'où elles ont été tirées.

Quand on connaîtra la dépense d'un pertuis vertical en pieds, ou pouces cubes, il faudra la diviser par la superficie du pertuis, pour avoir la vîtesse moyenne.

539. Lorsqu'on sera parvenu, par quelque moyen que ce soit, à connaître la dépense d'un pertuis vertical, quelle qu'en soit la figure, divisant cette dépense par la superficie du pertuis, on aura la vîtesse moyenne pendant le temps de l'écoulement.

Application du calcul intégral à la mesure de la dépense des orifices rectangulaires et verticaux.

Figure 62.

540. Pour connaître, indépendamment de ce qui précède, le volume d'eau que dépensera le pertuis rectangulaire ABCD, dont le sommet BC répond au niveau de l'eau, nous nommerons a la vîtesse DG pendant la durée de l'écoulement, b la base AD ou l'élément HE du rectangle, h la hauteur CD, p le paramètre de la parabole, y l'ordonnée EF, x l'abscisse CE. Ainsi Ee sera dx, qui étant multiplié par y et le produit par b, donne $by\,dx$ pour l'élément différentiel du solide. Comme on tire de l'équation

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la parabole $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, substituant la valeur d'y, on aura $bp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, dont l'intégrale donne $\frac{2}{3} bp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$, ou $\frac{2}{3} bp^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}}$ lorsque $x = h$. Et comme l'on a, dans ce cas, $ph = a^2$, ou $p^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} = a$, on aura par conséquent $\frac{2}{3} abh = \frac{2}{3} a \times bh$, qui montre (comme dans l'article 524) *qu'il faut multiplier la superficie du pertuis par les deux tiers de la plus grande vitesse.*

541. Pour avoir de même le volume d'eau que dépensera le pertuis MKLN, nous nommerons FG a, MN ou VX b, EH c, HF h, EF $n = c + h$, HI q, le paramètre de la parabole p, l'ordonnée OT y, HO x: ainsi Oo sera dx, qui étant multiplié par y et le produit par b, donne $bydx$ pour la différentielle du solide.

Pl. 7, Fig. 66. Pour avoir la dépense d'un pertuis rectangulaire placé au-dessous du niveau de l'eau, il faut multiplier la plus grande et la plus petite vîtesse, chacune par leur chûte, soustraire le second produit du premier, et multiplier la différence par les deux tiers de la largeur du pertuis.

Comme on tire de l'équation $y^2 = cp + px$, cette autre $x = \frac{y^2}{p} - c$, dont la différentielle est $dx = \frac{2ydy}{p}$, substituant la valeur de dx dans $bydx$, on aura $\frac{2by^2 dy}{p}$, dont l'intégrale donne $\frac{2by^3}{3p} = \frac{2b}{3p} (cp + px) \sqrt{(cp + px)}$. Supposant $x = 0$ (*), il restera $\frac{2}{3} bc\sqrt{cp} = \frac{2}{3} bcq$, parce que $\sqrt{cp} = q$. Or si l'on ajoute $\frac{2}{3} bcq$ avec le signe contraire à l'expression du solide, on aura $\frac{2}{3} \{ b(c+x)\sqrt{p(c+x)} - bcq \}$ pour l'intégrale complète; et comme on a $c + x = n$, et $\sqrt{p(c+x)} = a$, lorsque $x = h$, le solide sera alors exprimé par $\frac{2}{3} (abn - bcq) = \frac{2}{3} b(an - cq)$; qui montre *qu'il faut multiplier la plus grande et la plus petite vîtesse, chacune par leur chute, soustraire le second produit du premier, et multiplier la différence par les deux tiers de la largeur du pertuis.* Ce qui est bien évident, puisque si l'on divise $\frac{2}{3} b(an - cq)$ par bh, superficie du pertuis (539), on aura $\frac{2}{3} \cdot \frac{an - cq}{h}$ pour la vîtesse moyenne, qui se trouve exprimée par les mêmes grandeurs dont on a fait mention dans l'article 534.

542. Ayant un triangle rectangle ABD, dont la hauteur BA sert d'axe à une parabole BIC, on demande l'expression du solide formé par la somme de tous les plans compris sous les éléments FG du triangle, et sous les ordonnées correspondantes GI de la parabole. Nommant AC a, AB b, BA c, le paramètre de la parabole p, GI y, et BG x; Gg sera dx, et à cause des triangles semblables BAD, BGF, on aura $c : b :: x : \frac{bx}{c} = \text{GF}$, qui étant multiplié par GI $= y$, et le produit par Gg $= dx$, donne $\frac{bxydx}{c}$ pour l'élément différentiel du solide que l'on cherche.

Figure 63. La dépense d'un pertuis triangulaire, dont la base est horizontale, et dont le sommet répond au niveau de l'eau, se trouve en multipliant la superficie du triangle par les deux cinquièmes de la plus grande vîtesse de l'eau pendant la durée de l'écoulement.

Comme la propriété de la parabole donne $px = y^2$, ou $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$, substituant la valeur d'y dans $\frac{bxydx}{c}$, on aura $\frac{bp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx}{c}$, dont l'intégrale donne $\frac{2bp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{5c}$, ou $\frac{2bx^2 y}{5c}$ après avoir mis y en la place de $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, ou $\frac{2abc}{5}$,

(*) Analyse démontrée, art. 664, p. 726.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lorsque $x = c$, et $y = a$; qui montre que *lorsqu'on aura un pertuis triangulaire dont le sommet aboutira à la surface de l'eau, il faut, pour avoir sa dépense, prendre les deux cinquièmes du parallélipipède compris sous la hauteur et la base du triangle, et sous la ligne qui exprimera la plus grande vîtesse de l'eau pendant la durée de l'écoulement.*

Pl. 7, Fig. 64.

Quand la base du pertuis triangulaire répond au niveau de l'eau, on en aura la dépense en multipliant sa superficie par les quatre quinzièmes de la plus grande vîtesse.

543. Si le triangle était disposé d'un sens opposé au précédent, on aurait, à cause des triangles semblables, $AB = c : BD = b :: AG = c - x : GF = b \cdot \frac{c-x}{c}$, qui étant multiplié par ydx, ou par $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, donne $bp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{bp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx}{c}$, dont l'intégrale donne $\frac{2}{3} bp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2bp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{5c}$. Mettant y à la place de $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, on aura $\frac{2}{3} byx - \frac{2byx^2}{5c}$, ou $\frac{2}{3} abc - \frac{2}{5} abc$, quand $x = c$ et $y = a$, qui étant réduite donne $\frac{4}{15} abc$, ce qui montre que *lorsque la base d'un pertuis triangulaire répond au niveau de l'eau, sa dépense est égale aux quatre quinzièmes du parallélipipède compris sous la base et la hauteur du triangle, et sous la ligne qui mesure la plus grande vîtesse de l'eau pendant la durée de l'écoulement.*

Preuve de l'exactitude des calculs précédents.

544. Pour être convaincu que $\frac{2}{5} abc$ et $\frac{4}{15} abc$ expriment exactement la dépense des deux pertuis précédents, en leur supposant les mêmes dimensions, il suffit de montrer que leur somme est égale au produit d'un rectangle compris sous les mêmes dimensions, et sous les deux tiers de la plus grande vîtesse (524, 540); ce qui est bien évident, puisque ces deux termes étant réduits au même dénominateur, donnent $\frac{6}{15} abc$ et $\frac{4}{15} abc$, dont la somme est $\frac{10}{15} abc$ ou $\frac{2}{3} abc$.

Comme les triangles sont égaux lorsqu'ils ont la même base et la même hauteur, dans quelque situation que soient leurs côtés par rapport à leurs bases, on voit que quand ceux qui expriment la superficie du pertuis ne seraient pas rectangles, on pourra toujours les supposer tels, afin que leurs éléments soient perpendiculaires à l'axe de la parabole. On peut aussi ajouter que si l'on avait plusieurs pertuis triangulaires, semblablement disposés et de même hauteur, on pourrait les considérer comme n'en composant qu'un seul qui aurait pour base la somme de celle des triangles, et la hauteur commune.

Lorsqu'on a deux pertuis triangulaires, semblables et égaux, situés dans un sens opposé, répondant au niveau de l'eau, leurs dépenses sont dans le rapport de 3 à 2.

Figures 69 et 70.

545. Il suit que deux pertuis triangulaires qui auraient les mêmes dimensions, mais situés d'un sens opposé, dépenseront dans le même temps des quantités d'eau bien différentes, puisqu'elles seront l'une à l'autre comme $\frac{2}{5}$ est à $\frac{4}{15}$, ou comme 3 est à 2.

Je n'ai point rapporté d'application numérique des deux cas précédents, ni n'en donnerai point dans la suite; celles qui précèdent étant plus que suffisantes pour contenter ceux qui ont peine à comprendre les choses sans le secours des nombres; ils doivent même me tenir quelque compte d'avoir eu la patience de m'être conformé à leur goût.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Formule tirée des articles précédents pour la dépense des pertuis qui ont la figure d'un trapèze répondant au niveau de l'eau.

546. Il suit que lorsque les pertuis seront des trapèzes, dont les côtés BC, AD seront parallèles, ayant leur sommet au niveau de l'eau, on aura la dépense du premier (fig. 69) *en multipliant les deux tiers du rectangle EBCF, plus les deux cinquièmes de la somme des triangles AEB, FCD, par la plus grande vitesse de l'eau* (540, 542a).

547. On aura de même la dépense du second (fig. 70), *en multipliant les deux tiers du rectangle BEFC, plus les quatre quinzièmes de la somme des triangles AEB, FDC, par la plus grande vitesse.*

Formule pour mesurer la dépense d'un pertuis triangulaire, dont le sommet est au-dessous de l'eau.

PLANCHE 7. FIGURES 71 et 72.

548. Si les deux triangles CEA ne répondaient pas au niveau de l'eau, que le sommet du premier et la base du second fussent au-dessous du sommet B de la parabole, il faudrait alors multiplier les éléments de ces triangles par les ordonnées correspondantes du segment parabolique AEFD. Nommant le paramètre de la parabole p, AD a, la base CA ou CE b, BE c, EA h, BA n, EF q, EH x, HI y; on aura pour la figure 71 (à cause des triangles semblables) $h:b::x:\frac{bx}{h}=$ GH, qui étant multiplié par ydx, donne $\frac{bxydx}{h}$ pour la différentielle du solide. Et comme on a $y^2=p(c+x)$, ou $x=\frac{y^2}{p}-c$, dont la différentielle est $dx=\frac{2ydy}{p}$, mettant les valeurs de x et de dx dans $\frac{bxydx}{h}$, il viendra $\frac{2by^4dy-2pbcy^2dy}{p^2h}$ dont l'intégrale est $\frac{2by^5}{5p^2h}-\frac{2bcy^3}{3ph}$; et mettant à la place de y^5 et de y^3 leurs valeurs, il vient $\frac{2b}{5h}(c+x)^2\sqrt{pc+px}-\frac{2bc}{3h}(c+x)\sqrt{pc+px}$; et supposant $x=0$(*), il reste $\frac{2bc^2}{5h}\sqrt{pc}-\frac{2bc^2}{3h}\sqrt{pc}=-\frac{4bc^2q}{15h}$, qui étant ajouté avec le signe contraire, donne

$$\frac{2b}{5h}(c+x)^2\sqrt{pc+px}-\frac{2bc}{3h}(c+x)\sqrt{pc+px}+\frac{4bc^2q}{15h}.$$

Lorsque x deviendra égale à h, on aura $c+x=n$, et $\sqrt{pc+px}=a$, c'est pourquoi, en substituant ces valeurs, il viendra $\frac{b}{15h}(6an^2+4c^2q-10acn)$, pour l'expression la plus simple du solide dont il s'agit, ce qui montre que *pour avoir la dépense d'un pertuis triangulaire, dont le sommet est au-dessous du niveau de l'eau, il faut premièrement multiplier la plus grande vitesse AD pendant la durée de l'écoulement par le sextuple du quarré de la hauteur BA de l'eau; secondement, multiplier la plus petite vitesse EF pendant la durée de l'écoulement par le quadruple du quarré de la hauteur BE du niveau de l'eau au-dessus du sommet du pertuis, et ajouter ces deux produits ensemble; troisièmement, multiplier la plus grande vitesse AB par le décuple du rectangle compris sous toute*

FIGURE 71.

(*) Analyse démontrée, art. 664, p. 726.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la hauteur BA de l'eau et sous la partie BE, qui marque son niveau au-dessus du sommet du pertuis; soustraire ce dernier produit de la somme des deux précédents, multiplier la différence par la base CA du pertuis, et diviser ce dernier produit par le quindécuple de la hauteur EA du pertuis (*cq*).

Pl. 7, Fig. 71.

Pour qu'on soit convaincu de la justesse de la formule précédente, nous allons la découvrir d'une autre façon. Pour cela, il faut du point B mener la ligne BK parallèle à CE, prolonger EF et CD pour former les triangles BLE, BKA, et le parallélogramme KLCE. Regardant ces trois figures comme des pertuis, si l'on retranche de la dépense du plus grand KBA celle des deux autres LBE et KLEC, la différence sera la dépense du premier CEA.

Les triangles de cette figure étant semblables, on aura $EA=h:AC=b :: BE=c:EL=\frac{bc}{h}$; d'autre part $EA=h:AC=b :: BA=n:AK=\frac{bn}{h}$. Ainsi le triangle BAK donnera $\frac{2abn^2}{5h}$, le triangle BEL $\frac{2bc^2q}{5h}$ (540), et le parallélogramme KLCE $\frac{2bc}{3h}(an-cq)$ (541). Si l'on soustrait ces deux produits du premier, on aura, après la réduction, $\frac{b}{15h}(6an^2+4c^2q-10anc)$, qui est la même chose que la formule précédente.

Autre formule pour mesurer la même chose lorsque le sommet du triangle est en bas.

Figure 72.

549. Quant au second triangle CEA (fig. 72), nous servant des mêmes lettres, on aura $AE=h:EC=b :: AH=h-x:HG=\frac{bh-bx}{h}$, qui étant multiplié par ydx, donne $\frac{bhydx-bxydx}{h}$; et tirant de l'équation à la parabole $x=\frac{y^2}{p}-c$, et $dx=\frac{2ydy}{p}$ pour substituer les valeurs de x et de dx, on aura $\frac{2by^2dy}{p}-\frac{2by^4dy}{p^2h}+\frac{2bcy^2dy}{ph}$, dont l'intégrale est $\frac{2by^3}{3p}+\frac{2bcy^3}{3ph}-\frac{2by^5}{5p^2h}$ pour l'expression du solide. Or si l'on substitue les valeurs d'y^3 et d'y^5, on aura $\frac{2b}{3}(c+x)\sqrt{pc+px}+\frac{2bc}{3h}(c+x)\sqrt{pc+px}-\frac{2b}{5h}(c+x)^2\sqrt{pc+px}$. Supposant $x=0$, il reste $\frac{2bc}{3}\sqrt{pc}+\frac{2bc^2}{3h}\sqrt{pc}-\frac{2bc^2}{5h}\sqrt{pc}=\frac{2bcq}{3}+\frac{2bc^2q}{3h}-\frac{2bc^2q}{5h}$; qui étant ajoutée à la grandeur pré-

---

Formule pour le calcul de la dépense d'un orifice triangulaire quand le sommet est en haut.

(*cq*) Le calcul de cette formule sera plus commode, en la mettant sous cette forme $\frac{2b\sqrt{2g}}{15h}(3n^{\frac{5}{2}}+2c^{\frac{5}{2}}-5cn^{\frac{3}{2}})$, où l'on se rappellera que b est la base du triangle, h sa hauteur, c la hauteur de l'eau sur son sommet, et n la hauteur de l'eau sur sa base. La hauteur à laquelle est due la vîtesse moyenne est exprimée par $\frac{16(3n^{\frac{5}{2}}+2c^{\frac{5}{2}}-5cn^{\frac{3}{2}})^2}{225(n-c)^4}$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cédente avec des signes contraires, donne $\frac{2abhn}{3h}+\frac{2abcn}{3h}-\frac{2abn^2}{5h}+\frac{2bc^2q}{5h}-\frac{2bchq}{3h}$ pour l'intégrale complète, lorsque $x=h$ ou que $n=c+h=c+x$, parce qu'on a alors $cp+px=a^2=pn$.

Comme les deux premiers termes ne diffèrent que par les grandeurs h et c, et que les deux derniers se trouvent dans le même cas, ayant $h+c=n$, on aura $\frac{2abhn+2abcn}{3h}=\frac{2abn^2}{3h}$, et $\frac{2bchq}{3h}+\frac{2bc^2q}{3h}=\frac{2bcnq}{2h}$, qui donne après la réduction $\frac{2abn^2}{3h}-\frac{2abn^2}{5h}+\frac{2bc^2q}{5h}-\frac{2bcnq}{3h}$. Réduisant le tout au même dénominateur, on aura enfin cette formule $\frac{b}{15h}(4an^2+6c^2q-10cnq)$; ce qui montre que *pour avoir la dépense d'un pertuis triangulaire disposé d'un sens opposé au précédent, il faut ajouter le produit du quadruple de la plus grande vîtesse AD par le quarré de la plus grande hauteur BA de l'eau, au produit du sextuple de la plus petite vîtesse EF par le quarré de la plus petite hauteur BE de l'eau; il faut ensuite soustraire de cette somme le produit du décuple de la plus petite vîtesse EF par le rectangle compris sous la plus grande hauteur BA de l'eau et sous la plus petite BE, multiplier la différence par la base CE du triangle, et diviser ce dernier produit par le quindécuple de la hauteur EA du même triangle* (*cr*).

Pour montrer encore l'exactitude du calcul précédent, par conséquent la justesse de la formule que nous en avons déduite, il faut prolonger le côté AC jusqu'à la rencontre de la ligne BL menée parallèle à CF, afin d'avoir les triangles semblables ALB et ACE, qui donnent $AE=h:EC=b::AB=n:BL=\frac{bn}{h}$. Si de la dépense du triangle ALB, qui est exprimée par $\frac{4abn^2}{15h}$ (543), on retranche celle du trapèze CLBE qui est exprimée par $\frac{4bc^2q}{15h}+\frac{2bcq}{3}$ (548), on aura $\frac{4abn^2}{15h}-\frac{4bc^2q}{15h}-\frac{2bchq}{3h}$ pour la dépense du triangle ACE, après avoir multiplié le numérateur et le dénominateur du troisième terme par h. Or comme on a $n+c=h$, par conséquent $\frac{2bchq}{3h}=\frac{2bcnq}{3h}-\frac{2bc^2q}{3h}$, si à la place du troisième terme on

Pl. 7, Fig. 72.

(*cr*) On peut écrire la formule de cet article comme il suit : $\frac{2b\sqrt{2g}}{15h}(3c^{\frac{5}{2}}+2n^{\frac{5}{2}}-5nc^{\frac{3}{2}})$, les dénominations étant toujours celles rappelées dans la note précédente. La charge d'eau à laquelle est due la vîtesse moyenne est $\frac{16(3c^{\frac{5}{2}}+2n^{\frac{5}{2}}-5nc^{\frac{3}{2}})^2}{225(n-c)^4}$.

Formule pour le calcul de la dépense d'un orifice triangulaire quand le sommet est au bas.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

met sa valeur, on aura après la réduction $\frac{b}{15h}(4an^2+6c^2q-10cnq)$ qui comprend les mêmes choses que la formule.

On tirera des deux formules précédentes et de l'article 541 les règles qu'il faudra suivre pour avoir la dépense des pertuis qui auront la figure d'un trapèze placé au-dessous du niveau de l'eau, de la même manière que nous en avons usé dans les articles 546, 547; ce qui est fort utile pour mesurer la quantité d'eau qui coule dans les rivières, ruisseaux et aquéducs, en faisant abstraction des frottements qui en retardent la vîtesse. Ainsi l'on voit qu'il ne faut pas regarder ce que je viens de dire sur les pertuis triangulaires comme de simples curiosités : on en trouvera l'application dans la seconde partie de cet ouvrage.

SECTION X.

De la mesure des eaux qui coulent par des orifices verticaux et circulaires.

Pour avoir la dépense d'un pertuis circulaire et vertical, dont le sommet répond au niveau de l'eau, il faut multiplier le quarré de son diamètre par les huit quinziémes de la plus grande vîtesse de l'eau.
Pl. 7, Fig. 73.

550. Cette section va nous donner de nouveaux motifs d'admirer la fécondité de la géométrie de l'infini, à laquelle seule il était réservé de fournir des méthodes pour mesurer la dépense des orifices circulaires et verticaux, ce qui paraît n'avoir été tenté par aucun de ceux qui ont écrit sur le mouvement des eaux.

Pour rendre nos calculs plus commodes, nous n'aurons égard qu'aux solides formés par la somme des produits des éléments d'un demi-cercle, et par les ordonnées correspondantes de la parabole, parce que le diamètre du demi-cercle étant vertical, ce solide sera exactement la moitié de celui qui doit exprimer la dépense du cercle entier.

Ayant un demi-cercle AEB et une demi-parabole AFD qui a pour axe le diamètre AB, on demande quel sera le solide formé par la somme de tous les plans compris sous les éléments LP du demi-cercle, considéré comme la largeur des lames d'eau, et sous les ordonnées correspondantes PM, qui expriment la vîtesse de ces lames pendant un temps déterminé (536).

Nommant a la plus grande ordonnée BD, r le rayon du demi-cercle, x l'abscisse AP; Pp sera dx, et LP sera $\surd(2rx-x^2)$, par la propriété du cercle. D'autre part, celle de la parabole donnera $AB=2r:AP=x :: \overline{BD}^2=a^2:\overline{PM}^2=\frac{a^2x}{2r}$. Supposant pour abréger $\frac{a^2}{2r}=c$, on aura $PM\times PL=\surd cx\times\surd(2rx-x^2)=x\surd(2rc-cx)$, qui étant multiplié par dx, donne $x(2rc-cx)^{\frac{1}{2}}dx$ pour l'élément du solide, qui est une différentielle binome (*), dont l'intégrale est *exacte* ou *finie*, *puis-*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que l'exposant de la changeante, qui est hors du signe, étant augmenté de l'unité, est un multiple de l'exposant de la même changeante sous le signe.

Pour en trouver l'intégrale, nous supposerons $(2rc-cx)^{\frac{1}{2}}=z$, d'où l'on tire $2rc-cx=z^2$, ou $x=2r-\frac{z^2}{c}$, dont la différentielle est $dx=-\frac{2zdz}{c}$. Or si l'on met à la place de x et de dx leurs valeurs dans $xdx\sqrt{(2rc-cx)}$, on aura $\left(2r-\frac{z^2}{c}\right)\times-\frac{2z^2dz}{c}$, ou $-\frac{4rz^2dz}{c}+\frac{2z^4dz}{c^2}$, dont l'intégrale est $-\frac{4rz^3}{3c}+\frac{2z^5}{5c^2}$.

Mais l'on a $z=(2rc-cx)^{\frac{1}{2}}$, donc $z^3=(2rc-cx)^{\frac{3}{2}}$, et $z^5=(2rc-cx)^{\frac{5}{2}}$; si l'on met la valeur de z^3 et de z^5 dans l'intégrale, elle deviendra $\frac{2}{5c^2}(2rc-cx)^{\frac{5}{2}}-\frac{4r}{3c}(2rc-cx)^{\frac{3}{2}}$, que l'on peut mettre sous cette autre forme $\frac{2}{5c^2}(2rc-cx)^2(2rc-cx)^{\frac{1}{2}}-\frac{4r}{3c}(2rc-cx)(2rc-cx)^{\frac{1}{2}}$; ou bien il viendra, en élevant les quantités qui ont des exposants entiers aux puissances dont il sont les exposants, $\left(\frac{8r^2-8rx+2x^2}{5}\right)(2rc-cx)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{8r^2-4rx}{3}\right)(2rc-cx)^{\frac{1}{2}}$. Ajoutant ensemble les grandeurs qui multiplient $(2rc-cx)^{\frac{1}{2}}$, on aura $\left(\frac{8r^2-8rx+2x^2}{5}-\frac{8r^2-4rx}{3}\right)(2rc-cx)^{\frac{1}{2}}$, qui, étant réduit au même dénominateur, donne $\frac{1}{15}(24r^2-24rx+6x^2-40r^2+20rx)(2rc-cx)^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{15}(16r^2+4rx-6x^2)(2rc-cx)^{\frac{1}{2}}$, qui est l'intégrale que l'on cherche. Pour s'en assurer, il n'y a qu'à prendre la différentielle (*), et l'on trouvera $xdx\sqrt{(2rc-cx)}$, toute réduction faite, qui est l'élément différentiel du solide. Pour compléter l'intégrale, il faut supposer $x=0$; alors il restera $-\frac{16}{15}r^2(2rc)^{\frac{1}{2}}$, qui étant retranché donnera pour l'intégrale complète $-\frac{1}{15}(16r^2+4rx-6x^2)\sqrt{(2rc-cx)}+\frac{16}{15}r^2\sqrt{2rc}$.

Si l'on suppose $x=2r$, on aura $-\frac{1}{15}(16r^2+8r^2-24r^2)\sqrt{(2rc-cx)}+\frac{16}{15}r^2\sqrt{2rc}$, qui se réduit à $\frac{16}{15}r^2\sqrt{2rc}$. Substituant à la place de c, sa valeur $\frac{a^2}{2r}$, on aura $\frac{16}{15}r^2\sqrt{\frac{2ra^2}{2r}}=\frac{16}{15}r^2a$; ce qui fait voir que *le solide dont il s'agit est les seize quinzièmes du parallélipidède compris sous le quarré du rayon et sous la plus grande ordonnée, ou, ce qui est la même chose, les quatre quinzièmes du parallélipipède compris sous le quarré du diamètre, et sous la plus grande ordonnée.* Ainsi, pour avoir la dépense entière par seconde d'un orifice circulaire dont le sommet répond au niveau de l'eau, *il faut prendre les huit quinzièmes du produit du quarré du dia-* Pl. 7, Fig. 73.

(*) Analyse des Infiniment petits, article 7.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mètre, par la vitesse dont un corps serait capable par seconde, l'ayant acquise par une chute égale au diamètre de l'orifice.

Pour mesurer la dépense d'un pertuis en demi-cercle, dont la circonférence répond au niveau de l'eau, il faut multiplier le quarré du rayon par les quatre cinquièmes de la plus grande vitesse.

551. Pour avoir le solide formé par la somme des produits des éléments du quart du cercle AEC et des ordonnées correspondantes de la parabole, il faut supposer $x=r$, et mettre cette valeur dans $\frac{1}{15}(6x^2-4rx-16r^2)\sqrt{(2cr-cx)}+\frac{16}{15}r^2\sqrt{2cr}$, il viendra, après la réduction, $\frac{16}{15}r^2\sqrt{2rc}-\frac{14}{15}r^2\sqrt{rc}=\frac{4}{15}\times\overline{AB}^2\times BD-\frac{14}{15}\times\overline{CE}^2\times CF$, parce qu'ayant $c=\frac{a^2}{2r}$, on aura $\sqrt{2cr}=a=BD$, et $\sqrt{cr}=\sqrt{\frac{1}{2}a^2}=CF$; qui montre que *pour avoir la dépense d'un orifice qui aurait la figure d'un quart de cercle, situé comme AEC, il faut multiplier le quarré du diamètre par le quadruple de la vitesse BD, répondant à l'extrémité du même diamètre, soustraire de ce produit celui du quarré du rayon par 14 fois la valeur de la vitesse qui répond au centre, et prendre la quinzième partie de la différence.*

Planches 7 et 8. Figures 73 et 74.

552. Le quarré de BD étant double de celui de CF, BD sera à CF, comme la diagonale d'un quarré est à son côté, ou à-peu-près comme 7 est à 5. Ainsi on aura $CF=\frac{5}{7}a$, par conséquent $\frac{16}{15}r^2a-\frac{14}{15}r^2\times\frac{5}{7}a$, ou $\frac{16}{15}r^2a-\frac{2}{3}r^2a=\frac{16}{15}r^2a-\frac{10}{15}r^2a=\frac{6}{15}r^2a=\frac{2}{3}r^2a$, qui montre encore *que la dépense du quart de cercle supérieur est les deux cinquièmes du volume d'eau qui aurait pour base le quarré du rayon et pour hauteur la plus grande vitesse, pendant la durée de l'écoulement, et que la dépense du quart de cercle inférieur est les deux tiers du même volume:* ainsi ces deux dépenses sont comme $\frac{2}{5}$ est à $\frac{2}{3}$, ou comme 5 est à 3.

Lorsque le diamètre du demi-cercle répond au niveau de l'eau, on trouvera la dépense en multipliant le quarré du rayon par la moitié de la plus grande vitesse.

Pl. 8, Fig. 74.

553. Lorsque l'orifice est un demi-cercle, dont le diamètre répond au niveau de l'eau, on ne peut avoir sa dépense que par approximation, comme on en va juger.

Nous servant des mêmes lettres que ci-devant, on aura $\sqrt{(r^2-x^2)}=BI$, et $p\frac{1}{2}x\frac{1}{2}=IG$, par conséquent $p\frac{1}{2}x\frac{1}{2}dx\sqrt{(r^2-x^2)}$ pour l'élément différentiel du solide dont il s'agit. Mais comme on ne peut avoir l'intégrale exacte de cette différentielle, à cause de $\sqrt{(r^2-x^2)}$, il faudra extraire la racine quarrée de cette grandeur par approximation, suivant la méthode ordinaire; et si l'on se borne à une suite de quatre termes, qui me paraît suffisante pour l'usage que nous en faisons, on aura $\sqrt{(r^2-x^2)}=r-\frac{x^2}{2r}-\frac{x^4}{8r^3}-\frac{x^6}{16r^5}$ (*), par conséquent $p\frac{1}{2}x\frac{1}{2}dx\sqrt{(r^2-x^2)}=p\frac{1}{2}rx\frac{1}{2}dx-\frac{p\frac{1}{2}x\frac{5}{2}dx}{2r}-\frac{p\frac{1}{2}x\frac{9}{2}dx}{8r^3}-\frac{p\frac{1}{2}x\frac{13}{2}dx}{16r^5}$. Prenant l'intégrale de cette suite, il vient $\frac{2p\frac{1}{2}rx\frac{3}{2}}{3}-\frac{p\frac{1}{2}x\frac{7}{2}}{7r}-\frac{p\frac{1}{2}x\frac{11}{2}}{44r^3}-\frac{p\frac{1}{2}x\frac{13}{2}}{120r^5}$, ou bien $\left(\frac{2rx}{3}-\frac{x^3}{7r}-\frac{x^5}{44r^3}\right.$

(*) On trouvera la même chose en se servant de la table de l'Analyse démontrée, p. 410.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$-\frac{x^7}{120r^5}\Big)\sqrt{px}$, après avoir mis $\sqrt{px}$ à la place de $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$. Mais lorsque $x=r$, on a alors $\sqrt{px}=a$, par conséquent $(\frac{2}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{44}-\frac{1}{120})\,ar^2$. Réduisant au même dénominateur $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{44}$, $\frac{1}{120}$, on aura $\frac{1607}{9240}$ pour la somme de ces trois termes, qui étant soustraite de $\frac{2}{3}$ donne $\frac{13659}{27720}$, ou à-peu-près $\frac{1}{2}ar^2$, ce qui montre que *pour trouver la dépense d'un pertuis qui a la figure d'un quart de cercle dont le diamètre répond au niveau de l'eau, il faut multiplier le quarré du rayon par la moitié de la plus grande vitesse de l'eau pendant la durée de l'écoulement, et par cette vitesse entière, lorsqu'il s'agit d'un demi-cercle.*

554. Ayant vu (552) que la dépense d'un orifice qui aurait la figure d'un quart de cercle, et dont la circonférence répondrait au niveau de l'eau, pouvait être exprimée par $\frac{2}{3}\,ar^2$, et venant de montrer que lorsque le quart de cercle était dans un sens opposé, elle l'était par $\frac{1}{2}\,ar^2$, il ne s'ensuit pas que ces deux dépenses soient comme $\frac{2}{3}$ est à $\frac{1}{2}$, parce que la plus grande vîtesse de l'eau n'est pas égale dans ces deux expressions, quoique désignée par la même lettre a. Car dans le premier cas cette vîtesse a pour chute le diamètre, au lieu que dans le second sa chute est le rayon; ainsi ces deux vîtesses étant à-peu-près comme 7 est à 5, on voit que pour que la même lettre a puisse avoir lieu dans le rapport que nous allons découvrir, il faut multiplier $\frac{1}{2}\,r^2$ par $\frac{5}{7}\,a$, ce qui donne $\frac{5}{14}\,ar^2$, au lieu de $\frac{1}{2}\,ar^2$. *On peut donc dire qu'ayant deux demi-cercles égaux, disposés comme FKH et PLM, la dépense du premier est à celle du second dans le même temps comme $\frac{5}{14}$ est à $\frac{2}{3}$, ou comme 25 est à 28.*

Les dépenses de deux demi-cercles égaux, situés d'un sens opposé, et qui répondent au niveau de l'eau, sont comme 28 est à 25.

Planche 8. Figures 74 et 75.

555. De tous les problêmes qui ont rapport au mouvement des eaux, et même à la pratique en général, je n'en connais point de plus difficile à résoudre que celui de mesurer la dépense d'un orifice vertical et circulaire, placé *au-dessous du niveau de l'eau;* car on ne peut parvenir à une formule que par un calcul algébrique fort composé, dont l'application dépend d'un grand nombre d'opérations arithmétiques, qu'on ne peut exécuter sans avoir cette formule sous les yeux. Cependant, comme je ne négligerai aucune circonstance pour en rendre la pratique commode, on ne laissera pas d'en faire usage, moyennant un peu de patience et d'exactitude à suivre ce que je prescrirai.

Analyse pour trouver une formule qui puisse mesurer la dépense des orifices circulaires placés au-dessous du niveau de l'eau.

Figure 76.

Nommant b le diamètre AD de l'orifice, c la plus petite hauteur EA de l'eau, a la plus grande vîtesse DH de l'eau, q la plus petite AF, p le paramètre de la parabole, x l'indéterminée AP; on aura $PM=\sqrt{(bx-x^2)}$, par la propriété du cercle, et $PN=\sqrt{(pc-px)}$; par conséquent $dx\times PM\times PN=dx\sqrt{(bcpx+bpx^2-pcx^2-px^3)}$ pour l'élément différentiel du solide, ou $dx\sqrt{px}\sqrt{(bc+bx-cx-x^2)}$, et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

faisant $b-c=-f$ en supposant AD $=b$ moindre que AE $=c$, on aura $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{(bc-fx-x^2)}$.

556. Comme on ne peut avoir l'intégrale de cette différentielle que par approximation, à cause des grandeurs qui sont sous le signe, voici la manière d'en extraire la racine, différente de celle dont je me suis servi dans le cas précédent (553), m'ayant paru plus générale, et celle qui donne le plus de termes de la suite que l'on cherche en moins d'opérations : elle est tirée de l'*Analyse démontrée*, liv. 7, art. 175.

Il faut supposer $\sqrt{(bc-fx-x^2)}=z$, pour avoir $bc-fx-x^2=z^2$, d'où l'on tire $z^2+x^2+fx-bc=0$. Comme il s'agit d'avoir la valeur de z, il faudra supposer que cette lettre est égale à une suite infinie de grandeurs positives que voici : $z=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+$ etc. Les lettres A, B, C, D, etc. sont des indéterminées que l'on déterminera de la manière qui convient pour avoir z. Quarrant z et sa valeur, on aura

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l} z^2=A^2+2ABx+2AC+B^2 & x^2+2AD+2BC & x^3+2AE+2BD+C^2 & x^4+2AF+2BE+2CD & x^5+2AG+2BF+2CE+D^2 & x^6+\text{etc.} \end{array}.$$

Si l'on met dans l'égalité $z^2-bc+fx+x^2=0$ à la place de z^2 la suite qui en est la valeur, elle sera changée en cette autre

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l|l} A^2+2AB-bc+f & x+2AC+B^2+1 & x^2+2AD+2BC & x^3+2AE+2BD+C^2 & x^4+2AF+2BE+2CD & x^5+2AG+2BF+2CE+D^2 \quad x^6+\text{etc.} \end{array}\right\}=z^2-bc+fx+x^2.$$

Comme on peut, à cause des indéterminées A, B, C, etc. qui se trouvent dans les termes du premier membre, supposer chacun de ces termes égal à zéro, afin de tirer de cette supposition les valeurs de A, B, C, etc. pour les mettre dans la suite infinie qu'on a supposée être la valeur de z; si l'on agit de la sorte cette suite sera véritablement la valeur de z, puisqu'étant substituée à la place de cette lettre dans $z^2-bc+fx+x^2=0$, elle rendra cette égalité, qui aura pour lors une infinité de termes, égale à zéro, puisque les grandeurs qui composent chaque terme se détruiront par des signes contraires. Mais comme on ne peut avoir une suite composée d'une infinité de termes, on ne saurait aussi parvenir à une valeur exacte de z, c'est pourquoi il faut se contenter d'en approcher de plus en plus, en augmentant le nombre des termes de la suite : cependant je me bornerai à six, pour éviter l'extrême longueur du calcul; ils seront suffisants pour l'usage que nous en voulons faire.

557. On aura donc, pour le premier terme, $A^2-bc=0$, ou $A=\sqrt{bc}$; pour le second $2AB+f=0$, ou $B=-\frac{f}{2A}=-\frac{f}{2\sqrt{bc}}$, puisque $2A=2\sqrt{bc}$. Opérant de la même manière sur les quatre autres termes suivants,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

on trouvera $C=-\frac{f^2-4bc}{8bc\sqrt{bc}}$, $D=-\frac{f^3-4bcf}{16b^2c^2\sqrt{bc}}$, $E=-\frac{5f^4-24bcf^2-16b^2c^2}{128b^3c^3\sqrt{bc}}$, $F=-\frac{7f^5-40bcf^3-48b^2c^2f}{256b^4c^4\sqrt{bc}}$.

Si l'on met, à la place de A, B, C, etc. leur valeur dans la suite $z=A+Bx+Cx^2+$ etc., on aura la valeur approchante de z, par conséquent la racine quarrée de $bc-fx-x^2$. Sur quoi il est à remarquer que, comme cette quantité est moindre que bc, sa racine doit être moindre que $\sqrt{bc}$, aussi toute la suite que l'on vient de trouver est moindre que $\sqrt{bc}$, tous les termes qui suivent cette grandeur étant négatifs. D'ailleurs ces mêmes termes vont toujours en diminuant, puisque ce sont des fractions qui ont au dénominateur les puissances de bc, plus grandes que celles de fx qui sont au numérateur. Par conséquent plus les puissances des grandeurs qui sont au numérateur et au dénominateur augmentent, plus ces fractions deviennent petites; ce qui fait voir qu'on peut négliger les derniers termes sans une erreur sensible.

558. Présentement si l'on multiplie la suite $\sqrt{bc}-\frac{f}{2\sqrt{bc}}x-\frac{f^2-4bc}{8bc\sqrt{bc}}x^2-\frac{f^3-4bcf}{16b^2c^2\sqrt{bc}}x^3-\frac{5f^4-24bcf^2-16b^2c^2}{128b^3c^3\sqrt{bc}}x^4-\frac{7f^5-40bcf^3-48b^2c^2f}{256b^4c^4\sqrt{bc}}x^5-$etc. par $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$, le produit qui sera égal à $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{(bc-fx-x^2)}$, donnera l'élément différentiel du solide que l'on cherche. Pour faire cette multiplication, il faut ajouter $\frac{1}{2}$ aux exposants des puissances de x, et considérer que tous les termes de la suite étant divisés par $\sqrt{bc}$, excepté le premier (qui le sera aussi en le multipliant et divisant par $\sqrt{bc}$), et tous ces termes devant être multipliés par $p^{\frac{1}{2}}=\sqrt{p}$, il suffira d'écrire au commencement, une fois pour toutes, le multiplicateur commun $\sqrt{\frac{p}{bc}}$. Si l'on fait aussi attention qu'on peut prendre la moitié de tous les diviseurs numériques, on verra qu'en multipliant le premier terme par 2, à cause qu'il n'a point de diviseur, on pourra écrire $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{bc}}(2bcx^{\frac{1}{2}}dx-fx^{\frac{3}{2}}dx-\frac{f^2-4bc}{4bc}x^{\frac{5}{2}}dx-\frac{f^3-4bcf}{8b^2c^2}x^{\frac{7}{2}}dx-\frac{5f^4-24bcf^2-16b^2c^2}{64b^3c^3}x^{\frac{9}{2}}dx-\frac{7f^5-40bcf^3-48b^2c^2f}{128b^4c^4}x^{\frac{11}{2}}dx-$etc.$)=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{(bc-fx-x^2)}$.

Prenant l'intégrale de chaque terme de cette différentielle, on aura $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{bc}}(\frac{4}{3}bcx^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}fx^{\frac{5}{2}}-\frac{f^2-4bc}{14bc}x^{\frac{7}{2}}-\frac{f^3-4bcf}{36b^2c^2}x^{\frac{9}{2}}-\frac{5f^4-24bcf^2-16b^2c^2}{352b^3c^3}x^{\frac{11}{2}}-\frac{7f^5-40bcf^3-48b^2c^2f}{832b^4c^4}x^{\frac{13}{2}}-$etc.$)$ qui est le solide approché, et que l'on déterminera en faisant x égal au diamètre du demi-cercle. Ainsi mettant b à la place de x et de ses puissances diminuées de $\frac{1}{2}$, afin de supprimer $b^{\frac{1}{2}}$, ou $\sqrt{b}$, pour le joindre au multiplicateur commun, qui sera alors

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bp}{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{c}}$, il viendra $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{c}}\cdot\left\{\left(\frac{4}{3}c-\frac{2}{5}f\right)b^2-\frac{f^2-4bc}{14bc}b^3-\frac{f^3-4bcf}{36b^2c^2}b^4\right.$
$\left.-\frac{5f^4-24bcf^2-16b^2c^2}{352b^3c^3}b^5-\frac{7f^5-40bcf^3-48b^2c^2f}{832b^4c^4}b^6-\text{etc.}\right\}$.

559. Si à la place de f on met sa valeur $c-b$, et que l'on ait soin de mettre une virgule entre les termes pour les distinguer, afin de voir ce qui est provenu de chaque terme de la suite, on trouvera, après avoir réduit les fractions, $\frac{4}{3}cb^2, +\frac{2}{5}b^3-\frac{2}{5}cb^2, -\frac{b^4}{14c}-\frac{1}{7}b^3-\frac{1}{14}cb^2, +\frac{b^5}{36c^2}$
$+\frac{b^4}{36c}-\frac{1}{36}b^3-\frac{1}{36}cb^2, -\frac{5b^6}{352c^3}-\frac{b^5}{88c^2}+\frac{b^4}{176c}-\frac{1}{88}b^3-\frac{5}{352}cb^2,$
$+\frac{7b^7}{832c^4}+\frac{5b^6}{832c^3}-\frac{b^5}{416c^2}+\frac{5}{832}b^3-\frac{7}{832}cb^2$, le tout multiplié par $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{c}}$.

560. Présentement, si l'on ajoute ensemble les coëfficients numériques de tous les termes semblables, en les écrivant de suite, il viendra $\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right.$
$\left.-\frac{1}{14}-\frac{1}{36}-\frac{5}{352}-\frac{7}{832}\right)cb^2+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{36}-\frac{1}{88}-\frac{5}{832}\right)b^3-\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{36}-\frac{1}{176}\right.$
$\left.-\frac{1}{416}\right)\frac{b^4}{c}+\left(\frac{1}{36}-\frac{1}{88}-\frac{1}{416}\right)\frac{b^5}{c^2}-\left(\frac{5}{352}-\frac{5}{832}\right)\frac{b^6}{c^3}+\frac{7b^7}{832c^4}$, le tout multiplié par $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{c}}$.

Comme l'ordonnée AF$=q$, qui exprime la plus petite vîtesse de l'eau, est moyenne proportionnelle entre le paramètre et l'abscisse EA$=c$, on aura $\div p:q:c$, d'où l'on tire $p:q::\sqrt{p}:\sqrt{c}$, par conséquent $\frac{p}{q}=\sqrt{\frac{p}{c}}$, ou $\frac{q}{2q}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{c}}$. Ainsi l'on pourra prendre $\frac{p}{2q}$ pour le multiplicateur commun de la suite. Mais comme cette suite ne donne que le solide formé par la somme des produits des éléments du demi-cercle par ceux du segment parabolique, c'est-à-dire un solide égal à la moitié de celui que nous cherchons, il suit qu'en supprimant le nombre $\frac{1}{2}$ du multiplicateur commun, le produit donnera la dépense de l'orifice entier. Si l'on considère encore que tous les termes de la suite sont multipliés par les puissances de b, et que la plus petite est b^2, on pourra, pour abréger, prendre b^2 pour un second multiplicateur commun, après quoi si l'on fait les opérations numériques indiquées par les signes + et −, on aura $\frac{b^2p}{q}\left(\frac{2339483}{2882880}c+\frac{24446}{115315}b-\frac{10253}{288288}\cdot\frac{b^2}{c}+\frac{577}{41184}\cdot\frac{b^3}{c^2}-\frac{75}{9152}\cdot\frac{b^4}{c^3}+\frac{7}{832}\cdot\frac{b^5}{c^4}\right)$ pour l'expression du solide cherché, qu'on peut changer en la suivante, $\frac{b^2p}{q}\left(\frac{29}{37}c+\frac{18}{85}b-\frac{1}{28}\cdot\frac{b^2}{c}+\frac{1}{72}\cdot\frac{b^3}{c^2}-\frac{1}{122}\cdot\frac{b^4}{c^3}+\frac{1}{119}\cdot\frac{b^5}{c^4}\right)$, qui n'est pas tout-à-fait si exacte, mais beaucoup plus simple, et qui peut me servir de formule dans la pratique. On peut même, sans erreur sensible, en supprimer les deux derniers termes, à cause de leur extrême petitesse, et la réduire à $\frac{b^2p}{q}\left(\frac{29}{37}c+\frac{18}{85}b-\frac{1}{28}\cdot\frac{b^2}{c}+\frac{1}{72}\cdot\frac{b^3}{c^2}\right)$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

561. D'où il suit que *pour mesurer la quantité d'eau qui s'écoule par seconde d'un orifice vertical et circulaire, pratiqué au-dessous du niveau de l'eau, il faut premièrement multiplier la plus petite hauteur EA de l'eau par* 29, *et diviser le produit par* 37, *pour avoir un premier quotient.*

Méthode pour mesurer la dépense des orifices circulaires placés au-dessous du niveau de l'eau. Pl. 8, Fig. 76.

Secondement, multiplier le diamètre de l'orifice par 18, *et diviser le produit par* 85, *pour avoir un second quotient.*

Troisièmement, cuber le diamètre de l'orifice, et diviser ce cube par le produit de 72 *par le quarré de la plus petite hauteur de l'eau, pour avoir un troisième quotient.*

Quatrièmement, quarrer le diamètre de l'orifice, et diviser le produit par 28 *fois la plus petite hauteur de l'eau, afin d'avoir un quatrième quotient.*

Cinquièmement, soustraire le quatrième quotient de la somme des trois précédents.

Sixièmement, multiplier la différence par le produit du quarré du diamètre de l'orifice et du nombre 60 (470).

Septièmement, diviser ce produit par la plus petite vitesse AF de l'eau, c'est-à-dire par la vitesse dont un corps peut être capable par seconde, l'ayant acquise par une chute égale à la plus petite hauteur de l'eau (560); *le quotient donnera la dépense que l'on cherche* (*cs*).

562. L'usage ordinaire pour mesurer la dépense des orifices dont nous

Application de

(*cs*) La série à laquelle parvient ici l'auteur pour évaluer le produit d'un orifice circulaire dont le sommet est au-dessous du niveau de l'eau, n'est convergente, et ne donne par conséquent un résultat exact, qu'autant que la charge d'eau $EA = c$ qui a lieu sur le sommet de l'orifice est plus grande que son diamètre $AD = b$; et dans ce cas l'emploi de cette série est absolument inutile. La suivante, dont on trouvera la démonstration dans l'*Hydrodynamique* de Bossut, t. 1^er^, art. 244, et dont le calcul est beaucoup plus simple et plus rapide, n'a pas cet inconvénient. En nommant r le rayon de l'orifice circulaire, et n le rapport de la charge d'eau EC qui a lieu sur son centre à ce rayon, on a pour le produit de l'orifice en une seconde $\pi r^2 \sqrt{2gnr}\left(1 - \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{1024n^4} - \text{etc.}\right)$; π est le rapport de la circonférence au diamètre $= 3{,}1416$, g la vîtesse que la pesanteur imprime aux corps dans une seconde $= 9^m{,}8088$.

Formule pour calculer la dépense d'un orifice circulaire.

La hauteur à laquelle est due la vîtesse moyenne de l'eau dans l'orifice, est exprimée par $nr\left(1 - \frac{1}{16n^2} - \frac{9}{1024n^4} - \text{etc.}\right)$. Ces séries sont si convergentes qu'il suffira toujours d'en prendre les deux premiers termes.

On remarquera d'ailleurs que les formules exposées dans les notes précédentes, depuis la note (*co*), ne sont utiles qu'autant que la hauteur de l'orifice est plus grande que la charge de fluide sur le sommet de cet orifice. Dans les autres cas, il est suffisamment exact d'employer les formules de la note (*ce*), en comptant la charge exprimée par z dans ces formules à partir du centre de l'orifice.

Il n'est utile d'employer les formules précédentes pour le calcul de la dépense des orifices, qu'autant que la charge sur leur sommet est plus petite que leur hauteur.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la formule précédente à un exemple, pour en faire voir la justesse. Pl. 8, Fig. 76.

parlons, est de supposer que la hauteur moyenne de l'eau répond au centre. Il est vrai que, quand l'orifice est beaucoup au-dessous du niveau de l'eau, la vîtesse moyenne n'en étant point éloignée, cette pratique peut être suivie sans une erreur qui puisse tirer à conséquence, parce que la partie FH de la parabole ne différant guère d'une ligne droite quand le diamètre AD est fort petit par rapport à l'axe ED, l'ordonnée CG approche fort d'être moyenne arithmétique entre AF et DH.

Pour en juger, nous supposerons ED de 12 pieds et $AD = b$ de 2; ainsi $EA = c$ sera de 10, et EC de 11. Cherchant dans la table des vîtesses celle qui répond à la chute EC, on la trouvera de 25 pieds 8 pouces 3 lignes. Faisant les opérations que nous venons d'indiquer, on verra que l'orifice doit dépenser par seconde 80 pieds cubes d'eau 9 pouces 7 lignes, ou $\frac{784442712}{9708615}$ pieds cubes. Divisant cette quantité par la superficie de l'orifice, c'est-à-dire par les onze quatorzièmes du quarré de son diamètre, qui se réduisent à $\frac{7}{22}$, il viendra 25 pieds 8 pouces 6 lignes pour la vîtesse moyenne (539), qui ne diffère que de trois lignes de celle qui répond au centre; ce qui montre qu'on peut se servir en toute confiance de la formule précédente, puisque l'ayant appliquée à un orifice d'une grandeur outrée, le résultat de notre calcul est autant conforme qu'on peut le souhaiter à ce qu'il devrait donner naturellement. S'il y a quelque différence, elle deviendra d'autant plus insensible, que les diamètres des orifices seront petits par rapport à la hauteur de l'eau. Je conviens qu'il est fâcheux de ne pouvoir juger de la justesse d'une chose que par les apparences, mais c'est le cas inévitable de toutes les recherches qui tombent dans les approximations.

Manière de découvrir les formules pour la dépense des orifices faits en demi-cercles, placés au-dessous du niveau de l'eau. Figure 76.

563. Pour avoir le solide formé de la somme des produits des éléments du quart de cercle ABC par les éléments du segment parabolique ACGF, il faut mettre $\frac{1}{2}b = r$ à la place de x dans $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{q}}.\left(\frac{4}{3}bcx^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}fx^{\frac{5}{2}} - \frac{f^2-4bc}{14bc}x^{\frac{7}{2}} - \text{etc.}\right)$ que l'on a trouvée pour l'intégrale de la suite (558), et faire le reste du calcul comme ci-devant. Il en résultera une formule qui servira à mesurer la dépense d'un orifice fait en demi-cercle, ayant pour base le diamètre, et situé au-dessous du niveau de l'eau.

564. Si l'on soustrait du premier solide, c'est-à-dire de celui qui exprime le volume de la dépense de l'orifice entier, le solide qu'on trouvera en suivant l'article précédent, la différence sera l'expression d'un troisième qui donnera la dépense du même demi-cercle, situé dans un sens opposé. Mais je ne m'arrête point à en faire le calcul, ces deux derniers cas paraissant plus curieux qu'utiles.

Remarque sur les calculs précédents.

565. Si $AD = b$ est plus grand que $AE = c$, alors f sera positive, au lieu que dans tout le calcul précédent elle était négative. Cependant la résolu-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tion sera la même, et il n'y aura pas la moindre chose de changé, ce qui fait voir qu'elle est générale, et qu'elle convient également, soit que b se trouve plus grand ou plus petit que c. Tout le changement que cela apportera, c'est que dans la suite que l'on a trouvée pour la valeur de z, et dans l'expression générale et indéterminée du solide, tous les termes où f sera avec une dimension impaire seront positifs, au lieu qu'ils étaient négatifs; mais quand à la place de f on substituera $b-c$, on trouvera précisément la même chose.

566. Si $b=c$, f deviendra zéro; l'élément du solide sera pour lors $p^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}dx\sqrt{(b^2-x^2)}$. Pour avoir la résolution dans ce cas, il faut effacer tous les termes qui sont multipliés par f dans l'expression indéterminée, et mettre b à la place de c, alors ce solide indéterminé sera $\frac{P}{Q}(\frac{4}{3}b^2x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{22\,b^2}.x^{\frac{11}{2}})$.

Formule particulière pour mesurer la dépense des orifices circulaires, dont le diamètre est égal à la plus petite hauteur de l'eau.

SECTION XI.

Du choc de l'eau contre les surfaces planes.

567. Ayant montré (article 445) que les petits prismes d'eau qui sortaient dans un même instant du fond de deux réservoirs AC et EG, de hauteurs différentes, pouvaient être exprimés par $O\sqrt{H}$, $o\sqrt{h}$; multipliant ces prismes par leur vîtesse, il viendra $O\sqrt{H}\times\sqrt{H}$, $o\sqrt{h}\times\sqrt{h}$ pour leur quantité de mouvement (171, 433), ou pour l'expression des forces F, f, avec lesquelles ils choqueront directement les surfaces des pistons L, M, soutenus par les puissances P, Q, si ces pistons sont à une assez petite distance des orifices pour pouvoir regarder la vîtesse de l'eau comme uniforme, dans le chemin qu'elle parcourra. Ainsi on aura $F:f :: O\sqrt{H}\times\sqrt{H} : o\sqrt{h}\times\sqrt{h}$, ou $F:f :: O\times H : o\times h$; ce qui montre que *les chocs de l'eau sont entre eux dans la raison composée des bases des colonnes et des quarrés des vîtesses, ou dans la raison composée des bases des colonnes et des chutes.*

Les chocs de l'eau sont dans la raison composée des quarrés des vîtesses et des surfaces qui en reçoivent l'impression.

PLANCHE 8. FIGURES 82 et 83.

568. Il suit que, *lorsque les bases des colonnes seront égales, les chocs seront entre eux dans la raison des quarrés des vîtesses de l'eau, ou comme les hauteurs des chutes capables des mêmes vîtesses.*

569. On peut encore, lorsque les bases des colonnes sont égales, ou qu'elles choquent directement en plein des surfaces égales, considérer l'eau comme un amas de petites boules, dont l'impression dépendra de leur vîtesse et du nombre de celles qui frapperont en même temps. Car une eau qui coule deux fois plus vîte qu'une autre, frappant une surface opposée non-seulement avec deux fois plus de force, mais encore avec deux fois plus de parties, son impression doit croître selon la raison doublée, ou selon le quarré de sa vîtesse, c'est-à-dire que si les vîtesses sont comme 3 est à 5, les chocs seront comme 9 est à 25.

Autre manière de démontrer que les chocs ou impulsions de l'eau sur des surfaces égales, sont dans la raison des quarrés des vîtesses.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Les chocs sont mesurés par le poids des colonnes d'eau qui causent ces vîtesses, ou par la poussée que soutiendrait la surface choquée.

570. Les chocs étant entre eux comme les produits des orifices par les hauteurs de l'eau (567), ou comme les colonnes BR et FS, qui sont les forces qui causent les chocs, *il suit que les chocs pourront être mesurés par le poids des mêmes colonnes;* l'effet d'une force qui agit simplement sans aucune modification pouvant être pris pour la force même.

Comme la poussée que les colonnes BR et FS exercent sur leur base, n'est autre chose qu'une tendance au mouvement, dont l'effet serait de produire un choc, qui peut être mesuré par la cause même; *il suit que le poids qui exprimera la poussée de l'eau contre une surface, en exprimera aussi le choc* (*ct*).

Remarque sur l'art. 570. Il faut distinguer le choc d'une veine, de la résistance d'un corps plongé dans un fluide.

(*ct*) Le contenu de cet article, qui est fort important pour la théorie et pour le calcul des machines, est absolument fautif. La théorie de la résistance des fluides comporte spécialement deux objets principaux qu'on a souvent confondus, et qu'il est cependant très-essentiel de distinguer soigneusement. L'un est la considération d'une veine de fluide jaillissant d'un orifice, qui vient perdre à la rencontre d'une surface tout ou partie de son mouvement. L'autre est celle d'un corps en mouvement plongé dans un fluide indéfini, ou flottant à sa surface. Le premier de ces deux objets, auquel se rapporte l'article 570, est le seul dont je m'occuperai dans cette note.

Le raisonnement fait dans cet article semble pris dans le *Traité du mouvement des eaux* de Mariotte : il pèche en ce que, bien qu'il soit vrai que la force du choc soit comme le poids de la colonne d'eau dont l'orifice est la base, il ne s'ensuit point que ce poids donne la mesure de la force du choc; et il paraît que c'est une chose différente de boucher l'orifice avec un plan, qui soutiendra seulement la pression d'une eau stagnante, ou de recevoir contre ce plan le choc d'une veine jaillissant de cet orifice, parce qu'il faudra dans ce dernier cas non-seulement soutenir la même pression que dans le premier, mais encore détruire une vîtesse acquise par le fluide.

Évaluation exacte du choc direct d'une veine de fluide contre un plan.

Pl. C, Fig. 11.

Concevons un vase entretenu constamment plein au niveau ab, où l'eau s'échappe par l'orifice cd dont l'entrée est évasée, de manière que les filets de fluide en sortent avec des directions parallèles. Soit ef un plan présenté perpendiculairement à la direction de la veine, et d'une grandeur telle qu'il ne s'amasse point d'eau sur ce plan, et qu'elle s'écoule par sa circonférence aussitôt qu'elle a perdu contre lui toute sa vîtesse verticale, en sorte que l'effort supporté par le plan ef puisse être considéré comme destiné uniquement à détruire cette vîtesse. Soit ω l'aire de l'orifice, v la vîtesse du fluide, Π le poids de l'unité de volume, R l'effort exercé contre le plan, dt l'élément du temps. Le volume d'eau qui sortira dans un instant est exprimé par $\omega v dt$, son poids par $\Pi.\omega v dt$, et sa masse par $\frac{\Pi}{g}\omega v dt$. Sa quantité de mouvement est donc $\frac{\Pi}{g}\omega v dt.v$. Or la force R devant détruire ce mouvement, il faudra que la quantité de mouvement qu'elle peut imprimer dans un instant, laquelle est exprimée par $R\,dt$ (voyez la fin de la note (*ab*)), soit égale à la quantité

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

571. La différence que fait naître le frottement entre la dépense *naturelle* et la dépense effective d'un même orifice de médiocre grandeur, Le choc de l'eau qui coule d'un orifice, n'est pas si

---

précédente. On a donc pour déterminer R l'équation $R\,dt = \frac{\Pi}{g}\omega v\,dt.v$, d'où $R = \frac{\Pi}{g}\omega v^2$.

En appelant z la hauteur due à la vîtesse v, on aura $v = \sqrt{2gz}$. Mettant cette valeur dans celle de R, il vient $R = \Pi.\omega.2z$, ce qui apprend que *l'effort exercé contre le plan est le poids d'une colonne de fluide dont la base est la section de la veine, et dont la hauteur est double de celle due à la vîtesse.*

Si l'entrée de l'orifice cd est évasée, et si la veine est censée frapper le plan avec une vîtesse égale à celle qui a lieu à l'orifice, on peut dans la formule précédente prendre ω pour l'aire de l'orifice, et z pour la charge d'eau qui a lieu sur cet orifice. Si l'entrée de l'orifice n'est point évasée, les raisonnements précédents ne pouvant convenir qu'à la section de la plus grande contraction, c'est cette section qui devra être censée représentée par ω dans cette formule, et par conséquent il faudra prendre pour ω l'aire de l'orifice diminuée d'après les rapports indiqués dans le § 3 de la note (ck); z sera toujours la charge de fluide sur cette section. Enfin si le fluide s'écoule par un tuyau additionnel cylindrique, ω sera la section de ce tuyau, et z la hauteur due à la vîtesse du fluide dans le tuyau, laquelle, d'après le § 4 de la note (ck), est environ les $(0{,}82)^2$, ou les 0,67, de la charge de fluide sur la section extrême du tuyau. Ceci servira à rectifier ce que dit l'auteur dans l'art. 571. Valeurs qu'on doit attribuer dans divers cas aux quantités ω et z.

La formule précédente offre pour la force du choc une valeur double de celle indiquée dans l'art. 570. Elle est confirmée par l'expérience (voyez l'*Hydrodynamique* de Bossut, tome 2, ch. 14). Si quelques auteurs ont cru trouver des résultats qui s'en écartaient, c'est qu'ils n'avaient pas donné au plan ef assez d'étendue pour que le mouvement vertical de la veine fût entièrement détruit, ou parce que le calcul des expériences étant compliqué de l'évaluation de la dépense de l'orifice et de la véritable vîtesse du fluide, ces deux éléments n'étaient point déterminés avec exactitude. Expériences confirmant l'évaluation précédente.

On peut demander ce qui arriverait si le plan rencontré par la veine n'avait pas la grandeur suffisante pour détruire les mouvements de tous les filets d'eau, et qu'une portion de ces filets débordât autour du plan avant d'avoir entièrement perdu sa vîtesse. La réponse est que la force du choc dépendrait alors du rapport de l'aire du plan à la section de la veine. Il faudrait, pour la déterminer par la théorie, connaître les mouvements de chacune des molécules du fluide, afin d'estimer la portion de leur vîtesse qu'elles auraient perdue contre le plan, et celle qu'elles auraient conservée : c'est ce qui est impossible quant à-présent, et cette question ne peut se résoudre que par des expériences. M. Dubuat en a fait quelques-unes (*Principes d'Hydraulique*, 3e part., sect. 1, ch. 1) dont il paraît résulter que quand la surface présentée au choc du fluide est un peu moindre que la section de la veine, la pression qu'elle supporte est à-peu-près due à la même hauteur que la vîtesse du fluide. Ce sont probablement quelques expériences de ce genre qui avaient induit Mariotte à établir le principe adopté dans le *Traité du mouvement des eaux.*

Si au contraire le plan avait une étendue trop grande, l'eau s'amasserait sur ce plan, et, en outre de l'effort nécessaire pour détruire la vîtesse de la veine, tel qu'il est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fort qu'il serait s'il n'y avait pas de frottement, dans la raison du quarré de la dépense effective au quarré de la dépense naturelle.

doit en causer une grande dans le choc de l'eau, parce que les chocs, dans ces deux cas, étant encore dans la raison doublée des vîtesses, l'impression de la dépense effective sera d'autant moindre que l'impression de la dépense naturelle, que le quarré de la vîtesse de la première sera moindre que celui de la vîtesse de la seconde. Par exemple, dans l'expérience de M. Mariotte où la dépense effective est à la dépense naturelle, comme 7 est à 10 (495), le choc ne sera exprimé que par 49, tandis qu'il devrait l'être par 100; ce qui montre qu'il faudrait que la hauteur du réservoir fût un peu plus du double de celle qu'il avait dans cette expérience, pour que le choc de l'eau de la dépense effective pût égaler celui de la dépense naturelle (500). Mais comme nous n'aurons point égard par la suite à la diminution du choc que le frottement peut causer aux pertuis qui ont plus d'un pied de superficie, je ne m'arrêterai point davantage sur ce sujet, qui n'est qu'une suite de ce qui a été enseigné dans la huitième section.

Examen de la force que l'eau peut acquérir en accélérant sa vîtesse à la sortie du réservoir.

Pl. 8, fig. 84.

572. Si la surface GH était placée à une certaine distance EI de l'orifice E, l'eau qui en sortira acquérant de nouveaux degrés de vîtesse en parcourant l'espace EI, choquera avec plus de force que dans le cas précédent, parce que sa vîtesse sera alors exprimée par la racine de la hauteur FI; ce qui a fait croire à la plupart de ceux qui ont écrit sur le mouvement des eaux, que le choc devrait être encore égal au poids d'une colonne qui aurait pour base l'orifice E et pour hauteur la ligne FI, qui marque l'élévation de son niveau au-dessus de la surface, sans faire attention (comme l'a remarqué M. Pitot avant moi) que la vîtesse de l'eau augmentait à la vérité, mais que la quantité qui en sortait du réservoir était toujours la même, à quelque distance que fût située la surface. Ainsi

---

évalué ci-dessus, le plan porterait encore le poids d'une certaine quantité d'eau. Dans les expériences de Bossut, le diamètre du plan était de 5 fois $\frac{1}{2}$ à 9 fois plus grand que celui de l'orifice : ses résultats, un peu au-dessous de celui de la théorie, n'en diffèrent que d'une quantité qui peut être attribuée aux erreurs inévitables dans ces recherches, ou à ce qu'il est impossible, dans la réalité, que toutes les molécules du fluide perdent rigoureusement contre le plan choqué toute la vîtesse qu'elles possèdent perpendiculairement à ce plan. Il faut prendre garde, dans des expériences de ce genre, si l'on n'observe pas dans chacune la vîtesse en la concluant de la dépense de l'orifice, que cette vîtesse peut être diminuée par l'effet de l'obstacle que le plan, placé trop près de l'orifice, opposerait au mouvement du fluide. Il paraît que la diminution de la vîtesse commence à être sensible, quand la distance du plan est plus petite que quatre fois le diamètre de l'orifice (*Expériences de M. Hachette*).

On peut voir sur la question traitée dans cette note un mémoire de Lagrange (*Acad. de Turin*, 1784–1785, 1re partie), où son illustre auteur est conduit par une analyse différente et fort ingénieuse à des résultats identiques avec les précédents.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ils comptaient sur une force plus grande que celle dont ils pouvaient disposer pour faire tourner la roue d'une machine, ou pour quelque autre usage.

L'eau dirigée dans un tuyau vertical n'augmente point la force du choc.

Pl. 8, Fig. 85.

573. D'autres se sont imaginé que quand l'eau serait dirigée par un tuyau IEFL, c'était alors que son choc pouvait être exprimé par le poids de la colonne IKPL, sans considérer qu'il n'était pas possible que ce tuyau se remplisse jamais parfaitement, puisque, quelle qu'en soit la longueur, la vîtesse de l'eau à la sortie sera toujours plus grande que celle qu'elle aura en y entrant (429). Il est donc impossible qu'il s'y forme jamais une colonne, à moins qu'il ne soit assez étroit pour que la vîtesse de l'eau soit plus retardée par les frottements, qu'elle ne peut être augmentée par l'accélération; car n'y ayant que l'eau du réservoir (qui n'a rien de commun avec le tuyau) qui puisse entretenir la colonne EKPF (425, 426, 428), celle du tuyau ne pouvant être remplacée par les côtés, sa dépense ne peut être plus grande que celle de l'orifice qui le nourrit.

Figure 84.

Le choc d'une eau qui accélère sa vîtesse est égal au poids d'une colonne qui aurait pour base la surface choquée, et pour hauteur une moyenne proportionnelle entre la hauteur de l'eau dans le réservoir, et la ligne qui exprime l'élévation de son niveau au-dessus de la surface choquée.

574. Pour déterminer exactement le choc d'une eau qui ne peut être mesurée par sa poussée, considérez qu'en nommant O l'orifice, on aura $O\sqrt{FE}$ pour l'expression de la quantité qui en sortira à chaque instant (445), laquelle étant multipliée par la vîtesse $\sqrt{FI}$ qu'elle aura acquise à l'instant où elle rencontrera le plan GH, donnera $O\sqrt{FE} \times \sqrt{FI} = O\sqrt{FE \times FI}$ pour sa quantité de mouvement, ou pour l'expression du choc; *ce qui montre que si l'on fait FK moyenne proportionnelle entre FE et FI, on aura O × FK pour la colonne d'eau dont le poids sera égal au choc.* Par conséquent plus il y aura d'intervalle entre la surface et le fond du réservoir, et plus on gagnera de force pour faire agir quelque machine; ce qui montre que le seul avantage que l'on peut tirer du tuyau EL, est de diriger toute l'eau vers la surface, et d'empêcher qu'en fendant l'air la plus grande partie ne se dissipe ailleurs (*cu*).

Remarques sur les art. 572, 573 et 574.

(*cu*) Il y a quelques observations à faire sur le contenu des trois articles précédents. Il est vrai que dans le cas des fig. 84 ou 85 le fluide ne peut pas être censé choquer le plan GH avec la vîtesse due à la hauteur FI; mais l'expérience prouve que le tuyau IEFL (fig. 85) peut couler plein, lors même que la vîtesse est moins retardée par les frottements qu'elle n'est augmentée par l'accélération. Quant à la règle de l'art. 574, elle pourrait servir pour le cas de la fig. 84 en la rectifiant d'après la note précédente (c'est-à-dire en doublant le résultat de l'auteur), si l'on faisait abstraction de la résistance de l'air, et qu'on admît que les molécules composant la veine EI prennent sans altération l'accélération de vîtesse que la gravité tend à leur imprimer. Mais dans le cas de la fig. 85, cette règle serait absolument fautive : il faudrait dans ce cas, pour bien résoudre la question, se rendre compte de la vîtesse que le fluide doit prendre à l'orifice IL d'un vase tel que celui représenté par cette figure. Cette recherche dépend de la théorie du mouvement des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pl. 8, Fig. 86.

Le choc de l'eau qui sort d'un pertuis vertical, et qui est dirigée par un canal horizontal, est égal au poids d'une colonne qui aurait pour base la surface choquée, et pour hauteur, la hauteur moyenne de l'eau.

575. Ayant un réservoir prismatique ABCD continuellement plein d'eau, si l'on pratique un pertuis rectangulaire FGHI dans l'une de ses faces EC, servant d'entrée à un canal dont le fond et les côtés soient composés des rectangles FIXS, IHVX, FGTS, et qu'une puissance R soutienne une surface verticale NOMQ égale au pertuis; je dis qui si tout-à-coup on ouvre le pertuis, que je suppose fermé par une vanne, l'eau viendra choquer la surface immobile qui lui est directement opposée, *avec une force qui sera égale à la poussée que soutenait la vanne, lorsque le pertuis était fermé; c'est-à-dire que le choc sera égal au poids d'un prisme d'eau qui aurait pour base la surface choquée, et pour hauteur, la hauteur LK moyenne arithmétique entre La et Lb.* Ceci est bien évident, car la vîtesse de l'eau dans le canal, que l'on nomme aussi coursier, étant uniforme et exprimée par la racine de la hauteur moyenne LK, le choc sera égal au produit de cette surface par le quarré de $\sqrt{LK}$, qui n'est autre chose que LK même (568). Par conséquent, si la surface opposée était de 4 pieds quarrés et la moyenne LK de 10 pieds, le choc sera équivalent au poids de 40 pieds cubes d'eau, ou à 2800 liv., qui est la force qu'il faudra à la puissance R pour soutenir en équilibre l'impulsion d'un courant, dont la vîtesse moyenne et uniforme par seconde sera égale à celle qu'un corps peut acquérir en tombant de la hauteur LK.

Les centres d'impression qui répondent au choc de l'eau, sont les mêmes que ceux qui appartiennent à sa poussée.

Figure 86.

576. Comme les lames d'eau du courant auront d'autant plus de vîtesse qu'elles seront plus près du fond du coursier, leur impression contre la surface ira en diminuant à mesure qu'elles approcheront du sommet OM, selon l'ordre des termes d'une progression arithmétique, puisque ces impressions seront les mêmes que celles de la poussée que soutient la vanne du pertuis quand elle est fermée (362). D'où il suit que la puissance R, pour être en équilibre avec l'impulsion, doit être appliquée au centre d'impression Y de la surface, qu'on trouvera de la même manière que celui d'une vanne (415).

La force que l'eau acquiert en descendant le long d'un plan incliné est la même que celle qu'elle acquerrait

Si la surface dont nous parlons représentait l'une des aubes d'une roue, il faudrait nécessairement en connaître le centre d'impression, parce que le bras de levier qui répond au moteur doit toujours être exprimé par la distance de ce centre à l'axe de la roue (*cv*).

---

fluides dans les vases dont la forme change brusquement, théorie dont il n'a pas encore été question jusqu'ici, et dont on ne s'occupera que dans la suite.

Remarque sur les art. 575, 585, 586 et 587.

(*cv*) L'objet que l'auteur se propose dans l'art. 575 est d'établir des principes pour la théorie des roues à aubes qui se meuvent dans des coursiers; mais, indépendamment de ce que son raisonnement présente la même faute que celui de l'art. 570 (faute rectifiée dans la note (*ct*)), l'article 575, aussi-bien que ceux 585, 586 et 587 qui en sont la suite, n'offre que des notions vagues et erronées.

Évaluation exacte de l'effort

Pour s'en former de plus exactes, il faut examiner ce qui arrive quand une roue

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

577. Prévenu qu'un corps qui roule ou qui glisse le long d'un plan incliné fort poli BCDE, acquiert en descendant depuis le sommet jusqu'en bas la même vîtesse qu'il eût acquise en tombant de la hauteur BA du même plan (188), *il suit qu'une eau dormante qui viendrait à couler le long d'un plan incliné, acquerra une vîtesse qui pourra être exprimée par la racine de la hauteur du plan.*

en parcourant la hauteur du même plan.

Pl. 8, Fig. 90.

à aube se meut dans un coursier, et y reçoit l'impulsion d'un courant. On suppose, comme cela doit être dans les machines bien exécutées, que l'aube remplit tellement la section du coursier, qu'on peut négliger la considération de l'eau qui s'échappe au pourtour de l'aube. Le mouvement de la roue et celui de la veine d'eau étant supposés parvenus à l'uniformité, on voit que le fluide venant choquer une aube qui se présente à sa rencontre, et ne pouvant s'échapper par les côtés, perd contre elle tout l'excédent de sa vîtesse sur celle de l'aube, et conserve une vîtesse égale à celle de l'aube. Lorsque l'aube suivante vient se présenter à son tour, elle trouve donc devant elle une eau qui, ayant une vîtesse égale à la sienne, n'a aucune influence sur son mouvement, tandis qu'elle reçoit par derrière le choc de la veine de fluide, qui vient de nouveau perdre contre elle tout l'excès de sa vîtesse. Les mêmes effets se renouvellant continuellement, on conçoit que l'effort exercé à la circonférence de la roue, et qui entretient son mouvement, doit différer très-peu de celui qui aurait lieu sur un plan qui recevrait le choc de la veine de fluide avec les circonstances indiquées dans la note (*ct*), mais qui reculerait devant cette veine avec une vîtesse égale à celle des aubes, de manière que le fluide ne perdrait pas contre le plan sa vîtesse entière, mais seulement une vîtesse égale à l'excès de la sienne sur celle du plan.

exercé contre les aubes d'une roue mue dans un coursier.

Employant donc ici la même analyse que dans cette note, et nommant v la vîtesse du courant dans le coursier, ω sa section avant que le fluide ne frappe les aubes, V la vîtesse des aubes, R l'effort qu'elles supportent, et se rappelant que le poids du mètre cube d'eau $\Pi = 1000$ kil., on voit que la masse de l'eau qui coule dans l'élément du temps étant $\frac{1000}{g}\omega v dt$, et la quantité de mouvement qu'elle perd $\frac{1000}{g}\omega v dt\,(v - V)$, on doit avoir $R dt = \frac{1000}{g}\omega v dt\,(v - V)$, d'où $R = \frac{1000}{g}\omega . v(v - V)$.

Il suit de là que la force du choc est proprement due à une vîtesse moyenne proportionnelle entre celle du courant et celle que le courant perd contre l'aube, résultat tout différent de celui que l'auteur établit dans l'art. 585, où il prétend que la force du choc est due à cette vîtesse perdue, de manière qu'on aurait suivant lui $R = \frac{1000}{g}\omega\,(v - V)^2$. En représentant par z la hauteur due à la vitesse v du fluide, ou faisant $v = \sqrt{2gz}$, la valeur ci-dessus de l'effort supporté par les aubes prend la forme $R = \frac{1000}{g}\omega . \sqrt{2gz}\,(\sqrt{2gz} - V)$.

Quant à la considération du centre d'impression de l'aube, dont l'auteur parle dans l'art. 576, la règle qu'il indique n'est pas exacte, et on ne se trompera jamais dangereusement dans la pratique, en plaçant ce point (celui dont la vîtesse est représentée par V) au centre de la partie de l'aube plongée dans le courant.

Du centre d'impression. Remarque sur l'art. 576.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Manière d'exprimer le choc de l'eau qui coule le long d'un plan incliné.

578. Si un réservoir est placé au sommet d'un plan incliné, l'eau qui sortira par le pertuis FGHI ayant déja une vîtesse exprimée par la racine de la hauteur moyenne LK ou son égale MN, en acquerra une plus grande qui le sera par $\sqrt{MA}$, après avoir parcouru le plan incliné. Mais comme le volume de l'eau qui sortira du pertuis dans chaque instant, sera toujours exprimé par $O\sqrt{MN}$, de quelque hauteur que soit ce plan (572), nommant O le pertuis, la quantité de mouvement, ou le choc de l'eau, le sera par $O \times \sqrt{MN} \times \sqrt{MA} = O\sqrt{MF \times MA}$; ce qui montre que si l'on a au pied du plan incliné une surface égale au pertuis, pour recevoir directement l'impression de l'eau qu'on suppose dirigée par un canal comme ci-devant (575), la puissance R qui soutiendra cette surface en équilibre doit être équivalente au poids d'un prisme d'eau, qui aurait pour base un plan égal au pertuis ou à la surface et pour hauteur la moyenne proportionnelle entre MN et MA (574).

Quelle que soit la grandeur d'une surface, il faut, pour la mesure du choc, n'avoir égard qu'à la partie qui en reçoit l'impression.

579. Dans ce cas-ci comme dans les précédents, ce n'est point une nécessité que la surface opposée soit égale au pertuis, pouvant être plus petite ou plus grande. Si elle est plus petite, elle ne pourra manquer de recevoir l'impression de l'eau sur toute son étendue, et si elle est plus grande, il ne faudra avoir égard qu'à la partie qui la recevra directement, pour déterminer la base du prisme d'eau qui doit mesurer l'impression.

Manière de mesurer le choc d'une eau qui coule le long de plusieurs plans inclinés contigus.

580. Si l'eau, en sortant du fond ou par une des faces d'un réservoir, venait à couler le long de plusieurs plans inclinés contigus, sans rencontrer d'autres obstacles que l'opposition des mêmes plans, on déterminera son impulsion directe contre une surface relativement à la hauteur de l'eau dans le réservoir, soit entière, ou moyenne, en suivant ce qui est enseigné dans les articles 198, 199, 200. Ils n'ont été rapportés que comme pouvant être utiles en pareils cas, qui se rencontrent fréquemment dans les pays montagneux, où l'on se sert utilement de l'eau qui tombe des montagnes pour faire agir des machines (*cx*).

Remarques sur les art. 578, 579 et 580.

(*cx*) Je crois devoir insister sur ces matières, parce qu'il n'en est point question dans les traités élémentaires de mécanique, et qu'elles ne sont point traitées d'une manière satisfaisante dans la plupart des ouvrages consultés par les commençants. Quand la veine d'eau frappe les aubes à peu de distance de l'orifice d'écoulement, la force du choc, conformément à la note précédente, est $\frac{1000}{g}\omega.v(v-V)$, ou $\frac{1000}{g}\omega\sqrt{2gz}(\sqrt{2gz}-V)$. Ici V est la vîtesse des aubes, ω et z ont les valeurs indiquées dans la note (*ct*) suivant la disposition de l'orifice. Quand l'eau, après avoir franchi l'orifice, descend le long d'un coursier sur un certain espace avant de rencontrer les aubes, sa vîtesse augmente sans doute en général; mais il s'en faut bien qu'elle croisse en raison de l'augmentation de sa chute, comme l'auteur le suppose dans les art. 578 et 580. L'accroissement de la vîtesse est beaucoup moins

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

581. Quand la direction du courant n'est pas perpendiculaire à la surface opposée, on sent assez qu'il n'agit point avec sa force absolue. Supposons, par exemple, que la ligne NO représente la base d'une surface verticale placée obliquement au courant dans le fond du coursier de la figure 86, et que la ligne PV exprime la vîtesse et la direction du courant. Il est constant que si cette surface était choquée par un corps solide, l'impression serait exprimée par la perpendiculaire PT (23) : mais comme il s'agit d'un fluide dont l'impression doit se mesurer par le quarré de sa vîtesse (568), il y aura même raison de sa force absolue à sa force respective, que du quarré de PV au quarré de PT, c'est-à-dire *du quarré du sinus total au quarré du sinus de l'angle d'incidence.*

Pl. 8, Fig. 88. Quand une surface verticale est inclinée à un courant, la force absolue du courant est à son impression contre la surface, comme le quarré du sinus total est au quarré du sinus de l'angle d'incidence.

582. Supposons que la ligne NO représente la base d'une surface directement opposée au courant. Comme elle sera perpendiculaire sur le

Lorsque de deux surfaces l'une est directement et

---

grand, par l'effet de la résistance provenant du frottement de l'eau sur les parois du coursier.

Dans l'état actuel de l'hydraulique, on connaît assez bien (du moins pour les besoins de la pratique) le mouvement de l'eau au passage d'un orifice, et dans un tuyau ou un canal d'une grande longueur ; mais on n'est pas également à même de déterminer ce mouvement lorsque l'eau, après avoir franchi un orifice, parcourt un coursier dont la longueur est peu considérable. Il serait donc difficile de se rendre compte exactement de la vîtesse qu'aurait l'eau au bas du coursier. Bossut (*Hydrodynamique*, art. 816) et Dubuat (*Principes d'hydraulique*, art. 597) ont examiné s'il était plus ou moins avantageux de placer l'orifice d'écoulement au haut ou au bas de la chute, et ils donnent sur cette question des décisions absolument contraires. Je pense que celle de Bossut est la meilleure, et qu'il y a toujours à perdre dans la disposition d'une roue en-dessous à faire courir l'eau dans un coursier. Il faut tâcher que l'aube reçoive l'impression de la veine à très-peu de distance de l'orifice, et placer ce dernier le plus bas possible. Si l'on est forcé de laisser une certaine distance entre l'orifice et les aubes, on ne doit donner au coursier que la pente nécessaire pour conserver à l'eau la vîtesse qu'elle a à la sortie de l'orifice, et détruire l'effet du frottement sur les parois. Cette pente pourra être de $\frac{1}{10}$ environ, et moins grande encore si le volume d'eau est un peu considérable.

De la meilleure manière de donner l'eau à la roue.

Quant au contenu de l'art. 579, j'observerai que la section du coursier est toujours égale ou plus grande que l'orifice. Si les aubes la remplissent exactement, les formules précédentes donneront la véritable valeur de la force du choc, en prenant pour ω la section de la veine d'eau à l'endroit de la plus grande contraction, et pour v la vîtesse de l'eau dans cet endroit. Si l'aube ne remplissait pas le coursier, et qu'il s'échappât beaucoup d'eau au pourtour, la théorie précédente ne fournirait plus les moyens de calculer exactement la force du choc. Ce cas serait intermédiaire entre celui où une roue tourne dans un coursier que ses aubes remplissent exactement, et celui où elle est mue par un courant d'une largeur indéfinie. Voyez sur sur ce sujet le chapitre premier du livre suivant, et particulièrement le § 2 de la note (*dn*).

Du cas où l'aube ne remplit pas entièrement le coursier.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'autre obliquement opposée à un courant, les impressions qu'elles soutiennent sont dans la raison réciproque de leurs dimensions inégales.

côté IX du coursier, les parallèles QO et PV donneront les triangles semblables QNO, TPV : ainsi nommant NQ a, NO b, PV m, PT n, on aura $NQ = a : NO = b :: PT = n : PV = m$; ou $a^2 : b^2 :: n^2 : m^2$; qui donne $a^2 m^2 = b^2 n^2$, d'où l'on tire $am^2 : bn^2 :: b : a$. Comme le premier terme de cette proportion exprime le produit de la surface NQ par le quarré de la vîtesse entière du courant, et le second celui de la surface NO par le quarré de cette vîtesse modifiée (car ces surfaces ayant la même hauteur, on peut prendre leurs bases pour leurs superficies), *on voit que l'impulsion que soutient la surface directe est à l'impulsion que soutient la surface oblique, réciproquement comme la longueur NO de celle-ci est à la longueur NQ de l'autre.*

Pl. 8, Fig. 89.

583. Si la surface NO était inclinée eu égard au fond du coursier ou à la verticale, comme elle paraît dans la figure 89, et qu'elle eût la même base que l'autre QN directement opposée au courant, on verrait, par un raisonnement semblable au précédent, que la ligne HV représentant le niveau de l'eau, *l'impulsion que soutiendra la surface verticale sera à l'impulsion que soutiendra la surface inclinée, réciproquement comme la largeur NO de celle-ci est à la largeur NQ de l'autre* (*cy*).

Remarques sur les art. 581, 582 et 583. Du choc oblique d'une veine de fluide contre un plan.

(*cy*) Il y a plusieurs remarques à faire pour éclaircir et rectifier les articles précédents. Considérons en premier lieu une veine de fluide qui vient frapper un plan opposé à sa direction, et soit ω l'aire de la section transversale de cette veine, et v la vîtesse du fluide. Si l'on représente par α l'angle formé par le plan et par l'axe de la veine, et qu'on suppose comme dans la note (*ct*) qu'à l'instant où les molécules du fluide cessent d'agir sur ce plan, elles lui sont devenues parallèles, l'effet du choc sera de leur faire perdre la vîtesse $v \sin. \alpha$ qu'elles possédaient dans le sens de la perpendiculaire au plan. Par conséquent, le même raisonnement fait dans la note (*ct*) prouvera que la pression exercée perpendiculairement au plan est exprimée par $\frac{\Pi}{g} \omega v^2 \sin. \alpha$.

La méthode suivie par Lagrange dans le mémoire cité à la fin de cette note, conduit à la même conclusion. A la vérité les expériences de Bossut (*Hydrodynamique*, t. 2, ch. 14) donnent des résultats moindres que la raison des sinus d'incidence : mais cela provient vraisemblablement de ce que le plan dont il s'est servi n'était pas assez large pour que tout le fluide lui fût devenu parallèle quand il cessait d'agir sur lui. On a d'autres expériences du docteur Vince pour tous les angles d'inclinaison compris dans le quart de cercle, où la loi du sinus d'incidence se soutient très-exactement (*Bibl. Brit., Sciences et Arts*, t. 13, p. 117; ou *Philosophical transactions*, 1798). On voit donc que l'énoncé de l'art. 581 est totalement fautif, puisque la force du choc est proportionnelle au sinus de l'angle d'incidence, et non pas au quarré de ce sinus. Cet énoncé de l'art. 581 est d'ailleurs contredit par ceux des art. 582 et 583, où l'auteur revient aux vrais principes, et qui n'offrent que la loi du sinus d'incidence exprimée en d'autres termes.

L'inclinaison des aubes d'une

Si l'on veut maintenant passer de la considération d'une veine de fluide qui vient

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

584. Quand une surface immobile est directement opposée à un courant, nous avons vu (575) que la puissance qui la soutenait était équivalente au poids d'une colonne d'eau qui aurait pour base cette surface, et pour hauteur la hauteur moyenne du réservoir. Or, si dans l'intervalle KY on place un rouleau Z, lequel traversant le coursier jusqu'à la rencontre de ses côtés, puisse tourner librement sur des tourillons, et qu'au-dessus il y ait deux poulies, il est constant que si l'on attache une corde au centre Y, qui vienne passer sous le rouleau et de-là sur les poulies, et qu'à l'extrémité de cette corde on suspende un poids P égal à l'impulsion du courant, ce poids tiendra lieu de la puissance R, et soutiendra la surface NOMQ en équilibre comme auparavant. Mais si on le diminue, la surface sera poussée en avant avec une vîtesse égale à celle du poids en montant, parce qu'il n'y a point de différence dans les bras de leviers, et l'impulsion du courant se trouvera diminuée précisément de la quantité dont le poids l'aura été, puisque ces deux forces seront toujours égales. Pl. 8, Fig. 86.

585. Quand le poids P sera diminué d'une certaine quantité, qu'il aura la liberté de monter sans y toucher davantage, la surface prendra du fluide la plus grande vîtesse qu'elle pourra prendre, et la conservera toujours uniforme tant que le poids pourra monter; *et l'impulsion qui la poussera alors sera exprimée par le quarré de l'excès de la vîtesse du courant, sur celle qu'aura prise la surface.* L'impression que reçoit une surface verticale qui se meut avec une vîtesse uniforme dans le même sens qu'un courant, ne doit être exprimée que par le quarré de l'excès de la vîtesse du courant sur celle de la surface.

586. Nommant a la vîtesse du courant, b celle de la surface, le quarré de $a-b$, qui est $a^2-2ab+b^2$, exprimera l'impulsion de l'excès de la vîtesse du courant sur celle de la surface, qui étant multipliée par cette Figures 86 et 87.

---

frapper un plan large, à celle d'une veine agissant sur les aubes d'une roue contenue dans un coursier, et qu'on suppose la veine dirigée dans le plan de la roue, on voit facilement que l'inclinaison des aubes dans un sens quelconque n'apporterait aucune modification aux valeurs de la force du choc données dans la note (*cv*), cette force étant toujours estimée dans le sens du mouvement de la roue: car l'effet du choc sera toujours de faire perdre au fluide fourni par l'orifice l'excès de sa vîtesse sur celle du centre de l'aube. Seulement, comme l'action du fluide se trouverait transmise à la roue suivant une direction oblique à son axe, une partie de cette action pousserait cet axe dans le sens de sa longueur, et le ferait presser inutilement contre ses points d'appui. roue contenue dans un coursier ne change rien à l'action du fluide dans le sens de la circonférence de cette roue.

S'il ne s'agissait point d'une roue contenue dans un coursier, mais d'une roue telle que celle représentée planche IV du chapitre I^er^ du livre suivant, dont les palettes sont frappées obliquement par une veine de fluide, il faudrait alors, conformément à ce qui précède, considérer le fluide comme exerçant sur la palette une pression normale exprimée par $\frac{1000}{g}\omega v^2 \sin.\alpha$, et décomposer ensuite cette pression dans le sens du mouvement de la roue, pour avoir l'effort qui entretient ce mouvement. Voyez dans le chapitre I^er^ du livre suivant la note (*dv*). Cas où la roue n'est point contenue dans un coursier.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dernière vîtesse, donnera $a^2b - 2ab^2 + b^3$, pour la quantité de mouvement de la surface.

Une surface qui fuit avec une vîtesse égale à celle du courant, n'en ressent point l'impression.

587. Quand la surface est immobile, l'impression qu'elle reçoit à chaque instant étant toujours exprimée par le quarré de la vîtesse entière du courant (575), elle pourra l'être aussi par les quarrés des éléments BC ou EF d'un rectangle ABCD. Si l'on diminuait continuellement le poids P, de façon que la vîtesse de la surface fût en croissant selon l'ordre des termes d'une progression arithmétique, ou comme les éléments du triangle ACD, il arriverait que chaque élément EF du rectangle se trouvant divisé en deux parties par la diagonale AC, si l'une GF exprime la vîtesse de la surface dans un certain instant, le quarré de l'autre EG exprimera l'impression qu'elle recevra dans le même instant, et le produit de $\overline{EG}^2$ par GF donnera la quantité de mouvement (586) de la surface dans cet instant. Ainsi, lorsque GF sera égale à AD, c'est-à-dire, lorsque la surface aura acquis la vîtesse entière du courant, l'autre partie EG devenant zéro, l'impression du courant sera nulle, et alors le poids P sera réduit à zéro.

Pour qu'une surface qui fuit reçoive de la part du courant la plus grande quantité de mouvement qu'il est possible, il faut que sa vîtesse soit le tiers de celle du courant.

588. Comme entre tous les éléments du rectangle il y en a sûrement un qui se trouve divisé par la diagonale AC, de façon que le quarré de la plus grande partie HK, multiplié par la plus petite KI, donne le plus grand de tous les produits qui peuvent être formés de la sorte : *on voit que la vîtesse entière du courant peut être aussi divisée en deux parties, dont la plus petite devenant celle de la surface et l'autre celle avec laquelle elle est choquée, cette surface aura la plus grande quantité de mouvement* (*cz*) *qu'il est possible.* Pour connaître le point de division, ou, si l'on veut, la vîtesse que doit avoir dans ce cas la surface, par rapport à celle du courant, nous nommerons HI a, KI x; ainsi HK sera $a - x$, dont le quarré qui est $a^2 - 2ax + x^2$ étant multiplié par x, donne $a^2x - 2ax^2 + x^3$, dont prenant la différentielle pour l'égaler à zéro, selon la méthode ordinaire, il vient $a^2dx - 4axdx + 3x^2dx = 0$, où effaçant dx il reste $a^2 - 4ax + 3x^2 = 0$, ou $x^2 - \frac{4}{3}ax = -\frac{1}{3}a^2$, dont le premier membre étant réduit en quarré donne $x^2 - \frac{4}{3}ax + \frac{4}{9}a^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{3}a^2$, ou $\frac{2}{3}a - x = \sqrt{\frac{a^2}{9}}$; d'où dégageant l'inconnue, en la rendant positive (parce qu'ayant eu le signe — au commencement du calcul, elle doit l'avoir encore dans la racine), il viendra $x = \frac{2}{3}a - \sqrt{\frac{a^2}{9}}$, ou après la réduction

---

Remarque sur art. 588.

(*cz*) Cette expression, *quantité de mouvement*, n'est point exacte dans le sens que l'auteur lui donne. La quantité de mouvement d'une roue est le produit de sa masse par sa vîtesse : il ne s'agit pas ici de cela, mais du produit de l'effort exercé sur la roue par l'espace que cette roue parcourt dans un temps donné. Ce produit est véritablement la *quantité d'action* imprimée à la machine, conformément aux notions établies dans la note (*ai*). Voyez au surplus la note suivante (*da*).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$x = \frac{1}{3}a$; *ce qui montre que la vîtesse de la surface doit être le tiers de celle du courant, pour le plus grand effet; c'est-à-dire pour qu'en même temps elle reçoive de la part du courant la plus grande vitesse et la plus grande impression qu'il est possible, dont le concours répond à la plus grande quantité de mouvement.*

589. La vîtesse entière du courant étant exprimée par a, et venant de trouver que celle de la surface devait l'être par $\frac{1}{3}a$ pour le plus grand effet, on aura donc $\frac{2}{3}a$ pour la vîtesse *respective* avec laquelle le courant choquera la surface. Ainsi dans ce cas la force du choc sera $\frac{4}{9}a^2$, *c'est-à-dire égale aux quatre neuvièmes du poids de la colonne d'eau qui mesure la force absolue du courant contre la surface lorsqu'elle est immobile.*

Dans le cas du plus grand effet, la force respective du courant est égale aux $\frac{4}{9}$ de sa force absolue, et la surface ne pourra faire monter que les $\frac{4}{9}$ du poids d'équilibre.

On peut rendre le calcul précédent beaucoup plus simple, en nommant x la partie HK, parce qu'alors KI devenant $a-x$ on aura x^2 à multiplier par $a-x$, qui donne ax^2-x^3, dont la différentielle étant égalée à zéro, il vient $2axdx-3x^2dx=0$, ou $2a-3x=0$, ou $x=\frac{2}{3}a$, ce qui montre encore que la vîtesse respective doit être les $\frac{2}{3}$ de la vîtesse entière, et que celle de la surface en sera le tiers.

590. Comme dans l'état d'équilibre la quantité de mouvement *du moteur* est toujours égale à la quantité de mouvement *du poids*, on voit que puisque pour le plus grand effet il ne faut compter que sur les quatre neuvièmes de la force du moteur : *il ne pourra enlever que les quatre neuvièmes du poids avec lequel il était en équilibre lorsqu'il agissait pleinement.*

591. Si l'on multiplie l'expression de la force du choc de l'eau, qui est $\frac{4}{9}a^2$ par $\frac{1}{3}a$, vîtesse de la surface, on aura $\frac{4}{27}a^3$ pour sa plus grande quantité de mouvement, ou pour la force qui est seule capable de faire monter *le plus grand poids qu'il est possible, avec le plus de vîtesse qu'il est possible.*

592. Depuis qu'on a commencé à faire usage de la force de l'eau pour mouvoir les machines, toute la perfection à laquelle les plus habiles machinistes ont pu atteindre s'est bornée à mettre d'abord la puissance en équilibre avec le poids qu'il s'agissait de mouvoir; ensuite à diminuer le poids au hasard, ou à augmenter le rayon de quelqu'une des roues, afin que la puissance l'emportant sur la charge, elle mît la machine en mouvement, sans savoir jusqu'à quel point devait aller sa vîtesse. On pensait même que plus cette vîtesse serait grande, et plus l'effet en serait avantageux; et ce sentiment paraissait si naturel, qu'on était fort éloigné de le croire susceptible d'erreur.

Ce n'est que depuis le commencement de ce siècle que l'on sait de quelle manière doit être réglé le mouvement des machines mues par un courant pour qu'elles soient parfaites.

Tel était l'état de la mécanique lorsque M. Parent, par une suite de réflexions, s'aperçut que pour qu'une machine mue par un courant fût capable du plus grand effet qu'elle pouvait produire, il fallait nécessairement qu'il y eût un certain rapport déterminé entre la vîtesse de la roue

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et celle du courant. Ayant suivi cette idée, il a découvert par le calcul précédent (588) que la vîtesse de la roue devait être le tiers de celle du courant, ou que la machine ne devait faire mouvoir que les quatre neuvièmes du poids qui lui convenait dans l'état d'équilibre. Car les roues qui trempent dans l'eau, étant accompagnées d'aubes qui se succèdent immédiatement, peuvent être considérées comme une seule surface qui recevrait l'impression du fluide sans interruption.

Cette découverte mérite d'être regardée comme une des plus importantes que l'on ait faites depuis le renouvellement des sciences et des beaux arts. Quand tous les travaux de M. Parent n'auraient abouti qu'à ce seul objet, il devrait suffire pour le rendre recommandable parmi ceux qui sont touchés du bien public, d'autant mieux qu'elle est le fruit d'un grand nombre de connaissances acquises, et d'une nature à ne rien tenir du hasard. J'avouerai ingénument que la première fois que je la vis dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1704, j'en fus si frappé que je la regardai comme ce que j'avais appris jusques-là de plus intéressant en mécanique. En effet, que pouvais-je rencontrer qui me satisfît plus, vu le goût que j'ai eu dès l'âge le plus tendre pour tout ce qui s'appelle machine, qu'un principe qui ne laissait plus rien à désirer pour la justesse de leur calcul?

593. On est assuré présentement que quelques machines qu'on fasse, qui doivent être mues par un courant, on n'en peut attendre un plus grand effet que les $\frac{4}{27}$ de *l'effet naturel* (591) du courant, qui consiste *dans le produit de sa vîtesse entière par un poids qui en pourrait être emporté avec toute cette vîtesse*, ou en $a \cdot a^2 = a^3$.

594. On jugera donc sûrement de combien une machine exécutée approche, ou est éloignée du degré de perfection, en comparant son effet aux $\frac{4}{27}$ de l'effet naturel du fluide qui la fait agir, ou en comparant le poids qu'elle meut aux quatre neuvièmes de celui qui lui convient dans l'état d'équilibre.

Quand on voudra connaître le poids que peut mouvoir une machine mue par un courant, il ne faudra lui donner à élever que les $\frac{4}{9}$ du poids qui lui convient dans l'état d'équilibre.

595. On voit aussi que quand on aura à construire une machine, il faudra en disposer les parties de façon que la résistance qu'elle aura à surmonter soit les $\frac{4}{9}$ du poids d'équilibre, ou que la vîtesse de la roue soit le tiers de celle du courant; ou, ce qui revient au même, il faut, si la vîtesse du courant est donnée, construire la machine de façon que son poids d'équilibre soit à celui qu'on veut élever, dans le rapport de 9 à 4.

Lorsque le poids qu'on veut élever sera donné, il faut que son produit, par sa vîtesse, soit égal aux $\frac{4}{27}$ du produit de la force absolue du cou-

596. Que si au contraire le poids est donné, il faut que la grandeur des aubes soit tellement ménagée que leur quantité de mouvement soit à l'effet naturel du fluide comme 4 est à 27, ou que leur vîtesse soit le tiers de celle du courant; après quoi on sera assuré d'avoir rendu la machine parfaite, quelle que soit d'ailleurs sa construction, qui peut avec ces conditions varier d'une infinité de manières. Car il reste toujours à l'in-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dustrie de celui qui en fait le projet, de disposer les pièces de façon qu'en jouant avec aisance, il y ait le moins de déchet qu'il est possible de la part des frottements.

Pour montrer la nécessité d'assujétir aux principes que l'on vient de voir toutes les machines mues par un courant, et en même temps pour faciliter l'intelligence du fréquent usage que nous en ferons dans la suite, je vais examiner la chose sous une autre face, et la rendre sensible par un exemple.

597. Si l'on en excepte un petit nombre de savants, il n'y a personne qui ne pense que plus la roue qui fait agir les pompes de la Samaritaine à Paris, aura de vîtesse, et plus la quantité d'eau qui montera dans le réservoir sera grande. Cependant, comme la force du courant de la Seine est limitée, puisqu'elle dépend du quarré de sa vîtesse, on saura à quoi s'en tenir si l'on fait attention que cette roue doit nécessairement se rencontrer dans un des trois cas que voici.

Dans le premier, elle restera immobile si la force du choc de l'eau contre une des aubes est inférieure ou égale au poids que la machine doit élever. Dans le second, si cette roue a autant de vîtesse que le courant, l'eau ne rencontrant aucune opposition, ne choquera point (587); ce qui ne pourrait même arriver à une machine qui n'aurait nulle résistance à vaincre. Il n'y a donc que dans le troisième, lorsque la vîtesse de la roue est moindre que celle du courant, qu'elle sera capable d'élever un poids; parce qu'une partie de l'action du courant, sera en équilibre avec la pesanteur du poids, tandis que l'autre partie fera mouvoir la roue, et par conséquent monter le poids avec une certaine vîtesse (586).

Si les colonnes d'eau que refoulent les pistons étaient trop grosses par rapport à leur hauteur, elles opposeraient par leur poids une si grande résistance au courant, que, ne lui restant que peu de vîtesse après le choc pour faire tourner la roue, l'eau qui doit passer dans le réservoir y montera si lentement que l'on pourra perdre davantage de la part du temps, que l'on ne gagnera par l'augmentation du poids. Si au contraire on fait le cercle des pistons trop petit, ou les colonnes trop minces, l'eau à la vérité montera plus promptement dans le réservoir, mais en si petite quantité à chaque coup de piston, qu'on perdra plus sur le poids qu'on ne gagnera de la part de la vîtesse.

Cependant comme l'objet de cette machine doit être de fournir la plus grande quantité d'eau qu'il est possible dans un certain temps déterminé, par le mouvement d'une roue dont le rayon et la grandeur des aubes doivent avoir été assujétis à l'emplacement de la machine, on voit que sa perfection se réduit à faire en sorte que chaque coup de piston fasse non-seulement monter beaucoup d'eau à-la-fois, mais qu'elle monte encore avec le plus de vîtesse qu'il sera possible. Cependant le plus grand effet

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de ces pistons dépendant nécessairement de celui de la roue, il faut que cette roue ait la plus grande quantité de mouvement qu'il est possible, pour le communiquer aux pistons, c'est-à-dire qu'il faut que le produit du choc du courant par la vîtesse de la roue, soit le plus grand de tous ceux formés de la sorte.

Comme la vîtesse entière du courant peut être exprimée par une ligne droite, ce problême se réduit à la diviser en deux parties, de sorte que le quarré de l'une multiplié par l'autre donne le plus grand parallélipipède qu'il est possible de former par une telle division; et n'y ayant dans la longueur de la ligne qu'un point pris entre l'une et l'autre de ses extrémités qui puisse satisfaire à ce que l'on demande, on voit qu'il s'agit ici d'un maximum qu'on ne peut trouver aisément que par le calcul différentiel.

Si je me suis un peu étendu sur un sujet qui pouvait être expliqué en moins d'une page, c'est que mon dessein est d'écrire pour tout le monde; et que je me suis aperçu qu'il n'était point aisé de faire entendre à bien des gens, et même à ceux qui s'imaginent savoir beaucoup, que c'était une erreur de conclure que plus une roue avait de vîtesse, plus l'effet de la machine était grand (*da*).

Inexactitude des règles données depuis l'art. 585. Il faut distinguer les roues mues dans un coursier de celles mues dans un fluide indéfini.

(*da*) Les règles données depuis l'art. 588 contiennent des erreurs qui sont la suite de la faute commise dans l'art. 585, laquelle a été remarquée dans la note (*cv*). Les résultats de Parent conviennent bien aux roues à aubes mues par un courant d'une largeur indéfinie, telles que les roues pendantes des moulins sur bateaux, mais non aux roues contenues dans un coursier et mues par le choc d'une veine qui s'échappe d'un orifice. On verra, dans l'addition placée à la fin de ce livre, que la quantité de travail exécutée par une machine, ou le produit susceptible d'être évalué en argent qu'elle fournit, est toujours relatif à *la quantité d'action* fournie par le moteur qui met cette machine en mouvement; c'est-à-dire, conformément aux notions établies dans la note (*ai*), *au produit de l'effort du moteur par l'espace que parcourt son point d'application dans l'unité de temps.* On a vu dans la note (*cv*) que l'effort du moteur était ici $\frac{1000}{g}\omega v(v-V)$: l'espace parcouru par son point d'application étant V, sa quantité d'action sera $\frac{1000}{g}\omega v(v-V)V$, c'est-à-dire que ω et v étant supposés constants, l'effet de la machine est proportionnel à $(v-V)V$, et non pas à $(v-V)^2V$, comme le dit l'auteur.

Détermination exacte de la vitesse correspondante au maximum d'effet pour les roues mues dans un coursier.

En cherchant la valeur de V qui rend la quantité $(v-V)V$ un maximum, on trouve $V=\frac{1}{2}v$, et mettant cette valeur dans l'expression de l'effort du moteur, il vient $\frac{1}{2}.\frac{1000}{g}\omega v^2$. Il suit de là que, pour la meilleure disposition de la machine, *la vîtesse des aubes doit être la moitié de celle de l'eau qui vient les frapper*, et non pas le tiers; et que *l'effort du moteur est alors la moitié de sa force absolue*, et non pas les $\frac{4}{9}$ de cette force. Il a été fait beaucoup d'expériences sur les roues à aubes, qui confirment la théorie précédente. Seulement elles indiquent que, dans la pratique, il faut considérer la valeur $V=\frac{1}{2}v$ comme une limite en-deçà de laquelle il vaut

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

598. Si l'on suppose que le pertuis FGHD est fermé, et que l'eau comprise dans l'espace FGMQ est dormante, faisant abstraction du poids P, la puissance qui poussera en avant la surface NOMQ avec une vîtesse uniforme selon la direction RY, sera la même que celle qu'il faudrait pour soutenir cette surface en équilibre contre le choc d'un courant qui aurait la même vîtesse; car que ce soit l'eau qui vienne rencontrer la surface, ou la surface qui aille à la rencontre de l'eau, le choc sera toujours exprimé par le quarré de la vîtesse de l'un ou de l'autre.

Pl. 8, Fig. 86.

Il est indifférent pour la mesure du choc, que ce soit un courant qui aille à la rencontre d'une surface immobile, ou que ce soit la surface qui aille à la rencontre d'une eau dormante, avec la même vîtesse que celle du courant.

599. Si la surface précédente allait à la rencontre du courant qui sort du pertuis, la puissance ayant à soutenir non-seulement l'impulsion dont peut être capable la vîtesse du courant, mais encore celle qu'elle fait naître par sa vîtesse propre, la résistance qui résultera de leur concours doit être exprimée par le quarré de la somme des vîtesses de la surface

Quand une surface va à la rencontre d'un courant, le choc doit être exprimé par le quarré de la somme des vîtesses

---

mieux rester que d'aller au-delà. Les résultats de Sméaton (*Recherches expérim. sur l'eau et le vent*, trad. par M. Girard, p. 16 et suiv., et p. 73 et 74), et ceux de Bossut (*Hydrodynamique*, t. 2, ch. 18), s'accordent à indiquer pour la vîtesse des aubes qui convient au plus grand effet, environ les 0,4 de celle de l'eau.

Quant aux roues qui seraient mues par un courant d'une largeur indéfinie, l'effort que l'eau exerce sur elles, d'après ce qu'on verra dans la note suivante (*db*), peut être considéré comme proportionnel au quarré de la vîtesse relative avec laquelle le courant rencontre les aubes, ou à $(v-V)^2$. La quantité d'action est donc proportionnelle à $(v-V)^2 V$, ce qui conduit au résultat de Parent adopté par Bélidor, et qui est exact dans ce cas.

La même détermination pour les roues mues dans un fluide indéfini.

Si l'on veut bien concevoir la différence de ces deux cas, il faut remarquer que pour la roue contenue dans un coursier, la masse de fluide qui agit sur elle à chaque instant est déterminée par la dépense de l'orifice qui lui fournit l'eau, et absolument indépendante de la vîtesse de cette roue. Or la masse du fluide étant constante, la force du choc ne dépend plus que de la vîtesse relative avec laquelle le choc s'effectue, c'est-à-dire qu'elle demeure proportionnelle à $v-V$, et l'effet à $(v-V)V$. Mais dans un fluide indéfini, la masse de fluide qui agit à chaque instant sur les aubes est variable, et proportionnelle à la vîtesse relative, en sorte que la force du choc l'est au quarré $(v-V)^2$ de cette vîtesse, et l'effet à $(v-V)^2 V$.

Remarque historique sur la théorie des roues à aubes.

Borda a fait voir le premier que la vîtesse théorique des roues mues dans un coursier devait être la moitié de celle de l'eau. Il paraît qu'il croyait la solution admise avant lui erronée (*Mémoires de l'académie des Sciences*, 1767, p. 273). Je ne sache pas que personne ait encore remarqué que les solutions de Parent et de Borda étaient exactes toutes deux, et convenaient à deux cas différents. C'est probablement faute d'avoir fait cette remarque, qu'on a cru que les résultats de Borda et les expériences de Sméaton s'accordaient avec une théorie de Don Georges Juan, d'après laquelle la résistance dans les fluides indéfinis serait proportionnelle à la vîtesse (voyez la *Nouvelle Architecture hydraulique*, t. 1, p. 396 et 401; et l'*Introduction* placée par M. Girard en tête de sa *Traduction des Recherches expérimentales sur l'eau et le vent*, de Sméaton).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du courant et de la surface.

et du courant; c'est-à-dire que si le courant avait trois pieds de vîtesse par seconde, et que la surface en remontant fît un chemin de deux pieds dans ce temps, elle sera dans le même cas que si elle soutenait en équilibre l'impression d'un courant qui aurait cinq pieds de vîtesse par seconde, ou comme si elle était mue avec cette vîtesse dans une eau dormante. Car si lorsqu'une surface fuit et semble se dérober à un courant, il faut soustraire sa vîtesse de celle du courant pour avoir la vîtesse respective avec laquelle elle est frappée (585), il est tout naturel, quand la surface va à la rencontre du courant, d'ajouter sa vîtesse à celle du courant.

Quand une surface suit la direction du courant avec une vîtesse plus grande, elle est dans le même cas que si elle était mue dans une eau dormante avec l'excès de sa vîtesse sur celle du courant.

600. On verra au contraire, que lorsque la même surface sera mue selon la direction naturelle du courant, avec une vîtesse plus grande que celle de ce courant, l'impulsion que soutient la puissance doit être exprimée par le quarré de la différence de la vîtesse de la surface à celle du courant, parce que la surface est alors à l'égard de l'eau qui fuit, ce qu'est le courant lorsque la surface tend à se dérober à son impression.

Il n'y a point de courant dont la vîtesse uniforme ne puisse être regardée comme ayant été acquise par une chûte.

601. On ignorait encore la manière de mesurer la force dont pouvaient être capables les rivières ou ruisseaux, dans les cas précédents, lorsqu'il vint en pensée à M. de la Hire *qu'on pouvait regarder la vîtesse uniforme d'une eau courante, comme ayant été acquise par une chute;* par conséquent comme la vîtesse moyenne que prendrait, à la sortie d'un pertuis vertical, l'eau d'un réservoir dont la hauteur serait égale à cette chute: d'où il conclut que l'*impression directe d'un courant contre une surface verticale devait être mesurée par le poids d'un prisme d'eau qui aurait pour base la surface choquée, et pour hauteur la chute relative à la vîtesse du courant.*

Supposant donc une surface immobile et verticale de 10 pieds quarrés, recevant directement l'impression d'un courant qui aurait 4 pieds de vîtesse par seconde, il faudra chercher la chute qui répond à cette vîtesse (177) en disant, comme 30 est à $\sqrt{15}$, ainsi 4 est à $\sqrt{x}$, ou comme 900 est à 15, ainsi 16 est à $x = \frac{4}{15}$; ce qui montre que la hauteur que l'on cherche doit être les $\frac{4}{15}$ d'un pied, qu'il faut multiplier par 10 superficie de la surface, et le produit par 70, pour avoir 186 $\frac{2}{3}$ livres, force absolue du courant.

On aura toujours la hauteur du prisme d'eau qui exprime la force absolue d'un courant, en divisant sa vîtesse entiere par 60.

602. Nommant a la vîtesse du courant, et x la chute, on aura $900 : 15 :: a^2 : x$; d'où l'on tire $900\,x = 15\,a^2$, ou $x = \frac{15}{900}\,a^2$, ou après la réduction $x = \frac{1}{60}\,a^2$; ce qui montre en général que pour avoir la chute qui doit répondre à la vîtesse de l'eau, ou la hauteur de la colonne qui exprime la force du choc, *il suffit de diviser le quarré de la vitesse de l'eau par* 60.

Application du principe précédent aux différentes vi-

603. Si la surface se dérobe au courant, on aura de même l'impulsion qu'elle soutiendra, en soustrayant sa vîtesse de celle du courant, si la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

première est moindre que la seconde ; ou en soustrayant la vîtesse du courant de celle de la surface, si c'est le contraire ; et en divisant le quarré de la différence par 60, pour avoir la hauteur du prisme d'eau.

tesses et directions d'une surface par rapport à celle du courant.

604. Quand la surface ira à la rencontre du courant, il faudra au contraire ajouter leurs vîtesses ensemble, et diviser encore le quarré de la somme par 60.

605. Quand la force qui doit mouvoir la surface dans une eau dormante sera donnée, et qu'on voudra connaître avec quelle vîtesse une surface doit être mue, il faudra trouver quelle est la hauteur du prisme d'eau qui aurait pour base la même surface, et dont le poids serait égal à la force donnée, ensuite chercher la vîtesse relative à une chute égale à la hauteur du prisme, elle sera celle que l'on demande.

606. Si l'objet de la force donnée était de mouvoir une surface contre un courant, il faudrait chercher, comme dans le cas précédent, la vîtesse qui répond à la hauteur du prisme d'eau, la regarder comme la somme des vîtesses du courant et de la surface ; d'où retranchant celle du courant, la différence sera la vîtesse avec laquelle la surface remontera.

607. Les principes que l'on vient d'établir nous serviront dans la suite à calculer les machines mues par le courant des rivières ou ruisseaux ; pour savoir aussi avec quelle vîtesse un bateau pourra être mu avec une force donnée, ou quelle est la force qu'il faudra pour le mouvoir avec une vîtesse donnée, soit en remontant ou en descendant une rivière, ou dans une eau dormante comme sur les canaux de navigation ; soit que l'on se serve de la force des hommes, des chevaux ou du vent, relativement à la charge du bateau, c'est-à-dire à son enfoncement dans l'eau, d'où dépend la grandeur de la surface qui doit la fendre : c'est ce que l'on trouvera détaillé dans la seconde partie de cet ouvrage, ne s'agissant ici que des principes généraux (*db*).

(*db*) Les articles précédents contiennent la théorie de la résistance des corps dans les fluides, telle qu'elle était reçue du temps de Bélidor, et l'a été encore longtemps après. On confondait dans cette théorie l'action supportée par un corps plongé dans un courant d'une largeur indéfinie, avec le choc d'une veine de fluide isolée ; et pour la résumer en peu de mots, on considérait chaque élément d'une surface opposée à l'action d'un courant, comme supportant une pression due à la même hauteur que la vîtesse du courant, cette hauteur étant multipliée par le quarré du sinus de l'angle formé par l'élément avec la direction du courant. D'après ce principe, le calcul intégral fournissait des méthodes pour évaluer la résistance d'une surface quelconque, et pour déterminer la figure à donner à un corps pour qu'il éprouvât la moindre résistance possible. C'est ainsi, par exemple, qu'on trouvait que la résistance d'une sphère devait être la moitié de celle de son grand cercle, que la résistance d'un cube devait être la même en le faisant mouvoir suivant ses

L'ancienne théorie de la résistance des fluides, exposée par Bélidor, est actuellement abandonnée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Usage d'une table qui donne les chûtes dont on

608. N'ayant rien voulu négliger de tout ce qui pouvait faciliter le calcul des machines, j'ai cru devoir accompagner cette section d'une table

---

arêtes ou suivant sa diagonale, etc. On considérait uniquement la face antérieure du corps recevant le choc du fluide, et on ne supposait point que sa longueur ou la forme de sa face postérieure pût influer sur sa résistance. Quelques expériences de Borda, en petit nombre, mais bien choisies (*Mém. de l'Acad. des Sciences*, 1763 et 1767), ont suffi pour prouver que cette théorie ne s'accordait sensiblement avec les effets naturels qu'en ce qu'elle supposait la résistance proportionnelle au quarré de la vîtesse, et que sous tout autre rapport elle s'en éloignait tout-à-fait, et n'était propre qu'à induire en erreur. Elle est donc actuellement entièrement abandonnée, mais la question n'a pas encore été soumise au calcul d'une manière satisfaisante, et les recherches expérimentales, quoique en assez grand nombre, sont encore loin d'être complètes.

Notions théoriques sur la résistance des fluides. — De la résistance, en tant qu'elle est due au choc du fluide contre le corps. Pl. C, Fig. 12.

§ 1. La manière dont les mouvements se propagent dans les fluides est si peu connue, qu'il est très-difficile de se former une idée exacte des modifications qui ont lieu quand un courant rencontre un corps immobile. Soit le corps ABCD, qu'on pourra considérer pour fixer les idées comme un cylindre à base circulaire, ayant son axe dirigé dans le sens du courant qui frappe sa face AB. Il paraît que les filets de fluide qui viennent à la rencontre du corps se détournent à quelque distance en avant de cette face, à-peu-près de la manière indiquée par les lignes ponctuées, et cette déviation dans la direction des filets ne semble avoir lieu d'une manière sensible que dans une étendue assez peu considérable à l'entour du cylindre. La présence de ce corps diminuant, dans la portion du courant qui se ressent ainsi de cette présence, la grandeur de la section, il faut nécessairement que la vîtesse y augmente. Il faut donc concevoir qu'en même temps que les molécules du fluide se détournent, leur vîtesse s'accroît peu-à-peu, jusqu'à ce qu'elles arrivent vis-à-vis des extrémités A, B de la face antérieure, et jusqu'à l'endroit où la courbe qu'elles décrivent, laquelle présente d'abord sa convexité au corps, s'infléchit, et lui présente sa concavité. A partir de ce point, les molécules du fluide, comme on le verra tout-à-l'heure, cessent d'agir sur le corps et de se ressentir de sa présence; elles tendent à continuer leur mouvement en ligne droite, et à conserver leur vîtesse acquise. Mais l'inertie du fluide environnant, et l'adhésion des molécules les unes aux autres, les ramènent peu-à-peu dans la direction du mouvement général, en leur faisant décrire des lignes semblables à des portions de parabole, et leur enlevant l'excès de leur vîtesse sur celle de ce mouvement.

D'après cette notion fort grossière des effets qui ont lieu à la rencontre de la face antérieure du corps, on peut imaginer, comme une hypothèse mathématique propre à représenter ces effets, que le fluide se meut dans une infinité de petits canaux dirigés suivant les lignes ponctuées de la figure, où la section diminue et la vîtesse augmente jusqu'aux points d'inflexion situés vis-à-vis des extrémités A, B de la face antérieure, et où la section augmente et la vîtesse diminue à partir de ces points. Soit MN la direction générale du courant, *mon* la direction de l'un quelconque des canaux infiniment petits dont on vient de parler, et *o* le point d'inflexion de ce canal. Si l'on considère le mouvement d'une petite tranche de fluide qui le par-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans laquelle on pût trouver toutes les chutes relatives aux vîtesses uniformes par seconde que l'on peut proposer, avec la force du choc dont

a les vîtesses, et les chocs de l'eau relativement aux vîtesses.

---

court, on voit que sa vîtesse croissant de m en o, cette tranche doit être censée poussée par une force capable de produire cette accélération dans son mouvement. Par conséquent la tranche exerce normalement contre la paroi du canal une pression, qui se compose de la force dont on vient de parler décomposée perpendiculairement à cette paroi, et de la force centrifuge (voy. la fin du § 5 de la note (*ai*)). Cette pression normale à la paroi du canal peut ensuite être décomposée en deux forces, l'une perpendiculaire à la direction MN du courant, qui sera détruite par la force analogue résultant du canal placé symétriquement avec celui que l'on considère, l'autre parallèle à MN, qui produira l'effort supporté par le corps. En appliquant le calcul à ces considérations (voyez les *Nouveaux principes d'artillerie* de Robins, p. 310 de la trad. franç.), on trouve qu'en nommant v la vîtesse générale du courant, qui a lieu en m où le canal commence à se courber, v' la vîtesse qui a lieu au point d'inflexion o, ω la section du canal en m, θ l'angle otN formé par la tangente au point o avec MN, Π le poids de l'unité de volume du fluide, l'effort exercé sur le corps dans le sens MN par le fluide contenu dans la portion mo du canal, a pour valeur $\frac{\Pi}{g}\omega v\,(v - v'\cos.\theta)$. C'est d'ailleurs ce qu'il eût été aisé de voir *a priori*, d'après les considérations employées dans la note (*cv*); et l'on trouverait comme dans cette note que l'effort exercé contre le corps dans le sens MN doit être égal à la quantité $\frac{\Pi}{g}\omega$, multipliée par le produit de la vîtesse primitive du fluide v, et de la vîtesse que ce fluide perd dans ce sens MN, laquelle est précisément $v - v'\cos.\theta$.

La formule précédente montre que la vîtesse v étant donnée, l'effort exercé sur le corps est d'autant plus grand que la vîtesse $v - v'\cos.\theta$ perdue contre le corps est plus grande. La valeur de cette dernière dépend en grande partie de l'angle θ, ou de la manière dont les filets de fluide sont forcés de s'infléchir. S'il arrivait que cette inflexion fût telle que la tangente au point d'inflexion o fût perpendiculaire à la direction du courant, ou parallèle à AB, on aurait alors $\cos.\theta = 0$: la valeur de l'effort serait le plus grande possible, et deviendrait $\frac{\Pi}{g}\omega v^2$, ce qui s'accorde avec le contenu de la note (*ct*).

On n'a considéré le mouvement du fluide dans le canal mon que jusqu'au point o. Au-delà de ce point la vîtesse diminuant, il faut concevoir chaque tranche soumise à l'action d'une force dirigée en sens contraire de son mouvement. Mais ici la courbe tournant sa convexité du côté opposé au corps, la pression normale exercée contre la paroi du canal, tant à raison de cette force que de la force centrifuge du fluide, est aussi dirigée du côté opposé au corps. Il paraît donc que le fluide n'exerce plus, passé le point o, aucune action sur ce corps, et que la pression normale exercée contre la paroi est détruite dans cette dernière partie du canal mon par l'inertie du fluide environnant.

Il ne faudrait cependant pas conclure de-là que la figure de la partie antérieure

De la résistance, en tant qu'elle est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

les courants qui auraient ces vîtesses seraient capables sur une surface donnée.

due à la différence des pressions qui ont lieu contre les faces antérieures et postérieures du corps.

du corps, ou de sa proue, déterminât seule l'intensité de la résistance. Les observations prouvent au contraire que la résistance dépend en grande partie de la figure de la poupe, et sur-tout de la proportion entre la largeur du corps et sa longueur. On sait, par exemple, qu'en présentant une surface mince quarrée au choc d'un courant, elle supportera un effort plus grand qu'un cube dont ce quarré serait la base; que le cube supportera un effort plus grand qu'un parallélipipède de même base dont la longueur serait double, et que la résistance ira ainsi en diminuant jusqu'à une certaine limite, à mesure que la longueur du corps augmentera. Il paraît que ces phénomènes ne peuvent s'expliquer, qu'en examinant les modifications que la pression causée par la pesanteur du fluide peut éprouver à l'entour du corps.

Si le fluide était en repos, la pression serait dans chaque point due à la distance verticale z de ce point à la surface du fluide (voyez la note (bx)). Mais, en général, il n'en est pas de même dans un fluide en mouvement. Dubuat n'hésite pas à admettre en principe que, v étant la vîtesse en un point quelconque du fluide, et $\frac{v^2}{2g}$ la hauteur due à cette vîtesse, la pression est dans ce point due à la hauteur $z-\frac{v^2}{2g}$ (*Principes d'hydraulique*, art. 439). Ce principe qui a effectivement lieu dans quelques cas, comme on en a vu un exemple dans le § 5 de la note (ck), ne peut être adopté en général; et on peut affirmer au contraire que dans un courant réglé, où la section et la vîtesse sont constantes, la pression est due en chaque point à la distance z, c'est-à-dire qu'elle est la même que si le fluide était stagnant, et sa surface horizontale. Mais si la présence d'un corps plongé dans le fluide oblige les molécules à accélérer leur mouvement alentour de ce corps, la pression y diminue; elle est alors due à une hauteur d'autant plus petite que z, que l'augmentation survenue dans la vîtesse est plus considérable. En appelant u la vîtesse dans un point où le mouvement naturel du fluide est ainsi troublé, la pression peut y être censée due à une hauteur exprimée par $z-k.\frac{u^2-v^2}{2g}$, la quantité k étant un coëfficient numérique constant. Comme la vîtesse u augmente peu-à-peu depuis une certaine distance en avant du corps jusques vis-à-vis des points A et B, puis diminue ensuite, on voit que la pression due au poids du fluide doit être la plus petite vis-à-vis ces points, et qu'à mesure qu'on s'en éloigne, soit en remontant le courant, soit en le descendant, elle reprend peu-à-peu la valeur générale qu'elle a dans la masse du fluide.

Ces deux parties de la résistance doivent être ajoutées l'une à l'autre.

Ces notions étant admises, il paraît que si l'on connaissait les mouvements que les diverses molécules du fluide prennent alentour d'un corps, et qu'on voulût évaluer sa résistance, il faudrait en premier lieu calculer comme il a été indiqué ci-dessus l'effort résultant des pertes de mouvement que le choc contre ce corps fait éprouver au fluide, en sommant les valeurs de la quantité $\frac{\Pi}{g}\omega v(v-v'\cos.\theta)$ dans toute l'étendue du fluide où ses molécules sont obligées de changer de direction. La résistance qu'on trouverait ainsi est une chose absolument indépendante de la pres-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Dans la première colonne on voit que les vîtesses uniformes par seconde vont en progression arithmétique, en ne se surpassant que d'un

---

sion provenant du poids du fluide, et elle aurait également lieu dans un fluide non pesant, auquel une cause quelconque aurait imprimé son mouvement. Il faudrait en second lieu calculer pour les divers éléments de la surface du corps la pression provenant du poids du fluide, pression due à la hauteur $z - k.\frac{u^2 - v^2}{2g}$, et on prendrait la résultante de ces pressions sur la face antérieure, laquelle pousse le corps dans le sens du courant, et la résultante de ces mêmes pressions sur la face postérieure, laquelle pousse le corps en sens opposé. On retrancherait la seconde résultante de la première, et on ajouterait la différence, laquelle pourrait être positive ou négative, à l'effort provenant du choc de fluide. Le résultat donnerait exactement la résistance du corps.

Dans l'état actuel de l'hydrodynamique, il n'est pas possible de faire un semblable calcul, et à l'égard des connaissances expérimentales qu'on a pu acquérir sur ce sujet, on a bien déterminé dans des cas particuliers la résistance de plusieurs corps, et même observé quelquefois les pressions qui ont lieu dans divers points de leur surface; mais ces observations ne suffisent point pour établir une théorie générale. Je remarquerai seulement qu'il résulte de toutes les observations bien constatées ce fait, que, au moins dans les fluides incompressibles, la résistance d'un même corps est à très-peu de chose près proportionnelle au quarré de la vîtesse du fluide. Si l'on trouve quelques déviations à cette loi, elles paraissent tenir à des circonstances particulières dont il sera question plus bas, et auxquelles on peut avoir égard spécialement, sans que cela doive nuire à la généralité du principe.

Il résulte des observations que la résistance d'un même corps est en général proportionnelle au quarré de la vîtesse du fluide;

Un second fait également indiqué par les observations est que, pour des corps de figures semblables, la résistance est toujours, à vîtesses égales, proportionnelle au quarré de leurs dimensions homologues. C'est ainsi, par exemple, qu'en observant des sphères de divers diamètres, on a toujours trouvé la résistance à-peu-près dans un même rapport avec l'aire du grand cercle.

et que la résistance de plusieurs corps semblables est proportionnelle au quarré de leurs dimensions homologues.

On satisfera à ces deux indications en admettant 1° que la figure des canaux infiniment petits, dans lesquels les molécules peuvent être censées se mouvoir, demeure la même pour un même corps quand la vîtesse varie; 2° que la vîtesse variable que le fluide prend dans ces canaux conserve toujours dans leurs divers points un même rapport avec la vîtesse générale v du courant; 3° que quand les dimensions absolues du corps varient, sa figure demeurant toujours la même, les dimensions absolues du solide formé par l'ensemble des canaux parcourus par le fluide varient dans le même rapport, les figures de ces canaux demeurant toujours semblables à elles-mêmes. En effet, ces hypothèses admises, on voit d'abord que l'effort provenant de la perte de mouvement du fluide, représenté par la somme des valeurs de la quantité $\frac{\Pi}{g}\omega v(v - v' \cos.\theta)$ dans tous les canaux infiniment petits, sera une quantité proportionnelle à Ωv^2, en représentant par Ω l'aire de la plus grande section transversale du corps; De plus, en cherchant la résultante des pressions exercées sur la surface du corps par l'effet du poids du fluide, lesquelles sont dues

Comment les considérations théoriques précédentes s'accordent avec ces deux résultats, au moyen d'hypothèses très-vraisemblables.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

demi-pouce; ainsi on trouvera toujours, à peu de chose près, telle vîtesse que l'on peut proposer, depuis la plus petite d'un pouce jusqu'à

---

pour chaque point à la hauteur $z - k.\frac{u^2 - v^2}{2g}$, il arrivera nécessairement que les termes multipliés par z dans l'expression de cette résultante seront égaux deux à deux et de signe contraire, et se détruiront mutuellement : il est aisé de s'en rendre raison, et cela paraîtra évident *a priori* si l'on fait attention que le corps soumis aux seules pressions dues à la distance z de ses points à la surface du fluide, serait comme dans un fluide stagnant, et ne tendrait à prendre aucun mouvement horizontal. Il ne restera donc dans la valeur de la résultante dont on vient de parler que des termes multipliés par $\frac{u^2 - v^2}{2g}$, dont la somme sera encore évidemment proportionnelle à Ωv^2, puisque d'une part la surface du corps est proportionnelle à Ω, et d'autre part que les vîtesses u sont supposées demeurer proportionnelles à la vîtesse v du courant. On voit par-là qu'en définitif la hauteur z disparaît nécessairement de l'expression de la résistance du corps, ce qui est conforme à l'expérience, et qu'il ne reste pour cette expression qu'une quantité proportionnelle à Ωv^2.

Expression générale de la résistance d'un corps.

En représentant par h la hauteur due à la vîtesse v, h sera comme on sait proportionnelle à v^2. L'expression de la résistance d'un corps est donc aussi proportionnelle à Ωh. Je la représenterai en général, pour faciliter les énonciations, par la formule $\Pi(m+n)\Omega h$, Π étant le poids de l'unité de volume de fluide, et m, n deux nombres à déterminer par expérience, qui demeureront constants pour tous les corps de figures semblables, par exemple pour toutes les sphères, pour tous les cubes, etc., quelles que soient leurs dimensions absolues. Dans cette formule le terme $\Pi m \Omega h$ est censé représenter la résultante des pressions exercées sur la face antérieure du corps, tant par l'effet du choc du fluide contre cette face, qu'à raison de la pesanteur de ce fluide; et le terme $\Pi n \Omega h$, la résultante des pressions négatives dues à la charge $-\frac{u^2 - v^2}{2g}$ prises pour la face postérieure du corps, laquelle doit être considérée comme une *non-pression*, suivant l'expression de Dubuat, laquelle tire le corps dans le sens du courant, et doit s'ajouter à l'effort supporté par sa face antérieure, qui le pousse dans ce même sens.

Du cas où un corps serait mu dans un fluide en repos.

§ 2. Jusqu'à-présent je n'ai considéré qu'un corps immobile exposé au choc d'un courant. Il faut passer maintenant au cas où un corps serait mu dans un fluide stagnant. On avait toujours assimilé ce cas au précédent, et pensé que les effets devaient être représentés par la même formule. En cherchant à s'en former une idée, ils paraissent effectivement tout-à-fait analogues : mais on ne doit pas se fier dans ces matières à de semblables présomptions, et il paraîtrait, par des expériences de Dubuat, qu'à vîtesses égales, un même corps éprouve plus de résistance quand il est choqué par un courant, que quand il se meut dans un fluide en repos. Il faut convenir néanmoins que les expériences de ce genre sont si délicates, que celles-ci ne suffisent peut-être pas pour établir entièrement ce résultat. Il y a tout lieu de croire au surplus que la même formule $\Pi(m+n)\Omega h$ peut s'appliquer aux deux cas, sauf à déterminer séparément pour chacun les valeurs des constantes m

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la plus grande qui se termine à 30 pieds, c'est-à-dire à celle qui peut être acquise dans le temps d'une seconde par une chute de 15 pieds (172).

---

et n. Si le corps et le fluide sont tous les deux en mouvement, la quantité h représentera la hauteur due à la somme de leurs vîtesses s'ils se meuvent en sens contraire, et à la différence de ces mêmes vîtesses s'ils se meuvent dans le même sens.

Examen des modifications dont les résultats précédents sont susceptibles par l'effet de diverses circonstances.

De l'adhésion des molécules du fluide.

§ 3. Il convient maintenant d'examiner les circonstances physiques qui n'ont point été prises en considération dans les § précédents, et qui peuvent néanmoins influer sur les résultats. La première est celle de l'adhésion des molécules du fluide entre elles, et à la surface des corps qui y sont plongés. Cette adhésion augmente nécessairement la résistance, puisque, par suite des modifications que le mouvement du fluide subit à la rencontre du corps, il y a des molécules séparées les unes des autres, et d'autres qui glissent les unes sur les autres et sur la surface du corps. Les expériences paraissent indiquer que cette augmentation ne devient sensible que dans deux cas : le premier quand le corps est très-petit, et le mouvement très-lent; le second quand la longueur du corps dans le sens du mouvement est considérable par rapport à sa largeur. Dans ces deux cas, la résistance ne serait plus exprimée par un seul terme proportionnel au quarré de la vîtesse : il faut, pour avoir une formule qui satisfasse aux observations, ajouter un second terme proportionnel à la première puissance de la vîtesse, qui devient négligeable, même pour des corps très-petits, quand la vîtesse surpasse $0^m,2$ ou $0^m,3$ (voyez un Mémoire de Coulomb, dans le tome 3 des *Mémoires de la classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut*).

De l'élasticité du fluide.

La seconde considération est celle de l'élasticité du fluide, dans le cas où le corps est plongé dans l'air. On sait que dans les fluides élastiques la densité demeure toujours, à températures égales, proportionnelle à la pression. Par conséquent l'effet de la pression plus considérable que le fluide exerce sur la face antérieure du corps, est d'augmenter au-devant de cette face sa densité. Or comme la partie de la résistance provenant du choc dépend de la masse de fluide qui éprouve ce choc, on voit que cette portion de la résistance ne peut être proportionnelle au quarré de la vîtesse, que dans un fluide incompressible; dans un fluide élastique elle dépend en outre de la densité que le fluide acquiert au-devant du corps, laquelle augmente avec la vîtesse. La résistance du corps doit donc croître dans un rapport plus grand que celui du quarré de la vîtesse, ce qui est conforme à l'expérience. Il paraît que cette considération, qui est importante pour les calculs du mouvement des projectiles, peut être négligée dans les calculs relatifs aux machines, où l'on considère des vîtesses beaucoup moins grandes. En effet, on a des expériences de Borda faites dans l'air, où les vîtesses ont varié depuis 1^m jusqu'à près de 8^m, dans lesquelles la loi du quarré des vîtesses se soutient avec une fort grande exactitude. Cependant peut-être cela n'aurait-il pas lieu, si l'on faisait des observations sur des surfaces plus grandes que celles employées par Borda.

Du changement dans la loi de la résistance, qui a lieu dans le cas d'une grande vîtesse.

On remarquera enfin que la diminution de la pression contre la face postérieure du corps, est cause qu'il y a nécessairement, même dans les fluides incompressibles, une certaine valeur de la vîtesse à laquelle la loi du quarré des vîtesses cesse d'avoir

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La seconde colonne comprend les chûtes relatives aux vîtesses, et la troisième le choc exprimé en livres, dont l'eau qui aurait les mêmes vî-

---

lieu, et où l'expression de la résistance change absolument de nature. On a vu effectivement à la fin du § 5 de la note (*ck*) qu'il y avait, lorsqu'un fluide s'écoule par un tuyau additionnel, une certaine valeur de la vîtesse au-delà de laquelle le fluide se détachait nécessairement de la paroi du tuyau. De même, il y aura ici une limite au-delà de laquelle le fluide se détachera de la face postérieure du corps, et laissera un vide derrière lui; et cela arrivera quand dans l'expression de la hauteur due à la pression, représentée en général par $z - \frac{u^2 - v^2}{2g}$, le second terme deviendra pour la face postérieure plus grand que z; on voit qu'alors la pression à laquelle le fluide est soumis par l'effet de la gravité n'est plus capable de lui imprimer une vîtesse assez grande pour lui faire suivre le corps, et remplir le vide qu'il tend à laisser derrière lui. A partir de cette limite le fluide n'étant plus en contact avec la face postérieure du corps, n'exerce plus aucune action sur cette face, d'où il suit que l'expression de la résistance est alors donnée uniquement par les pressions résultant du choc et de la pesanteur du fluide, exercées simultanément sur la face antérieure. La hauteur z à laquelle est due la pression résultant du poids du fluide ne disparaît donc plus de l'expression de la résistance, dont la valeur, si le corps se meut dans l'air, dépendra par conséquent dans ce cas de l'intensité de la pression atmosphérique, indiquée par la hauteur du baromètre; et si le corps se meut dans l'eau, de cette même pression atmosphérique qui est transmise dans l'intérieur du fluide, et de la profondeur à laquelle le corps sera placé sous sa surface.

Pour éclaircir ces considérations par un exemple, et pour se former une idée de leur influence sur les phénomènes, supposons un plan mince de $0^m,32$ de côté, qui se meut dans l'air avec une vîtesse v due à la hauteur h. Il paraît, par les expériences de Dubuat, que la non-pression moyenne contre la face postérieure de ce plan sera due à-peu-près à la hauteur $0,43\,h$. Mais la densité de l'air étant supposée $= 0,00124$, et la hauteur de la colonne d'eau qui ferait équilibre à sa force élastique $= 10^m,3$, la hauteur à laquelle est due la pression résultant du poids du fluide est $z = \frac{10^m,3}{0,00124}$. Par conséquent la limite au-delà de laquelle il restera un vide derrière le plan se trouvera en posant $0,43\,h = \frac{10^m,3}{0,00124}$, d'où l'on déduit $h = 3572^m$. La vîtesse due à cette hauteur étant $\sqrt{2g \times 3572} = 265^m$, on voit, en admettant que le coëfficient 0,43 de la non-pression ne change point quand la vîtesse devient très-grande, qu'il faudrait que le plan parcourût 265^m par seconde pour qu'il se formât un vide derrière lui.

De la résistance des corps flottants.

§ 4. On a supposé dans les paragraphes précédents le corps plongé dans une masse indéfinie de fluide : à l'égard des corps qui flottent à la surface de l'eau, les expériences apprennent deux choses, l'une que la résistance croît un peu plus rapidement que le quarré de la vîtesse, de manière par exemple que si la vîtesse doublait, la résistance supposée quadruple se trouverait trop faible de $\frac{1}{10}$ environ; l'autre que la résistance est, toutes choses égales d'ailleurs, un peu plus grande pour un

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tesses peut être capable sur une surface d'un pied quarré; ou, ce qui revient au même, le poids des colonnes d'eau qui auraient cette surface pour base, et pour hauteur les chûtes qui répondent aux chocs.

---

corps flottant ou situé très-près de la surface, que pour un corps plongé à une certaine profondeur. Le dernier de ces phénomènes peut s'expliquer en remarquant que quand un corps est entièrement plongé, le fluide qui vient à la rencontre de sa face antérieure a une égale facilité à se détourner et à s'échapper sur toute l'étendue du pourtour de cette face, tandis que pour un corps flottant il ne peut s'échapper ainsi que sur une portion de ce pourtour, ce qui doit à-la-fois, en faisant perdre au fluide une plus grande partie de sa vîtesse dans le sens du mouvement, augmenter la force du choc, et en faisant croître la vîtesse réelle avec laquelle le fluide s'échappe, augmenter la non-pression qui a lieu sur la face postérieure du corps.

Quant à l'accroissement de la résistance plus rapide que dans la raison du quarré des vîtesses, cette circonstance paraît dépendre des modifications qui ont lieu à la surface du fluide, autour d'un corps flottant et mu sur cette surface. L'observation apprend qu'il s'y produit alors une *dénivellation*, c'est-à-dire qu'au-devant du corps la surface s'élève au-dessus de son niveau général, et forme une sorte de remous; et que le long des faces latérales et derrière le corps, elle s'abaisse au-dessous de ce niveau, en formant une sorte de creux ou de dépression. On se rend facilement raison de ces effets, en remarquant que devant la face antérieure le fluide ne peut prendre la vîtesse nécessaire pour s'échapper et faire place au corps, qu'autant que sa surface s'est élevée d'une hauteur capable de produire cette vîtesse; et de même qu'il ne peut affluer derrière la face postérieure pour remplir le vide qui tend à s'y former, qu'après que son niveau s'est abaissé derrière cette face, de manière à produire la charge nécessaire pour imprimer ce mouvement. Il est aisé de concevoir d'ailleurs que ces dénivellations sont d'autant plus sensibles que la vîtesse est plus considérable. Or leur effet est 1° d'augmenter l'aire de la face antérieure du corps en contact avec le fluide, et de diminuer l'aire de sa face postérieure; 2° d'augmenter la pression résultant du poids du fluide (laquelle dépend toujours de la distance verticale de chaque point à la surface) sur la première face, en la diminuant sur la seconde. Par conséquent quand la vîtesse augmente, la dénivellation fait croître doublement la résistance, et on pourrait y avoir égard en introduisant dans son expression un terme proportionnel à la quatrième puissance de la vîtesse, terme qui peut être négligé toutes les fois que les corps ont de grandes dimensions, et que la vîtesse n'est pas fort considérable.

§ 5. Les paragraphes précédents contiennent des considérations d'après lesquelles on peut se former une idée générale des phénomènes de la résistance des fluides, des lois auxquelles elle est soumise, et de la nature des formules par lesquelles sa valeur peut être représentée. Pour utiliser ces considérations dans la pratique, il reste à indiquer ce que les expériences ont appris de certain sur l'évaluation absolue de la résistance dans divers cas. Je considérerai en premier lieu celui où une surface plane et mince est choquée directement par le fluide.

Il faut remarquer d'abord que des surfaces planes minces, par exemple des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Connaissant le choc d'un courant contre une surface

609. Lorsque, par quelque moyen que ce soit, on sera parvenu à connaître la force du choc exprimé en livres d'un courant contre une surface

---

quarrés de diverses grandeurs, ne sont point des corps semblables. Par conséquent le résultat établi dans le § 1, que pour des corps de figures semblables la résistance est à vîtesses égales proportionnelle aux quarrés de leurs côtés homologues, ne peut leur être appliqué. En effet les observations prouvent, quoique ce fait établi depuis long-temps par Borda paraisse avoir été méconnu par Dubuat, qu'à vîtesses égales la résistance d'une surface plane croît dans un plus grand rapport que l'aire de cette surface. D'après des expériences du docteur Vince (*Philosophical transactions*, année 1798), la résistance directe d'un plan mince ayant environ 2 centimètres en quarré est due à-peu-près à la hauteur $1{,}45\,h$, en nommant h la hauteur due à la vîtesse; c'est-à-dire que dans la formule établie à la fin du § 1, on a $m+n=1{,}45$, ou que cette résistance est égale au poids d'une colonne de fluide dont le plan mince serait la base, et la hauteur une fois et demie environ la hauteur due à la vîtesse. D'après une expérience de Mariotte (*Traité du mouvement des eaux*, 2^e partie), la résistance pour un quarré de 16 centimètres de côté serait due à la hauteur $1{,}24\,h$. C'est d'après cette expérience que Mariotte et Lahire avaient cru pouvoir établir le principe énoncé dans l'art. 601 du texte. On peut présumer qu'elle n'était pas très-exacte, et que son résultat est trop faible. D'après les expériences de Borda (*Mémoires de l'académie des Sciences*, 1763), la résistance pour des quarrés de 11, 16 et 24 centimètres de côté est due aux hauteurs $1{,}39\,h$, $1{,}49\,h$, $1{,}64\,h$. Une table publiée par Sméaton (*Recherches expérim. sur l'eau et le vent*, p. 61) indique pour un plan quarré de 31 centimètres de côté la valeur $1{,}9\,h$. Enfin les expériences de Dubuat (*Principes d'Hydraulique*, art. 482, 486) donnent pour un plan quarré de 32 centimètres de côté les valeurs $1{,}86\,h$ quand c'est le fluide qui se meut (c'est-à-dire $m=1{,}19$ et $n=0{,}67$), et $1{,}43\,h$ quand c'est le plan qui se meut dans un fluide stagnant (c'est-à-dire $m=1$ et $n=0{,}43$); mais la grande différence que ce dernier résultat présente à l'égard du premier peut faire naître quelques doutes, si l'on remarque sur-tout qu'il est en contradiction avec les précédents, qui ont presque tous été obtenus en faisant mouvoir les plans dans un fluide en repos.

Quoique ces résultats, obtenus par divers auteurs et par des procédés différents, ne s'accordent pas tout-à-fait, il me paraît néanmoins qu'on peut conclure avec une grande probabilité de leur rapprochement, que la résistance d'un plan mince est due à la hauteur $1{,}4\,h$ environ quand la racine quarrée de sa surface approche de 10 centimètres, et qu'elle augmente ensuite avec cette surface, de manière à être due à la hauteur $1{,}9\,h$ environ quand cette racine quarrée est 32 centimètres. Il serait extrêmement utile de connaître la valeur de la résistance pour des plans d'une plus grande étendue, mais les expériences directes manquent absolument. Je remarquerai néanmoins que d'après des observations publiées par M. Boistard (*Expériences sur la main-d'œuvre*, etc.), l'effort résultant du choc du fluide contre les aubes d'une roue, dont la surface était de 5 à 6 mètres quarrés, a offert des valeurs qui ont varié depuis $1{,}86\,h$ jusqu'à $3{,}35\,h$, et dont la moyenne était $2{,}5\,h$. Ce résultat est confirmé par d'autres expériences non publiées. Je ne prétends point au surplus

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

verticale immobile dont on a la superficie en pieds quarrés, il faudra diviser la force par le nombre des mêmes pieds pour avoir le poids que

immobile, trouver la vîtesse du courant.

---

assimiler entièrement l'action du fluide contre les aubes d'une roue, à celle qui aurait lieu contre un plan mince isolé, et je crois cette dernière plus considérable.

Limite de la résistance, dans le cas où l'étendue du plan est très-grande.

A défaut d'expériences qui fassent connaître la résistance d'un plan d'une grande étendue, on peut demander si cette résistance, qui croît avec la grandeur de la surface, est susceptible d'une limite : il me semble qu'on peut répondre à cette question par l'affirmative. En effet, quant à la partie de la résistance qui provient du choc, elle ne peut surpasser l'effort qui aurait lieu si une veine de fluide, dont la section égalerait l'aire Ω du plan, venait perdre contre lui tout son mouvement : cet effort est exprimé, d'après la note (*ct*), par $\Pi.2\Omega h$. A l'égard de la partie de la résistance provenant de la pesanteur du fluide, la pression sur la face antérieure ne peut surpasser celle qui serait due à la charge z, c'est-à-dire $\Pi.\Omega z$, et la pression contre la face postérieure ne peut être plus petite que zéro, ce qui aurait lieu s'il y avait un vide contre cette face. Par conséquent la limite de la plus grande résistance que puisse occasionner un plan, est exprimée par $\Pi(2h+z)\Omega$. Il est vraisemblable que, même pour des plans très-grands, la résistance est encore fort éloignée de cette limite, sur-tout quand la vîtesse n'est pas très considérable. Il faudrait pour l'air, en évaluant le terme $\Pi.2\Omega h$, avoir égard à la condensation que ce fluide éprouve au-devant du corps.

De la résistance d'un plan mince choqué obliquement.

A l'égard des lois de la résistance pour un plan mince choqué obliquement par un fluide, elles sont encore peu connues. On a quelques observations du docteur Vince dans les *Transactions philosophiques*, pour 1778, mais elles sont faites sur des plans très-petits. Le docteur Hutton en a donné d'autres dans le tome 3 de son *Course of Mathematicks*, faites sur un plan de $0^{mq},020644$ de surface, mu dans l'air avec une vîtesse de $3^{m},658$. Leurs résultats, qui s'éloignent peu de ceux du docteur Vince, sont représentés avec une fort grande exactitude, dans toute l'étendue du quart de cercle, en supposant la résistance proportionnelle à la fonction $(\sin. a)^{1,842\,.\,\cos. a}$, a étant l'angle formé par le plan avec la direction de son mouvement. Cette formule assez simple pourrait être employée utilement, si l'on connaissait bien la résistance directe pour des plans d'une étendue un peu considérable, et si l'on était certain que sa composition ne dût point changer lorsque la grandeur du plan augmente. Je remarquerai d'ailleurs que les résultats établis par Bossut d'après des expériences faites sur des proues angulaires (*Hydrodynamique*, t. 2, ch. 17) ne peuvent nullement convenir à des plans minces. Il est très-certain que la loi du sinus, et encore moins celle du quarré du sinus d'incidence, ne conviennent nullement à des plans mus dans un fluide indéfini.

De la résistance d'un prisme mu dans le sens de son axe.

§ 6. Considérons maintenant un corps prismatique, dont les deux extrémités sont coupées perpendiculairement à ses arêtes. Je remarquerai d'abord que si ce prisme avait très-peu de longueur, sa résistance suivrait les mêmes lois que celle d'une surface mince. J'observerai ensuite que, d'après l'ancienne théorie, on faisait dépendre entièrement la résistance d'un corps de sa face antérieure, en sorte qu'un plan mince, ou un prisme quelconque ayant ce plan pour base, étaient censés résister également. Borda ayant observé qu'une sphère, et une demi-sphère du côté de sa

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

chacun d'eux soutient, chercher ce poids dans la table, et l'on trouvera sur le même alignement la vîtesse entière du courant.

---

convexité, offraient des résistances sensiblement égales, avait lui-même conclu que la résistance était uniquement déterminée par la forme du corps en avant de sa plus grande section. Mais cette conclusion était trop précipitée, car s'il eût mis derrière la demi-sphère une portion de cylindre de même diamètre qu'elle, il eût trouvé un résultat tout différent. L'analyse du § 1, d'après laquelle la résistance d'un corps se trouve décomposée en une pression sur la face antérieure et une non-pression sur la face postérieure, permet de se former à ce sujet des notions plus exactes. On peut présumer, d'après cette analyse, que la pression sur la face antérieure doit effectivement ne dépendre que de la figure de cette face; mais si l'on fait attention que l'excès de vîtesse que les filets de fluide acquièrent à l'entour du corps est le plus grand possible au droit de sa plus grande section, et qu'il diminue à mesure qu'on s'en éloigne, on jugera que la non-pression doit être la plus grande quand le corps est coupé à l'endroit de la plus grande section et qu'il n'a point de poupe, et que cette non-pression va ensuite toujours en diminuant à mesure que la poupe est plus longue, jusqu'à une certaine distance où la diminution cesse d'être sensible. Ces considérations sont mises dans tout leur jour, et prouvées jusqu'à l'évidence, par des expériences ingénieuses dues à Dubuat (*Principes d'Hydraulique*, 3e partie, sect. 1). Ayant trouvé, comme on l'a vu dans le § précédent, que la pression sur la face antérieure d'un plan mince quarré de 32 centimètres de côté, était due à la hauteur $1{,}19\,h$, h étant la hauteur due à la vîtesse du fluide, il a reconnu que cette pression ne changeait point de valeur quand ce plan devenait la base d'un prisme d'une longueur quelconque; mais que la non-pression sur la face postérieure, due à la hauteur $0{,}67\,h$ dans le cas du plan mince, n'était plus due qu'à la hauteur $0{,}27\,h$ pour un cube, et à la hauteur $0{,}15\,h$ pour un prisme d'une longueur triple de sa largeur. Ceci convient à un corps en repos choqué par un courant: dans le cas où le corps se meut, la pression sur la face antérieure étant toujours due à la hauteur h, la non-pression, qui pour le plan mince de 32 centimètres de côté est due suivant Dubuat à $0{,}43\,h$, l'est pour le cube à $0{,}17\,h$, et pour le prisme d'une longueur triple de sa largeur à $0{,}10\,h$.

D'après cela la résistance d'un cube, ou en général d'un prisme dont la longueur est égale à la largeur, serait due à la hauteur $1{,}46\,h$ quand le corps est immobile, et à la hauteur $1{,}17\,h$ quand le corps se meut. Ce dernier résultat s'accorde avec une expérience de Borda (*Mémoires de l'académie des Sciences*, 1763) qui conduit à la valeur $1{,}16\,h$, et avec d'autres citées par Marguerie, faites sur un cube de 97 centimètres de côté (*Mémoires de l'Académie de marine*), d'après lesquelles la résistance serait due à-peu-près à la hauteur $1{,}21\,h$. Parmi les nombreuses expériences de Bossut, il n'y en a aucune sur un corps cubique, mais on en trouve plusieurs sur des prismes dont la longueur était environ moitié de la largeur moyenne: la hauteur à laquelle la résistance était due s'est trouvée, en prenant une réduite entre les résultats, d'environ $1{,}6\,h$. L'aire de la base du prisme était à-peu-près un mètre quarré.

Quant aux prismes plus allongés, la résistance d'un prisme d'une longueur triple

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

610. Si la surface fuyait devant le courant, il faudrait faire le même calcul, et on trouverait dans la table la vîtesse respective avec laquelle la

Connaissant la vîtesse d'une surface, et l'impres-

---

de la largeur de sa base serait d'après Dubuat due a la hauteur $1{,}34\,h$ quand le prisme est immobile, et à la hauteur $1{,}10\,h$ quand il se meut. Il y a lieu de croire que la non-pression postérieure, et par conséquent la valeur du coëfficient, diminuent encore un peu quand la longueur est plus grande, mais alors l'effet du frottement de l'eau le long des faces latérales du prisme commence à devenir sensible, en sorte que si la longueur du prisme est six fois sa largeur, la résistance est la même, ou un peu plus grande, que quand cette longueur est seulement triple de la largeur (Dubuat, *Principes d'hydraulique*, 3e partie, sect. 1, ch. 6). Si la longueur augmente davantage, la résistance augmente aussi.

Ces résultats s'accordent avec les expériences de Bossut (*Hydrodynamique*, t. 2, ch. 15 et 17), où en distinguant celles faites sur des bateaux prismatiques sans proue ni poupe, dont la longueur varie entre deux fois et six fois la largeur, on voit la hauteur due à la résistance varier entre $1{,}2\,h$ et h environ. Lorsque le derrière du bateau était garni d'une poupe à base triangulaire ou demi-circulaire, la résistance était, à longueurs égales, un peu moins grande. On voit par-là comment Bossut trouvant que la plupart de ses expériences, lorsque les bateaux n'avaient point de proue, indiquaient ainsi des résistances qui ne s'éloignaient pas beaucoup en plus ou en moins de la hauteur due à la vîtesse, avait cru devoir adopter ce principe, consacré depuis long-temps par une sorte de préjugé, que la résistance directe était due exactement à cette hauteur, et indépendante de la longueur et de la figure de la partie postérieure du corps. Mais les expériences qu'il a faites sur des bateaux tirés en travers, c'est-à-dire sur des prismes dont la longueur n'était qu'à-peu-près moitié de la largeur moyenne, offrant des résistances beaucoup plus grandes, parce que les effets se rapprochaient de ceux qui auraient eu lieu pour un plan mince, et se trouvant par conséquent en contradiction avec ce principe, elles lui ont paru inexplicables : il les a rejetées dans un chapitre particulier, et il a même été sur le point de les supprimer (*Nouvelles experiences sur la résistance des fluides*, 1777, p. 122).

De la résistance d'un prisme garni d'une proue et d'une poupe.

§ 7. Examinons d'abord l'effet que peut produire l'addition d'une poupe à un corps prismatique, dont la face antérieure resterait plane et choquée directement par le fluide. Si l'on a saisi les considérations présentées ci-dessus, on jugera facilement que pour un corps de cette espèce le coëfficient de h, dans l'expression de sa résistance, dépend principalement de la proportion entre la longueur et la largeur de ce corps. La pression sur la face antérieure demeure toujours la même, comme on l'a vu dans le § précédent, et le fluide, qui a pris au droit de cette face son plus grand excès de vîtesse, le perd peu-à-peu à mesure qu'il s'en éloigne. La non-pression sera donc d'autant moins grande, que le corps se terminera plus loin de sa face antérieure. Si on lui ajoute une poupe, elle pourra produire d'autant plus d'effet qu'elle allongera le prisme davantage, et que sa surface se raccordant mieux avec la sienne, et présentant vers sa base des éléments moins inclinés sur la direction du courant, la non-pression, qui est toujours normale à cette surface, se trouvera décomposée d'une manière plus désavantageuse à la résistance. Les expé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

surface est frappée (603). Ajoutant cette vîtesse à celle de la surface, on aura celle du courant (585).

---

riences de Bossut confirment ces considérations. Les poupes ajoutées à des prismes dont la longueur égale 4 ou 5 fois la largeur, ne diminuent guère leur résistance que de $\frac{1}{10}$ au plus. Elles la diminuent d'autant plus qu'elles sont plus allongées et plus aiguës.

L'addition d'une proue à un corps prismatique produit beaucoup plus d'effet. Si cette proue a une forme propre à diviser facilement le fluide, et si sa surface se raccorde tangentiellement avec la surface latérale du prisme, il arrive d'une part que les filets, en se détournant sur les côtés du corps, prennent des directions peu inclinées sur celle du mouvement général, et perdent peu de la vîtesse qu'ils ont dans le sens de ce mouvement, ce qui rend la pression résultant du choc peu considérable; et de l'autre que n'étant point obligés pour se détourner sur les côtés du corps d'acquérir un grand excès de vîtesse, la non-pression est aussi diminuée. Les expériences de Bossut font voir qu'en adaptant à un bateau prismatique, dont la longueur surpasse deux fois sa largeur, une proue formée par deux plans verticaux, ayant une saillie à-peu-près égale à la largeur du bateau, on réduit la résistance à environ moitié. Une proue dont la base est un demi-cercle produit à-peu-près le même effet. Si la saillie d'une proue triangulaire est double de la largeur, la résistance est réduite aux $\frac{2}{5}$ environ. A saillie égale, une proue dont la base est un triangle mixtiligne formé de deux arcs de cercle tangents aux côtés du prisme offre sensiblement moins de résistance qu'une proue dont la base est un triangle. Les proues formées ainsi de deux arcs de cercle sont encore, à saillie égale, plus avantageuses que celles dont la base serait une ellipse, parce qu'il faut en même temps, pour que la résistance soit la moindre possible, que la forme de la proue soit aiguë pour diviser facilement le fluide et diminuer la force du choc, et qu'elle se raccorde tangentiellement aux côtés du corps pour que les filets de molécules soient peu détournés de la direction générale du mouvement.

Beaucoup de bateaux naviguant sur les rivières et sur les canaux, dont le corps est à-peu-près prismatique, ont des proues qui ne sont autre chose que le prolongement de leurs faces latérales, coupées en-dessous par un plan incliné sur l'horizon. Bossut a fait quelques expériences sur une proue de cette espèce, dont il résulte que le plan étant incliné du tiers d'un angle droit, cette proue a diminué des $\frac{1}{7}$ environ la résistance du bateau prismatique auquel elle était adaptée. Ayant ensuite renversé le bateau de manière que la saillie de la proue était dans le prolongement du fond, au lieu de s'élever sur l'eau comme dans l'expérience dont on vient de parler, le bateau a offert presque autant de résistance que s'il n'eût pas eu de proue, ce qui tient à ce que, dans cette position, la proue faisait éprouver au fluide plus de difficulté à se détourner sous le fond du bateau, et tendait à augmenter le remous qui se formait au-devant. Rien n'est plus propre que le rapprochement de ces deux expériences à montrer combien l'ancienne théorie de la résistance des fluides était insuffisante et fautive, puisque leurs résultats diffèrent presque dans le rapport de 1 à 3, tandis qu'ils devraient être égaux d'après cette théorie. Il est étonnant que Bossut n'ait fait aucune remarque sur des observations

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

611. Si au contraire la surface va à la rencontre du courant, il faudra, après avoir pris dans la table la vîtesse qui répond au choc que soutient

Connaissant la vîtesse et le choc d'une surface qui

---

qui contredisaient aussi formellement les principes auxquels il s'est efforcé de rattacher ses résultats.

§ 8. La résistance d'une sphère, tant qu'on suppose la vîtesse peu considérable, et abstraction faite des circonstances mentionnées dans le § 3, paraît assez bien connue. Les observations de Newton, de Borda et de Dubuat s'accordent à donner pour l'expression de cette résistance une valeur un peu au-dessus de $0{,}5 . \Pi \Omega h$ (Π étant le poids de l'unité de volume de fluide, Ω l'aire du grand cercle, et h la hauteur due à la vîtesse), et qui ne surpasse point $0{,}6 . \Pi \Omega h$. Je dois remarquer que si Borda, ayant supprimé la moitié postérieure de la sphère, a trouvé une résistance presque égale à celle de la sphère entière, ce qui paraît contredire les considérations précédentes, cela tient sans doute à ce que cette moitié allonge trop peu le corps pour que sa présence puisse apporter une diminution sensible à la non-pression, que la forme de la partie antérieure rend d'ailleurs ici très-faible.

De la résistance d'une sphère.

La valeur précédente convient à toutes les vîtesses lorsque la sphère est mue sous l'eau. Quand elle est mue dans l'air, le coëfficient augmente graduellement avec la vîtesse, conformément à ce qui a été dit dans le § 3. D'après les expériences du docteur Hutton (*Course of mathematicks*, t. 3), la résistance d'une sphère dans l'air est exprimée par $0{,}6 . \Pi \Omega h$ quand la vîtesse est d'environ un mètre. Lorsque la vîtesse devient successivement 25, 50, 100, 250 et 500 mètres, le coëfficient numérique 0,6 prend les valeurs correspondantes 0,69, 0,70, 0,72, 0,81, 1,04.

§ 9. En adoptant les principes de l'ancienne théorie, la recherche du solide de moindre résistance se réduit à une question d'analyse, dont Newton a donné la première solution. Il doit être bien reconnu par ce qui précède, qu'une solution fondée sur cette théorie, et où l'on ne prend point en considération la figure de la partie postérieure du corps, ne mérite aucune confiance. La recherche du solide de moindre résistance ne peut encore se faire que par des expériences et des tâtonnements. C'est ainsi qu'on est parvenu dans la construction des vaisseaux à trouver les formes les plus propres à remplir les conditions auxquelles un navire doit être assujéti. Celle d'offrir au fluide la moindre résistance possible est une des principales, mais ce n'est pas la seule : cependant il y a tout lieu de croire que les sections horizontales faites dans la carène d'un vaisseau vers le milieu de sa hauteur, représentées à-peu-près fig. 13, pl. C, offrent la figure susceptible d'être mue dans un fluide avec le moins d'effort possible. La longueur doit être environ cinq fois la largeur, un plus grand allongement pouvant faire perdre davantage par l'augmentation du frottement, qu'on ne gagnerait par l'aiguité de la proue et de la poupe. La plus grande section doit être située en avant du milieu de la longueur, ainsi que cela est d'usage, et conformément à ce que Chapman a trouvé par des expériences directes (*Traité de la construction des vaisseaux*, p. 39). En arrière de la plus grande section la largeur doit diminuer d'abord très-peu, afin que la non-pression, dans l'endroit où la vîtesse du fluide est le plus grande, se trouve décomposée de manière à ne produire que peu d'action dans le sens de la longueur du corps.

De la forme du corps qui offrirait la moindre résistance possible.

Pl. C, Fig. 13.

D'après des expériences de Bossut, un prisme dont la section avait la forme du

La résistance d'un vaisseau est

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

va à la rencontre d'un courant, connaître sa vîtesse.

un des pieds quarrés de la surface, soustraire de cette vîtesse celle de la surface : la différence donnera celle du courant (599).

à-peu-près le $\frac{1}{6}$ de celle d'un prisme dont la base aurait la figure du maître couple.

maître couple d'un vaisseau, et dont la longueur était environ cinq fois la largeur, a offert une résistance un peu plus grande que $\Pi \Omega h$, Ω étant l'aire de la section, et h la hauteur due à la vîtesse. Un modèle de vaisseau dont le maître couple était égal à la section du prisme précédent, a offert une résistance à-peu-près égale au $\frac{1}{6}$ de celle du prisme. On peut se former d'après cela une idée de la résistance des vaisseaux mus dans le sens de leur axe longitudinal.

De la forme du corps qui offrirait la plus grande résistance possible.

Si le corps des vaisseaux doit offrir les formes propres à présenter la moindre résistance au choc de l'eau, leurs voiles doivent au contraire être disposées de manière à recevoir du choc du vent le plus grand effort possible. D'après ce qui précède, on doit juger qu'un plan est peu éloigné de remplir cette condition, et qu'il ne faut pas lui donner d'épaisseur. Si on le courbait en avant, on diminuerait la pression sans augmenter la non-pression : mais si on le courbait en arrière, et que la surface présentât au choc du fluide sa concavité, la pression pourrait être augmentée sans que la non-pression fût diminuée sensiblement, tant que la flèche de la concavité ne surpasserait pas le $\frac{1}{4}$ ou le $\frac{1}{3}$ de la largeur de la surface. Ce n'est donc pas sans raison que les marins trouvent de l'avantage à ne pas tendre entièrement leurs voiles.

De la forme du corps dont une des faces offrirait la plus grande, et l'autre la plus petite résistance possible.

Pl. C, Fig. 14.

Il y a des machines où l'on est dans le cas d'employer un corps avec la condition qu'étant choqué par un fluide sur une de ses faces, il en reçoive le plus grand effort, et qu'étant choqué sur la face opposée, il en reçoive le moindre effort possible (voyez l'*Essai sur la composition des machines*, p. 22). On s'est servi à cet effet d'une demi-sphère et d'un cône. Il paraît qu'une surface intermédiaire entre les deux, telle que l'indique la fig. 14, pl. C, remplirait mieux la condition demandée.

Exemples pour l'application des principes précédents.

Radeau plongeur.

§ 10. Je vais considérer les effets de la machine connue sous le nom de *radeau plongeur*, que M. Thilorier a commencé à mettre en usage pour remonter les bateaux. Elle consiste dans un plan ou radeau, attaché à l'extrémité d'une corde passant sur une poulie fixe : à l'autre extrémité de la corde sont attachés un ou plusieurs bateaux qu'il s'agit de remonter. Pour cela on expose au choc du courant le radeau dans une situation verticale, ou un peu inclinée vers l'amont, et on le laisse descendre en même temps que le bateau remonte. Supposons que voulant remonter ainsi un des bateaux en usage sur la Seine et la Marne, connu sous le nom de *marnois*, on veuille se faire une idée de la surface du radeau nécessaire à cet effet. Nommant ω l'aire de la plus grande section du bateau, v la vîtesse du courant, et V la vîtesse commune au bateau et au radeau, on verra d'après le § 6 que si le bateau était prismatique sa résistance serait à-peu-près exprimée par $1{,}2\,\omega\frac{(v+V)^2}{2g}$, puisque $v+V$ est la vîtesse relative avec laquelle il est choqué par le courant. Mais ce bateau se rétrécit un peu vers l'avant et vers l'arrière, il est garni d'une proue et d'une poupe, et on peut estimer d'après le § 7 que sa résistance se trouve réduite à environ $0{,}5\,\omega\frac{(v+V)^2}{2g}$. Quant au radeau qui est un plan mince, en nommant Ω le produit de sa largeur par son tirant d'eau, et faisant attention

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

612. Quand on aura une force déterminée, et qu'on voudra savoir avec quelle vîtesse elle peut mouvoir une surface donnée dans une eau dor- Connaissant la force avec laquelle une surface peut

---

que la vîtesse relative avec laquelle il est rencontré par le fluide est $v - V$, sa résistance devra, d'après le § 5, être exprimée par $k\Omega\frac{(v-V)^2}{2g}$, k étant un coëfficient numérique dont la valeur dépend principalement de la grandeur de Ω. Quoiqu'on ne connaisse pas exactement la valeur qu'il convient de donner ici à k, il y a tout lieu de croire qu'on restera au-dessous de la vérité en faisant $k = 3$, sur-tout si l'on remarque que le radeau se tient à la surface de l'eau, et que sa résistance est augmentée par l'inclinaison en avant qu'on lui donne. Posant donc l'équation $3\,\Omega\frac{(v-V)^2}{2g} = 0{,}5\,\omega\frac{(v+V)^2}{2g}$, la valeur $\Omega = \frac{0{,}5}{3}\,\omega\left(\frac{v+V}{v-V}\right)^2$ qui s'en déduit résoudra la question. Plus la vîtesse V sera grande, et plus la surface du radeau devra être considérable. Si l'on supposait, par exemple, $V = \frac{1}{2}v$, la formule ci-dessus donnerait $\Omega = \frac{2}{3}\omega$, d'où l'on conclut que la surface du radeau devrait être les deux tiers de la plus grande section du bateau. Il faudrait ensuite augmenter un peu ce résultat, eu égard à l'excès de résistance causé par le frottement de l'eau sur la corde, et par son passage sur la poulie de renvoi. Ce calcul s'accorde avec les observations.

Halage des bateaux.

Les bateaux qui naviguent sur les canaux du centre et de Briare, nommés vulgairement *toues*, ont moyennement $4^m,22$ de largeur et 70 centimètres de tirant d'eau, ce qui donne $2^{mq},954$ pour leur section transversale. Ils sont tirés par un homme, qui ne leur imprime guère qu'une vîtesse de 35 centimètres par seconde. Ces bateaux ont une forme un peu moins avantageuse que ceux dont il vient d'être question, et il me paraît que leur résistance doit être due à très-peu près à la hauteur $0{,}6\,h$, h étant toujours la hauteur due à la vîtesse. Par conséquent, la hauteur due à une vîtesse de 35 centimètres étant $0^m,0062$, la résistance du bateau sera le poids d'un volume d'eau $= 0{,}6 \times 2{,}954 \times 0{,}0062 = 0^{mc},011$, c'est-à-dire 11 kil. Les haleurs doivent donc faire un effort d'environ 11 kil., ce qui est à très-peu-près l'évaluation admise pour l'effort exercé par les hommes qui tirent en marchant. Dans les canaux dont il s'agit, les bateaux n'éprouvent pas une résistance sensiblement plus grande qu'ils n'en éprouveraient dans un fluide indéfini. On trouvera dans la suite la manière d'évaluer l'excès de résistance qu'ils éprouveraient dans des canaux plus étroits.

Indication des principaux ouvrages à consulter sur la résistance des fluides.

Je terminerai ici cette note. Il aurait été à desirer qu'un sujet si intéressant eût pu recevoir plus de développements, et sur-tout que les expériences et les calculs sur lesquels sont fondés les résultats énoncés dans les paragraphes précédents eussent été exposés en détail. Le lecteur curieux d'approfondir cette matière pourra consulter principalement les ouvrages suivants : les *Principes de la philosophie naturelle* de Newton, où il trouvera quelques expériences, et deux théories de la résistance des fluides, dont l'une est celle admise communément et exposée dans le texte de Bélidor, et l'autre, très-différente et encore plus fausse, est, comme Lagrange l'a remarqué, l'endroit le moins satisfaisant de ce grand ouvrage; le *Traité du*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

être mue dans une eau dormante, trouver la vîtesse qu'elle aura.

mante, on divisera encore cette force par le nombre de pieds que comprend la surface, et l'on cherchera dans la colonne des chocs le nombre le plus approchant du quotient; on trouvera sur le même alignement la vîtesse que l'on demande (600).

On voit assez que par le moyen de cette table on peut résoudre tous les cas qui ont rapport au choc de l'eau, sans qu'il soit besoin d'en rapporter un plus grand nombre d'exemples. J'ajouterai seulement qu'on peut s'en servir avec confiance, puisqu'elle est aussi conforme qu'on puisse l'exiger à toutes les expériences que l'on a faites sur le choc de l'eau, et qu'on pourra aussi en faire usage pour mesurer la force du vent, comme nous le ferons voir au commencement du second volume (*dc*).

Nouvelle manière de mesurer la vîtesse d'un courant, aussi parfaite que l'ancienne était défectueuse.

613. Il ne reste plus présentement que d'avoir une méthode exacte pour mesurer la vîtesse des courants. Celle qui a été en usage jusqu'ici, et que M. Mariotte donne comme la meilleure, est de jeter dans le fil de l'eau une boule de bois ou de cire, et d'observer le chemin qu'elle fera pendant un certain temps. Cette méthode est fort imparfaite, et sujette à plusieurs inconvénients. On ne peut avoir par-là que la vîtesse de la surface de l'eau, au lieu qu'il faudrait connaître celle du milieu et du fond, afin de prendre la moyenne, parce que les eaux inférieures étant pressées par

---

mouvement des eaux, de Mariotte; les Mémoires de Borda, dans le Recueil de l'*Académie des Sciences* pour 1763 et 1767; la *Construction des vaisseaux*, de Chapman; les *Mémoires de l'académie de Marine;* la *Construction des vaisseaux*, d'Euler, et sa traduction enrichie de commentaires de l'*Artillerie de Robins;* le tome 2 de l'*Hydrodynamique* de Bossut, où il ne faut guère prendre que les résultats d'expérience; le tome 2 des *Principes d'hydraulique*, de Dubuat, où des notions saines sur cette matière ont été développées pour la première fois; un *Mémoire* de Coulomb dans le tome 2 des *Mémoires de l'Institut*, *Sciences physiques et mathématiques;* le 3e vol. du *Course of mathematicks*, du docteur Hutton; les *Miscellaneous papers* de Sméaton, ou la traduction de ses *Recherches expérimentales* publiée par M. Girard. Je remarquerai qu'il n'est presque aucun de ces ouvrages qu'on ne doive consulter avec défiance, et j'ai quelque espérance que le contenu de cette note servira à rendre leur lecture plus profitable. Je n'ai point parlé de l'*Examen maritime* de Don Georges Juan, où l'on trouve une théorie particulière dont M. de Prony a donné une idée dans sa *Nouvelle Architecture hydraulique*, et dans sa *Mécanique philosophique*. Cette théorie, aussi bien que deux expériences rapportées par l'auteur, de l'exactitude desquelles il est permis de douter, sont en contradiction avec tous les faits connus d'ailleurs.

Remarque sur la table des chocs relatifs aux vîtesses.

(*dc*) Après la note précédente, il n'est pas besoin d'entrer dans aucun détail pour montrer que les nombres de la table qui expriment la force du choc étant calculés dans l'hypothèse que cette force est due à la même hauteur que la vîtesse, ne peuvent s'accorder avec la vérité que dans un très-petit nombre de cas particuliers.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

celles de dessus, il semble qu'elles devraient être forcées à couler plus vîte, tandis que d'un autre côté les frottements que le fond occasionne doivent retarder la vîtesse de l'eau inférieure, et peut-être la rendre moindre que celle de la surface, ce qui souffre une infinité de variations que la théorie ne peut déterminer (*dd*).

(*dd*) Les recherches et expériences faites sur ce sujet ont effectivement appris que, dans un courant réglé, la vîtesse au fond était toujours moindre que la vîtesse moyenne, et que le filet d'eau situé à la surface et au milieu du courant était celui de tous qui se mouvait avec le plus de rapidité. J'observerai en passant que cette idée, *que les eaux inférieures pressées par celles de dessus doivent couler plus vîte*, est une suite des notions peu exactes établies dans les premiers ouvrages italiens sur l'hydraulique, et que bien loin d'être vraie dans la pratique, elle n'est même pas fondée en théorie. Dubuat a publié dans ses *Princ. d'hydraulique* de nombreuses expériences, d'après lesquelles M. de Prony a établi des rapports très-simples entre la vîtesse à la surface et au milieu du courant, la vîtesse moyenne et la vîtesse au fond. En nommant la première V, la seconde U, et la troisième W, on a (*Rech. sur la théor. physico-math. des eaux cour.* § 15) $U = \frac{V(V+2,73187)}{V+3,1532}$, et $W = 2U - V$. On s'épargnera le calcul de la première formule en faisant usage de la table suivante.

Relations entre les vitesses à la surface, au fond, et moyenne d'un courant.

Vîtesses à la surface.	Rapports de la vîtesse moyenne à la vîtesse à la surface.
mètres	
0,0	0,752
0,5	0,786
1,0	0,812
1,5	0,832
2,0	0,848
2,5	0,862
3,0	0,873
3,5	0,883
4,0	0,891
4,5	0,898
5,0	0,904

Quoique les expériences de Dubuat sur lesquelles ces formules sont fondées aient été faites en petit, et sur des vîtesses qui ne surpassaient point 1^{m},3, il y a lieu de croire que les résultats peuvent être admis pour des courants d'une plus grande étendue sans erreur dangereuse, et pour des vîtesses plus grandes que cette limite.

Divers procédés pour mesurer la vîtesse d'un courant.

Quant à la manière de mesurer la vîtesse de l'eau, outre l'observation de l'espace parcouru par un petit corps flottant, indiquée dans le texte, on a employé dans ces derniers temps divers procédés, tels qu'un moulinet très-léger, dont les ailes trempent à peine dans le fluide, et qui cédant presque sans résistance à son action, doit prendre une vîtesse peu différente de la sienne; un corps sphérique suspendu à un fil, et qui, poussé par le courant, fait prendre à ce fil une inclinaison plus ou moins grande; le choc de l'eau contre une petite surface plane, mesuré par la flexion d'un ressort. Aucun de ces procédés n'est sans inconvénient. Le dernier, imaginé par M. Gauthey (*Mém. sur les canaux de navigation*, p. 160), est peut-être celui qui en présente le moins. Mais il faudrait avoir étudié d'avance, d'après les notions du § 5 de la note (*db*), et sur un courant dont la vîtesse serait connue, la relation entre cette vîtesse et la force du choc sur la surface employée. On trouve dans les additions de M. Brewster aux leçons de Ferguson (*Ferguson's lectures*, t. 2, p. 178) l'indication d'une manière ingénieuse de disposer un moulinet léger, en sorte que l'instrument indique le nombre de tours effectué par la roue, sans qu'on ait besoin de les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Souvent il importe extrêmement de bien connaître la vîtesse de l'eau sous l'arche d'un pont, afin de connaître la force dont on pourra disposer pour faire aller une machine. Mais en suivant la méthode ordinaire,

---

compter. Ce procédé consiste à donner pour axe à cette roue une vis fixe, le long de laquelle son mouvement de rotation la transporte dans un temps donné d'une quantité proportionnelle au nombre de tours qu'elle fait pendant le même temps. L'espace parcouru ainsi par la roue dans le sens de son axe est marqué sur une échelle, par un index qui est fixé à cette roue et se meut avec elle. Un autre index immobile marque les fractions de tour sur une division établie sur la circonférence de la roue.

L'abbé Mann a proposé, dans un traité sur les rivières imprimé dans le tome 69 des *Transactions philosophiques*, de mesurer la vîtesse des courants par le moyen d'une pièce cylindrique faite d'un bois sec et léger, d'une longueur un peu moindre que la profondeur de la rivière, et lestée à son extrémité inférieure de manière qu'elle se tienne verticale, et que son extrémité supérieure affleure la surface de l'eau. A cette extrémité supérieure serait fixée une petite baguette, dans le prolongement de l'axe du cylindre. L'instrument étant placé dans l'eau, prendrait la vîtesse moyenne des filets correspondants aux divers points de sa hauteur, et l'inclinaison en avant ou en arrière de la petite baguette ferait connaître si la vîtesse va en diminuant ou en augmentant de la surface au fond. En le plaçant successivement dans divers points de la largeur du courant, on pourrait ainsi connaître sa vîtesse moyenne. On peut remarquer sur cet instrument que, pour qu'il donnât des indications exactes, il faudrait que le bois dont il serait formé eût une pesanteur spécifique très-peu différente de celle de l'eau, afin que le lest qui doit être mis à l'extrémité inférieure fût le moindre possible. Autrement l'instrument s'inclinerait en arrière, lors même que la vîtesse de l'eau serait la même dans toute sa hauteur.

Comment les corps flottants entraînés par un courant prennent une vîtesse plus grande que la sienne.

On sait d'ailleurs par expérience que les corps flottants entraînés par les courants d'eau prennent toujours une vîtesse qui surpasse plus ou moins celle du courant. Cette circonstance ne mérite aucune considération dans les cas ordinaires, lorsqu'on estime la vîtesse de l'eau d'après celle d'une petite balle flottant à sa surface, parce que l'excès de vîtesse qu'elle prend peut être négligé, eu égard au degré d'exactitude qu'on doit attendre de ce genre d'observations. Comme le fait que je viens de rappeler n'a pas été par-tout bien expliqué, je m'y arrêterai un instant. Soit un courant dont la pente est $\frac{1}{p}$, et concevons d'abord un corps flottant qui se mouvrait sur lui avec une vîtesse égale à celle de l'eau; ce corps n'éprouverait aucune résistance de la part du fluide, et par conséquent il serait dans le même cas que s'il était posé sur un plan parfaitement poli, dont l'inclinaison sur l'horizon serait $\frac{1}{p}$. Mais alors le corps serait soumis, par l'effet de la pesanteur, à l'action d'une force accélératrice agissant dans le sens du plan, et qui lui ferait prendre un mouvement uniformément accéléré, tel que sa vîtesse croîtrait dans une seconde de la quantité $\frac{g}{p}$. Par conséquent quand un corps flotte sur l'eau, après avoir pris une vîtesse égale à la sienne, il tend à prendre un mouvement accéléré, tel que dans chaque seconde

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la boule passe si vîte en cet endroit qu'on ne peut savoir précisément le temps qu'elle a employé à faire un certain chemin ; la même expérience répétée plusieurs fois ne donnant jamais la même chose, parce que la boule

---

la différence entre sa vîtesse et celle de l'eau croisse de la quantité $\frac{g}{p}$, et il le prendrait effectivement si l'eau ne lui opposait aucune résistance. Mais dès que la vîtesse du corps commence à surpasser celle du courant, il éprouve en sens contraire de son mouvement une résistance qui croît avec la vîtesse, et par conséquent il vient bientôt un terme où la vîtesse ne peut plus augmenter, et devient uniforme. Cela arrive quand le poids du corps, décomposé dans le sens de la pente du courant, est égal à la résistance due à l'excès de sa vîtesse sur celle de l'eau. D'après les § 1 et 2 de la note (*db*), en nommant Ω la plus grande section transversale d'un corps, V sa vîtesse, v celle du courant, et Π le poids de l'unité de volume du fluide, la résistance de ce corps peut être représentée par la formule $\Pi\,(m+n)\,\Omega\,\frac{(V-v)^2}{2g}$, où $m+n$ est un coëfficient numérique à déterminer par expérience pour chaque corps. En représentant par A le volume de fluide déplacé par le corps, son poids sera Π A, et l'action de ce poids dans le sens du courant $\frac{\Pi A}{p}$. Sa vîtesse cessera donc de s'accélérer, à l'instant où l'on aura $\frac{A}{p} = (m+n)\,\Omega\,\frac{(V-v)^2}{2g}$.

Relation entre la résistance d'un corps mu dans un fluide, et l'excès de sa vîtesse sur celle d'un courant qui l'entraîne.

Par conséquent, on pourrait, en observant simultanément la vîtesse d'un courant, et celle d'un corps flottant à sa surface dont le mouvement serait devenu uniforme, déterminer au moyen de l'équation précédente la valeur du coëfficient $m+n$, et c'est peut-être un des procédés le plus praticables pour des expériences en grand sur la résistance des fluides. On peut voir une observation de ce genre dans les *Principes d'Hydraulique* de Dubuat, t. 2, p. 125.

Si l'on connaissait d'avance la valeur de la résistance pour un corps donné, l'équation précédente ferait également juger de l'excès de vîtesse qu'il devrait prendre sur celle du fluide. En la résolvant par rapport à V, elle donne $V = v + \sqrt{\frac{2gA}{p(m+n)\Omega}}$; en sorte que la vîtesse du corps devrait surpasser celle du fluide de la quantité $\sqrt{\frac{2gA}{p(m+n)\Omega}}$.

Une coutume des bateliers égyptiens qui font descendre des radeaux sur le Nil (très-ancienne, puisqu'elle est mentionnée par Hérodote), est fondée sur des principes qui se rattachent aux précédents. Elle consiste à charger l'avant du radeau d'une grosse pierre, et à placer une gerbe de paille à l'arrière, dans l'intention que le radeau se gouverne de lui-même, c'est-à-dire que sa longueur demeure toujours exactement dans le sens du fil de l'eau. On voit en effet que, de même qu'un corps tombant dans l'air se place toujours de manière que son centre de gravité soit le plus bas possible, et en même temps que l'air offre la moindre résistance possible à son mouvement, un corps qui tombe en glissant sur la surface de l'eau, se maintiendra d'autant mieux dans la direction du courant, que sa proue offrira moins

Sur la manière de gouverner les radeaux, employée par les bateliers égyptiens.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ne suit pas toujours le même fil d'eau. Mais sans nous arrêter à tous les défauts de cette méthode, il suffit de dire que M. Pitot en a trouvé une autre incomparablement plus exacte, et qui ne laisse rien à desirer; l'ayant éprouvée plusieurs fois moi-même avec un succès qui me la fait regarder comme l'invention la plus utile qu'on puisse souhaiter pour la mesure des eaux, n'y ayant point d'obstacle qu'elle ne surmonte. Elle se réduit à l'usage de l'instrument du monde le plus simple, par le moyen duquel on connaît sur-le-champ la chute capable de la vîtesse que l'on cherche, à quelque endroit de la surface ou du fond qu'on veuille la prendre; et aussitôt que l'on a cette chute, il est aisé de connaître la vîtesse qui lui répond et par conséquent celle du courant, soit en suivant le calcul qui est enseigné dans l'article 176, ou en se servant de la table de la septième section (169).

Description et usage d'un instrument imaginé par M. Pitot, pour mesurer la vîtesse d'un courant.

Pl. 8, Fig. 91.

614. Cet instrument est composé de deux tuyaux de verre ouverts par les bouts. Le premier AB est tout droit, et le second CD a une de ses extrémités recourbée et évasée en forme d'entonnoir EFGD. Ces tuyaux doivent être encastrés dans une espèce de prisme de bois, de figure triangulaire, pour être maintenus inébranlables l'un à côté de l'autre, et garantis d'accident.

Sur la hauteur de ces tuyaux on fait une division de parties égales, comme aux baromètres, accompagnée d'une marque qui puisse s'arrêter à l'endroit que l'on veut; cette division, pour plus de commodité, doit être exprimée en pouces et en lignes.

Pour faire usage de cet instrument, on le plonge perpendiculairement dans l'eau, de manière que l'entrée du tuyau recourbé soit opposé à la direction du courant, afin qu'il puisse s'engouffrer dans l'entonnoir: alors l'eau monte dans les deux tuyaux, mais à des hauteurs différentes. Car si la ligne HI représente son niveau, elle ne pourra monter dans le premier AB qu'à la hauteur GB qui trempe dans l'eau, n'y ayant que son poids qui

---

de résistance comparée à celle qu'il éprouverait contre toute autre face, et que le centre de gravité de ce corps sera placé plus près de cette proue.

Mesure de la vîtesse d'un courant par le temps du refroidissement d'un corps.

M. Leslie a proposé pour mesurer la vîtesse des courants d'eau et celle du vent un procédé qui diffère beaucoup des précédents. Il consiste à élever un thermomètre à une température supérieure à celle du milieu, et à observer le temps de son refroidissement, en le mettant d'abord dans un air ou une eau tranquille, puis dans le courant dont on veut mesurer la vîtesse. Il paraît que la vîtesse du courant est égale à une quantité constante, plus une quantité proportionnelle au rapport des deux temps observés (*Bibl. britannique*, *Sciences et arts*, t. 30, p. 101). Je remarquerai que les constantes de la formule ayant été déterminées par quelques expériences préliminaires sur des courants dont la vîtesse serait connue, ne pourraient convenir qu'au thermomètre avec lequel ces expériences auraient été faites, ou à un autre thermomètre formé des mêmes matières, et ayant les mêmes dimensions.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

puisse l'y contraindre, comme dans une eau dormante (333). Il n'en sera pas de même de l'eau qui entrera dans le tuyau recourbé CD, qui sera forcée de monter au-dessus du niveau HI, d'une hauteur MK relative à la force du courant. Car sa vîtesse pouvant être considérée comme acquise par une chute d'une certaine hauteur (601), l'eau doit remonter à la même hauteur (160), et y être soutenue par l'impulsion dont cette vîtesse sera capable, laquelle agissant sur l'entrée DE du tuyau doit être en équilibre avec le poids de la colonne MK (601).

On sera toujours sûr d'avoir dirigé l'entonnoir dans le fil le plus rapide de l'eau, quand on aura remarqué le point où elle monte le plus haut, sans se mettre en peine si ce fil est direct, ou oblique. S'il arrive quelquefois qu'un tourbillon fasse monter l'eau au-dessus de la chute qui convient à sa vîtesse, on la verra, après quelque balancement, se remettre à sa hauteur naturelle. Comme le vent occasionne aussi des balancements qui empêchent de fixer la hauteur que l'on cherche, il ne faut faire ces expériences que dans un temps calme.

On peut, par le moyen de cette machine, comme le fait observer M. Pitot, faire un grand nombre d'observations curieuses et utiles; pour connaître, par exemple, la vîtesse moyenne du total des eaux d'une rivière; pour savoir si les augmentations de vîtesse sont proportionnelles aux accroissements des eaux, ou dans quel rapport; pour voir quelle est la relation entre les volumes d'eau et la quantité des frottements, etc.

Application du même instrument pour mesurer le sillage des vaisseaux.

615. M. Pitot, après avoir découvert cette machine, a pensé avec beaucoup de raison qu'elle pouvait être employée à mesurer le sillage d'un vaisseau. Car ce sillage dépend entièrement de la vîtesse du vaisseau, qu'on peut regarder comme celle d'une eau courante, sur laquelle il serait immobile (598). Il faut placer dans le milieu du vaisseau, ou le plus près qu'il se pourra de son centre de balancement, deux tuyaux de métal de 3 ou 4 lignes de diamètre, l'un droit et l'autre courbé comme les précédents, qui doivent tremper dans l'eau de la mer, et il n'y aura rien à craindre de ces ouvertures si petites. Dans ces deux tuyaux en seront enchassés deux autres de verre d'une hauteur convenable pour les observations. L'eau, dans le premier, montera jusqu'à son niveau, et dans le second jusqu'à une hauteur relative à la vîtesse du vaisseau, parce que l'entonnoir étant dirigé vers la proue, sera dans le même cas que si on l'avait mis dans le fil d'une eau courante; et par conséquent on aura la vîtesse du vaisseau de la même manière qu'on trouve celle d'un courant (*de*).

Remarque sur l'usage du tube de Pitot. Véritable théorie de cet instrument.

(*de*) C'est dans les *Mémoires de l'Académie des sciences* pour 1732 que Pitot a donné la première description de cet instrument, mais il s'était borné à recourber horizontalement l'extrémité inférieure du tube CD de la figure 91, sans y placer un entonnoir. Les notions exactes sur la résistance des fluides, principalement dues

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à Dubuat et qui ont été exposées dans la note (*db*), montrent que les indications de cet instrument, tel que l'auteur l'avait conçu, pouvaient être très-fautives. En effet, les deux principes sur lesquels Pitot avait fondé son invention sont également inexacts. D'abord à l'égard du tube droit AB, si l'on remarque que le fluide, obligé de se détourner à la rencontre du tube, doit passer dessous avec une vîtesse plus grande que la vîtesse ordinaire du courant, on jugera, d'après ce qui a été dit dans le § 1 de la note (*db*), que l'eau, au lieu de se tenir dans le tube AB au niveau de sa surface extérieure HI, s'y tiendra au-dessous de cette surface d'une quantité proportionnée à l'excès de vîtesse acquis par les filets d'eau qui passent dessous, excès qui dépend principalement de la grosseur de ce tube. Cet abaissement a été observé par Dubuat (*Principes d'hydraulique*, t. 2, p. 200); mais c'est à tort qu'il conclut de ses expériences que l'abaissement est égal à la hauteur due à la vîtesse: cela ne peut arriver que par hasard, et dans des cas particuliers. A l'égard du tube recourbé, la hauteur à laquelle s'y tiendra le fluide exprimera la valeur moyenne de la pression que le courant exercera contre l'orifice de ce tube, qu'il faut considérer comme la face antérieure d'un corps présenté au choc de ce courant. Or cette pression, qui est précisément due à la hauteur *mh* (voyez la fin du § 1 de la note (*db*)), dépend (d'après les § 5 et 6 de cette note) de la grandeur du diamètre du tube, ou du rapport entre ce diamètre et la longueur de la partie recourbée. Elle peut se ressentir de la modification que doit causer, dans le mouvement du fluide, la présence de la branche montante du tube. On fera d'ailleurs varier cette pression en terminant le tube en pointe, ou en l'évasant en entonnoir, comme le propose Bélidor. Ainsi la hauteur à laquelle l'eau s'élevera dans le tube recourbé ne peut être celle due à la vîtesse, qu'autant que l'on donnerait à l'extrémité inférieure du tube une forme particulière, qu'il faudrait avoir étudiée d'avance par expérience, dans un courant dont la vîtesse serait connue. Il n'est pas certain que la même forme convînt pour observer la vîtesse d'un courant, ou celle d'un corps flottant.

Dubuat a donné (*Principes d'hydraulique*, t. 2, p. 318) diverses indications pour tirer parti du tube de Pitot, mais elles ne paraissent pas à l'abri de toute objection.

Indication d'un autre instrument pour observer la vîtesse de l'eau.

J'aurais pu indiquer dans la note précédente (*dd*), parmi les divers procédés pour mesurer la vîtesse des courants, l'emploi d'un petit volant qu'on présente au choc de l'eau, et qui fait mouvoir des rouages au moyen desquels on compte le nombre de tours faits par le volant dans un temps donné. On en trouve la description dans divers ouvrages allemands, et elle a été insérée dans le t. 6 de la *Bibliothèque universelle*, p. 258, où il est dit, d'après M. Trechsel, « que cet appareil est peu ou point connu en France ». Je puis affirmer avoir vu entre les mains de M. Gauthey et d'autres personnes, il y a plus de quinze ans, un instrument de ce genre qui, outre les inconvénients qui lui sont particuliers, partage d'ailleurs avec d'autres celui d'obliger à l'étudier d'avance dans un courant dont la vîtesse serait connue. Il paraît que les ingénieurs allemands font cette étude en faisant mouvoir l'instrument dans une eau stagnante, avec des vîtesses déterminées : mais il n'est pas certain qu'on obtienne ainsi des indications exactes pour le cas où l'instrument est en repos dans une eau courante.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TABLE TROISIÈME,

Qui comprend les chutes relatives aux vitesses uniformes données par seconde, et les chocs dont l'eau qui aurait ces vitesses peut être capable, sur une surface d'un pied quarré.

Vitesse.	Hauteur de la chute.	Choc de l'eau.	Vitesse.	Hauteur de la chute.	Choc de l'eau.	Vitesse.	Hauteur de la chute.	Choc de l'eau.
pieds pouc.	pouc. lig. points.	livres	pieds pouc.	pouc. lig. points.	livres	pieds pouc.	pouc. lig. points.	livres
0 1	0 0 0	0	2 4	1 1 0	6	4 7	4 2 5	24
0 1	0 0 0	0	2 4	1 1 6	6	4 7	4 3 4	25
0 2	0 0 0	0	2 5	1 2 0	6	4 8	4 4 3	25
0 2	0 0 1	0	2 5	1 2 6	7	4 8	4 5 2	26
0 3	0 0 1	0	2 6	1 3 0	7	4 9	4 6 1	26
0 3	0 0 2	0	2 6	1 3 6	7	4 9	4 7 1	26
0 4	0 0 3	0	2 7	1 4 0	7	4 10	4 8 0	27
0 4	0 0 4	0	2 7	1 4 6	8	4 10	4 9 0	27
0 5	0 0 5	0	2 8	1 5 0	8	4 11	4 10 0	28
0 5	0 0 6	0	2 8	1 5 7	8	4 11	4 11 0	28
0 6	0 0 7	0	2 9	1 6 1	8	5 0	5 0 0	29
0 6	0 0 8	0	2 9	1 6 8	9	5 0	5 1 0	29
0 7	0 0 9	0	2 10	1 7 3	9	5 1	5 2 0	30
0 7	0 0 11	0	2 10	1 7 10	9	5 1	5 3 0	30
0 8	0 1 0	0	2 11	1 8 5	10	5 2	5 4 0	31
0 8	0 1 2	0	2 11	1 9 0	10	5 2	5 5 1	31
0 9	0 1 4	0	3 0	1 9 7	10	5 3	5 6 2	32
0 9	0 1 6	0	3 0	1 10 2	10	5 3	5 7 2	32
0 10	0 1 8	0	3 1	1 10 9	11	5 4	5 8 3	33
0 10	0 1 10	0	3 1	1 11 5	11	5 4	5 9 4	33
0 11	0 2 0	1	3 2	2 0 0	11	5 5	5 10 5	34
0 11	0 2 2	1	3 2	2 0 8	12	5 5	5 11 6	34
1 0	0 2 4	1	3 3	2 1 4	12	5 6	6 0 7	35
1 0	0 2 7	1	3 3	2 2 0	12	5 6	6 1 8	36
1 1	0 2 9	1	3 4	2 2 8	13	5 7	6 2 9	36
1 1	0 3 0	1	3 4	2 3 4	13	5 7	6 3 11	37
1 2	0 3 3	1	3 5	2 4 0	13	5 8	6 5 1	37
1 2	0 3 6	1	3 5	2 4 8	14	5 8	6 6 2	38
1 3	0 3 9	1	3 6	2 5 4	14	5 9	6 7 4	38
1 3	0 4 0	2	3 6	2 6 1	14	5 9	6 8 6	39
1 4	0 4 3	2	3 7	2 6 9	15	5 10	6 9 8	39
1 4	0 4 6	2	3 7	2 7 6	15	5 10	6 10 10	40
1 5	0 4 9	2	3 8	2 8 3	15	5 11	7 0 0	41
1 5	0 5 1	2	3 8	2 9 0	15	5 11	7 1 2	41
1 6	0 5 4	2	3 9	2 9 9	16	6 0	7 2 5	42
1 6	0 5 8	2	3 9	2 10 6	16	6 0	7 3 7	42
1 7	0 6 0	2	3 10	2 11 3	17	6 1	7 4 10	43
1 7	0 6 4	3	3 10	3 0 0	17	6 1	7 6 0	43
1 8	0 6 8	3	3 11	3 0 9	18	6 2	7 7 3	44
1 8	0 7 0	3	3 11	3 1 7	18	6 2	7 8 6	45
1 9	0 7 4	3	4 0	3 2 4	18	6 3	7 9 9	45
1 9	0 7 8	3	4 0	3 3 2	19	6 3	7 11 0	46
1 10	0 8 0	3	4 1	3 4 0	19	6 4	8 0 3	47
1 10	0 8 5	4	4 1	3 4 10	20	6 4	8 1 6	47
1 11	0 8 9	4	4 2	3 5 8	20	6 5	8 2 9	48
1 11	0 9 2	4	4 2	3 6 6	20	6 5	8 4 0	48
2 0	0 9 7	4	4 3	3 7 4	21	6 6	8 5 4	49
2 0	0 10 0	4	4 3	3 8 2	21	6 6	8 6 8	50
2 1	0 10 5	5	4 4	3 9 0	22	6 7	8 8 0	50
2 1	0 10 10	5	4 4	3 9 11	22	6 7	8 9 4	51
2 2	0 11 3	5	4 5	3 10 9	23	6 8	8 10 8	52
2 2	0 11 8	5	4 5	3 11 8	23	6 8	9 0 0	52
2 3	1 0 1	5	4 6	4 0 7	23	6 9	9 1 4	53
2 3	1 0 7	6	4 6	4 1 6	24	6 9	9 2 8	54

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Vitesse.	Hauteur de la chute.				Choc de l'eau.
p.eds	pouc.	pie.	pou.	lig.	poin.	livres
6	10	0	9	4	0	54 3/6
6	10 1/2	0	9	5	5	55
6	11	0	9	6	9	56
6	11 1/2	0	9	8	2	56 2/3
7	0	0	9	9	7	57 1/14
7	0 1/2	0	9	11	0	58 3/20
7	1	0	10	0	5	58
7	1 1/2	0	10	1	10	59 5/12
7	2	0	10	3	3	60
7	2 1/2	0	10	4	8	60 1/2
7	3	0	10	6	1	61 1/2
7	3 1/2	0	10	7	6	62 1/4
7	4	0	10	9	0	63
7	4 1/2	0	10	10	6	63 3/5
7	5	0	11	0	0	64
7	5 1/2	0	11	1	6	64 7/8
7	6	0	11	3	0	65
7	6 1/2	0	11	4	6	66
7	7	0	11	6	0	67 1/2
7	7 1/2	0	11	7	6	68 1/35
7	8	0	11	9	0	68
7	8 1/2	0	11	10	6	69 1/9
7	9	1	0	0	1	70 1/18
7	9 1/2	1	0	1	8	71 1/12
7	10	1	0	3	3	72
7	10 1/2	1	0	4	10	72 7/8
7	11	1	0	6	5	73 5/8
7	11 1/2	1	0	8	0	74 7/8
8	0	1	0	9	7	74 3/4
8	0 1/2	1	0	11	2	75 3/4
8	1	1	1	0	9	76 1/2
8	1 1/2	1	1	2	5	77 1/2
8	2	1	1	4	0	78 1/2
8	2 1/2	1	1	5	8	78 5/6
8	3	1	1	7	4	79
8	3 1/2	1	1	9	0	80
8	4	1	1	10	8	81
8	4 1/2	1	2	0	4	82
8	5	1	2	2	0	82 5/8
8	5 1/2	1	2	3	8	83
8	6	1	2	5	4	84
8	6 1/2	1	2	7	1	85
8	7	1	2	8	9	86
8	7 1/2	1	2	10	6	87
8	8	1	3	0	3	87 5/8
8	8 1/2	1	3	2	0	88
8	9	1	3	3	9	89
8	9 1/2	1	3	5	6	90
8	10	1	3	7	6	91
8	10 1/2	1	3	9	0	92
8	11	1	3	10	9	93 1/12
8	11 1/2	1	4	0	7	94
9	0	1	4	2	4	94 2/3
9	0 1/2	1	4	4	2	95
9	1	1	4	6	0	96
9	1 1/2	1	4	7	10	97 1/2
9	2	1	4	9	8	98
9	2 1/2	1	4	11	6	99 1/4
9	3	1	5	1	4	100 1/6
9	3 1/2	1	5	3	2	101 1/8
9	4	1	5	5	0	102
9	4 1/2	1	5	6	10	103

Vitesse.	Hauteur de la chute.				Choc de l'eau.
pieds	pouc.	pie.	pou.	lig.	poin.	livres
9	5	1	5	8	9	104
9	5 1/2	1	5	10	8	104 3/4
9	6	1	6	0	7	105 3/4
9	6 1/2	1	6	2	6	106 3/12
9	7	1	6	4	5	107 1/2
9	7 1/2	1	6	6	4	108
9	8	1	6	8	3	109 1/2
9	8 1/2	1	6	10	2	110
9	9	1	7	0	1	111
9	9 1/2	1	7	2	1	112 1/4
9	10	1	7	4	0	113 1/6
9	10 1/2	1	7	6	0	114 1/6
9	11	1	7	8	0	115 1/8
9	11 1/2	1	7	10	0	116 1/10
10	0	1	8	0	0	117
10	0 1/2	1	8	2	0	118 1/20
10	1	1	8	4	0	119
10	1 1/2	1	8	6	0	120 1/61
10	2	1	8	8	0	121
10	2 1/2	1	8	10	1	122
10	3	1	9	0	1	123
10	3 1/2	1	9	2	2	124
10	4	1	9	4	3	125
10	4 1/2	1	9	6	4	126 1/61
10	5	1	9	8	5	127
10	5 1/2	1	9	10	6	128 1/20
10	6	1	10	0	7	129
10	6 1/2	1	10	2	8	130 1/10
10	7	1	10	4	9	131 1/6
10	7 1/2	1	10	6	10	132 1/6
10	8	1	10	9	0	133 1/6
10	8 1/2	1	10	11	2	134 1/6
10	9	1	11	1	4	135 1/6
10	9 1/2	1	11	3	6	136 1/6
10	10	1	11	5	8	137 1/6
10	10 1/2	1	11	7	10	138 1/6
10	11	1	11	10	0	139 1/2
10	11 1/2	2	0	0	2	140 1/2
11	0	2	0	2	4	141 1/2
11	0 1/2	2	0	4	6	142 1/2
11	1	2	0	6	9	143 1/2
11	1 1/2	2	0	9	0	144 1/12
11	2	2	0	11	3	146
11	2 1/2	2	1	1	6	147 1/16
11	3	2	1	3	9	148 1/6
11	3 1/2	2	1	6	0	149 1/6
11	4	2	1	8	3	150 1/6
11	4 1/2	2	1	10	6	151 1/2
11	5	2	2	0	9	152 1/2
11	5 1/2	2	2	3	1	153 1/2
11	6	2	2	5	4	154 1/2
11	6 1/2	2	2	7	8	155 1/2
11	7	2	2	10	0	157
11	7 1/2	2	3	0	4	158 1/8
11	8	2	3	2	8	159 1/3
11	8 1/2	2	3	5	0	160 1/2
11	9	2	3	7	4	161 1/2
11	9 1/2	2	3	9	8	162 1/2
11	10	2	4	0	0	163 6/7
11	10 1/2	2	4	2	4	165 1/11
11	11	2	4	4	9	166 1/2
11	11 1/2	2	4	7	2	167 2/5

Vitesse.	Hauteur de la chute.				Choc de l'eau.
pieds	pouc.	pie.	pou.	lig.	poin.	livres
12	0	2	4	9	7	168 4/7
12	0 1/2	2	5	0	0	170
12	1	2	5	2	5	171 1/2
12	1 1/2	2	5	4	10	172 1/6
12	2	2	5	7	3	173 1/6
12	2 1/2	2	5	9	8	174 1/2
12	3	2	6	0	1	175 2/3
12	3 1/2	2	6	2	7	176 2/7
12	4	2	6	5	0	178
12	4 1/2	2	6	7	6	179 2/3
12	5	2	6	10	0	180 1/2
12	5 1/2	2	7	0	6	181 1/2
12	6	2	7	3	0	182
12	6 1/2	2	7	5	6	184 1/3
12	7	2	7	8	0	185
12	7 1/2	2	7	10	6	186
12	8	2	8	1	0	187
12	8 1/2	2	8	3	7	189
12	9	2	8	6	1	190
12	9 1/2	2	8	8	8	191
12	10	2	8	11	3	192
12	10 1/2	2	9	1	10	194
12	11	2	9	4	5	195
12	11 1/2	2	9	7	0	196
13	0	2	9	9	7	197
13	0 1/2	2	10	0	2	199
13	1	2	10	2	9	200
13	1 1/2	2	10	5	5	201
13	2	2	10	8	0	202
13	2 1/2	2	10	10	8	204
13	3	2	11	1	4	205
13	3 1/2	2	11	3	4	206
13	4	2	11	6	8	208
13	4 1/2	2	11	9	4	209
13	5	3	0	0	0	210
13	5 1/2	3	0	2	8	212
13	6	3	0	5	4	213
13	6 1/2	3	0	8	1	214
13	7	3	0	10	9	216
13	7 1/2	3	1	1	6	217
13	8	3	1	4	3	218
13	8 1/2	3	1	7	0	220
13	9	3	1	9	9	221
13	9 1/2	3	2	0	6	222
13	10	3	2	3	3	224
13	10 1/2	3	2	6	0	225
13	11	3	2	8	9	226
13	11 1/2	3	2	11	7	228
14	0	3	3	2	4	229
14	0 1/2	3	3	5	2	230
14	1	3	3	8	0	232
14	1 1/2	3	3	10	10	233
14	2	3	4	1	8	235
14	2 1/2	3	4	4	6	236
14	3	3	4	7	4	237
14	3 1/2	3	4	10	2	239
14	4	3	5	1	0	240
14	4 1/2	3	5	3	11	241
14	5	3	5	6	9	243
14	5 1/2	3	5	9	8	244
14	6	3	6	0	7	246
14	6 1/2	3	6	3	6	247

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Vitesse.	Hauteur de la chute.	Choc de l'eau.	Vitesse.	Hauteur de la chute.	Choc de l'eau.	Vitesse.	Hauteur de la chute.	Choc de l'eau.
pieds pouc.	pie. pou. lig. poin.	livres	pieds pouc.	pie. pou. lig. poin.	livres	pieds pouc.	pieds pouc. lig.	livres
14 7	3 6 6 5	249	17 2	4 10 11 3	345	19 9	6 6 0	456
14 7½	3 6 9 4	250	17 2½	4 11 2 8	346	19 9½	6 6 4	459
14 8	3 7 0 3	251	17 3	4 11 6 1	348	19 10	6 6 8	460
14 8½	3 7 3 2	253	17 3½	4 11 9 7	350	19 10½	6 7 0	462
14 9	3 7 6 1	254	17 4	5 0 1 0	351	19 11	6 7 4	464
14 9½	3 7 9 1	256	17 4½	5 0 4 6	353	19 11½	6 7 8	466
14 10	3 8 0 0	257	17 5	5 0 8 0	355	20 0	6 8 0	468
14 10½	3 8 3 0	259	17 5½	5 0 11 6	356	20 0½	6 8 4	470
14 11	3 8 6 0	260	17 6	5 1 3 0	358	20 1	6 8 8	472
14 11½	3 8 9 0	262	17 6½	5 1 6 6	360	20 1½	6 9 0	474
15 0	3 9 0 0	263	17 7	5 1 10 0	362	20 2	6 9 4	476
15 0½	3 9 3 0	265	17 7½	5 2 1 6	363	20 2½	6 9 8	478
15 1	3 9 6 0	266	17 8	5 2 5 0	365	20 3	6 10 0	480
15 1½	3 9 9 0	267	17 8½	5 2 8 7	367	20 3½	6 10 4	482
15 2	3 10 0 0	269	17 9	5 3 0 1	369	20 4	6 10 8	484
15 2½	3 10 3 1	270	17 9½	5 3 3 8	370	20 4½	6 11 0	486
15 3	3 10 6 1	272	17 10	5 3 7 3	372	20 5	6 11 4	488
15 3½	3 10 9 2	273	17 10½	5 3 10 10	374	20 5½	6 11 8	490
15 4	3 11 0 3	275	17 11	5 4 2 5	375	20 6	7 0 0	492
15 4½	3 11 3 4	276	17 11½	5 4 6 0	377	20 6½	7 0 4	494
15 5	3 11 6 5	278	18 0	5 4 9 7	379	20 7	7 0 8	496
15 5½	3 11 9 6	279	18 0½	5 5 1 2	381	20 7½	7 1 0	498
15 6	4 0 0 7	281	18 1	5 5 4 0	382	20 8	7 1 5	500
15 6½	4 0 3 8	282	18 1½	5 5 8 0	384	20 8½	7 1 9	502
15 7	4 0 6 9	284	18 2	5 6 0 0	386	20 9	7 2 1	504
15 7½	4 0 9 11	285	18 2½	5 6 3 0	388	20 9½	7 2 5	506
15 8	4 1 1 0	287	18 3	5 6 7 0	389	20 10	7 2 9	508
15 8½	4 1 4 2	288	18 3½	5 6 11 0	391	20 10½	7 3 1	510
15 9	4 1 7 4	290	18 4	5 7 3 0	393	20 11	7 3 6	512
15 9½	4 1 10 6	292	18 4½	5 7 6 0	395	20 11½	7 3 10	514
15 10	4 2 1 8	293	18 5	5 7 10 0	396	21 0	7 4 2	516
15 10½	4 2 4 10	295	18 5½	5 8 1 0	398	21 0½	7 4 6	518
15 11	4 2 8 0	296	18 6	5 8 5 0	400	21 1	7 4 10	520
15 11½	4 2 11 2	298	18 6½	5 8 9 0	402	21 1½	7 5 3	522
16 0	4 3 2 4	299	18 7	5 9 0 0	404	21 2	7 5 7	524
16 0½	4 3 5 6	301	18 7½	5 9 4 0	406	21 2½	7 5 11	526
16 1	4 3 8 9	302	18 8	5 9 8 0	407	21 3	7 6 3	528
16 1½	4 4 0 0	304	18 8½	5 10 0 0	409	21 3½	7 6 8	530
16 2	4 4 3 3	306	18 9	5 10 3 0	411	21 4	7 7 0	532
16 2½	4 4 6 6	307	18 9½	5 10 7 0	413	21 4½	7 7 4	534
16 3	4 4 9 9	309	18 10	5 10 11 0	415	21 5	7 7 8	536
16 3½	4 5 1 0	310	18 10½	5 11 3 0	417	21 5½	7 8 1	539
16 4	4 5 4 3	312	18 11	5 11 6 0	419	21 6	7 8 5	541
16 4½	4 5 7 6	313	18 11½	5 11 10 0	420	21 6½	7 8 9	543
16 5	4 5 10 9	315	19 0	6 0 2 0	422	21 7	7 9 2	545
16 5½	4 6 2 1	317	19 0½	6 0 6 0	424	21 7½	7 9 6	547
16 6	4 6 5 4	318	19 1	6 0 10 0	426	21 8	7 9 10	549
16 6½	4 6 8 8	320	19 1½	6 1 2 0	428	21 8½	7 10 3	551
16 7	4 7 0 0	322	19 2	6 1 5 0	430	21 9	7 10 7	553
16 7½	4 7 3 4	323	19 2½	6 1 9 0	431	21 9½	7 10 11	555
16 8	4 7 6 8	325	19 3	6 2 1 0	433	21 10	7 11 4	558
16 8½	4 7 10 0	326	19 3½	6 2 5 0	435	21 10½	7 11 8	560
16 9	4 8 1 4	328	19 4	6 2 9 0	437	21 11	8 0 0	562
16 9½	4 8 4 8	330	19 4½	6 3 0 0	439	21 11½	8 0 5	564
16 10	4 8 8 0	331	19 5	6 3 4 0	441	22 0	8 0 9	566
16 10½	4 8 11 4	333	19 5½	6 3 8 0	443	22 0½	8 1 2	568
16 11	4 9 2 9	335	19 6	6 4 0 0	445	22 1	8 1 6	570
16 11½	4 9 6 2	336	19 6½	6 4 4 0	447	22 1½	8 1 10	572
17 0	4 9 9 7	338	19 7	6 4 8 0	449	22 2	8 2 3	575
17 0½	4 10 1 0	340	19 7½	6 5 0 0	450	22 2½	8 2 7	577
17 1	4 10 4 5	341	19 8	6 5 4 0	452	22 3	8 3 0	579
17 1½	4 10 7 10	343	19 8½	6 5 8 0	454	22 3½	8 3 4	581

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Vitesse.	Hauteur de la chute.	Choc de l'eau.	Vitesse.	Hauteur de la chute.	Choc de l'eau.	Vitesse.	Hauteur de la chute.	Choc de l'eau.
pieds pouc.	pieds pouc. lig.	livres	pieds pouc.	pieds pouc. lig.	livres	pieds pouc.	pieds pouc. lig.	livres
22 4	8 3 9	583	24 11	10 4 2	726	27 6	12 7 3	885
22 4½	8 4 1	586	24 11½	10 4 7	729	27 6½	12 7 8	888
22 5	8 4 6	588	25 0	10 5 0	731	27 7	12 8 2	890
22 5½	8 4 10	590	25 0½	10 5 5	734	27 7½	12 8 7	893
22 6	8 5 3	592	25 1	10 5 10	736	27 8	12 9 1	896
22 6½	8 5 7	594	25 1⅓	10 6 3	739	27 8½	12 9 7	898
22 7	8 6 0	597	25 2	10 6 8	741	27 9	12 10 0	901
22 7½	8 6 4	599	25 2⅓	10 7 0	743	27 9½	12 10 5	904
22 8	8 6 9	601	25 3	10 7 6	746	27 10	12 10 11	906
22 8½	8 7 1	603	25 3⅓	10 7 11	748	27 10½	12 11 4	909
22 9	8 7 6	606	25 4	10 8 4	751	27 11	12 11 10	912
22 9½	8 7 10	608	25 4⅓	10 8 9	753	27 11½	13 0 4	915
22 10	8 8 3	610	25 5	10 9 2	756	28 0	13 0 9	917
22 10½	8 8 7	612	25 5⅓	10 9 7	758	28 0½	13 1 2	920
22 11	8 9 0	614	25 6	10 10 0	761	28 1	13 1 8	923
22 11½	8 9 5	617	25 6½	10 10 5	763	28 1½	13 2 2	926
23 0	8 9 9	619	25 7	10 10 10	766	28 2	13 2 8	928
23 0½	8 10 2	621	25 7⅓	10 11 3	768	28 2½	13 3 1	931
23 1	8 10 6	623	25 8	11 11 9	771	28 3	13 3 7	934
23 1½	8 10 11	626	25 8½	11 0 2	773	28 3½	13 4 1	937
23 2	8 11 4	628	25 9	11 0 7	776	28 4	13 4 6	939
23 2½	8 11 8	630	25 9½	11 1 0	779	28 4½	13 5 0	942
23 3	9 0 1	632	25 10	11 1 5	781	28 5	13 5 6	945
23 3½	9 0 5	635	25 10½	11 1 10	783	28 5½	13 5 11	948
23 4	9 0 10	637	25 11	11 2 4	786	28 6	13 6 5	950
23 4½	9 1 3	639	25 11½	11 2 9	788	28 6½	13 7 0	953
23 5	9 1 8	641	26 0	11 3 0	791	28 7	13 7 5	956
23 5½	9 2 0	643	26 0½	11 3 7	793	28 7½	13 7 10	959
23 6	9 2 5	646	26 1	11 4 0	796	28 8	13 8 4	962
23 6½	9 2 10	648	26 1½	11 4 6	799	28 8½	13 8 10	965
23 7	9 3 2	651	26 2	11 4 11	801	28 9	13 9 3	967
23 7½	9 3 7	653	26 2½	11 5 4	804	28 9½	13 9 9	970
23 8	9 4 0	655	26 3	11 5 9	806	28 10	13 10 3	973
23 8½	9 4 5	657	26 3½	11 6 3	809	28 10½	13 10 9	976
23 9	9 4 9	660	26 4	11 6 8	811	28 11	13 11 2	978
23 9½	9 5 2	662	26 4½	11 7 1	814	28 11½	13 11 8	981
23 10	9 5 7	665	26 5	11 7 6	816	29 0	14 0 2	984
23 10½	9 6 0	667	26 5½	11 8 0	819	29 0½	14 0 8	987
23 11	9 6 4	669	26 6	11 8 5	822	29 1	14 1 2	990
23 11½	9 6 9	672	26 6½	11 8 10	824	29 1½	14 1 7	992
24 0	9 7 2	674	26 7	11 9 4	827	29 2	14 2 0	996
24 0½	9 7 7	676	26 7½	11 9 9	829	29 2½	14 2 7	998
24 1	9 8 0	679	26 8	11 10 2	832	29 3	14 3 1	1001
24 1½	9 8 4	681	26 8½	11 10 8	835	29 3½	14 3 7	1004
24 2	9 8 9	684	26 9	11 11 1	837	29 4	14 4 1	1007
24 2½	9 9 2	686	26 9½	11 11 6	840	29 4½	14 4 7	1010
24 3	9 9 7	688	26 10	12 0 0	842	29 5	14 5 0	1013
24 3½	9 10 0	690	26 10½	12 0 5	845	29 5½	14 5 6	1016
24 4	9 10 5	693	26 11	12 0 10	848	29 6	14 6 0	1019
24 4½	9 10 9	695	26 11½	12 1 4	850	29 6½	14 6 6	1021
24 5	9 11 2	697	27 0	12 1 9	853	29 7	14 7 0	1024
24 5½	9 11 7	700	27 0½	12 2 3	856	29 7½	14 7 6	1027
24 6	10 0 0	702	27 1	12 2 8	858	29 8	14 8 0	1030
24 6½	10 0 5	705	27 1½	12 3 2	861	29 8½	14 8 6	1033
24 7	10 0 10	707	27 2	12 3 7	864	29 9	14 9 0	1036
24 7½	10 1 3	709	27 2½	12 4 0	866	29 9½	14 9 6	1039
24 8	10 1 8	712	27 3	12 4 6	869	29 10	14 10 0	1042
24 8½	10 2 1	714	27 3½	12 4 11	871	29 10½	14 10 6	1045
24 9	10 2 6	717	27 4	12 5 5	874	29 11	14 11 1	1048
24 9½	10 2 11	719	27 4½	12 5 10	877	29 11½	14 11 6	1050
24 10	10 3 4	721	27 5	12 6 4	880	30 0	15 0 0	1053
24 10½	10 3 9	724	27 5½	12 6 9	882			

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

SECTION XII.

Des corps plongés dans l'eau.

Quand on pose légèrement un corps sur la surface d'une eau dormante, il arrive nécessairement l'un de ces trois cas.

1°. Si la pesanteur spécifique du corps est moindre que celle de l'eau, il surnagera et ne s'enfoncera que pour occuper un volume d'eau de même poids que lui.

2°. Si la pesanteur spécifique du corps est égale à celle de l'eau, il s'enfoncera totalement, et restera immobile entre deux eaux.

3°. Si la pesanteur spécifique du corps est plus grande que celle de l'eau, il descendra, et sera poussé vers le fond avec une force exprimée par l'excès de son poids sur celui du volume d'eau dont il occupe la place.

Un corps d'une pesanteur spécifique moindre que celle de l'eau, ne s'y enfonce qu'en partie.

PLANCHE 8. FIGURES 77 et 78.

616. Pour démontrer le premier cas, je suppose que l'on a posé sur la surface de l'eau un vaisseau prismatique ABCD, de la pesanteur duquel nous ferons abstraction, qu'ensuite on y a versé doucement de l'eau jusqu'à la hauteur EF, que nous considérerons comme une augmentation faite à la colonne de dessous GADH, qui, se trouvant alors plus pesante que chacune des autres de même base, descendra et les fera toutes monter pour se mettre de niveau avec elle (326); ainsi le prisme AEFD pourra être regardé comme faisant partie de la totalité de l'eau.

Comme le poids de l'eau contenue dans le vaisseau ABCD a été la seule cause de son enfoncement, on voit que si l'on substituait à cette eau un corps d'une pesanteur égale à la sienne, le vaisseau s'enfoncerait à la même profondeur qu'auparavant, c'est-à-dire qu'il occuperait encore la place d'un volume d'eau d'un poids égal à celui qu'il contiendrait. Voilà ce qui fait que les bateaux peuvent être chargés sans couler à fond d'un poids de quelque matière que l'on voudra, pourvu qu'il ne soit pas tout-à-fait si grand que celui de l'eau qu'ils peuvent contenir.

Si le vaisseau ABCD était un corps solide, d'une pesanteur égale à celle de l'eau qu'il peut contenir, il s'enfoncerait encore à la même profondeur qu'auparavant, pour n'occuper que la place d'un volume d'eau d'une pesanteur égale à la sienne; ce qui arrivera toujours, de quelque figure que soit ce corps.

Conséquences tirées du principe précédent.

617. Il suit que la pesanteur spécifique du prisme ABCD, considéré comme un solide, sera à la pesanteur spécifique de l'eau réciproquement, comme la hauteur EA dont ce prisme s'est enfoncé est à la hauteur AB du prisme même.

618. Il suit encore que lorsqu'on enfonce entièrement dans l'eau un corps plus léger que le volume qu'il déplace, il est repoussé de bas en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

haut par les colonnes d'alentour, avec une force égale à l'excès du poids de ce volume sur celui du corps.

619. Il est bon de remarquer qu'un même corps s'enfoncera plus ou moins dans des liqueurs de pesanteurs spécifiques différentes; par exemple un vaisseau chargé s'enfoncera plus dans une rivière que dans la mer, parce que l'eau douce est plus légère que celle de la mer.

Manière de retirer les vaisseaux submergés.

620. On a su mettre à profit le principe précédent pour retirer du fond de la mer des vaisseaux submergés. Pour cela on se sert de trois vaisseaux, dont l'un est lesté de façon à demeurer à fleur d'eau. On les conduit au-dessus du vaisseau submergé, et on les fait attacher ensemble par des plongeurs. Ensuite on décharge le premier de son lest que l'on met dans un des deux autres, qui doit être plus grand. Celui qui est submergé monte à mesure qu'on décharge celui avec lequel il est attaché. Quand celui-ci est vide, et que le second est chargé, on l'attache tout de nouveau au submergé. On le vide ensuite dans un troisième plus grand que le second, ce qui fait encore monter le submergé, et on continue cette manœuvre jusqu'à ce qu'il soit à fleur d'eau.

PLANCHE 8. FIGURES 78 et 79. Un corps d'une pesanteur spécifique égale à celle de l'eau, s'y maintient en équilibre, à quelque profondeur qu'il y soit plongé.

621. Il est aisé présentement d'expliquer le second cas : car si on continue de verser de l'eau dans le vaisseau ABCD pour le remplir, il s'enfoncera de plus en plus, de manière que les surfaces des deux eaux soient confondues. Alors le vaisseau étant entièrement plongé dans le réservoir, fera partie de la colonne *gbch*, laquelle s'étant mise en équilibre avec toutes les autres, le vaisseau s'y trouvera aussi.

Si la hauteur *bg* de la colonne *gbch* contient plusieurs fois celle du vaisseau, cette colonne sera composée de plusieurs prismes *abcd;* et comme il sera indifférent à l'équilibre que l'un d'eux soit plutôt situé vers le niveau de l'eau que vers le fond, on voit qu'à quelque endroit que soit placé le vaisseau, ou un corps solide d'une pesanteur égale à celle du volume d'eau dont il peut occuper la place, il se maintiendra en équilibre avec toute celle dont il sera environné.

622. Puisque le volume qu'un corps occupe dans l'eau peut être considéré comme faisant partie de la totalité de l'eau même, il suit que quand un corps d'une pesanteur spécifique, égale ou moindre que celle de l'eau, s'y trouve plongé, le fond du vaisseau est plus chargé qu'il n'était auparavant du poids de l'eau dont ce corps occupe la place, ou de celui du corps même.

Les corps perdent dans l'eau une partie de leur poids égal à celui du volume dont ils occupent la place.

623. A l'égard du troisième cas, un corps ne se maintenant entre deux eaux qu'autant qu'il est soutenu en équilibre par une force égale au poids du volume d'eau dont il occupe la place, on voit que lorsque ce corps est plus pesant que celui de ce même volume, il doit surmonter la résistance qui lui est opposée et descendre avec toute la force qui lui reste, c'est-à-dire avec l'excès de son poids sur celui du volume dont il occupe la place.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

624. Il suit de-là que les corps perdent dans l'eau une partie de leur poids égale à celui du volume d'eau dont ils occupent la place.

625. On tire de cette conséquence le moyen de trouver le rapport de la pesanteur spécifique d'un corps à celle de l'eau. Car si on le pèse dans de justes balances, et qu'on trouve son poids de 12 livres; qu'ensuite on le suspende avec un fil fort délié à l'un des bassins de la balance pour le plonger entièrement dans l'eau, si on s'aperçoit qu'il ne pèse plus que 7 livres, c'est une marque qu'il occupe le volume de 5 livres d'eau, que par conséquent la pesanteur spécifique de ce corps est à celle de l'eau, comme 12 est à 5 (*df*).

Manière de connaître le rapport de la pesanteur spécifique des corps à celle de l'eau.

(*df*) Les explications contenues dans les articles précédents offrent peu d'exactitude et de rigueur. Pour y suppléer, il faut rappeler ici quelques notions qui auraient dû être présentées dans les premières sections de ce chapitre. Si l'on a un corps plongé en tout ou en partie dans un fluide pesant, et qui y demeure en équilibre, chaque élément de sa surface supporte une pression normale à cet élément, et égale au poids d'une colonne de fluide dont l'élément est la base et dont sa distance à la surface du fluide est la hauteur. On peut toujours concevoir cette pression décomposée en deux forces perpendiculaires entre elles, dont l'une horizontale, et l'autre verticale. Or il est aisé de s'assurer que les pressions horizontales exercées sur les divers éléments de la surface se détruiront toujours mutuellement. En effet soit ω l'aire de l'élément d'une surface, z sa distance à la surface du fluide: en représentant par Π le poids de l'unité de volume du fluide, la pression normale soufferte par l'élément sera $\Pi\,\omega\,z$. Décomposons cette pression normale suivant une direction horizontale quelconque faisant avec la normale un angle α: la composante sera $\Pi\,\omega\,z\cos.\alpha$. Or si l'on projetait l'élément ω sur un plan vertical perpendiculaire à cette composante, l'aire de sa projection serait $\omega\cos.\alpha$, et la pression qu'elle supporterait $\Pi\,z\,\omega\cos.\alpha$, quantité égale à la précédente. D'où résulte ce principe: que la pression soufferte par un élément étant estimée perpendiculairement à un plan vertical quelconque, est égale à la pression que souffrirait la projection de cet élément faite sur ce plan. Il suit de là que si on conçoit la surface d'un corps projetée sur un plan vertical quelconque, la pression que souffrirait sa projection exprimera également la pression horizontale exercée contre une des faces du corps qui le pousse du côté du plan, et la pression horizontale exercée contre l'autre face qui le pousse du côté opposé. Ces deux pressions horizontales se détruisent donc nécessairement, et par conséquent l'action du fluide ne peut jamais tendre à imprimer au corps aucun mouvement horizontal.

Théorie de l'équilibre d'un corps plongé dans un fluide pesant.

Il reste à considérer les pressions verticales. Si l'on représente par θ l'angle de la normale à l'élément ω avec la verticale, la pression normale étant $\Pi\,\omega\,z$, la composante verticale de cette pression sera $\Pi\,\omega\,z\cos.\theta$. Or si l'on conçoit le prisme formé par toutes les verticales qui partant des points de ω aboutissent à la surface supérieure du fluide, l'aire de la base de ce prisme sur cette surface sera $\omega\cos.\theta$, sa hauteur z, son volume $\omega\,z\cos.\theta$, et son poids $\Pi\,\omega\,z\cos.\theta$. D'où résulte cet autre principe, que la pression verticale soufferte par un élément quelconque de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Manière de connaître la solidité des corps irréguliers en les plongeant dans l'eau.

626. Quand on sait quelle partie de son poids un corps perd dans l'eau, ou quelle est la pesanteur de celle dont il occupe la place, il est aisé d'en avoir la solidité, quelque irrégulier qu'il soit, parce qu'il y aura toujours même raison du poids d'un pied cube d'eau au nombre de pouces contenus dans un pied cube, que du poids de l'eau dont ce corps peut occuper la place, au nombre de pouces qui doit en exprimer le volume. Ainsi, supposant comme dans l'exemple précédent qu'un corps du poids de 12 liv. occupe la place de 5 liv. d'eau, on dira comme 70 est à

---

surface, est le poids du prisme de fluide dont la hauteur est la distance de l'élément à la surface du fluide, et la base la projection de l'élément sur cette surface. Ainsi pour un corps en partie plongé dans un fluide, la résultante des pressions verticales supportées par tous les éléments de sa surface sera le poids du volume de fluide qu'il déplace, et passera par le centre de gravité de ce volume; et pour un corps entièrement plongé, cette même résultante, ou la différence des pressions verticales supportées par les faces supérieures et inférieures, sera une force dirigée de bas en haut, égale au poids d'un volume de fluide égal à celui du corps, et passant par le centre de gravité de ce volume.

Si l'on fait attention maintenant qu'un corps pesant ne peut demeurer en repos qu'autant qu'il est soutenu par une force verticale passant par son centre de gravité, on verra que, pour qu'un corps plongé en tout ou en partie dans un fluide y demeure en équilibre, il y a deux conditions à remplir, savoir que le poids de ce corps soit égal à celui du volume de fluide qu'il déplace, et que son centre de gravité et celui de ce volume soient situés dans une même verticale. On voit aussi que si le corps est plus pesant ou plus léger que le volume de fluide qu'il déplace, il tendra à descendre ou à monter verticalement avec une force égale à la différence de son poids avec celui de ce volume.

On conçoit d'après ce qui précède qu'étant donné un corps quelconque, la recherche de la situation qu'il doit prendre pour demeurer en équilibre sur la surface d'un fluide est une recherche de pure géométrie. M. de Prony a remarqué qu'elle se réduisait, pour les corps homogènes, à cette question : couper un corps de figure donnée par un plan, de manière que le volume de l'un quelconque des segments soit à celui du corps dans un rapport donné, et que la ligne droite qui passe par le centre d'inertie du corps et de ses deux segments soit perpendiculaire au plan coupant. Il a donné la solution générale de ce problème dans la *Mécanique philosophique*, p. 244. On peut voir aussi sur ce sujet les chapitres 10 et 11 de l'*Hydrostatique* dans le *Traité d'hydrodynamique* de Bossut. Je renverrai également à ces deux ouvrages et aux autres traités élémentaires de mécanique, pour la recherche des conditions de stabilité et des lois des petites oscillations des corps flottants.

Sur la détermination de la pesanteur spécifique des corps solides.

Quant au procédé indiqué art. 625 pour déterminer la pesanteur spécifique des corps, il peut suffire pour une estimation approchée. Mais pour arriver à des résultats précis, il faut avoir égard, comme on l'a déja remarqué dans la note (*bp*), à diverses circonstances qui en rendent l'usage plus compliqué. On peut consulter à ce sujet le *Traité de physique* de M. Biot, t. 1, p. 426.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1728, ainsi 5 est au volume que l'on cherche, qu'on trouvera 123 $\frac{3}{7}$ pouces.

Pour savoir combien pesera un pied cube de la même matière, on dira si 123 $\frac{3}{7}$ pouces pèsent 12 liv. combien peseront 1728 pouces; on trouvera 168 liv. pour le poids du pied cube.

627. C'est par de pareilles expériences que l'on a trouvé que l'or perd dans l'eau la dix-neuvième partie de son poids, le mercure la quatorzième, le plomb la douzième, l'argent la dixième, le cuivre la neuvième, le fer la huitième, et l'étain la septième.

Manière de faire l'analyse des métaux mixtes ou hétérogènes.

628. On tire de-là le secret de connaître la quantité d'alliage qu'il y a dans une pièce de monnaie, ou dans un morceau de métal quelconque, comme on le va voir par un problème tiré de notre *Cours de mathématiques*, qui se réduit à faire l'analyse de l'alliage du métal dont le canon est composé.

Il faut d'abord être prévenu que le métal dont on fait les pièces d'artillerie est composé de rosette, que l'on nomme communément cuivre rouge, et d'étain fin d'Angleterre; que la proportion que l'on observe ordinairement pour la quantité de ces deux métaux est de 25 livres de rosette sur 3 livres d'étain.

Comme il arrive fréquemment de fondre d'anciennes pièces qui sont hors d'état de servir pour en faire de nouvelles, et que souvent les fondeurs sont embarrassés pour savoir si le métal est conforme à l'alliage qu'ils ont coutume de suivre, pour qu'il ne soit ni trop aigre ni trop doux, voici comme on en pourra juger, en se rappelant que l'étain perd dans l'eau la septième partie de son poids, et la rosette la neuvième partie (627).

Pour connaître la quantité de rosette et d'étain qui se trouve dans une pièce de 24, du poids de 5200 livres, il faut peser bien exactement un de ses tronçons, que nous supposerons avoir été trouvé de 163 livres, le peser ensuite dans l'eau, pour voir quelle est sa perte, que nous supposerons de 19 liv. Présentement il faut considérer ce morceau comme étant tout rosette, alors sa perte dans l'eau sera $\frac{163}{9}$, et le considérant aussi comme étant tout d'étain, sa perte sera $\frac{163}{7}$; nommant x la quantité de rosette, et y la quantité d'étain que l'on cherche, nous supposerons $a = 163$, $b = 19$, $c = \frac{163}{9}$, $d = \frac{163}{7}$. Pour parvenir à la connaissance de x et de y, il faut dire comme le poids du métal considéré comme rosette est à la perte du même, ainsi la quantité de rosette inconnue est à la perte de la même, qui donne $a : c :: x : \frac{cx}{a}$; ensuite comme le poids du métal considéré comme étain est à la perte du même, ainsi l'étain que l'on cherche est à sa perte, d'où l'on tire encore $a : d :: y : \frac{dy}{a}$; ce qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donne $\frac{cx}{a}+\frac{dy}{a}=b$. Comme x et y représentent la rosette et l'étain qui composent le métal, on aura encore $x+y=a$, ou $x=a-y$; substituant la valeur de x dans l'équation précédente, il viendra $\frac{ac-cy+dy}{a}=b$, ou $dy-cy=ab-ac$, ou $y=\frac{a(b-c)}{d-c}$, qui étant substitué dans $x=a-y$, donne $x=\frac{a(d-b)}{d-c}$. Faisant les opérations indiquées par les lettres, on trouvera $x=135$, et $y=28$.

Présentement il faut dire, si dans 163 liv. de métal il y a 28 liv. d'étain, combien y en aura-t-il dans 5200 liv., poids de la pièce? on en trouvera environ 894 livres, et par conséquent 4306 livres de rosette.

Mais comme la raison de 4306 à 894 n'est pas celle de 25 à 3, parce que nous avons supposé qu'il y avait dans le métal beaucoup plus d'étain qu'il n'en fallait, il sera facile de savoir combien il faut ajouter de rosette, pour que l'alliage soit bien fait, en disant: Si pour 3 liv. d'étain il faut 25 liv. de rosette, combien en faudra-t-il pour 894; on trouvera qu'il en faut 7450 livres, et comme il y en a déja 4306 livres, il faudra n'en ajouter que 3144 livres.

L'histoire rapporte que Hiéron, roi de Syracuse, ayant donné 18 livres d'or à un orfèvre pour lui faire une couronne, voulut savoir quand elle fut achevée si elle était d'or pur, soupçonnant que l'orfèvre pouvait y avoir mêlé beaucoup d'argent. Il proposa sa difficulté au fameux Archimède, qui n'aperçut pas d'abord de quelle manière il pourrait satisfaire le prince. Un jour qu'il était dans le bain, l'esprit occupé du problême qu'il cherchait, il aperçut tout d'un coup la voie pour le résoudre, et en fut si charmé qu'il sortit du bain, courut tout nu chez lui pour faire l'expérience qu'il avait méditée, sans s'apercevoir qu'il avait oublié de prendre ses vêtements, et criant en chemin, *je l'ai trouvé, je l'ai trouvé.*

La solution du problême d'Hiéron, telle qu'elle a été donnée par Archimède, suppose que le volume de deux corps mêlés et fondus ensemble est égal à la somme de leurs volumes avant le mélange. On a reconnu par des expériences nombreuses que cela n'arrive presque jamais, à cause de la différente configuration des molécules primitives des corps et de leurs porosités respectives; quelquefois après leur union le volume du mélange est plus grand, quelquefois il est plus petit que la somme de leurs volumes. Ainsi la solution d'Archimède n'est point rigoureusement exacte. Toutes les solutions des problèmes de cette nature ne peuvent donc être regardées que comme des approximations plus ou moins bonnes. Nous ignorons absolument la loi qui a lieu dans ces sortes de combinaisons. Tout ce que l'on sait, c'est qu'elle doit dépendre de la nature des corps alliés, et des différentes proportions des parties mélangées.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Quoique les métaux soient plus pesants que l'eau, cela n'empêche pas qu'une boule creuse d'étain ou de cuivre ne surnage si elle est plus légère que le poids d'un volume d'eau égal au sien, puisqu'elle ne peut être en équilibre qu'avec celui d'une quantité d'eau égale à sa pesanteur propre.

629. Il peut aussi arriver qu'un corps massif, dont la pesanteur spécifique serait plus grande que celle de l'eau, surnage et se maintienne en équilibre entre deux eaux, s'il est attaché à un autre corps d'une pesanteur spécifique beaucoup moindre que celle de l'eau. Par exemple, si le prisme CEDH n'est enfoncé dans l'eau que sur la hauteur CF, on pourra supposer que tout son poids est réuni dans la partie CFGH, et considérer l'autre FEDG comme n'ayant aucune pesanteur. Or si au centre de gravité de ce prisme on suspend un corps P d'une pesanteur spécifique double de celle de l'eau, et qu'on suppose, pour plus d'intelligence, le volume de ce corps égal à CFGH, il fera descendre le prisme sur la profondeur CK double de CF, après quoi ils se maintiendront l'un et l'autre en repos; parce que le corps P ne pesant plus que la moitié de ce qu'il pesait dans l'air, sera en équilibre avec le poids du volume d'eau qu'occupe la partie FKMG, qui n'est maintenue dans l'eau que par la contrainte où l'assujétit la pesanteur qui reste au poids P.

PLANCHE 8. FIGURES 80 et 81. Un corps d'une pesanteur spécifique plus grande que celle de l'eau y peut être soutenu lorsqu'il est attaché à un autre d'une pesanteur spécifique moindre.

Le volume du corps P, et celui de la partie FKMG du prisme ayant fait monter la surface de l'eau au point où elle serait parvenue si, au lieu d'y avoir plongé le corps P, on y avait versé une quantité d'eau d'un poids égal à celui de ce corps, on voit que le fond du vaisseau en sera autant chargé que s'il le soutenait immédiatement (622).

Si l'on vient à couper le fil, le corps descendra, et le prisme CEDH remontera pour reprendre sa situation naturelle. Alors, si l'on suppose le vaisseau fort profond, le fond, pendant le temps de la descente du corps, sera moins chargé qu'il ne l'était, de l'excès de la pesanteur du corps sur celle du volume d'eau dont il occupe la place (623); car le prisme étant remonté de la hauteur FK, la surface de l'eau sera autant descendue que si on en avait ôté un volume d'eau égal à celui de la partie FKMG.

630. On peut donc établir ce principe général, que tant qu'un corps étranger est soutenu par l'eau, il fait partie de son poids total, et charge de toute sa pesanteur le fond du vaisseau; mais que depuis l'instant qu'il commence à descendre librement jusqu'à ce qu'il ait atteint le fond, ce fond est soulagé de l'excès de la pesanteur du corps sur celle du volume d'eau dont il occupe la place.

Quand un corps d'une pesanteur spécifique plus grande que celle de l'eau, y est plongé, il cesse, en descendant, de charger le fond du vaisseau avec toute sa pesanteur.

631. Il suit que plus la pesanteur spécifique d'un corps sera grande par rapport à celle du fluide dans lequel il est soutenu, plus le fond

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sera soulagé lorsque ce corps viendra à descendre. Par exemple, la pesanteur spécifique du mercure étant à celle de l'eau comme 14 est à 1 (627), si une certaine quantité de mercure était soutenue dans l'eau par quelque moyen que ce fût, aussitôt qu'il viendrait à descendre, le fond serait soulagé de treize quatorzièmes de son poids.

632. M. Leibnitz, dans une lettre écrite à M. l'abbé Bignon en 1711, pour lui expliquer son opinion sur la cause de l'effet du baromètre, dont il est fait mention dans l'Histoire de l'Académie royale des sciences de la même année, dit *qu'un corps étranger qui est dans un liquide, pèse avec ce liquide et fait partie de son poids total tant qu'il est soutenu; mais que s'il cesse de l'être, et tombe par conséquent, son poids ne fait plus partie du liquide, qui par-là vient à peser moins.*

J'ai été quelque temps en peine de savoir dans quel sens il fallait prendre ce discours, ne pouvant m'imaginer qu'un savant de la première classe, tel que M. Leibnitz, eût pensé que lorsqu'un corps plongé dans l'eau venait à descendre, il cessait de faire partie de son poids, et de presser le fond, comme il l'insinue en termes clairs; car que le corps soit soutenu, ou qu'il descende, il occupe toujours un volume d'eau égal au sien, qui ne peut être soutenu que par le fond du vaisseau; et pouvais-je croire qu'il ne se fût point aperçu que pendant la descente du corps, le fond ne pouvait être soulagé que de l'excès de sa pesanteur sur celle de l'eau dont il occupe la place, comme je crois l'avoir prouvé. Ce qui paraît bien surprenant, c'est que M. de Fontenelle, après avoir formé les mêmes objections, semble vouloir prouver le sentiment de M. Leibnitz. Voici ses termes :

« Malgré ces objections, le principe subsiste, quand on l'examine de « plus près; ce qui porte un corps pesant en est pressé; une table, par « exemple, qui porte une masse de fer d'une livre, en est pressée, et ne « l'est que parce qu'elle soutient toute l'action et tout l'effort que la cause « de la pesanteur, quelle qu'elle soit, exerce sur cette masse de fer pour « la pousser plus bas. Si la table cédait et obéissait à l'action de cette « cause de la pesanteur, elle ne serait point pressée et ne porterait plus « rien. De même, le fond d'un vase qui contient un liquide s'oppose à « toute l'action de la cause de la pesanteur contre ce liquide; si un corps « étranger y nage, le fond s'oppose aussi à cette même action contre ce « corps, qui, étant en équilibre avec le liquide, en est à cet égard une « véritable partie; ainsi le fond est pressé par le liquide et par le corps « étranger, et il les porte tous deux. Mais si ce corps tombe, il obéit à « l'action de la pesanteur, et par conséquent le fond ne la soutient plus, « et il ne la soutiendra que quand le corps sera descendu jusqu'à lui; « *donc pendant tout le temps de la chute le fond est soulagé du poids de*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

« *ce corps qui n'est plus porté par rien*, mais poussé par la cause de la « pesanteur, à laquelle rien ne l'empêche de céder (*dg*). »

Le principe de M. Leibnitz pouvant avoir lieu sans aucune modification, lorsqu'il s'agira d'un corps dont la pesanteur spécifique sera infiniment plus grande que celle du fluide dans lequel il sera contenu, il ne s'en sert pas moins heureusement pour expliquer d'une manière ingénieuse et solide la cause des variations du baromètre, comme nous le ferons voir au commencement du second volume, où il sera parlé des propriétés de l'air.

633 Pour voir si effectivement le fond d'un vaisseau était moins chargé quand le corps descend, que lorsqu'il est soutenu dans l'eau, M. Ramazzini, professeur à Padoue, a attaché aux deux bouts d'un fil deux corps, l'un plus pesant et l'autre plus léger que l'eau; les ayant mis dans un tuyau plein d'eau, suspendu à un des bras d'une balance, et disposé le tout en équilibre avec un poids, il a coupé le fil où étaient attachés les deux corps; aussitôt que le plus pesant a descendu, l'équilibre s'est rompu, et le poids qui était de l'autre côté a fait monter le tuyau; cette expérience a réussi de même à M. de Réaumur, à qui l'Académie royale des sciences en avait donné le soin.

Expérience qui confirme que les corps qui descendent dans l'eau ne pressent pas le fond avec toute leur pesanteur.

Selon l'arrangement que j'avais d'abord donné à ce premier livre, il devait contenir un quatrième chapitre *de la nature et des propriétés de l'air*, comme on a dû s'en apercevoir aux endroits où j'en ai fait mention; mais dans le cours de l'impression, ayant pensé qu'il serait mieux placé au commencement du second volume, pour être plus lié avec la théorie des pompes à laquelle il sert d'introduction, j'ai pris ce dernier parti.

(*dg*) Il paraît que le principe établi par l'auteur art. 630 est exact, et le raisonnement de Fontenelle défectueux, en ce qu'il semble omettre cette considération, que, quand un corps tombe dans l'eau, la force qui le fait descendre est seulement l'excès de son poids sur celui du volume d'eau qu'il déplace; d'où il suit que le fond du vase ne peut être déchargé que de l'action de cette force, et non point du poids total du corps.

Remarque sur la chûte d'un corps dans une masse de fluide contenue dans un vase.

FIN DU PREMIER LIVRE.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ADDITION

Sur les principes du calcul et de l'établissement des machines, et sur les moteurs.

De la manière d'évaluer en mécanique le travail, ou l'effet des machines.

§ 1. Le mot de *machine* désigne un moyen quelconque par lequel un moteur transmet son action à une résistance. Celles qu'on emploie dans les arts peuvent être réparties en trois classes principales : 1° les machines nommées communément *outils*, au moyen desquelles on exécute certains mouvements particuliers, sans prendre en considération la grandeur de la force employée à les produire; 2° les machines qui réunissent à la condition d'exécuter des mouvements donnés, celle de produire un effort momentané, comme les balanciers, les presses, etc., et dans l'établissement desquelles il s'agit seulement en général de mettre en équilibre la pression momentanée que peut exercer le moteur dont on dispose, avec la résistance qu'on veut surmonter; 3° enfin les machines qui, étant soumises à l'action permanente d'un moteur, produisent un travail continu, et dont les différentes parties prennent toujours un mouvement uniforme, ou des mouvements variables, mais périodiques, dans lesquels la vîtesse croissant et décroissant alternativement entre certaines limites fixes offre une valeur moyenne constante. C'est proprement à ces dernières qu'il faudra rapporter tout ce qui va suivre.

Il est nécessaire d'avoir une unité commune pour exprimer les quantités de travail effectuées par les machines.

La comparaison de diverses machines, pour le négociant et le capitaliste, se fait naturellement d'après la quantité de travail qu'elles exécutent, et le prix de ce travail. Pour estimer les valeurs respectives de deux moulins à blé, par exemple, on examinera quelle quantité de farine chacun peut moudre dans l'année; et pour comparer un moulin à blé à un moulin à scier, on estimera la valeur du premier d'après la quantité de farine moulue annuellement et le prix de la mouture, et la valeur du second d'après la quantité de bois qu'il débitera dans le même temps et le prix du sciage. On peut se borner à cette manière de considérer les machines et les travaux qu'elles exécutent, tant qu'il ne s'agit que d'acheter ou d'échanger entre elles des machines toutes faites, et dont le produit est connu; mais il y a plusieurs cas où elle devient insuffisante.

Supposons en effet une personne qui possède un moulin à blé, et qui desirerait, au moyen de quelques changements dans son mécanisme, en faire un moulin à scier. Elle ne pourrait juger de l'avantage ou du désavantage de cette opération, qu'autant qu'elle saurait évaluer, d'après la quantité de farine produite par son moulin, la quantité de bois qu'il serait dans le cas de débiter. Or cette évaluation est une chose absolument impossible, à moins qu'on n'ait trouvé une mesure commune pour ces deux travaux de natures si différentes. Cet exemple suffit pour montrer la nécessité d'établir une sorte de *monnaie mécanique*, si l'on peut s'exprimer ainsi, avec laquelle on puisse estimer les quantités de travail employées pour effectuer toute espèce de fabrication.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

L'élévation verticale des corps pesants est le travail auquel on compare ou rapporte tous les autres.

Le choix d'une unité de mesure est jusqu'à un certain point arbitraire : il est seulement indispensable que cette unité soit une chose de même nature que celles dont elle doit former le terme de comparaison. Les Anglais, par exemple, ont pris pour unité des quantités de travail l'action d'un cheval (*horse power*). Mais ils sont les premiers à reconnaître (Gregory, *A treatise of mecanics*, t. 2, p. 84) l'inconvénient d'un terme de comparaison dont la grandeur est si variable, que ses évaluations données par leurs savants diffèrent entre elles plus que dans le rapport de 1 à 2 (*). Il en résulte effectivement qu'une même expression employée par divers auteurs présente à chacun d'eux une idée différente, et qu'elle ne devient intelligible au lecteur qu'après qu'ils la lui ont traduite, en expliquant ce qu'ils entendent par l'action d'un cheval, c'est-à-dire quel effort ils supposent qu'un cheval peut exercer, en même temps qu'il parcourt un certain espace dans un temps donné.

C'est effectivement à cela que se réduit l'exécution d'un travail quelconque. Il y a toujours dans l'action d'une machine un effort ou pression exercé contre un point, pendant qu'un espace est parcouru par ce point. Cette remarque conduit naturellement à reconnaître que le genre de travail le plus propre à servir à l'évaluation de tous les autres est *l'élévation verticale des corps pesants*. En effet, indépendamment de ce qu'il est susceptible, comme on le verra tout-à-l'heure, d'une expression numérique précise, invariable et exempte d'arbitraire, on peut toujours, quelle que soit la nature du travail exécuté par une machine donnée, non-seulement dans la pensée et par une abstraction de l'esprit, mais dans la réalité, substituer à ce travail l'élévation d'un poids; car on peut supprimer la résistance, et attacher, dans sa direction au point où elle agissait, une corde passant sur une poulie de renvoi, à l'extrémité de laquelle on suspendrait un poids égal à l'effort ou pression que la résistance exerçait. Rien ne serait changé aux conditions du mouvement de la machine, qui resterait exactement le même, et dont l'effet serait seulement transformé en l'élévation du poids. Et pendant le temps que cette machine aurait employé à exécuter un certain ouvrage donné, un poids égal à l'effort de la résistance se trouvera élevé verticalement d'une hauteur égale à l'espace parcouru pendant ce même temps, et dans le sens de la résistance, par son point d'application. L'élévation de ce poids représentera donc le travail de la machine, et une machine

(*) Voici diverses évaluations de l'action d'un cheval données par les savants anglais, citées dans la *New Cyclopædia* du docteur Rees, art. *Water, Raising of.*

	Livres avoir-du-poids élevées à un pied par minute.	Kilogrammes élevés à un mètre par seconde.
M. Fenwick	13200	30,4
M. Olinthus Gregory	18480	42,5
M. Samuel Moor	21120	48,6
Résultat des expériences de Smeaton	22000	50,6
Estimation de Desaguliers	27500	63,3
Estimation fictive de l'*horse power* adoptée par MM. Boulton et Watt pour l'évaluation de la puissance de leurs machines à vapeur	32000 33000	73,6 75,9

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sera censée faire d'autant plus d'ouvrage qu'elle pourra élever ainsi un poids plus grand à une hauteur plus grande.

Comment les quantités de travail, rapportées à cette espèce d'unités, doivent s'exprimer en nombres.

La nature du travail qui devra servir de terme de comparaison à tous les autres étant ainsi déterminée, soit qu'on en regarde le choix comme une affaire de convention, ou comme un résultat nécessaire de la nature des choses, il ne s'agit plus pour soumettre au calcul cette nouvelle espèce de quantité, que de savoir l'évaluer en nombres. En examinant ce que c'est qu'élever un poids, on voit qu'il entre dans cette opération deux éléments, qui sont la grandeur du poids, et la hauteur à laquelle on l'élève. Mais on reconnaît facilement que c'est la même chose d'élever un poids d'un kilogramme à deux mètres, ou un poids de deux kilogrammes à un mètre, puisqu'il faut dans les deux cas élever deux fois un kilogramme à un mètre; et en général qu'il est indifférent d'élever un poids à une hauteur, ou un poids d'autant moindre à une hauteur d'autant plus grande. D'où il suit que la grandeur du travail à faire pour élever un poids est également proportionnelle au poids, et à la hauteur à laquelle on l'élève. Ce travail est donc proportionnel au produit de ces deux quantités, et par conséquent le travail nécessaire pour élever un poids Q à la hauteur q doit être représenté par le produit Qq; et ce produit exprimera un nombre d'unités, dont chacune est le travail nécessaire pour élever l'unité de poids à l'unité de hauteur, c'est-à-dire, dans notre système de mesures, pour élever un kilogramme à un mètre.

Mais puisqu'un ouvrage quelconque exécuté par une machine est toujours l'équivalent de l'élévation d'un poids égal à l'effort de la résistance, d'une hauteur égale à l'espace parcouru dans le sens de cette résistance par son point d'application, il suit de ce qui précède que, si l'on représente dans une machine quelconque la pression qui s'exerce au point d'application de la résistance par Q, et l'espace parcouru par ce point dans le sens de cette pression et dans un temps donné par q, la quantité de travail ou *l'effet* de la machine pendant ce temps devra être exprimé numériquement par le produit Qq, qui représentera un nombre de kilogrammes élevés à un mètre.

Les nombres exprimant les quantités de travail effectuées par les machines expriment aussi les *quantités d'action* consommées au point d'application de la résistance.

En rapprochant ce qui vient d'être dit des § 2 et 7 de la note (*ai*), où l'on a nommé *quantité d'action* le produit de la pression exercée en un point, multipliée par l'espace que ce point parcourt dans le sens de cette pression, on voit que le produit Qq représente précisément la quantité d'action consommée au point d'application de la résistance. Cette quantité d'action est donc véritablement la mesure du travail ou de l'effet de la machine; et on voit aussi que la nature de cette espèce particulière de quantité est de présenter en général à l'esprit l'idée d'un certain travail exécuté, et spécialement l'idée d'un certain nombre d'unités de poids élevées à l'unité de hauteur.

De la manière de noter les nombres indiquant des quantités d'action.

Dans la suite lorsqu'un nombre exprimera une quantité d'action, c'est-à-dire un nombre de kilogrammes élevés à un mètre, cela sera indiqué par le signe kil. × mètres, ou simplement k × m. Ainsi 1000 kil. × mètres, ou $1000^{k \times m}$, signifiera *mille kilogrammes élevés à un mètre;* ou si l'on veut, un nombre de kilogrammes élevés à un nombre de mètres, tels que le produit de ces deux nombres soit 1000.

De l'action des moteurs. — Elle

§ 2. Il est aisé de prévoir, d'après ce qui précède, que l'action exercée par les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

moteurs sur les machines pour les mettre en mouvement et les faire travailler, doit s'estimer en mécanique de la même manière et dans la même espèce d'unité que le travail effectué par les machines. En effet, le moteur agit sur la machine comme celle-ci agit sur la résistance : il y a toujours au point d'application du moteur, comme à celui de la résistance, pression exercée et espace parcouru. Si l'on attache au point d'application du moteur, et dans le sens de son action, une corde passant sur une poulie de renvoi, et à laquelle un poids égal à la pression qu'il exerçait soit suspendu, la descente de ce poids remplacera à tous égards l'action du moteur, et cette action devra être censée d'autant plus grande, qu'il faudra employer pour la remplacer ainsi un poids plus grand, et le faire descendre d'une plus grande hauteur. Mais un poids qui descend d'une certaine hauteur est capable de faire monter un poids égal à la même hauteur dont il est descendu : donc l'action d'un moteur sur une machine pendant un temps donné est toujours l'équivalent de l'élévation d'un poids égal à l'effort qui s'exerce au point d'application du moteur, d'une hauteur égale à l'espace parcouru pendant ce temps dans le sens du moteur par ce point d'application. Par conséquent si dans une machine quelconque on nomme P la pression qui s'exerce au point où agit le moteur, et p l'espace parcouru par ce point dans le sens de cette pression pendant un temps donné, l'action fournie par le moteur pendant ce temps devra être exprimée numériquement par le produit Pp, qui représentera un nombre de kilogrammes élevés à un mètre.

s'évalue de la même manière que le travail effectué par les machines.

On voit aussi que le produit Pp représente la *quantité d'action* qui se consomme au point d'application du moteur, et c'est là le motif de la dénomination adoptée ici pour cette espèce particulière de quantités, en laquelle on évalue les travaux faits par les machines et l'action exercée par les moteurs. Sméaton lui avait donné le nom de *puissance mécanique* (*The miscellaneous papers*, p. 30 et 84, ou *Recherches expérimentales*, trad. par M. Girard, p. 6 et 74), M. Carnot celui de *moment d'activité* (*Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*), et plus récemment M. Monge celui d'*effet dynamique* (*Traité élémentaire des machines*, par M. Hachette). L'expression de quantité d'action adoptée par Coulomb (*Mémoire sur la quantité d'action que les hommes peuvent fournir, etc.*, t. 2 des *Mém. de l'institut, sciences phys. et math.*) m'a semblé préférable aux autres, comme s'éloignant moins du langage ordinaire, et plus significative, et quoique elle ait le défaut d'être déja connue et employée en mécanique dans un sens un peu différent; car le principe connu sous le nom de *moindre action* s'applique à une espèce de quantité qui n'est point la quantité d'action telle qu'on la conçoit dans la théorie des machines et des moteurs.

L'action des moteurs n'est autre chose que la *quantité d'action* exercée à leur point d'application.

Il ne sera pas inutile, pour montrer avec quelle raison la quantité d'action consommée dans un travail est considérée comme donnant sa véritable mesure, de remarquer ici que c'est toujours proportionnellement à cette quantité d'action que s'établissent les prix en argent payés pour les diverses espèces de travaux. En effet, quand on paie un travail, c'est véritablement le temps de l'ouvrier qu'on paie; seulement ce temps s'estime plus ou moins cher, suivant que le travail dont il s'agit exige de la part de l'ouvrier plus ou moins de vigueur, d'intelligence, ou de connaissances acquises. Or si, comme cela doit être, on conçoit un ouvrier

Le prix d'un travail est toujours proportionnel à la quantité d'action qu'il a consommée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

employant ses forces d'une manière constante et réglée, il exercera constamment un même effort en agissant avec une vîtesse constante, et par conséquent produira des quantités d'action qui seront égales en temps égaux. Donc le prix d'un travail étant proportionnel au temps qu'il exige, l'est aussi à la quantité d'action qui le représente. Ce rapprochement deviendra peut-être plus sensible par un exemple. Soit un homme montant de l'eau de deux puits, dont l'un est deux fois plus profond que l'autre. Il est clair, en supposant que cet homme emploie ses forces d'une manière uniforme, qu'il mettra deux fois plus de temps à monter la même quantité d'eau du premier puits que du second. Donc, si on lui payait ce travail à la tâche, il faudrait payer la même quantité d'eau deux fois plus cher quand elle est tirée du premier puits que quand elle l'est du second, et il est évident que son élévation exige aussi dans le premier cas une quantité d'action deux fois plus grande que dans le second.

La *quantité d'action* est une quantité de même nature que la *force vive.*

Enfin, pour tâcher d'éclaircir cette matière autant qu'il me sera possible, et pour mettre le lecteur à même d'entendre les autres livres, j'observerai que la quantité d'action est une quantité de même ordre et de même nature que celle nommée *force vive.* On l'a même désignée quelquefois sous cette dernière dénomination, quoiqu'il soit plus généralement d'usage d'appeler force vive le produit de la masse d'un corps en mouvement par le quarré de sa vîtesse actuelle. On comprendra le rapport qu'il y a entre ces deux quantités en revenant sur les notions exposées dans la note (*b*) et dans le § 2 de la note (*ai*). Concevons en effet une force qui a exercé un effort ou pression P contre un point qui a parcouru un espace p dans le sens de l'action de cette force : elle aura dépensé la quantité d'action Pp. Mais si la même force, au lieu d'agir contre un obstacle qui lui résiste, eût agi sur une masse m cédant librement à son action, cette masse, après avoir parcouru le même espace p, aurait acquis une vîtesse U et une force vive mU^2, telles qu'on aurait eu la relation $mU^2 = 2Pp$. Ainsi c'est la même chose pour une force, ou de dépenser une certaine quantité d'action sur une machine dont elle n'accélère point le mouvement, mais qui agit sur une résistance et exécute un travail, ou d'imprimer une certaine quantité de force vive à un corps qui lui cède librement, sans qu'il y ait aucun travail effectué. La quantité d'action dépensée dans le premier cas, et la force vive produite dans le second, demeurent toujours proportionnelles l'une à l'autre, et on voit que les travaux exécutés par les machines ne font proprement que représenter les quantités de force vive qu'auraient pu faire naître les forces qui ont agi sur ces machines, si au lieu de cela elles avaient agi sur des corps qui leur eussent cédé librement. Ces rapprochements pourront faire apprécier la justesse de ce mot connu de Montgolfier : *la force vive est celle qui se paie.*

Comment, et dans quelle proportion, quand une machine travaille, l'action du moteur se transmet à la résistance.

§ 3. Pour rendre sensible ce qui se passe dans une machine qui travaille, il suffit de développer les considérations présentées dans le § 7 de la note (*ai*). Représentons nous donc cette machine partant du repos, et soumise à l'action du moteur et de la résistance, c'est-à-dire de deux forces dont l'une tend à produire le mouvement, et l'autre à l'empêcher. Un fait général, et qu'il faut considérer comme le résultat d'observation qui ne souffre aucune exception, est qu'en partant du repos l'effort du moteur est toujours plus grand, et l'effort de la résistance plus petit, qu'ils ne seront quand la machine travaillera. La force qui tend à produire le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mouvement l'emportant donc d'abord sur celle qui tend à l'empêcher, la machine commence à se mouvoir et sa vîtesse augmente peu-à-peu, comme celle d'un corps qui cède à l'action d'une force accélératrice. Mais l'effort du moteur diminuant et celui de la résistance augmentant à mesure que la vîtesse s'accroît, il vient bientôt un terme où ces deux efforts ont des valeurs telles qu'ils se font mutuellement équilibre au moyen de la machine, et que, si dès l'origine on leur eût donné ces valeurs, il ne se serait produit aucun mouvement. Soit alors P l'effort du moteur, Q celui de la résistance, et dp, dq, les espaces infiniment petits que leurs points d'application décrivent en même temps dans le sens de ces efforts : d'après le principe des vîtesses virtuelles, quand P et Q se feront mutuellement équilibre, on aura $P\,dp = Q\,dq$; c'est-à-dire que les quantités d'action développées à leurs points d'application par le moteur et la résistance seront parfaitement égales. Mais alors, conformément à ce qui a été démontré dans le § 7 de la note (*ai*), le mouvement de la machine cessera de s'accélérer; car, quand un système de corps cède à l'action de deux ou plusieurs forces, la force vive qu'il acquiert en passant d'une position à une autre est toujours le double de la quantité d'action qui a été imprimée dans cet intervalle : or ici, puisque la machine est maintenant soumise à l'action de deux forces qui lui impriment en sens contraires des quantités d'action parfaitement égales, lesquelles se détruisent réciproquement, la quantité d'action qui lui est imprimée est nulle, et par conséquent cette machine ne peut plus acquérir aucune force vive, c'est-à-dire aucune vîtesse, au-delà de celle qu'elle possède. Elle continuera donc à se mouvoir d'un mouvement uniforme, tant que l'effort du moteur fera équilibre à celui de la résistance.

Circonstances essentielles du mouvement d'une machine.

Il résulte de ces considérations trois choses sur lesquelles il importe de fixer son attention : la première qu'après un certain temps (qui est toujours très-court et souvent à peine appréciable) le mouvement d'une machine devient toujours uniforme; la seconde qu'à cette époque les pressions exercées respectivement par le moteur et par la résistance à leurs points d'application, ont des valeurs telles qu'elles se font mutuellement équilibre conformément aux lois de la statique; la troisième enfin qu'alors les quantités d'action exercées par le moteur et consommées par la résistance sont respectivement égales.

L'action du moteur est toujours partagée entre les résistances provenant de l'effet utile et celles inhérentes à la machine.

Il faut maintenant examiner d'une manière plus particulière l'idée qu'on doit attacher au mot *résistance* employé ci-dessus. Celle qui se présente naturellement est l'obstacle au mouvement de la machine, résultant du travail qu'elle doit effectuer. Mais il est bien important d'observer qu'il n'existe aucune machine, et qu'on ne peut en concevoir aucune, dans laquelle il n'y ait plusieurs obstacles au mouvement, indépendamment de celui dont on vient de parler. En effet, la machine la plus simple de toutes est une corde par le moyen de laquelle on éleverait un poids, et l'on voit que le poids de la corde s'ajoutant à celui qu'on veut élever, oppose un obstacle en outre de celui qui résulte du travail qu'on veut faire. La machine la plus simple après celle-ci est un levier, dans lequel il faut tout au moins vaincre le frottement sur le point d'appui. Si une corde qui élève un poids passe sur une poulie de renvoi, alors, en outre du poids à élever, il faut vaincre celui de la corde, sa flexion dans la gorge de la poulie et le frottement de celle-ci sur son axe. Je crois inutile de pousser plus loin cet examen pour faire conce-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

voir au lecteur que pour n'avoir à vaincre dans une machine que l'obstacle résultant du travail qu'on veut faire, il faudrait, ce qui est impossible, la construire avec des corps non pesants, parfaitement polis et parfaitement élastiques, et faire mouvoir ces corps dans le vide.

Mais dans les considérations énoncées ci-dessus sur l'équilibre qui s'établit dans une machine entre les pressions exercées par le moteur et par la résistance, et sur l'égalité des quantités d'action dépensées par l'un et consommées par l'autre, il est évident que dans la résistance on comprenait nécessairement avec les forces employées au travail effectué par la machine, celles nécessaires pour vaincre les obstacles au mouvement inhérents à la machine elle-même. Il faut donc dans toute machine concevoir la pression exercée par le moteur partagée en deux parties, dont l'une fait équilibre à la résistance proprement dite résultant du travail à effectuer, et l'autre aux résistances provenant de la machine; et la quantité d'action que le moteur dépense à son point d'application partagée aussi en deux parties, dont l'une est consommée en pure perte par ces dernières résistances, et l'autre produit ce qu'on nomme ordinairement l'*effet utile* de la machine.

Distinction entre les obstacles permanents qui augmentent l'effort du moteur, et les effets des chocs qui anéantissent une portion de sa quantité d'action.

Il faut observer de plus qu'en outre des obstacles au mouvement inhérents à la machine qu'on peut nommer *permanents*, qui sont les frottements, la roideur des cordes et la résistance des milieux, obstacles qu'il faut prendre en considération quand on veut mettre en équilibre les pressions exercées par le moteur et par la résistance, il y a souvent dans les machines une autre cause qui fait perdre inutilement une portion de la quantité d'action fournie par le moteur. Ce sont les changements brusques qui surviennent dans les vîtesses des corps mis en mouvement, et qui sont ordinairement causés par des chocs. En effet, le théorême démontré dans le § 8 de la note (*ai*) n'est pas une vérité de pure spéculation, et il se vérifie rigoureusement dans les machines : toutes les fois que la vîtesse d'un corps dont le poids est p, et par conséquent la masse $\frac{p}{g}$ (conformément à la note (*b*)), augmente ou diminue instantanément d'une quantité finie v, il se fait dans la machine une perte de force vive exprimée par $\frac{p}{g}v^2$, dont il résulte qu'une portion de la quantité d'action fournie par le moteur, égale à la moitié de cette force vive, c'est-à-dire à $p\frac{v^2}{2g}$, n'est point transmise à la résistance. On peut remarquer que la quantité $p\frac{v^2}{2g}$ est le produit du poids du corps par la hauteur due à la vîtesse perdue ou gagnée lors du changement brusque. On trouvera dans la suite des applications de ce principe, qu'il est important de ne pas perdre de vue.

Valeur de la quantité d'action perdue par l'effet d'un choc.

L'effet utile est toujours plus petit que la quantité d'action fournie par le moteur.

On voit donc que la quantité de travail effectuée par une machine, ou son effet utile, n'est jamais qu'une partie de la quantité d'action fournie par le moteur, et que bien loin de pouvoir surpasser cette quantité d'action, elle ne peut pas même l'égaler. Une machine est d'autant plus parfaite que son effet utile approche davantage de la quantité d'action qu'elle consomme, et c'est principalement vers ce point de perfection que leur établissement doit être dirigé. Le moyen de l'atteindre est en général de rendre le mécanisme simple, et d'éviter tout choc entre corps durs, et tout changement brusque dans les vîtesses. Il y a des machines où

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'effet utile diffère peu de la quantité d'action dépensée par le moteur; il y en a d'autres, telles que l'ancienne machine de Marly, où il en est à peine la cinquantième partie.

Comment on doit faire agir les moteurs pour en tirer le plus grand parti possible.

§ 4. Le véritable objet qu'on se propose dans l'établissement d'une machine est que le revenu en argent qu'elle procure, lequel est proportionnel à son effet utile, soit le plus grand possible par rapport à la dépense qu'occasionne le moteur. Or l'effet utile, toujours plus petit que la quantité d'action fournie par le moteur, augmente et diminue avec elle. Il faut donc faire en sorte que la quantité d'action fournie par le moteur coûte le moins possible, ou de tirer du moteur la plus grande quantité d'action possible: c'est la première condition à laquelle on doit satisfaire.

Pour montrer clairement la manière dont on peut la remplir, il faut distinguer les moteurs dont l'action peut être censée continue, comme serait un courant d'eau ou l'action du vent, et les animaux dont l'action est nécessairement discontinue, parce qu'ils ne peuvent travailler qu'une certaine portion de la journée. Occupons-nous d'abord des premiers, et nommons P la pression qui a lieu au point d'application du moteur, et V la vîtesse par seconde de ce point: la quantité d'action qui s'y dépensera en une seconde sera PV, et il s'agit de donner à P et à V des valeurs telles que leur produit soit le plus grand possible. Or il ne faut pas imaginer que cela puisse se faire en augmentant indéfiniment les valeurs de P et de V, car la quantité de travail qu'un moteur quelconque peut fournir dans un temps donné étant nécessairement limitée, il est dans la nature des choses que les quantités P et V aient entre elles une telle relation, que l'une ne puisse augmenter sans que l'autre ne diminue, et réciproquement. Par exemple, si le moteur est un courant d'eau agissant sur les aubes d'une roue, la pression P exercée sur ces aubes sera la plus grande possible quand la roue sera immobile: alors la vîtesse V étant nulle, la quantité d'action l'est aussi. La roue venant à se mouvoir, et les aubes se dérobant en partie au choc du courant, la pression P diminue à mesure que V augmente, et si V devenait égale à la vîtesse du courant, on aurait $P=o$, et la quantité d'action imprimée serait encore nulle. Or entre ces deux limites, il y a nécessairement une certaine relation entre les valeurs de P et de V qui rend le produit PV un maximum: c'est cette relation qu'il faut chercher par l'analyse quand P est connu et exprimé en fonction de V, et par l'expérience quand il ne l'est point. On a déja donné des exemples de cette recherche (voyez l'art. 592 et la note (*da*)), et on en trouvera plusieurs autres dans la suite.

A l'égard des animaux, il y a un élément de plus à considérer, qui est le nombre d'heures de la journée pendant lesquelles on les fera travailler. En nommant t le temps du travail journalier exprimé en secondes, et conservant les dénominations précédentes, la quantité d'action journalière se trouve exprimée par PVt. Les considérations précédentes s'appliquent encore ici à la première partie PV de ce produit. En effet, si l'on prend pour exemple l'homme agissant sur une manivelle, on voit que la plus grande pression P qu'il puisse exercer aura lieu quand la manivelle sera en repos, ou quand V sera zéro, et alors la quantité d'action fournie est nulle. A mesure que la vîtesse V augmente, l'homme est obligé d'employer une partie de sa force à suivre le mouvement du point sur lequel il agit, et la pression

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diminue, en sorte que la vîtesse V atteindrait bientôt un terme où l'homme ne pourrait plus exercer aucune pression, et où toute sa force serait employée à suivre le mouvement de ce point : alors on aurait $P=o$, et la quantité d'action serait encore nulle. Entre ces deux limites où le produit est nul, il y a nécessairement un terme où les valeurs de P et V sont telles que PV est un maximum. En ayant égard maintenant à la durée du travail, on voit que si t était très-petit, l'homme pourrait exercer une grande pression et prendre une grande vîtesse, mais que la quantité d'action PVt n'en serait pas moins fort petite. A mesure que l'homme travaillera plus long-temps dans la journée, l'effort et la vîtesse dont il est capable diminueront nécessairement, et si l'on voulait, par exemple, le faire agir les 24 heures entières, il ne serait capable d'aucun travail, et la quantité d'action serait encore nulle. Il y a donc entre ces deux limites où $t=o$ et où t est assez grand pour que $PV=o$, une valeur de t propre à rendre PVt le plus grand possible, qui est celle qu'on doit employer.

Tels sont donc les principes d'après lesquels l'action des moteurs doit être appliquée au mouvement des machines. Il faut régler tellement la vîtesse et la pression qui doivent avoir lieu à leur point d'application, et la durée du travail journalier quand ce sont des animaux, qu'il en résulte la plus grande quantité d'action possible. Pour faire usage de ces principes dans la pratique, il faudrait être à même d'exprimer par des formules analytiques les relations de ces trois quantités. La mécanique, comme on l'a vu ci-dessus, fournit dans plusieurs cas quelques ressources à cet effet pour les moteurs inanimés. Mais pour les animaux, elle n'en fournit presque aucune, et on se trouve réduit alors à quelques notions expérimentales assez incomplètes, qu'on trouvera plus bas.

§ 5. Dans l'exposé rapide qui vient d'être fait des principes généraux de l'établissement des machines, j'ai supposé, pour simplifier et faciliter les énonciations, que les efforts ou pressions exercés aux points d'application du moteur et de la résistance étaient rigoureusement constants, et se faisaient mutuellement équilibre. Il est résulté de cette hypothèse que les quantités d'action imprimées à chaque instant à la machine en sens contraire se détruisant mutuellement, elle marchait d'un mouvement parfaitement uniforme. C'est ce qui arrive effectivement, du moins à très-peu près, dans plusieurs machines, et dans ce cas la considération de leurs masses n'entre pour rien dans leurs effets. Si plusieurs forces agissent sur un corps ou sur un système de corps, la rapidité avec laquelle ces corps céderont à l'action des forces, et la grandeur des mouvements qu'elles leur imprimeront, dépendront en général de leurs masses, puisque la nature de ces mouvements est toujours telle que, d'une position du système à une autre, la somme des forces vives augmente d'une quantité égale au double de la somme des quantités d'actions imprimées (note (*ai*), § 7). Mais si les forces ont des valeurs telles qu'elles se fassent mutuellement équilibre sur le système, ce qui suppose la somme des quantités d'action imprimées à chaque instant nulle, alors la somme des forces vives n'augmentant plus dans le système, la masse des corps n'entre plus pour rien dans la détermination de son état. Cet état est le repos, si on a donné dès l'origine aux forces les valeurs qui conviennent à l'équilibre. Il est un mouvement uniforme, si, ayant d'abord rendu la résistance plus petite et la puissance plus grande qu'elles ne devaient être, on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

a fait prendre d'avance à la machine une certaine vîtesse, avec laquelle on voulait qu'elle travaillât.

On considère le cas où la vîtesse croît et décroît alternativement.

Je vais maintenant considérer les cas où les actions de la résistance et du moteur ne sont pas tout-à-fait constantes, et j'observerai d'abord qu'il faut exclure ceux où ces actions seraient entièrement irrégulières; car la machine ne pouvant alors prendre une marche uniforme, elle ne serait susceptible d'être soumise à aucun calcul utile. On doit admettre que les variations des efforts du moteur et de la résistance, et des vîtesses de leurs points d'application, ont lieu entre des limites fixes, suivant des lois constantes, et d'une manière périodique, et que leurs périodes se correspondent exactement pour le moteur et pour la résistance. Cet état de choses consiste essentiellement en ce que l'effort du moteur se trouve, par quelque cause que ce soit, alternativement plus grand et plus petit qu'il ne devrait être pour faire équilibre à celui de la résistance, lequel peut indifféremment être supposé constant ou variable. Examinons donc ce qui doit arriver alors, et supposons la machine dans l'instant où les efforts de la résistance et du moteur se font réciproquement équilibre. Si cet état pouvait se perpétuer, le mouvement serait uniforme. Mais, par hypothèse, l'effort du moteur s'accroît peu-à-peu, de manière à surpasser de plus en plus la valeur qu'il devrait avoir pour faire équilibre à celui de la résistance, en sorte que la quantité d'action $P\,dp$ (voyez ci-dessus § 3) qu'il imprime à chaque instant, surpasse de plus en plus celle $Q\,dq$ consommée par la résistance. Il en résulte nécessairement que la vîtesse de la machine s'accélère : soit Dm l'élément de masse de ses parties mobiles, v la vîtesse de cet élément, et par conséquent $v^2\,Dm$ sa force vive, et $S\,v^2\,Dm$ la force vive de toute la machine; en employant, comme dans le § 13 de la note (*ai*), le signe de différentiation D pour représenter les éléments de la masse de la machine, la caractéristique d étant affectée aux différentielles qui se rapportent au temps, et en indiquant par la caractéristique S les intégrales relatives au signe de différentiation D. Comme il faut par les principes établis dans la note (*ai*) que la différentielle $S\,2\,v\,dv\,Dm$ de cette force vive, c'est-à-dire la quantité dont elle s'accroît à chaque instant, soit égale au double de la quantité d'action imprimée dans le même instant, l'accélération de la vîtesse de la machine sera déterminée de manière qu'on ait continuellement $S\,v\,dv\,Dm = P\,dp - Q\,dq$, l'intégrale indiquée par S étant prise dans toute l'étendue de la masse des parties mobiles de la machine. Tant que $P\,dp$ sera plus grand que $Q\,dq$, la vîtesse de la machine s'accélérera ainsi, plus ou moins rapidement, suivant que la différence de ces deux quantités sera plus ou moins considérable. Quand l'excès de la quantité d'action $P\,dp$ imprimée par le moteur, sur celle $Q\,dq$ consommée par la résistance, après avoir augmenté jusqu'à un certain point sera redevenu nul, c'est-à-dire quand le moteur et la résistance seront redevenus susceptibles de se faire mutuellement équilibre au moyen de la machine, alors la force vive et la vîtesse acquises par la machine seront le plus grandes possible, et elle les conserverait indéfiniment si le moteur et la résistance continuaient à se faire équilibre.

Mais s'il arrive que l'effort du moteur diminue, et que sa quantité d'action instantanée $P\,dp$ devienne plus petite que celle $Q\,dq$ de la résistance, le second membre de l'équation ci-dessus devenant négatif, la variation de la force vive de la machine aura lieu en sens contraire, c'est-à-dire qu'elle diminuera. La vîtesse

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diminuera donc à chaque instant d'une quantité d'autant plus grande que $Q\,dq$ surpassera davantage $P\,dp$, et elle ne cessera de diminuer qu'après que $P\,dp$ aura repris une valeur égale à $Q\,dq$. A cet instant la machine aura la plus petite force vive et la plus petite vîtesse possibles, et elle les conserverait indéfiniment si le moteur et la résistance continuaient à se faire mutuellement équilibre. Mais le moteur venant à surpasser de nouveau la résistance, comme on l'a supposé ci-dessus, la force vive s'accroît de nouveau, et de cette manière la vîtesse de la machine augmente et diminue alternativement, en oscillant autour d'une valeur moyenne, laquelle demeure constante, si la différence qui a lieu alternativement en plus et en moins entre la quantité d'action du moteur et celle de la résistance est elle-même constante. Il est important d'observer d'ailleurs que, tant que ces variations de vîtesse se feront par degrés insensibles, et sans changements brusques, elles n'influeront en aucune manière sur la grandeur de l'effet utile produit par la machine, comparé à la quantité d'action fournie par le moteur, et la machine ne travaillera pas moins avantageusement que si son mouvement était parfaitement uniforme. Cela résulte de la théorie établie dans la note (*ai*), et on le concevra facilement en faisant attention que si, pendant que la vîtesse augmente, il y a une partie de la quantité d'action fournie par le moteur employée inutilement à produire cet accroissement de vîtesse, cette partie se trouve utilisée lorsque l'action du moteur vient ensuite à décroître, parce que la masse de la machine tendant, en vertu de l'inertie de la matière, à conserver sa vîtesse actuelle, la quantité d'action qui est alors fournie au point d'application de la résistance, est plus grande que celle qui est dépensée en même temps par le moteur.

Les variations de la vîtesse qui ont lieu par degrés insensibles n'apportent aucune diminution dans l'effet utile.

Il est utile de remarquer une circonstance particulière qui a lieu dans les machines où les actions du moteur et de la résistance se surmontent ainsi alternativement l'une l'autre. La communication étant établie entre ces deux actions par une suite d'engrenages, ce sont d'abord les roues sur lesquelles le moteur agit immédiatement, et qui sont placées le plus près de son point d'application, qui conduisent les autres, et les poussent dans le sens du mouvement qui doit avoir lieu. Mais si l'action du moteur vient à diminuer, ce sont aussi ces mêmes roues qui s'en ressentent les premières, et qui commencent avant les autres à perdre de leur vîtesse. Il arrive donc alors qu'elles sont conduites par les roues voisines du point d'application de la résistance, qu'elles conduisaient auparavant, jusqu'à ce que le moteur ayant repris l'avantage sur la résistance, la vîtesse du mouvement, après avoir diminué, augmente de nouveau. Chaque fois que la quantité d'action du moteur devient plus grande ou plus petite que celle de la résistance, les dents qui en poussaient d'autres par une de leurs faces sont donc elles-mêmes poussées par leur face opposée. Ce changement, à raison du jeu qu'il est indispensable de laisser dans les engrenages, ne peut avoir lieu sans une secousse qui est toujours plus ou moins sensible. On voit d'ailleurs par-là qu'il est presque toujours indispensable de disposer les engrenages de manière que chaque roue puisse conduire ou être conduite indifféremment, ainsi qu'on l'a dit dans le § 3 de la note (*bf*).

Dans les variations de la vitesse les roues conduisent et sont conduites alternativement.

Venons maintenant à l'influence que la constitution de la machine peut avoir sur les effets qui viennent d'être décrits. L'équation ci-dessus $S v dv D m = P\,dp - Q\,dq$ la met dans la plus grande évidence. En effet, on voit d'abord que la valeur du

Les inégalités dans les actions du moteur et de la résistance étant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

premier membre, c'est-à-dire l'accroissement ou la diminution que la force vive de la machine éprouve dans un instant, ne dépend point des valeurs absolues des quantités d'action fournies par le moteur et la résistance pendant le même instant, mais seulement de la différence de ces quantités d'action, ou de l'excès de l'une sur l'autre. Considérant maintenant cette différence, qui est le résultat de l'inégalité de l'action du moteur et de la résistance, comme donnée, on voit que les valeurs de chacun des trois facteurs qui entrent dans le premier membre dépendront de celles qu'on aurait fixées pour les deux autres. Ainsi 1° si la masse est donnée, la variation du quarré de la vîtesse sera d'autant plus petite que la masse sera plus grande, et 2° si la masse et la vîtesse sont données, la variation de la vîtesse sera d'autant plus petite que la masse et la vîtesse seront plus grandes, et pour chaque élément de la machine, réciproquement proportionnelle au produit de ces deux quantités.

données, les variations de la vîtesse seront d'autant moindres que la masse et la vîtesse des parties de la machine seront plus grandes.

Tel est donc le résultat de cet examen : dans les machines où les actions du moteur et de la résistance sont intermittentes, et ne se font pas constamment équilibre, le mouvement n'est pas uniforme; la vîtesse des parties mobiles de la machine varie, et, toutes choses égales d'ailleurs, la grandeur de ces variations est en raison inverse de la masse et de la vîtesse de ces mêmes parties.

Dans la plupart des machines, les variations dans la vîtesse offrent des inconvénients, soit parce que la nature du travail qu'elles ont à faire comporte une vîtesse constante au point d'application de la résistance, soit parce que, à raison du jeu qu'il faut toujours laisser dans les engrenages, ou en général dans les contacts de diverses pièces, il est impossible que les variations de vîtesse se fassent toujours rigoureusement par degrés insensibles, comme cela serait nécessaire pour qu'elles ne fissent rien perdre de la quantité d'action fournie par le moteur. Cependant il arrive très-souvent que l'action du moteur est plus ou moins inégale, et souvent aussi que cette action, qui par elle-même pourrait être égale, devient inégale par la manière dont on la transmet; et quoique la géométrie appliquée à la composition des machines fournisse ordinairement des ressources pour y remédier, les moyens qu'on peut employer à cet effet sont presque toujours trop compliqués pour être adoptés avec avantage, sur-tout dans les grandes machines, où il s'exerce de puissants efforts. On y parvient beaucoup mieux en donnant aux parties de la machine, conformément aux principes qui viennent d'être exposés, beaucoup de masse et de vîtesse, de manière à y rendre les variations du mouvement extrêmement faibles, et presque insensibles.

On doit, en général, rendre les variations de la vîtesse les moindres possibles.

Cela peut se faire de deux manières, soit en augmentant la masse et la vîtesse des parties mobiles essentielles à la machine, ce qui entraînerait souvent de grands inconvénients, soit plutôt en ajoutant à la machine des parties mobiles uniquement destinées à en régulariser le mouvement, et qu'on nomme *volants*. Les considérations précédentes conviennent en effet spécialement aux machines de rotation, sur l'axe desquelles il arrive rarement que le moteur agisse d'une manière parfaitement uniforme. On monte sur cet axe les grandes roues appelées volants, et on conçoit d'après ce qui précède qu'elles produiront d'autant plus d'effet 1° que leur poids sera plus grand, et 2° que la matière qui les forme sera plus rassemblée près de leur circonférence extérieure, puisqu'alors, à vîtesse de rotation égale, la vîtesse effective de leurs parties sera plus grande. On parvient, en adaptant ainsi des volants

Des volants.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

suffisamment grands aux machines, à rendre l'action la plus inégale aussi régulière qu'on puisse le desirer. Mais il ne faut pas imaginer que ces volants puissent augmenter en rien la quantité d'action transmise par la machine. Leur véritable fonction est d'absorber ou d'emmagasiner l'excès de la quantité d'action fournie par le moteur dans le moment où elle surpasse celle que la résistance consomme, pour restituer ensuite cet excès dans le moment où la quantité d'action fournie par le moteur devient au contraire plus petite que celle qui est dépensée au point d'application de la résistance. On peut remarquer que si le volant est destiné principalement à régulariser le mouvement, il est convenable de le placer près du point d'application de la résistance; et que s'il est destiné principalement à régulariser l'action du moteur, il est convenable au contraire de le placer près du point d'application de ce dernier. Il est inutile de dire que s'il y a des axes dont les vîtesses de rotation soient différentes, on doit le mettre de préférence sur celui des axes qui se meut le plus vîte.

Comment on peut fixer la grandeur et la masse des volants.

Détermination du volant, dans le cas où l'on fait tourner une roue au moyen d'une pédale.

Pl. C, Fig. 15.

On peut appliquer le calcul à ces considérations, de manière à se rendre compte dans la pratique de la grandeur et de la masse nécessaires aux volants pour produire un effet déterminé : je donnerai quelques exemples de ce genre de recherches, sur lequel je n'ai rien trouvé dans les ouvrages de mécanique. Considérons en premier lieu le système suivant. Un poids Q est suspendu à un cordon qui s'enroule sur un arbre horizontal dont le centre est en C. Sur l'axe de cet arbre est fixée la manivelle CM, au coude M de laquelle est appliquée une force constante P, dont la direction demeure toujours verticale, et dont l'action est intermittente. Cette force n'agit qu'en descendant, c'est-à-dire pendant que le coude M parcourt le demi-cercle EAF, et pendant que ce coude monte en parcourant le demi-cercle FBE, aucune force ne lui est appliquée. Dans ce système, connu sous le nom de *pédale*, il ne peut en général être communiqué un mouvement continu à l'arbre, qu'autant que cet arbre porte un volant, et ce volant doit être tel, que le mouvement imprimé au système par la force P pendant que le coude de la manivelle descend en EAF, ne soit pas détruit en totalité par l'action du poids Q, pendant que ce coude remonte en FBE. On peut donc d'abord chercher le plus petit volant capable de faire naître un mouvement continu avec une vîtesse moyenne donnée, puis déterminer au-dessus de cette limite un volant au moyen duquel cette vîtesse ne varierait dans l'étendue de chaque tour que d'une certaine quantité donnée.

La question ainsi posée, je supposerai le mouvement du système devenu constant, en sorte que l'arbre emploie toujours le même temps à faire un tour, intervalle dans lequel se reproduisent toutes les inégalités de l'action du moteur. Dans cet état de choses, les quantités d'action dépensées par le moteur et la résistance, pendant la durée de cet intervalle, seront nécessairement égales entre elles. En effet, le mouvement ne changeant ici que par degrés insensibles, il ne peut y avoir de force vive perdue; d'où il suit que si le moteur, par exemple, avait fourni pendant un tour plus de quantité d'action que la résistance n'en a consommé, le système aurait acquis à la fin de ce tour une nouvelle quantité de force vive; en sorte qu'il commencerait le tour suivant avec une plus grande vîtesse qu'il n'a commencé l'autre, et emploierait moins de temps à le décrire, ce qui est contre la supposition. En nommant a le rayon CM de la manivelle, pendant la durée d'un tour le point d'ap-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

plication M du moteur parcourant dans le sens de son action l'espace $2a$, ce moteur dépensera la quantité d'action P. $2a$. Nommant b le rayon de l'arbre, le poids Q s'élevera pendant un tour de la quantité $2\pi b$, et par conséquent la résistance consommera la quantité d'action Q. $2\pi b$. On a donc, d'après ce qui précède, entre P et Q la relation P. $2a = $Q $2\pi b$, laquelle doit être satisfaite pour que le mouvement de l'arbre, considéré d'un tour à un autre, ne s'accélère ni ne se retarde point.

Je remarquerai maintenant que, parmi toutes les situations que prendra le rayon de la manivelle dans l'étendue du demi-cercle EAF, il y en a deux où la force P, telle que l'équation précédente la détermine, fera équilibre au poids Q suivant les lois de la statique. Pour connaître ces situations, nommons en général x l'angle ACM du rayon de la manivelle avec l'horizontale AC. La force P se décompose toujours en M en deux forces, l'une dans le sens MC qui est détruite, l'autre perpendiculaire à MC, qui agit seule. Cette dernière est exprimée par P cos. x, et si elle fait équilibre au poids Q, on aura Pa cos. $x = Qb$. En combinant cette équation avec la précédente, il vient cos. $x = \frac{1}{\pi}$. Cette valeur appartient également à deux angles égaux, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de AC, tels que ACM et ACN. Par conséquent, en supposant que ces angles indiquent les situations où le moteur fait équilibre à la résistance, leur cosinus devra être égal ou nombre $\frac{1}{\pi}$, le rayon étant l'unité.

Cette dernière détermination complète les données nécessaires pour résoudre la question, et fait connaître la nature du mouvement dans l'étendue de chaque tour. On voit en effet, d'après ce qui a été dit au commencement de ce §, que quand la manivelle est en CM, la vîtesse est la plus petite possible; qu'elle croît quand la manivelle descend de CM en CN, où elle atteint son maximum, et qu'elle décroît ensuite quand la manivelle décrit l'espace NFBEM, pour reprendre en M sa valeur minimum. La vîtesse a sa valeur moyenne quand la manivelle passe en CA et en CB.

Nommons m la masse du volant, Dm l'élément différentiel de cette masse situé à la distance r de l'axe. Considérons le système dans l'instant où la manivelle est en CM, et où la vîtesse angulaire a sa valeur minimum qu'on nommera v. La vîtesse de l'élément Dm sera vr, sa force vive v^2r^2Dm, et la force vive totale du volant Sv^2r^2Dm, le signe S indiquant une intégration relative au signe de différentiation D, et faite dans toute l'étendue de la masse du volant. D'un autre côté, la masse du poids Q est $\frac{Q}{g}$ (voyez la note (b)), sa vîtesse vb, et sa force vive $\frac{v^2b^2Q}{g}$. La force vive totale du système, dans la situation où on le considère, est donc Sv^2r^2Dm $+\frac{v^2b^2Q}{g}$. Si l'on nomme v' la valeur maximum de la vîtesse angulaire, laquelle a lieu quand la manivelle est parvenue en CN, on aura de même pour la force vive du système à cette dernière époque S$r^2v'^2$D$m+\frac{b^2v'^2Q}{g}$; d'où il suit que le système, quand la manivelle a passé de la position CM à celle CN, a acquis une quantité de force vive exprimée par $\left(\mathrm{S}r^2\mathrm{D}m+\frac{b^2Q}{g}\right)(v'^2-v^2)$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

D'un autre côté, dans ce même intervalle, le point d'application de la force P a parcouru dans le sens de l'action de cette force l'espace MN, c'est-à-dire le double du sinus de l'angle ACM mesuré dans le cercle dont le rayon est a. Le cosinus de cet angle étant $\frac{1}{\pi}$, son sinus est $\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}$: donc le moteur a imprimé dans le sens du mouvement la quantité d'action $P.2a\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}$. Quant à la résistance, son point d'application a décrit du rayon b deux angles égaux à ACM, c'est-à-dire que le poids s'est élevé verticalement de la hauteur $2b\,\text{arc}\left(\cos.=\frac{1}{\pi}\right)$, et que ce poids a imprimé en sens contraire du mouvement la quantité d'action $Q.2b\,\text{arc}\left(\cos.=\frac{1}{\pi}\right)$. Donc la quantité d'action imprimée dans le sens du mouvement, dans l'intervalle qu'on considère, est $P.2a\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}-Q.2b\,\text{arc}\left(\cos.=\frac{1}{\pi}\right)$. Mais d'après le § 7 de la note (*ai*), il faut, quand un système passe d'une position à une autre, que la force vive acquise soit égale au double des quantités d'action imprimées, ce qui donne l'équation

$$\left(Sr^2Dm+\frac{b^2Q}{g}\right)(v'^2-v^2)=4Pa\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}-4Qb\,\text{arc}\left(\cos.=\frac{1}{\pi}\right).$$

Sr^2Dm est le moment d'inertie du volant et de l'arbre, conformément aux notions exposées dans le § 10 de la note (*ai*). Cette équation établit donc une relation entre ce moment d'inertie, et les vîtesses maximum et minimum du système, et par son moyen on connaîtra l'un quand on se sera donné les autres.

Si l'on veut maintenant considérer le mouvement dans l'intervalle où la manivelle passe de CN à CM, on remarquera que le système a perdu dans cet intervalle la force vive $\left(Sr^2Dm+\frac{b^2Q}{g}\right)(v'^2-v^2)$ qu'il avait acquise ; que la force P a d'abord parcouru dans le sens de son action l'espace $HF=a\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}\right)$ a cessé d'agir dans l'intervalle FBE, puis a parcouru de nouveau dans le sens de son action l'espace EG, qui est aussi $=a\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}\right)$ en sorte que le moteur a imprimé dans le sens du mouvement la quantité d'action $P.2a\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}\right)$; que le point d'application de la résistance a décrit du rayon b l'angle NCF dont le sinus $=\frac{1}{\pi}$, le demi-cercle FBE, et l'angle ECM égal au précédent, en sorte que la résistance a imprimé en sens contraire du mouvement la quantité d'action $Qb\left(\pi+2\,\text{arc}\left(\sin.=\frac{1}{\pi}\right)\right)$. On aura donc ici, par le même principe que ci-dessus, l'équation

$$\left(Sr^2Dm+\frac{b^2Q}{g}\right)(v'^2-v^2)=2Qb\left(\pi+2\,\text{arc.}\left(\sin.=\frac{1}{\pi}\right)\right)-4Pa\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}\right).$$

En combinant ces équations avec la relation $P.2a=Q.2\pi b$, on reconnaîtra qu'elles sont identiques, et que, comme cela doit être, l'une ou l'autre donnerait la même valeur pour Sr^2Dm. Au moyen de ces équations, les questions qu'on s'est proposé se

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

trouvent résolues. En effet, soit V la vîtesse moyenne angulaire, et supposons que le volant doive être déterminé par la condition que la plus petite et la plus grande vîtesse v et v' (entre lesquelles V est ici moyenne arithmétique) ne diffèrent de V que de la quantité $\frac{V}{n}$. On aura alors $v=\frac{n-1}{n}V$ et $v'=\frac{n+1}{n}V$, d'où $v'^2-v^2=\frac{4}{n}V^2$. Mettant cette valeur dans l'une ou l'autre des équations précédentes, celle de Sr^2Dm qui s'en déduira exprimera le moment d'inertie qu'il faudra donner au volant. Quant au plus petit volant qu'on puisse employer, c'est évidemment celui avec lequel la manivelle arriverait à la position CM avec une vîtesse nulle : alors v serait $=0$, et v' double de V, c'est-à-dire qu'on aurait $n=1$. On mettrait donc dans les équations ci-dessus $4V^2$ à la place de (v'^2-v^2), et la valeur de Sr^2Dm qui s'en déduirait serait le moment d'inertie du plus petit volant capable d'entretenir un mouvement continu avec la vîtesse moyenne V.

Si dans l'appareil précédent on supposait que la force P, après avoir tiré de haut en bas quand la manivelle descend en EAF, tire de bas en haut quand la manivelle remonte en FBE, le mouvement serait moins inégal. On aurait alors entre les efforts P et Q la relation $P.2a=Q.\pi b$, ce qui s'accorde avec l'article 110 et la note (p), et le moteur ferait équilibre à la résistance dans les quatre endroits où l'angle du bras de la manivelle avec l'horizon a son cosinus égal à $\frac{2}{\pi}$. En employant la même marche que ci-dessus, et supposant toujours que v et v' expriment la plus petite et la plus grande vîtesse angulaire que prenne le système, lesquelles ont alternativement lieu quand la manivelle prend les quatre situations d'équilibre dont on vient de parler, on trouve que le moment d'inertie du volant est déterminé par l'une ou l'autre des deux équations

$$\left(Sr^2Dm+\frac{b^2Q}{g}\right)(v'^2-v^2)=4Pa\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}-4Qb\ \text{arc}\left(\cos.=\frac{2}{\pi}\right),$$

$$\left(Sr^2Dm+\frac{b^2Q}{g}\right)(v'^2-v^2)=4Qb\ \text{arc}\left(\sin.=\frac{2}{\pi}\right)-4Pa\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}\right),$$

qui sont identiques quand la relation $P.2a=Q.\pi b$ est satisfaite. On en fera le même usage que des précédentes, pour déterminer le moment d'inertie du volant au moyen duquel les vîtesses extrêmes ne s'écarteraient pas de la vîtesse moyenne au-delà d'une limite donnée.

Ce dernier appareil est, à très-peu de chose près, celui qu'on emploie généralement pour produire un mouvement circulaire au moyen du mouvement alternatif du piston des machines à vapeur. Pour donner un exemple de l'application de ces formules, je supposerai une machine à vapeur de la force de quatre chevaux, ce qui signifie, d'après l'estimation de MM. Boulton et Watt rapportée ci-dessus p. 377, qu'elle transmet en une seconde une quantité d'action d'environ $300^{k}\times^{m}$. J'admettrai que la vîtesse angulaire moyenne V de l'axe de rotation, c'est-à-dire la vîtesse des points situés à l'unité de distance de cet axe, est 2^{m}, et que la longueur du bras de levier b du poids Q est $0^{m},5$. Alors la vîtesse de ce poids sera $0^{m},5\times 2^{m}=1^{m}$; et par conséquent la quantité d'action consommée par son élévation sera pour une seconde $Q.1^{m}=300^{k}\times^{m}$, d'où $Q=300^{k}$. Cela posé, mettant dans la première des deux équations précédentes à la place de P sa valeur $\frac{Q\pi b}{2a}$, écrivant $\frac{4}{n}V^2$ à la place

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de $v'^2 - v^2$, conformément à ce qu'on a vu ci-dessus, et tirant la valeur de Sr^2Dm, il viendra

$$Sr^2Dm = \frac{nQb}{2V^2}\left(\pi\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}} - 2\arc\left(\cos. = \frac{2}{\pi}\right)\right) - \frac{Qb^2}{g}.$$

Mettant dans cette formule à la place de V, b et Q les valeurs précédentes, et faisant $\pi = 3{,}142$, on trouvera pour le moment d'inertie du volant $Sr^2Dm = 19{,}9n - 7{,}6$, nombre qui représente des unités de masse. D'après cela, le plus petit volant qu'on puisse employer répondant, comme on l'a vu ci-dessus, à la valeur $n = 1$, son moment d'inertie sera $Sr^2Dm = 12{,}3$. Si l'on voulait employer un volant tel que la vîtesse ne s'écartât pas de sa valeur moyenne de plus de $\frac{1}{30}$ de cette valeur, il faudrait faire $n = 30$, ce qui donnerait $Sr^2Dm = 589$.

Il resterait maintenant à fixer les dimensions du volant de manière à satisfaire à cette équation. Pour plus de simplicité, je supposerai ce volant formé par une roue en fer fondu concentrique à l'axe de rotation, et en évaluant son moment d'inertie, je négligerai le moyeu et les rayons de cette roue, pour n'en considérer que la jante. Nommons b la largeur de cette jante, c son épaisseur, r son rayon moyen, r' son rayon extérieur, et r'' son rayon intérieur. Elle forme la différence de deux cylindres dont les rayons sont r' et r'', et dont la longueur est c : son moment d'inertie, d'après le § 10 de la note (*ai*), est par conséquent $\frac{1}{2}\pi c\,(r'^4 - r''^4)$. Mais $r' = r + \frac{1}{2}b$, et $r'' = r - \frac{1}{2}b$: mettant ces valeurs dans cette formule, et observant que b étant fort petit par rapport à r, on peut négliger les termes qui contiennent les puissances supérieures de b, l'expression du moment d'inertie deviendra simplement $2\pi bcr^3$. Cette quantité représente des unités de volume, et pour la transformer en unités de masse, il faut, conformément à la remarque faite dans l'endroit qui vient d'être cité, la multiplier par $\frac{\Pi}{g}$, Π étant le poids d'un mètre cube de la substance de la roue. On aura donc ici $Sr^2Dm = \frac{\Pi}{g}\cdot 2\pi bcr^3 = 589$. La roue étant en fer fondu, on fera $\Pi = 7207^k$, et il faudra donner à b, c et r des valeurs telles qu'elles satisfassent à cette équation. Par exemple si l'on suppose la largeur de la jante $b = 0^m{,}1$ et son épaisseur $c = 0^m{,}05$, on trouvera pour le rayon du volant $r = 2^m{,}94$.

Dans quels cas les volants ne suffisent pas pour rendre le mouvement uniforme.— Des *régulateurs* ou *gouverneurs*.

Je remarquerai avant de quitter ce sujet que les volants, tels qu'on vient d'en donner l'idée, sont propres à régulariser le mouvement d'une machine, dans les cas seulement où l'action du moteur est intermittente, c'est-à-dire tantôt plus grande et tantôt plus petite que celle de la résistance. Mais s'il y avait à craindre que le moteur, ayant une fois surmonté la résistance, continuât indéfiniment à fournir une quantité d'action plus grande que celle que la résistance consomme, le volant ne remédierait à rien, parce qu'il prendrait alors, comme le reste du système, un excès de vîtesse de plus en plus considérable, et propre à causer de graves accidents, ou même la destruction de la machine. Pour les prévenir, on emploie des dispositions telles qu'aussitôt que la vîtesse vient à surpasser la valeur moyenne qu'on lui a fixée, la quantité d'action fournie par le moteur se trouve diminuée, ou la quantité d'action consommée par la résistance augmentée, ce qui ramène aussitôt la vîtesse à cette valeur moyenne. On a quelquefois, pour remplir ce but, adapté à la machine des ailes qu'elle fait mouvoir dans l'air, où elles éprouvent une résistance

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui croît rapidement avec la vîtesse, ou un frein qu'on fait presser contre une roue pour l'arrêter par le frottement. Mais ces moyens, et d'autres qui leur sont analogues, ont l'inconvénient de consommer une partie de la quantité d'action fournie par le moteur, et on préfère à-présent les *régulateurs* dont le principe consiste dans l'appareil connu sous le nom de pendule conique. Son utilité est si grande, et son application si générale, que je crois convenable d'en présenter ici en peu de mots la théorie.

Du pendule conique, employé comme régulateur. Pl. C, Fig. 16.

A l'extrémité supérieure A de l'axe vertical AB sont attachées deux verges AC, au moyen d'un boulon horizontal par lequel l'axe et les verges sont traversés, et sur lequel elles peuvent tourner librement. D'autres verges DB sont fixées de la même manière aux premières, et supportent à leur extrémité inférieure une couronne embrassant l'axe AB, le long duquel elle monte ou descend suivant que l'angle CAB s'ouvre plus ou moins. Si l'on suppose maintenant cet appareil adapté à une machine dont le mouvement communique à l'axe AB et aux verges qu'il porte un mouvement de rotation, il est visible que les poids CC, et par suite la couronne D, tendront, en vertu de la force centrifuge résultant de ce mouvement, à s'élever d'autant plus que la vîtesse sera plus grande. On conçoit que cette ascension verticale de la couronne B résultant d'une augmentation dans la vîtesse, peut être employée à modérer l'action du moteur : par exemple, dans les machines à feu, à fermer la soupape qui donne passage à la vapeur; dans les roues hydrauliques, à abaisser la vanne de l'orifice qui fournit l'eau à la roue; etc. Si l'on veut appliquer maintenant le calcul à cet appareil, afin d'être à même d'en régler dans la pratique le jeu et les dimensions, on négligera, pour plus de simplicité, la masse des verges pour ne considérer que celles des corps CC, et on remarquera qu'en nommant t la durée d'une révolution de l'axe, la vîtesse de ces corps est $\frac{2\pi.CE}{t}$, et par conséquent leur force centrifuge $\frac{4\pi^2.CE}{t^2}$ (voyez la note (*ai*), § 4). Or ces corps, soumis à l'action horizontale de la force centrifuge, et à l'action verticale de la gravité g, se placent nécessairement dans une situation telle que la résultante de ces deux forces soit dans la direction de la verge AC par laquelle ils sont soutenus. Il suit de-là que le rapport de la gravité à la force centrifuge est celui de AE à CE, ou que $\frac{g\times t^2}{4\pi^2.CE}=\frac{AE}{CE}$, d'où $t=2\pi\sqrt{\frac{AE}{g}}$. On voit par ce résultat que le temps de la révolution du pendule conique ne dépend que de la distance verticale des corps CC au point de suspension A; et en comparant cette formule à celle obtenue dans le § 6 de la note (*ai*), on verra aussi que ce temps est double de celui des petites oscillations d'un pendule simple dont cette distance serait la longueur. La relation entre la vîtesse de rotation de l'axe AB, et la hauteur à laquelle se tiendront les corps CC étant établie par ce qui précède, on pourra toujours connaître la position de la couronne B correspondante à une vîtesse donnée, et régler les effets que le mouvement de cette couronne doit produire, lors des variations de vîtesse qui pourraient survenir dans la machine.

De la quantité d'action fournie par l'homme et le cheval dans divers travaux.

§ 6. J'ai exposé § 4 des considérations qui établissent la nécessité de régler convenablement, pour chaque espèce de moteur, l'effort et la vîtesse qui auront lieu à leur point d'application, aussi-bien que la durée du travail journalier, quand le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

moteur est un animal. On trouvera dans divers endroits de cet ouvrage les règles à suivre pour diriger en conséquence l'action des agents mécaniques autres que les animaux : je vais m'occuper ici de ces derniers.

Quelques auteurs, et particulièrement Daniel Bernouilly (*Mémoire sur les moyens de suppléer en mer à l'action du vent*, *Prix de l'Académie des sciences*, t. 8), ont pensé que pourvu qu'on n'outrepassât point les forces naturelles des animaux, on pouvait varier à volonté l'effort, la vîtesse, et la durée de leur action, et qu'une même quantité d'action exercée dans un jour produisait toujours un même degré de fatigue; ou en d'autres termes, qu'un homme, à quelque genre de travaux qu'on l'employât, ressentait toujours la même fatigue, quand son travail représentait la même quantité d'action. Daniel Bernouilly évaluait d'ailleurs à 20 livres × 3 pieds $= 9^{k} \times ^{m},55$ par seconde, la quantité d'action qu'un homme pouvait fournir en travaillant 8 heures par jour, ce qui donne pour la quantité d'action journalière $275000^{k} \times ^{m}$. Des recherches plus exactes de Coulomb (*Mémoires de l'Institut, Sciences physiques et mathématiques*, t. 2) ont obligé à rejeter ces notions systématiques, et montré clairement que la fatigue des animaux, la quantité d'action produite demeurant la même, variait considérablement suivant la nature du travail auquel ils étaient employés. Coulomb fait voir, par exemple, qu'un homme dont le travail consiste à élever le poids de son corps au haut d'une rampe ou d'un escalier, peut produire dans un jour une quantité d'action $= 205000^{k} \times ^{m}$, tandis que le même homme employé à élever des poids au moyen d'une corde passant sur une poulie, n'en produira qu'une $= 71000^{k} \times ^{m}$. Ces considérations ont dû guider dans la formation du tableau ci-après, et pour établir les résultats qui y sont contenus, j'ai compulsé un grand nombre d'ouvrages, dans lesquels les savants et les observateurs français et étrangers ont consigné des évaluations de la force de l'homme et du cheval. Je suis revenu à plusieurs reprises sur ce travail important, et je n'ai épargné aucun soin pour le rendre le moins imparfait qu'il m'a été possible. Cependant, eu égard à la grande discordance qui se trouve entre les évaluations données par des savants dont l'autorité est également recommandable, je ne puis me flatter d'avoir par-tout saisi les véritables termes moyens, ce qui est tout ce qu'on peut faire dans une matière où, par la nature des choses, il restera toujours beaucoup d'incertitude. Je ne donne ce tableau que comme un essai qui, à raison de l'utilité de son objet, mérite d'être perfectionné. Comme il serait beaucoup trop long d'entrer dans la discussion de chaque résultat, j'observerai seulement en général que si les anciennes bases adoptées par Desaguliers, Daniel Bernouilly, etc. étaient trop élevées, il paraît aussi, d'après diverses observations, et particulièrement d'après celles données par Smeaton, que quelques-unes de celles établies dans ces derniers temps par Coulomb et par M. Guenyveau (*Essai sur la science des machines*) sont un peu faibles. J'ai cru devoir, après un examen très-attentif, en admettre de plus élevées.

La quantité d'action varie d'après diverses circonstances, et surtout d'après la température.

Ce tableau, comme on vient de le dire, ne peut être considéré que comme offrant des termes moyens, autour desquels les résultats peuvent, suivant les circonstances, varier d'un quart, ou même d'un tiers, en plus ou en moins. Il y a effectivement, indépendamment des différences qu'on observe dans les forces des divers individus, un grand nombre de causes capables d'influer sur ces résultats. On peut mettre dans ce nombre la durée du temps pendant lequel les ouvriers exé-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cutent un même genre de travail. Par exemple, dans les grandes constructions, on obtient souvent des manœuvres employés au battage des pieux ou aux épuisements, des quantités d'action plus grandes que celles indiquées ci-dessous, pourvu qu'on ne les emploie à ces opérations qu'un jour ou deux de suite, et qu'ils soient occupés dans l'intervalle à des travaux moins pénibles. La nourriture influe aussi beaucoup sur la force des hommes, et enfin elle dépend considérablement de la saison et du climat, puisque Coulomb, dans le mémoire cité plus haut, assure d'après sa propre expérience que les hommes, dans des circonstances semblables, ne développent pas à la Martinique, où le thermomètre descend rarement au-dessous de 20°, la moitié de la quantité d'action dont ils sont capables en France.

Divers moyens d'employer les forces des animaux.

On n'a pas recueilli sur la force des animaux autres que le cheval, des renseignements assez certains pour être insérés dans le tableau suivant. Il a été imaginé depuis long-temps divers moyens pour tirer parti du poids des chevaux ou des bœufs lorsqu'ils agissent sur les machines. On peut voir dans le t. 5 des *Annales des arts et manufactures* une invention de ce genre attribuée à M. Eckhardt, qui consiste à faire agir des pieds de derrière sur le sommet d'une roue, un animal dont les pieds de devant sont seuls soutenus sur un plancher fixe. On peut douter, jusqu'à ce que l'expérience ait prononcé, qu'on tirât un bien grand parti de ces dispositions.

Les valeurs du tableau pour l'effort et la vîtesse répondent au maximum d'action journalière.

Comment on a cherché à déterminer ces valeurs par le calcul.

Les valeurs indiquées dans le tableau pour les efforts exercés ou poids supportés, et pour les vîtesses prises pendant la durée du travail, lesquelles résultent entièrement des observations, paraissent s'éloigner peu de celles qui répondent au maximum de quantité d'action journalière. On avait pensé depuis long-temps à déterminer l'effort et la vîtesse le plus convenables, au moyen de formules analytiques, analogues à celles qu'on emploie dans le cas de l'action d'un courant d'eau ou du vent. On trouve dans les *Mémoires de l'académie de Berlin* pour 1783, des recherches de Schulze dont l'objet est de comparer avec l'observation deux formules proposées pour cet objet par Euler. Celle qui lui paraît s'accorder le mieux avec les expériences est la suivante. Nommant v la vîtesse dont l'homme est capable quand il n'exerce aucun effort, V la vîtesse avec laquelle il travaille, p l'effort qu'il peut exercer quand il ne prend aucune vîtesse, P l'effort qu'il exerce en travaillant, on suppose $P=p\left(1-\frac{V}{v}\right)^2$. La quantité d'action est $PV=p\left(1-\frac{V}{v}\right)^2 V$. Le maximum a lieu quand $V=\frac{1}{3}v$, et $P=\frac{4}{9}p$.

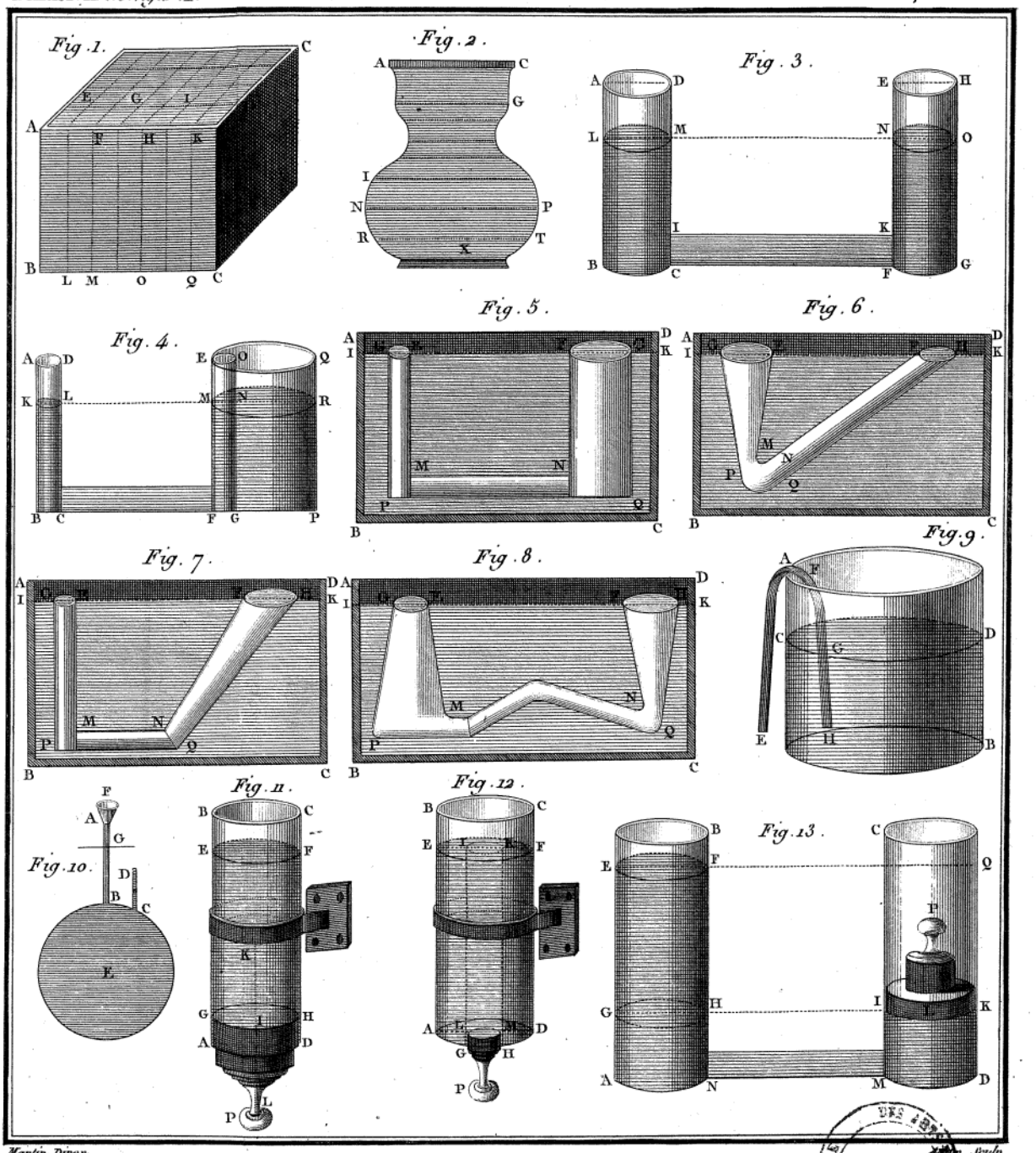
Coulomb, dans le mémoire cité plus haut, dont l'étude ne saurait trop être recommandée, a employé d'autres considérations. Dans des recherches qui ont principalement pour objet le transport des fardeaux, il remarque que, d'après l'expérience, l'homme qui marche ou monte chargé d'un fardeau fournit une quantité d'action journalière beaucoup moindre que quand il n'en porte aucun; et il suppose que la diminution de la quantité d'action journalière est proportionnelle au poids dont l'homme est chargé. Les résultats de ses formules s'accordent assez bien avec les observations. M. de Prony a fait voir depuis (*Plan raisonné de la partie de l'enseignement de l'école Polytechnique qui a pour objet l'équilibre et le mouvement des corps*, p. 188 et suiv.) que la formule ci-dessus était aussi susceptible, dans les mêmes cas, de représenter ces observations avec une exactitude à-peu-près aussi grande. Ces considérations sont d'ailleurs entièrement hypothétiques.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Tableau des quantités d'action que peuvent fournir moyennement l'homme et le cheval, dans divers genres de travaux.

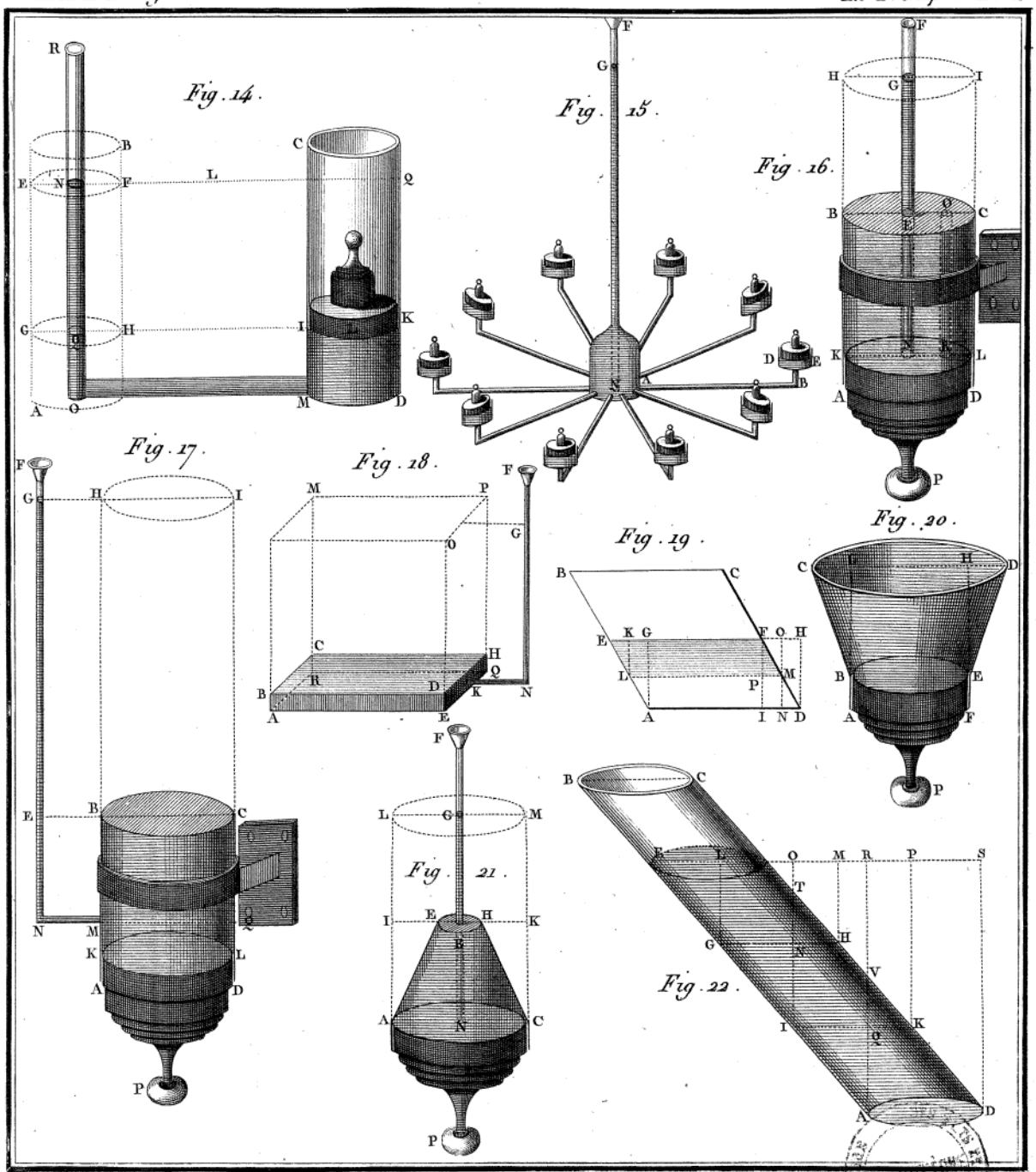
NATURE DU TRAVAIL.	POIDS transporté ou effort exercé.	VITESSE par seconde.	QUANTITÉ d'action par seconde.	DURÉE du travail journalier.	QUANTITÉ d'action journalière.
	kilogrammes	mètres	kil. × mèt.	heures	kil. × mèt.
1° *Transport horizontal des poids.*					
Un homme marchant sur un chemin horizontal, sans fardeau, son travail consistant dans le transport du poids de son corps	65	1,5	97,5	10	3510000
Un manœuvre transportant des matériaux dans une petite charrette ou camion à deux roues, et revenant à vide chercher de nouvelles charges	100	0,5	50	10	1800000
Un manœuvre transportant des matériaux dans une brouette, et revenant à vide chercher de nouvelles charges	60	0,5	30	10	1080000
Un homme voyageant en portant des fardeaux sur son dos	40	0,75	30	7	756000
Un manœuvre transportant des matériaux sur son dos, et revenant à vide chercher de nouvelles charges	65	0,5	32,5	6	702000
Un cheval transportant des fardeaux sur une charrette, et marchant au pas continuellement chargé	700	1,1	770	10	27720000
Un cheval attelé à une voiture, et marchant au trot continuellement chargé	350	2,2	770	4,5	12474000
Un cheval transportant des fardeaux sur une charrette, au pas, et revenant à vide chercher de nouvelles charges	700	0,6	420	10	15120000
Un cheval chargé sur son dos, allant au pas	120	1,1	132	10	4752000
Un cheval chargé sur son dos, allant au trot	80	2,2	176	7	4435200
2° *Élévation verticale des poids.*					
Un homme montant une rampe douce ou un escalier sans fardeau, son travail consistant dans l'élévation du poids de son corps	65	0,15	9,75	8	280800
Un manœuvre élevant des poids au moyen d'une corde passant sur une poulie, ce qui l'oblige à faire descendre la corde à vide	18	0,2	3,6	6	77760
Un manœuvre élevant des poids en les soulevant avec la main	20	0,17	3,4	6	73440
Un manœuvre élevant des poids en les portant sur son dos au haut d'une rampe douce ou d'un escalier.	65	0,04	2,6	6	56160
3° *Action sur les machines.*					
Un manœuvre agissant sur une roue à chevilles ou à tambour : 1° au niveau de l'axe de la roue	60	0,15	9	8	259200
2° vers le bas de la roue	12	0,7	8,4	8	251120
Un manœuvre marchant, et poussant ou tirant dans une direction horizontale	12	0,6	7,2	8	207360
Un manœuvre agissant sur une manivelle	8	0,75	6	8	172800
Un cheval attelé à un manége et allant au pas	45	0,9	40,5	8	1166400
Un cheval attelé à un manége et allant au trot	30	2	60	4,5	972400

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

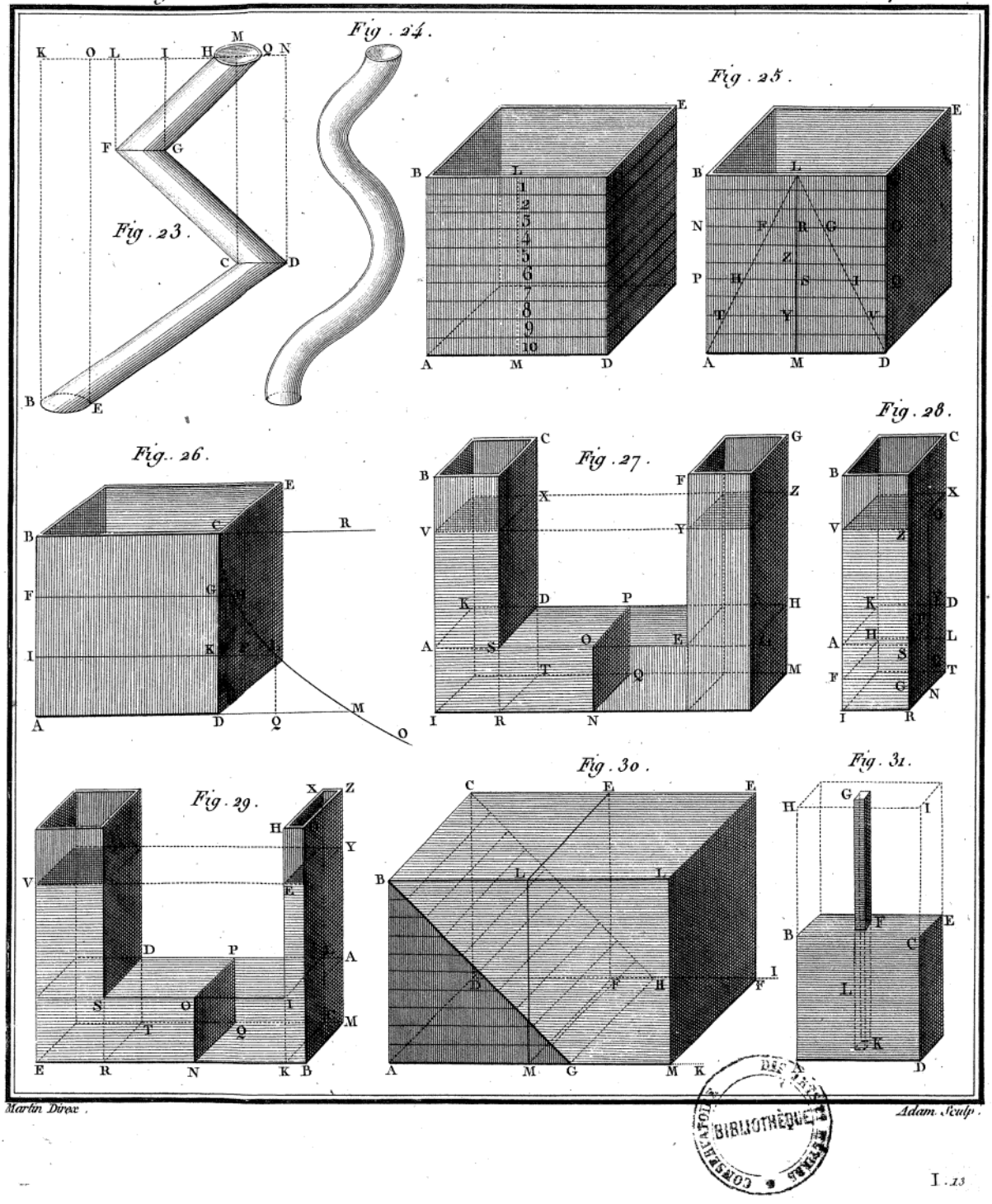


BIBLIOTHÈQUE DES ARTS ET MÉTIERS

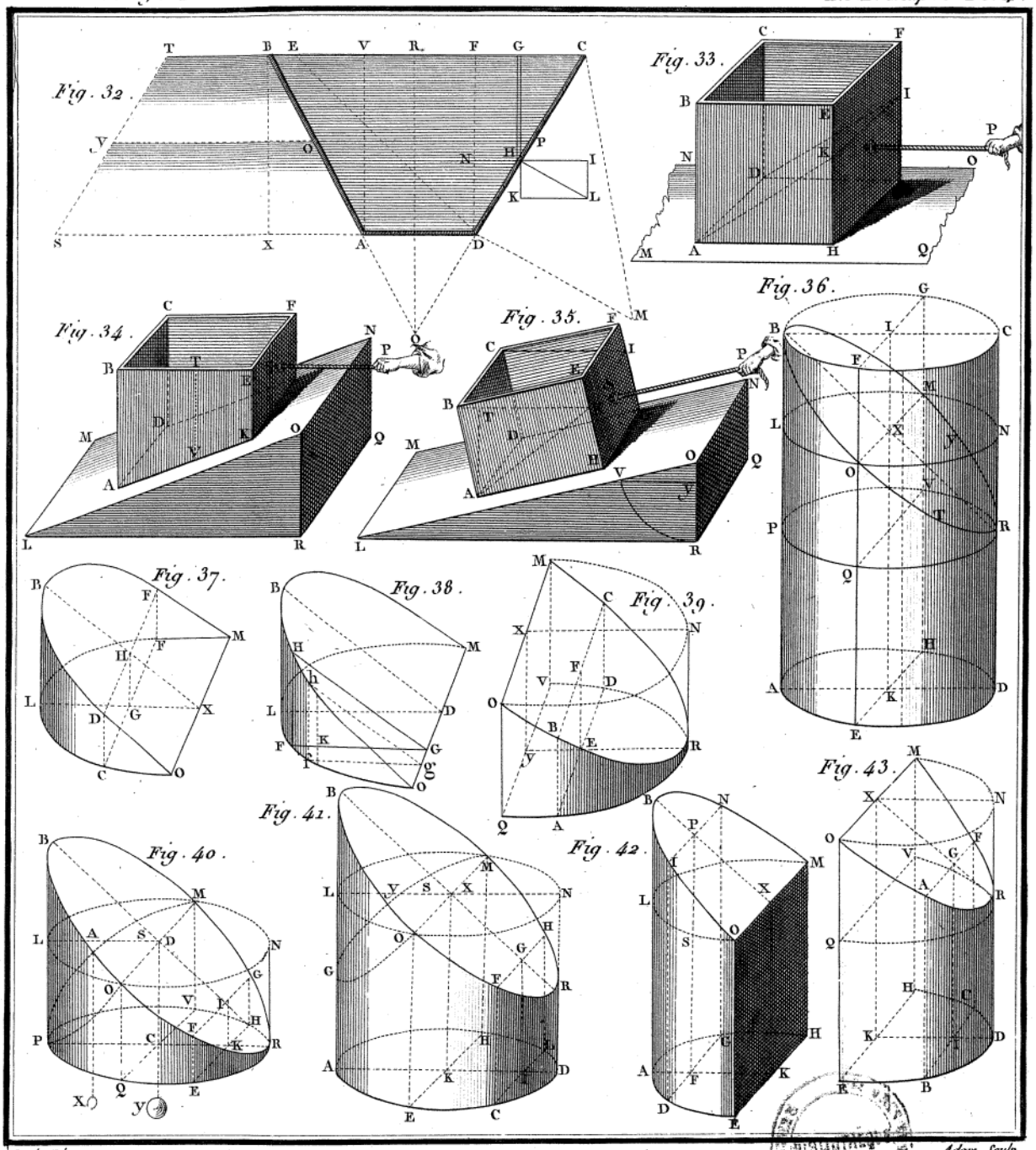
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



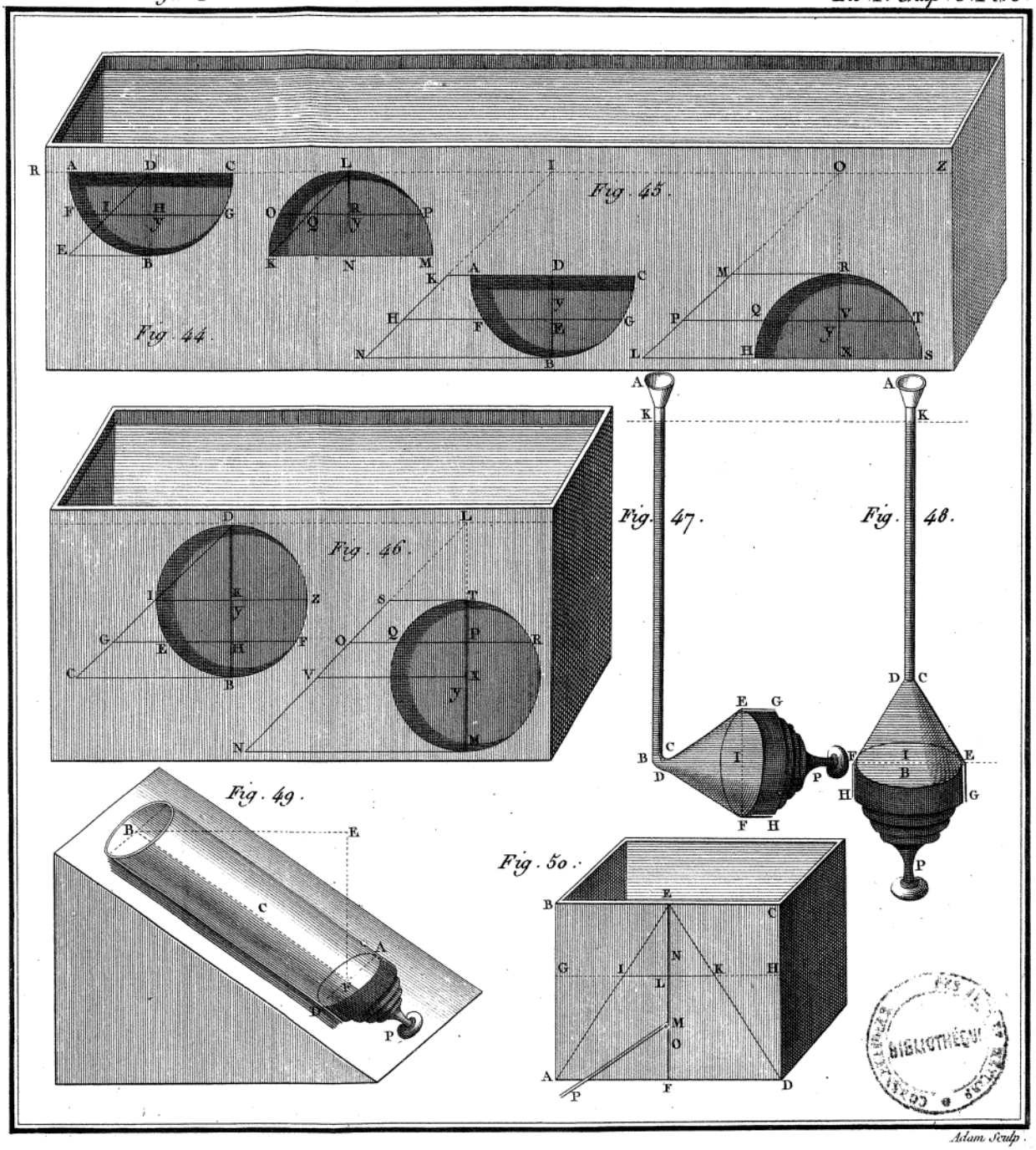
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Martin Direx. Adam Sculp.

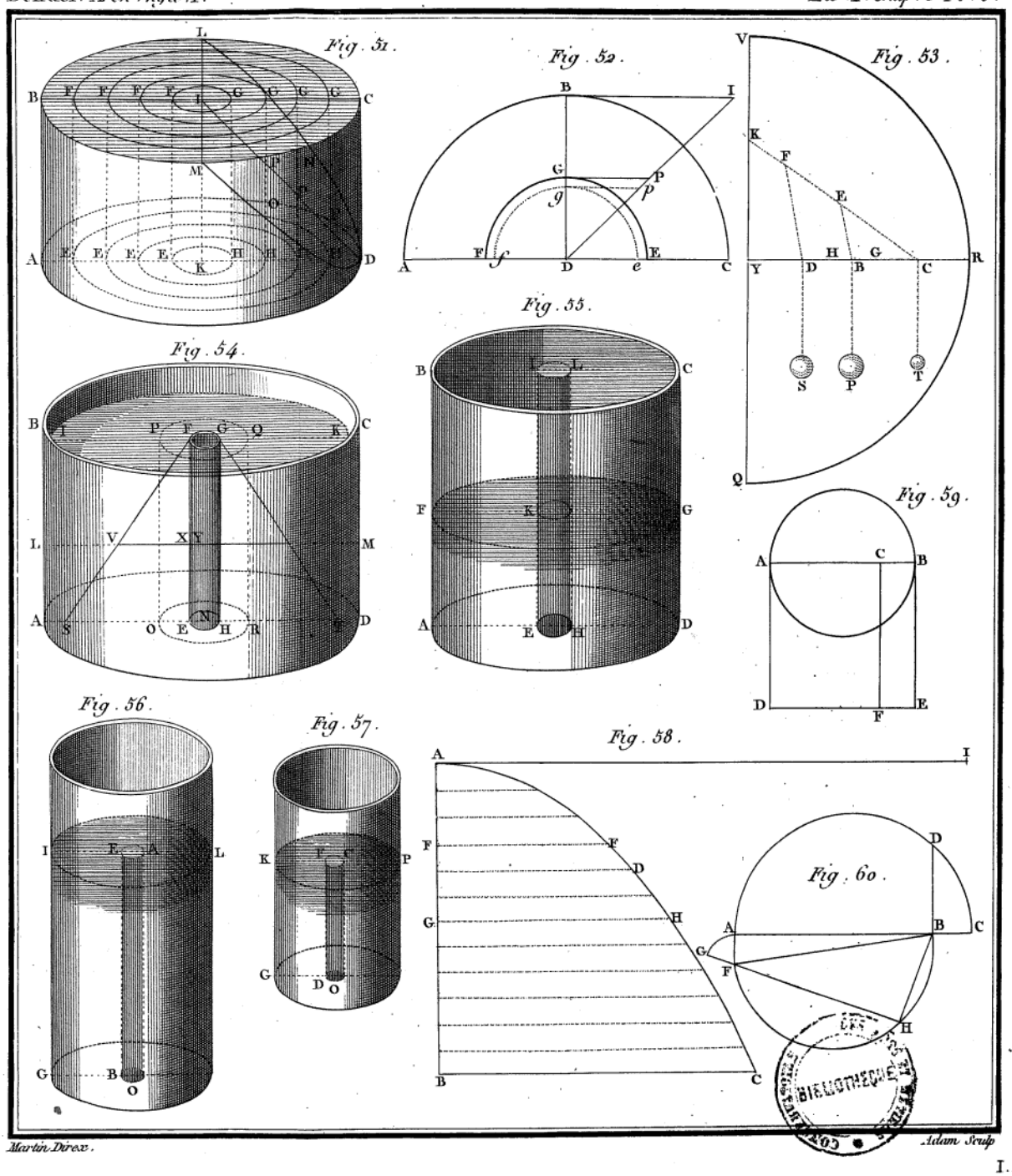
I. 14

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

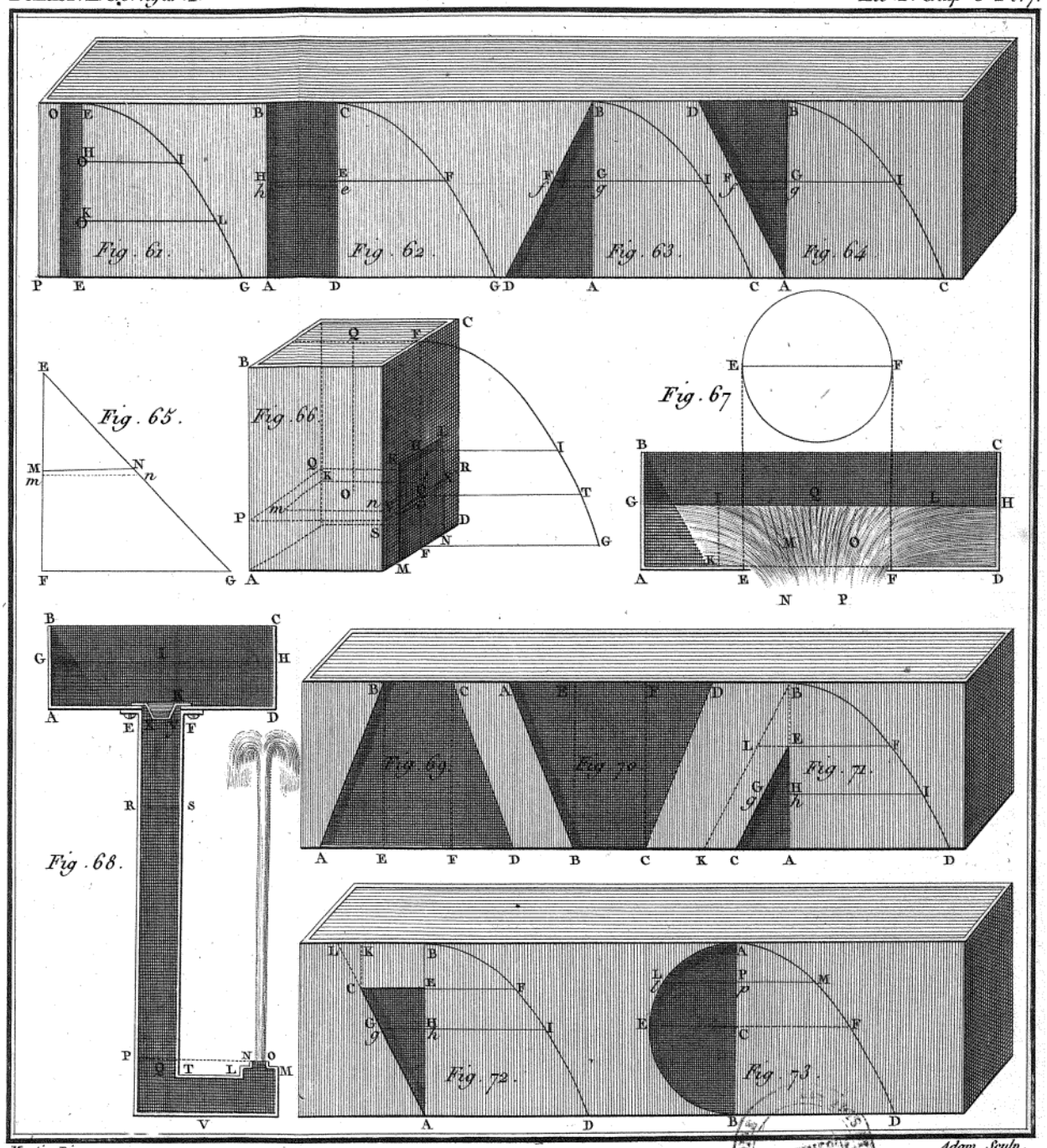


I. 15.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



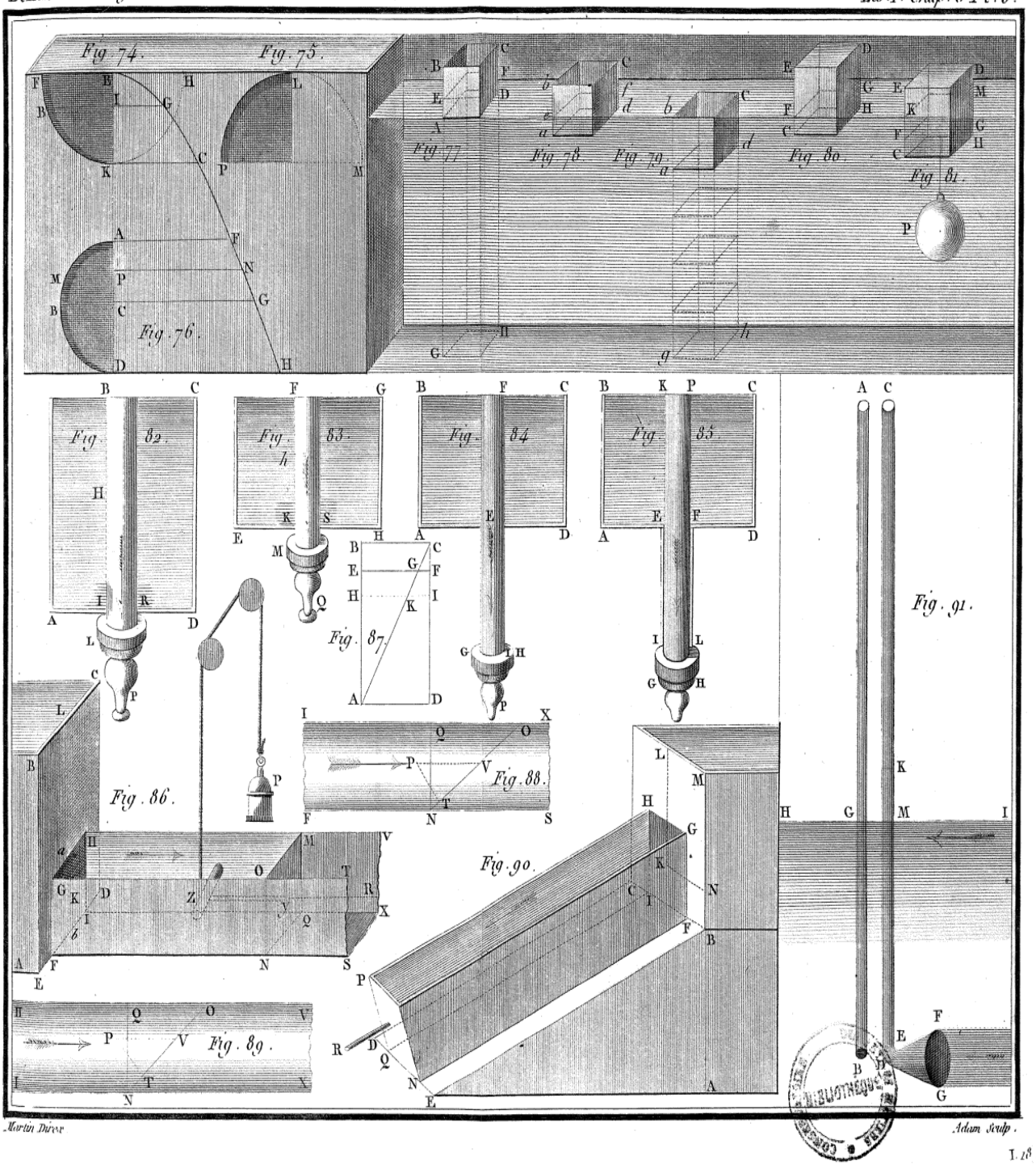
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



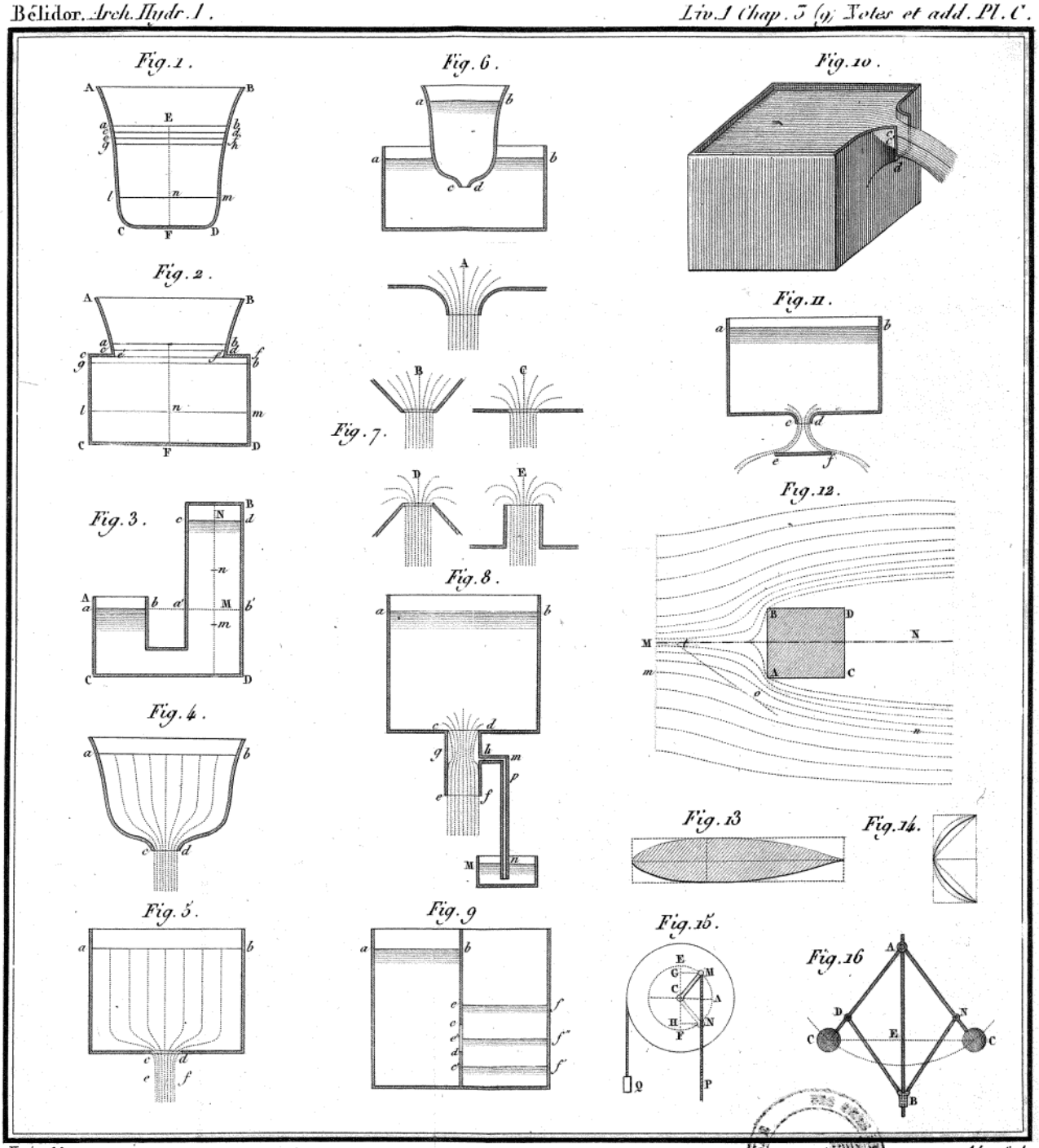
Martin Direx. *Adam Sculp.*

I.7

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Navier del. Adam Sculp. I. C.

BIBLIOTHÈQUE CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

LIVRE SECOND,

OU L'ON DONNE LA DESCRIPTION DE DIFFÉRENTES SORTES DE MOULINS, LA MANIÈRE D'EN CALCULER LES EFFETS, ET D'EN DÉCOUVRIR LE POINT DE PERFECTION.

CHAPITRE PREMIER.

Des moulins pour moudre le blé, où l'on trouve l'application des principes qui peuvent contribuer à la perfection des machines mues par un courant.

Raisons qui ont engagé l'auteur à écrire sur cette matière.

634. Il paraîtra peut-être étrange que je me sois donné la peine d'écrire sur un sujet aussi connu que celui-ci. Mais si l'on veut bien entrer dans les raisons qui m'ont fait composer ce chapitre, on trouvera assez de motifs pour me justifier. Les moulins sont communs à la vérité : c'est justement ce qui en prouve l'utilité, et la nécessité de chercher les moyens de les perfectionner. Mais c'est assez le sort des choses les plus estimables de perdre de leur prix par l'habitude de les voir, au lieu que souvent il ne faut qu'une bagatelle qui ait un air de nouveauté pour causer de l'admiration. Si un machiniste avait présenté à l'empereur Auguste le dessin d'un moulin tel qu'on les fait aujourd'hui, il n'y a point à douter qu'il n'en eût été reçu avec beaucoup de distinction. Car on prétend que ce n'est que dans le sixième siècle qu'on s'est avisé d'employer la force de l'eau à la place des hommes et des animaux, dont les anciens se servaient pour faire tourner les meules, ne connaissant pas non plus la manière de tirer parti du vent pour la même fin. En récompense, ils avaient l'usage de quantité de machines utiles qui ne sont point passées jusqu'à nous, la barbarie des temps les ayant anéanties. Comme on ne peut pas répondre qu'il n'arrive encore de ces malheureuses révolutions, il y a une sorte d'équité à laisser à la postérité la description de tout ce que nous avons d'essentiel à la vie ; et c'est dans cette vue que l'académie royale des sciences a entrepris son fameux livre des *Arts et Métiers*.

Sans envisager des temps qui paraissent si éloignés, n'y a-t-il pas actuellement des peuples aussi destitués des secours de l'art que l'étaient les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

premiers hommes, et pour lesquels tout est nouveau, mais qui ne manquant ni de génie ni d'adresse, n'ont besoin que de modèles pour les imiter? La Moscovie nous en fournit un exemple récent. Un de ses empereurs y fait venir d'habiles gens de toute espèce, munis de bons livres, et en moins de vingt-cinq ans ce grand empire a changé entièrement de face. Sans sortir du royaume de France, combien n'avons-nous pas de provinces où la nécessité a donné lieu à l'invention de plusieurs machines dont l'usage est entièrement ignoré en d'autres, où l'on en pourrait tirer le même avantage? Les moulins sont particulièrement dans ce cas-là: c'est pourquoi j'ai cru que l'on me saurait gré de donner la description de ceux qui sont venus à ma connaissance, afin qu'on en pût faire usage selon la disposition des lieux, et en les accompagnant de remarques curieuses et utiles, de montrer que les choses dont on se sert le plus communément n'en sont pas moins dignes de recherches.

Manière dont les meules agissent pour moudre le blé.

635. Peu de gens ignorent que le blé se moud avec deux meules posées l'une au-dessus de l'autre sans se toucher; que la meule de dessous, qu'on nomme *gisante*, est immobile, et qu'il n'y a que celle de dessus qui tourne sur un pivot. Comme cette dernière est susceptible de plusieurs remarques, auxquelles on n'a pas coutume de faire attention, il convient, avant que de passer outre, d'être prévenu de ce qui suit.

Pl. 1, Fig. 1.

Les surfaces opposées des deux meules qui agissent pour moudre le blé ne sont point planes. Celle de dessus est creuse, et celle de dessous a du relief; l'une et l'autre suivant la figure d'un cône, dont à la vérité l'axe est fort petit par rapport au diamètre de sa base. Quand la première a 6 pieds de diamètre, elle n'a guère qu'un pouce de creux vers son centre, et la seconde neuf lignes de relief. Ainsi ces deux meules vont en s'approchant de plus en plus l'une de l'autre vers leur circonférence, ce qui donne au bled qui tombe de la *trémie* la facilité de s'insinuer jusques vers les deux tiers du rayon, qui est l'endroit où il commence à se rompre, et où il oppose la plus grande résistance dont il peut être capable; l'intervalle des meules n'étant, en cet endroit, que des deux tiers ou des trois quarts de l'épaisseur d'un grain de blé. Mais comme les meûniers ont la liberté de hausser et de baisser tant soit peu la meule supérieure, ils en réglent l'intervalle avec celle de dessous, selon qu'ils veulent que la farine soit plus ou moins fine.

L'effet d'une meule tournante dépend de sa quantité de mouvement.

636. Il y a deux choses à considérer dans l'effet d'une meule tournante; son *poids* et sa *vîtesse*; le travail qu'elle fait dépendant de sa *quantité de mouvement*, qui est *le produit de sa vitesse par une partie de sa masse.* Je dis *une partie de sa masse:* car comme cette meule tourne sur un pivot, sa pesanteur absolue n'est pas totalement employée à moudre le blé; et il n'est pas aisé de déterminer la partie qui peut y avoir le plus de part. On sait seulement qu'elle est toujours proportionnée à la pesanteur ab-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

solue, l'expérience faisant voir que si deux meules d'inégale pesanteur ont la même vîtesse, leurs effets, ou la quantité de farine qu'elles produisent dans le même temps, est à-peu-près dans le rapport de leur pesanteur absolue. Comme on est obligé de piquer les meules presque tous les mois, leur épaisseur, par conséquent leur poids, diminue insensiblement, et quand elles parviennent à n'avoir plus que les trois quarts, ou la moitié de l'épaisseur qu'elles avaient étant neuves, elles ne produisent plus qu'environ les trois quarts, ou la moitié de la quantité de farine qu'elles donnaient au commencement : c'est de quoi tous les meuniers conviennent (*dh*).

Raison qui fait voir pourquoi les meules ont un effet proportionné à leur pesanteur.

637. La force *centrifuge* emportant le bled du centre vers la circonférence, il est naturel que lorsqu'il est parvenu à un endroit où l'intervalle des deux meules est moindre que son épaisseur, il y soit écrasé. Cependant la meule supérieure ayant un point d'appui qu'elle n'abandonne

---

(*dh*) Beaucoup de meuniers ont en usage de charger leurs meules d'une couche de plâtre quand elles sont ainsi usées, afin de leur conserver la pesanteur nécessaire.

Comment on conserve aux meules la pesanteur nécessaire.

Dans la plupart des moulins de France les meules sont *piquées* ou *rhabillées* à coups perdus, c'est-à-dire qu'on n'observe aucune disposition régulière dans les inégalités dont on en hérisse la surface. Dans quelques moulins des environs de Paris, et particulièrement dans ceux où l'on fait la mouture économique, la surface des meules est taillée de manière à offrir de petits canaux dirigés de la circonférence au centre. La disposition adoptée en Angleterre pour ces canaux paraît préférable. Elle est indiquée sur la planche D, fig. 1, où A est la meule gisante, et B la meule tournante. On voit que les faces des deux meules offrent des canaux disposés de la même manière, lesquels se croisent lorsque l'une des meules a été retournée et posée sur l'autre, ce qui aide à la mouture du blé. Les canaux doivent aussi être tracés d'après le sens du mouvement de rotation de la meule supérieure. Les meules représentées dans la figure sont censées appartenir à un moulin à main droite. Pour un moulin à main gauche, les canaux devraient être tracés en sens contraire (Gray, *Experienced millwright*, p. 55).

Sur la manière de piquer les meules.

Pl. D, Fig. 1.

Toutes les espèces de pierres ne sont point propres à faire des meules. On sait que les pierres calcaires et les grès ne peuvent être employés à cet usage. On se sert de pierres siliceuses, dont le tissu spongieux offre un caractère particulier. On s'est beaucoup occupé en Angleterre des moyens de remplacer les pierres *meulières*, qui étaient fournies par la France, soit en découvrant des carrières de pierres semblables, soit en les composant artificiellement. On trouve un procédé à cet effet décrit dans le t. 7 du *Repertory of arts and manufactures*. Il consiste à former un mélange de terres argileuses et siliceuses, qu'on fait cuire pendant vingt-quatre heures environ à un feu un peu plus fort que celui des fours à chaux. Il convient d'ajouter environ $\frac{1}{7}$ de terre calcaire, ou autres substances propres à servir de fondant, et à faire prendre au mélange la demi-vitrification qui le rend propre à faire les meules. On a aussi proposé de faire les meules en fer fondu.

Fabrication artificielle des pierres meulières.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

jamais, on ne voit pas clairement pourquoi, à mesure qu'elle est plus pesante, elle fait plus d'effet, puisque si elle était toujours également éloignée de celle de dessous, elle ne pourrait être capable que d'une impression limitée. Cependant l'expérience prouvant le contraire, j'ai soupçonné que, dans l'action de cette meule, il devait y avoir quelque chose de plus que ce qu'on a coutume d'y considérer, et qu'outre son mouvement circulaire, elle devait en avoir un autre de bas en haut et de haut en bas. Je fus examiner la chose de plus près que je n'avais fait, et je m'aperçus que j'avais rencontré juste. Le pivot de la meule reposant sur le milieu du *palier*, qui est une pièce de bois de 6 pouces de largeur sur 5 d'épaisseur, et d'environ 9 pieds de longueur entre ses deux appuis, la force élastique de cette pièce donne à la meule un mouvement continuel le long de la verticale, peu sensible à la vérité, mais qu'on ne laisse pas d'apercevoir distinctement: en voici la cause.

La force centrifuge chassant, comme je l'ai déja insinué, les grains de bled du centre à la circonférence, en leur faisant décrire à chacun une spirale, ils s'introduisent comme autant de petits coins entre les deux meules, et contraignent celle de dessus à se soulever tant soit peu. Alors le palier se trouvant soulagé d'une partie du poids dont il était chargé, se roidit et tend à se mettre dans son état naturel. Mais un instant après la meule ayant écrasé le bled qui la soutenait, le palier fléchit tout de nouveau, et d'autant plus que la meule a un plus grand poids: les grains dont nous parlons, et qui n'ont pu être que concassés, continuant de cheminer vers la circonférence pour y être entièrement pulvérisés, sont d'autant plus pressés par le poids de la meule, qu'ils se trouvent resserrés dans un espace plus étroit.

Les effets de deux meules différentes sont dans la raison composée de leur masse et de leur vîtesse.

638. Comme c'est le mouvement circulaire de la meule qui fait tomber le bled de la trémie par intervalles, et avec une vîtesse qui dépend de celle de la meule, il succède d'autres grains qui la soulèvent tout de nouveau, et la farine qui vient d'être faite cessant d'être pressée, est emportée dans le *blutoir* par la circulation de l'air que la meule met en mouvement, et qui forme un tourbillon dans le tonneau. Or, puisque ce sont les deux mouvements que je viens d'expliquer qui concourent à moudre le bled, je conclus que *les effets de deux meules différentes sont dans la raison composée de leur vîtesse et de leur pesanteur*, et qu'en général les mêmes effets seraient beaucoup moindres si les pivots de ces meules, au lieu de reposer sur une pièce à ressort, avaient un appui inébranlable, comme je l'ai éprouvé en faisant étançonner le palier. Aussitôt que la meule n'eut plus que son mouvement horizontal, la farine devint si grossière, qu'à peine le son en était détaché.

On doit entendre par la vîtesse d'une meule, le chemin que fait en tournant un des points de sa circonférence moyenne pendant un temps

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

déterminé, et se rappeler que cette circonférence a pour rayon les deux tiers de celui de la meule (240). J'ajouterai qu'une meule doit faire au plus 60 tours par minute, pour ne point échauffer la farine.

639. Je ne dis rien du plus ou du moins de surface que pourrait avoir la base de plusieurs meules de différents diamètres; car pourvu qu'elles aient la même quantité de mouvement, elles produiront toujours le même effet. Il est vrai qu'il paraît d'abord que de deux meules de même pesanteur, celle qui a la plus grande base pouvant faire impression sur une plus grande quantité de blé, doit en moudre davantage à-la-fois. Mais c'est ce qui n'arrive pas, parce que si sous les meules il se trouvait répandue également une quantité de blé proportionnée à leurs bases, le poids dont chaque grain sera pressé sera dans la raison réciproque des quarrés des diamètres, c'est-à-dire que chaque grain qui répondra à la plus grande base sera moins pressé que chacun de ceux qui répondront à la petite, dans la raison que le quarré du diamètre de celle-ci sera plus petit que le quarré du diamètre de l'autre (219). Cependant la raison simple des diamètres ne laisse pas que d'entrer pour quelque chose dans l'effet de ces deux meules, puisque leurs vîtesses sont dans la raison composée de leurs rayons et du nombre de tours que l'une et l'autre feront dans le même temps.

Les meules ordinaires ont depuis 5 jusqu'à 7 pieds de diamètre, sur 12, 15, 18 pouces d'épaisseur. Elles durent 35 à 40 ans, et après qu'elles ont tourné long-temps, et lorsque leur épaisseur est considérablement affaiblie, on les taille de nouveau pour donner à leur surface une figure opposée à celle qu'elle avait, et pour les faire servir encore de meules gisantes pendant plusieurs années (*di*).

(*di*) L'explication contenue dans les art. précédents de la manière dont les meules réduisent le grain en farine, suffit pour donner à-peu-près l'idée de cette opération. Je n'entrerai pas sur ce sujet, ni sur la manutention de la mouture, dans des détails qu'il faut chercher dans les traités spéciaux (*Art du meûnier*, par M. Malouin; *Manuel du meûnier et du charpentier de Moulins*, par Beguillet, 1775; *Idem*, par Bucquet, 1791; etc.). J'ajouterai seulement quelques notions générales et résultats d'expérience, nécessaires au mécanicien qui s'occupe de l'établissement d'un moulin. Notions élémentaires sur la mouture du blé.

On emploie pour la mouture du blé plusieurs méthodes qui peuvent se diviser en deux principales : la *mouture à la grosse*, la plus ancienne et jusqu'à ces derniers temps la plus généralement suivie; et la *mouture économique*, employée depuis long-temps en secret par quelques meûniers des environs de Paris, mais qui n'a été rendue publique et n'a commencé à se répandre qu'en 1760. La différence essentielle de ces deux méthodes consiste en ce que dans la première le blé ne passe qu'une fois sous la meule, tandis que dans la mouture économique on remoud les gruaux qui ont été séparés par le blutage. L'avantage de cette dernière mouture a

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Comme il est à propos, avant de construire un moulin, de prendre de justes mesures qui en assurent le succès, voici quelques observations qui pourront avoir leur utilité.

été constaté par des expériences nombreuses et authentiques, et il est bien reconnu qu'en ne faisant passer le blé qu'une fois sous la meule, d'une part on obtient une farine moins bonne, parce qu'il faut la soumettre à une plus grande pression, et de l'autre on laisse dans le son une portion assez considérable de farine qui pourrait en être extraite par un second moulage.

On voit par les résultats du mémoire de Leroy, Tillet et Desmarest (*Académie des sciences*, 1783), qui contient les recherches et les expériences les plus authentiques qui aient été faites sur cette matière, qu'à Paris, au moyen de la mouture économique, on tire ordinairement de 560^k de froment les produits suivants, savoir : 320^k de farine 1^{re} qualité, 54^k de 2^e, 26^k de 3^e, 20^k de farines bises, et 126^k de gros son et recoupes ; il y a 14^k de déchet. Par la mouture à la grosse, on n'obtiendrait que 280^k de farine de première qualité. Les 560^k de froment traités par la mouture économique fournissent 420^k de pain de première qualité en pains dits de 4 livres, et 131^k de pain dont moitié en bis blanc et moitié en pain bis. Traitée par la mouture à la grosse, la même quantité de blé ne donnera que 356^k de pain de 1^{re} qualité, 89^k de 2^e, et autant de 3^e.

Du poids des meules relativement à leur grandeur.

On emploie pour la mouture des meules de différentes grandeurs. Celles des environs de Paris ont environ 2^m de diamètre. Elles n'ont communément en Angleterre que $1^m,4$ environ. Les plus grandes meules paraissent le plus avantageuses. Le poids des meules semble devoir être proportionnel à leur surface. Dans le moulin de La Fère, dont Bélidor a donné le calcul, chaque mètre quarré de la surface de la meule était chargé d'un poids de 713^k. Dans un des moulins examinés par Lambert (*Académie de Berlin*, 1775) ce poids était de 743^k, et dans l'autre de 862^k. D'après l'*Art du meûnier*, il devrait être 600^k environ. Les observations de M. Fabre (*Essai sur la construction des machines hydrauliques*, p. 232) le portent à 942^k, dans le cas où le moulin travaille de la manière la plus avantageuse ; et lorsque ce poids est le moindre possible pour faire de la bonne farine, ce qui arrive quand on emploie une meule de $0^m,89$ de diamètre pesant 700^k, il est seulement de 749^k (*Idem*, p. 235). D'après les bases adoptées par M. Brewster (*Ferguson's lectures*, t. 2, p. 160), il serait de 1070^k. On peut admettre que la charge sur chaque mètre quarré de la surface de la meule doit être moyennement de 850^k.

De la vîtesse des meules.

La vîtesse la plus convenable pour la meule est un élément important de l'établissement des moulins. Les 60 tours par minute, indiqués par Bélidor art. 638, devant s'entendre des meules qui ont 2^m de diamètre, répondent à une vîtesse moyenne, c'est-à-dire à une vîtesse du point situé aux $\frac{2}{3}$ du rayon, de $4^m,19$ par seconde. Cette vîtesse, dans le moulin de La Fère dont on trouvera plus bas les détails, n'était que de $3^m,61$. Ces deux nombres offrent les deux extrêmes entre lesquels *l'Art du meûnier* conseille de se tenir. Dans l'un des moulins analysés par Lambert (*Académie de Berlin*, 1775) elle était de $5^m,97$, et dans l'autre de $6^m,02$. On déduit des observations de M. Fabre (*Essai sur la construction des machines hydrauliques*, p. 229) qu'on peut porter la vîtesse moyenne de la meule jusqu'à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

640. Les eaux vives, de quelque part qu'elles viennent, suivant d'elles-mêmes la pente du terrain qui leur est le plus propre pour s'écouler, il faut, avant de faire aucune dépense pour les rassembler, niveler cette pente pour voir à quelle hauteur on pourra les faire gonfler à l'aide d'une écluse, digue ou chaussée, sans incommoder le pays. On jugera de-là quelle sera la chûte à l'endroit le plus convenable pour l'emplacement du moulin ; observant qu'il faut que cette chûte ait au moins 3 pieds, si on veut faire passer l'eau au-dessous de la roue, qui est la manière la plus commode, parce qu'on a la liberté de faire son diamètre aussi grand qu'on veut, et d'élever le rez-de-chaussée du moulin autant qu'il sera nécessaire pour le mettre à l'abri des crues d'eau.

Attentions qu'il faut avoir avant de construire un moulin à eau.

Ensuite il faut examiner si la source sera assez abondante pour faire aller le moulin sans interruption. On en jugera en mesurant exactement son produit, en été plutôt qu'en hiver ; autrement il pourrait arriver qu'on n'aurait de l'eau que pour faire aller le moulin une partie de l'année. Il faut donc contraindre l'eau à ne s'écouler que par un seul endroit, pour voir combien il en passe de pieds cubes pendant une minute (524). Si l'on est obligé de rétrécir son passage et de la faire gonfler, il faut que pendant le temps de l'écoulement son niveau s'en-

---

$2^m,72$ et $3^m,46$ sans que la farine soit échauffée ; qu'une légère altération commence à se manifester quand la vîtesse est de $3^m,85$, et que cette altération devient de plus en plus considérable quand la vîtesse augmente. La vîtesse d'une meule des moulins du Basacle, dans une observation faite par M. de Marivetz (*Observations sur quelques objets d'utilité publique*, p. 168) était de $6^m,09$. D'après les résultats donnés par M. Fenwick, auxquels on paraît accorder beaucoup de confiance en Angleterre, une meule de 5 pieds anglais de diamètre travaille de la manière la plus avantageuse quand elle fait 90 tours par minute, ce qui suppose au point situé aux $\frac{2}{3}$ du rayon une vîtesse de $4^m,79$. On voit par-là que la vîtesse des meules est susceptible de varier dans des limites assez étendues. Comme dans les calculs de l'établissement d'une machine, on doit compter sur une vîtesse moyenne, et non sur la plus grande vîtesse qu'elle puisse prendre sans inconvénient, j'admettrai 4^m par seconde pour celle qui convient au point d'une meule situé aux $\frac{2}{3}$ de son rayon.

D'après les calculs qu'on trouvera dans les notes (ds) et (dv), il paraît que l'effort nécessaire pour faire tourner une meule, supposé appliqué aux $\frac{2}{3}$ de son rayon, peut être évalué moyennement le $\frac{1}{22}$ du poids de la meule et de l'équipage. Il suit de là et de ce qui précède, qu'en représentant par d le diamètre d'une meule évalué en mètres, le nombre de tours qu'elle fera dans une seconde sera $\frac{4}{\frac{2}{3}\pi d}=\frac{1,91}{d}$; son poids réuni à celui de l'équipage, $850^k.\frac{1}{4}\pi d^2=668\,d^2$ kil. ; l'effort exercé aux $\frac{2}{3}$ du rayon, $\frac{1}{22}\,668\,d^2=30,36\,d^2$ kil. ; et enfin la quantité d'action dépensée dans chaque seconde pour la faire tourner, $4^m\times 30^k,36\,d^2=121,4\,d^2$ kil. × mèt.

De la quantité d'action dépensée pour faire tourner une meule.

Il reste maintenant à savoir quelle quantité de blé on pourra moudre en dépen-

De la quantité de blé moulue par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tretienne toujours à la même hauteur, et avoir égard à tout ce qui peut en rendre la mesure exacte. Il y a pour cela mille moyens aisés à imaginer sans qu'il soit nécessaire que je m'y arrête.

---

une quantité d'action donnée.

sant cette quantité d'action. Les divers résultats que j'ai pu recueillir sur cette matière importante sont rassemblés dans le tableau suivant.

	Quantité de blé moulue pour une quantité d'action équivalente à 1000 kil. × mèt.
	k
1° Dans le moulin de La Fère décrit par Bélidor : un effort de 66k exercé sur un point dont la vitesse est 3m,61, mout 375 liv. de farine par heure (voyez ci-dessous la note (*ds*))	0,214
2° Dans le moulin de Nun-Eaton décrit par Desaguliers (voyez ci-dessous la note (*dm*), § 2)	0,1018
3° Dans le moulin décrit par Lambert : un effort de 62k,7 exercé sur un point dont la vitesse est 5m,97, mout 4678k de blé par jour (voy. ci-dessous la note (*ds*)...	0,1428
4° Dans un moulin horizontal décrit par M. Fabre : un effort de 62k appliqué à un point dont la vitesse est 4m,08, mout 191k de blé par heure (voyez ci-dessous la note (*dv*), § 2)	0,2099
5° D'après les observations de Coulomb sur les moulins à vent (*Académie des Sciences*, 1781) : quand la vitesse du vent est de 18pi, et que les meules font 60 tours par minute	0,2371
Quand la vitesse du vent est de 28pi, et que les meules font 110 tours par minute (*)	0,1419
6° D'après M. Fenwick (*Four Essays on practical mechanics*, 1802, p. 60) : un poids de 300 livres élevé à 210 pieds dans une minute mout un *boll* de blé par heure (mes. angl.) (**)	0,1979
7° D'après le même : un poids de 300 livres élevé à 865 pieds dans une minute mout 5 *bolls* de blé par heure (mes. angl.)	0,2402
8° D'après Montgolfier (*Journal de l'École Polytechnique*, 14e cahier, p. 290) : une quantité d'action de 750000k×m mout un setier de blé (***)	0,156

Parmi ces résultats, le plus faible est celui du moulin décrit par Desaguliers. On verra dans la note (*dm*) les circonstances qui peuvent rendre en partie raison de son infériorité. On ne doit point être étonné, dans un genre d'observations où les résultats peuvent varier en raison de tant de circonstances, de trouver d'assez grandes différences entre ceux qui sont immédiatement déduits d'expériences isolées. Quant aux résultats donnés par les savants, et qui doivent naturellement être considérés comme des termes moyens, j'observerai que ceux de M. Fenwick s'appliquent à de bons moulins, où les meules ayant 1m,5 environ de diamètre font

(*) Les résultats sont établis d'après le calcul fait par Coulomb de la quantité d'action transmise aux moulins à colza, dans le cas où la vitesse du vent est de 20pi par minute; et en supposant la quantité d'action transmise proportionnelle au cube de la vitesse du vent. On a retranché sur cette quantité d'action $\frac{1}{15}$ pour tenir compte des frottements. On reviendra sur ces calculs dans le volume suivant.

(**) Le *boll* vaut 4 *bushels*. Le poids légal du *Winchester bushell* de blé est 57 livres avoir-du-poids = 25k,85. Le volume légal de cette mesure étant 0mc,03524, il résulte de là pour le poids du mètre cube de blé 734k.

(***) Le setier de blé à Paris pèse moyennement 117k. Son volume étant 0mc,1561, on en déduit pour le poids moyen du mètre cube de blé 750k. Ce poids varie un peu dans différentes années.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Prévenu de la quantité d'eau dont on pourra disposer, et de la hauteur de la chûte, il faut voir si la dépense qui se fera par un pertuis égal à la

---

90 à 100 tours par minute. Le résultat de Montgolfier convient aux moulins ordinaires des environs de Paris, où l'on imprime rarement aux meules une vîtesse suffisante, et où elles n'ont point reçu la taille usitée en Angleterre, indiquée dans la note (*dh*), et qui paraît plus avantageuse. Ce résultat suppose d'ailleurs la force consommée par les frottements comprise dans celle employée à écraser le blé, en sorte que les $0^k,156$ doivent être portés à $0^k,17$ au moins. D'après ces observations, il m'a paru qu'on ne risquerait point d'estimer la force consommée par la mouture au-dessous de sa véritable valeur, et qu'on approcherait de la vérité autant qu'on peut l'espérer dans ce genre de recherches, en admettant qu'une quantité d'action équivalente à $1000^{k\times m}$ dépensée pour faire tourner une meule, peut moudre moyennement $0^k,18$ de blé; ou que, pour moudre un kil. de blé, il faut dépenser $\frac{1000}{0,18} = 5556^{k\times m}$ de quantité d'action. D'après cela, la quantité d'action qu'une meule consomme dans une seconde étant $121,4\,d^2$ kil. × mèt., la quantité de blé qu'elle moudra dans le même temps sera $0,02185\,d^2$ kil.

La table suivante, construite d'après les bases établies dans cette note, paraît susceptible d'être employée utilement dans l'établissement des moulins à blé. Elle suppose aux meules le poids et la vîtesse indiquées ci-dessus, et qui paraissent les plus convenables. On fait souvent travailler les meules avec une charge et une vîtesse moindres, mais aussi on obtient un produit plus faible, et qui diminue même dans une proportion plus rapide que la quantité d'action dépensée.

Diamètre des meules.	Poids des meules.	Nombre de tours par seconde.	Quantité d'action dépensée par seconde.	Quantité de blé moulu par seconde.
mètres	kilogrammes		kil. × mèt.	kilogramme
1,0	668	1,91	121,4	0,02185
1,1	808	1,81	146,9	0,02644
1,2	961	1,72	174,8	0,03147
1,3	1128	1,62	205,2	0,03693
1,4	1308	1,53	238,0	0,04283
1,5	1501	1,43	273,2	0,04917
1,6	1709	1,34	310,7	0,05594
1,7	1929	1,24	350,8	0,06315
1,8	2163	1,14	393,2	0,07080
1,9	2410	1,05	438,2	0,07888
2,0	2670	0,95	485,5	0,08741
2,1	2944	0,86	535,3	0,09637
2,2	3231	0,76	587,5	0,10576
2,3	3521	0,67	642,2	0,11560

Il est à remarquer que les évaluations précédentes conviennent proprement à la mouture à la grosse, et il faudra se rappeler que dans la mouture économique il y a environ le tiers du temps du moulin employé à remoudre les gruaux. Il ne faut pas oublier non plus que les quantités d'action indiquées dans la quatrième colonne sont censées dépensées dans l'axe de la meule, et qu'il faudra y ajouter celles consommées par les frottements pour la transmission de l'effort du moteur à cet axe.

J'observerai enfin que l'évaluation de la quantité de blé moulue convient principa-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

superficie d'une des aubes de la roue, ne l'excédera pas: moyennant toutes ces considérations, on sera en état de prendre son parti.

Pl. 1, Fig. 2.

641. Lorsque les rivières ne sont pas navigables, et qu'on y veut construire des moulins, on en arrête le cours naturel par une écluse qui soutient l'eau à une hauteur suffisante, et à côté on fait un déchargeoir qui entretenant toujours l'eau au même point, facilite l'écoulement du superflu, afin de ne point inonder les campagnes voisines; inconvénient essentiel à prévoir. C'est pourquoi il faut, avant toutes choses, bien connaître la situation du pays, et s'informer où peuvent s'étendre les crues d'eau qui surviennent dans certains temps, et qui pourraient incommoder le voisinage.

Il y a sur-tout beaucoup de mesures à garder quand on veut construire un moulin sur une rivière où il y en a déja d'établis, de crainte de s'incommoder réciproquement. Si l'on en fait un au-dessous d'un ancien, et qu'on n'en soit point assez éloigné, on n'aura que peu de chute; et en voulant soutenir les eaux, on noiera peut-être le moulin supérieur. Si au contraire on veut l'établir au-dessus, cela ne se pourra sans diminuer la chute de l'inférieur, à moins qu'on ne remonte vers la source autant qu'il sera nécessaire. Il y a sur ce sujet mille choses a prévoir, qui sont d'une extrême conséquence. D'ailleurs il faut être bien sûr du droit que l'on a de faire construire un moulin à l'endroit que l'on a en vue, sans avoir aucune opposition à craindre. Souvent un moulin bâti au hasard devient une source de procès qui entraînent la ruine du propriétaire. Au reste, en quelque endroit qu'on veuille en établir, il faut, en faisant l'écluse qui doit soutenir les eaux, ménager une ou deux vannes de décharge, indépendamment de celles qui ferment le coursier (*dk*).

---

lement à des moulins où il n'y a qu'une seule meule de 2000 à 3000 kil., ou plusieurs petites meules équivalentes à celle-là. Si le moulin est plus faible, les résultats seront moindres, et ils seront plus avantageux pour une machine plus puissante, conformément aux observations de M. Fenwick rapportées ci-dessus.

On renvoie aux volumes suivants les questions relatives au ménagement des eaux pour les usines.

(*dk*) Les considérations que l'auteur indique ici en peu de mots sont effectivement très-essentielles. Cette partie de l'établissement des moulins dans laquelle on s'occupe du ménagement des eaux, est un objet de la plus grande importance, et qui mérite d'être développé dans tous ses détails. Mais ces développements doivent nécessairement être fondés sur les lois du mouvement de l'eau coulant dans des canaux et rivières et reversant sur des barrages, lois qui n'ont point été exposées dans le 1^er^ livre, et qui ne peuvent l'être ici. On s'en occupera dans les volumes suivants, où l'on reprendra les questions relatives à l'établissement des usines. On peut d'ailleurs consulter sur ce sujet le *Mémoire sur le jaugeage des eaux courantes*, et les *Recherches physico-mathématiques sur le mouvement des eaux courantes*, par M. de Prony, ainsi que les *Principes d'hydraulique* de Dubuat, part. 1, sect. 3, chap. 3.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

642. Il faut que l'eau qui fait tourner une roue de moulin puisse s'échapper avec plus de vîtesse que n'en a la roue, autrement elle devient un obstacle, par l'opposition qu'elle présente à celle qui frappe les aubes. C'est pourquoi il faut donner beaucoup de pente au coursier, ménager à sa sortie le plus d'étendue que l'on pourra, afin que l'eau fuie sans rien rencontrer qui la fasse rejaillir. Entre la vanne et la roue il ne doit y avoir que le moins d'intervalle qu'il est possible, afin que l'eau, en sortant du pertuis, vienne frapper les aubes par le chemin le plus court; de même il ne faut donner entre les bords de l'aube verticale et le coffre du coursier, que le jeu nécessaire pour le mouvement de la roue, afin que toute l'eau soit uniquement employée à la faire tourner. Je voudrais aussi que le coursier allât en s'élargissant vers ses deux extrémités, pour faciliter l'entrée et la sortie de l'eau.

Remarques sur la disposition qu'on doit donner aux coursiers d'un moulin.

Les moulins que l'on établit sur des bateaux ne demandent pas tant de sujétion, puisqu'il suffit seulement de faire en sorte, à l'aide des rouets et lanternes, que le courant puisse donner à la meule une vîtesse qui lui fasse faire environ 60 tours par minute (638). Pour peu que l'on sache les principes de la mécanique, il est bien aisé de régler cette vîtesse, eu égard à la force respective du courant; c'est pourquoi je ne m'arrêterai point à ces sortes de moulins, qui ne sont susceptibles d'aucuns calculs qu'on ne soit en état de faire quand on aura entendu les endroits les plus intéressants de ce chapitre (*dl*).

(*dl*) L'auteur ne parle qu'en passant des moulins établis sur bateaux, parce qu'il ne fait aucune distinction entre le cas où une roue tourne dans un coursier, et celui où elle se meut dans un courant d'une largeur et d'une profondeur indéfinies. Mais on a vu dans la note (*da*) qu'il était indispensable de distinguer ces deux espèces de roues, et que leurs théories respectives dépendaient de considérations différentes. Je vais m'occuper ici des roues *pendantes* des moulins sur bateaux. On trouvera dans la note (*dn*) les lois de l'établissement des roues contenues dans un coursier.

§ 1. Une roue à aubes étant supposée tourner dans un courant d'une étendue indéfinie, on peut considérer l'action qu'elle en reçoit comme étant de la même nature que celle qui s'exercerait sur un corps mu dans le sens du courant avec une vîtesse égale à celle du centre des aubes. Par conséquent, d'après ce qu'on a vu dans le § 1 de la note (*dl*), en appelant Ω l'aire de la partie de l'aube qui est plongée dans l'eau quand cette aube est verticale, V la vîtesse circulaire du centre de cette aire, et v la vîtesse du courant, l'effort P exercé par l'eau dans le sens de la circonférence de la roue doit avoir pour expression $P = k \cdot 1000\,\Omega \frac{(v-V)^2}{2g}$ kil.; ou $P = k \cdot 1000\,\Omega\, h$ kil., en faisant la hauteur due à la vîtesse relative $\frac{(v-V)^2}{2g} = h$. La quantité k est un coëfficient numérique, dont la valeur doit être déterminée par l'observation. La quantité d'action transmise par la roue, ou le travail qu'elle peut

Théorie des roues à aubes mues dans un courant d'une largeur et d'une profondeur indéfinies.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Description des roues de moulin, nommées vulgai-

643. Dans plusieurs provinces, lorsque l'eau destinée à faire tourner un moulin n'est pas abondante, on la conduit au-dessus de la roue A par

---

effectuer, abstraction faite des résistances provenant de la machine à laquelle elle est appliquée, sera exprimée pour une seconde par $PV = k.1000\,\Omega\frac{(v-V)^2 V}{2g}$; ou $PV = k.1000\,\Omega h.V$ kil. × mèt.

Condition à remplir pour obtenir le plus grand effet possible.

Le mouvement d'une roue devant toujours être réglé de manière à en obtenir la plus grande quantité d'action possible, il faut dans la pratique donner à V une valeur telle qu'elle rende PV un maximum. En supposant le coëfficient k constant, cette condition sera remplie en faisant $V = \frac{1}{3}v$, comme on l'a déja vu dans la note (*da*), c'est-à-dire que la vîtesse des aubes doit être le $\frac{1}{3}$ de celle du courant.

Mettant cette valeur de V dans les formules ci-dessus, on aura pour l'expression du maximum de quantité d'action, $P.\frac{1}{3}v = \frac{4}{27}k.1000\,\Omega\frac{v^3}{2g}$ kil. × mèt. L'effort exercé sur la roue sera dans le cas du maximum $P = \frac{4}{9}k.1000\,\Omega\frac{v^2}{2g}$ kil.

Comment la quantité d'action transmise à la roue doit être évaluée dans la pratique.

En se rappelant ce qui a été dit dans les § 4 et 5 de la note (*db*), on jugera que le coëfficient k doit augmenter un peu avec la vîtesse respective $v - V$, dans les cas assez fréquents où les aubes ne plongeant pas entièrement dans l'eau, leur résistance est analogue à celle des corps flottants. Il résulterait de là que la vîtesse des aubes correspondante au maximum d'effet doit alors être un peu moindre que le $\frac{1}{3}$ de celle du courant; et cette conséquence paraît exacte, quoique contredite par les expériences rapportées art. 1040 de l'*Hydrodynamique* de Bossut. Quand les aubes sont entièremen. plongées dans l'eau, il paraît que le coëfficient k peut être censé constant, et que la vîtesse la plus avantageuse doit être exactement le $\frac{1}{3}$ de celle du courant, comme cela se déduit des expériences de M. Boistard (*Experiences sur la main-d'œuvre de différents travaux*, p. 72).

A l'égard de la valeur numérique de k, la théorie ne fournit aucune ressource pour la déterminer. Il paraît seulement, d'après le § 5 de la note (*db*), que k est compris entre les limites zéro et $2+\frac{z}{h}$, z représentant la profondeur sous l'eau du milieu de Ω. L'expérience n'apporte également que peu de lumières sur ce sujet. On peut remarquer toutefois que les portions de diverses roues à aubes qui sont plongées dans l'eau, sur-tout quand les aubes sont suffisamment rapprochées les unes des autres, ne reçoivent point le choc de l'eau comme le feraient des plans minces. On doit les considérer au contraire comme des corps de figures à-peu-près semblables, contre lesquels, d'après les principes établis dans la note (*db*), le courant exerce des efforts proportionnels à leur section transversale ou à l'aire Ω de l'aube, et à la hauteur h due à la vîtesse relative. Il s'ensuivrait de là que le coëfficient k de la formule précédente devrait être à-peu-près le même, quelle que fût la grandeur absolue des aubes, et par conséquent que sa valeur pourrait se déterminer aussi-bien par des expériences en petit, que par des expériences en grand.

Les seules expériences en grand qu'on sache avoir été publiées sur ce sujet sont celles de M. Boistard, d'où il conclut que dans les grandes roues à coursier placées sur les rivières, le choc n'est jamais inférieur au poids du prisme d'eau qui a pour base la surface de l'aube, et pour hauteur le double de celle due à la vîtesse rela-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

une buse MN, dont l'entrée P se ferme avec une vanne QR, qui maintient le niveau ST à une hauteur médiocre. Cette eau provient ordinairement roues à pot. Pl. 1, fig. 4.

---

tive; et que si la roue trempe peu, comme du quart ou du tiers de son rayon, on peut, sans erreur, prendre pour la hauteur du prisme le triple de celle due à la vîtesse relative (*Expériences sur la main-d'œuvre*, p. 69): ce qui revient à considérer le nombre k comme devant être compris entre les nombres 2 et 3. Quant aux expériences en petit, il est extrêmement fâcheux que Deparcieux n'ait point donné dans son mémoire de 1759 les renseignements suffisants pour calculer l'effort qui était exercé sur les aubes de sa roue: on se trouve réduit par-là aux observations publiées par Bossut dans le chap. 18 du tome 2 de son *Hydrodynamique*. J'indiquerai le calcul de la 11^{e} du tableau de l'art. 1040, qui offre les données suivantes.

Largeur des aubes, $5^{po} = 0^{m},135$.

Hauteur dont l'aube s'enfonce dans l'eau, $4^{po} = 0^{m},108$.

D'où surface de l'aube $= \Omega = 0^{m},135 \times 0^{m},108$.

Vîtesse de l'eau, $\frac{2740^{po}}{40''} = 68^{po},5$; vîtesse du centre de l'aube, $\frac{1189^{po}}{40''} = 29^{po},72$; vîtesse relative $38^{po},8$: d'où hauteur due à cette vîtesse $= h = 2^{po},077 = 0^{m},0562$.

Diamètre extérieur de la roue, $3^{pi} = 0^{m},975$; d'où diamètre au centre de la partie plongée de l'aube, $0^{m},866$.

Diamètre du treuil, augmenté de l'épaisseur du cordon, $2^{po}\ 8^{li} = 0^{m},0722$.

Poids soulevé par le cordon, $60^{liv.} = 29^{k},37$; d'où effort exercé au centre de l'aube, abstraction faite des frottements, $P = 29^{k},37 \frac{0,0722}{0,866} = 2^{k},449$.

Mettant ces nombres dans la formule $P = k.1000\,\Omega h$, on en déduit $k = 2,97$. Cette valeur devrait être un peu augmentée, eu égard au frottement sur les axes et à la roideur du cordon, qui ont été négligés; et on voit que cette expérience confirme les résultats de M. Boistard.

Comment les roues pendantes doivent être disposées pour recevoir le plus grand effort de la part du courant.

Il paraît d'ailleurs que la valeur de l'effort exercé sur la roue dépend en partie de diverses circonstances qui ne doivent point être négligées dans la pratique. Les principales sont la grandeur du rayon comparée à la hauteur dont les aubes plongent dans l'eau, le nombre des aubes, et leur inclinaison sur la circonférence de la roue. Il ne faut pas que la roue plonge dans l'eau de plus du $\frac{1}{3}$ ou plutôt du $\frac{1}{4}$ de son rayon. Les aubes doivent être espacées d'une quantité à-peu-près égale à leur hauteur, malgré les préjugés contraires, qui s'opposent à ce qu'une aube en recouvre une autre. Deparcieux a prouvé par des expériences directes (*Académie des sciences*, 1759) qu'une aube placée derrière une autre n'en recevait pas moins un certain effort de la part du courant, et que la situation de la roue où l'action du courant est le plus considérable n'était point, comme on le croyait généralement, celle où une aube est verticale, mais celle où deux aubes voisines sont également plongées dans l'eau. On donne ordinairement huit à dix aubes aux roues des moulins sur bateaux, à qui l'on devrait en donner au moins vingt. Quant à l'inclinaison des aubes, l'angle le plus avantageux qu'elles puissent faire avec le rayon mené à leur extrémité inférieure, diminue à mesure que la roue plonge dans l'eau sur une plus grande hauteur. Il est d'environ 33 grades quand la roue plonge du $\frac{1}{4}$ ou du $\frac{1}{3}$ du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rement de plusieurs sources que l'on rassemble dans un grand réservoir soutenu par une chaussée ou digue.

---

rayon, et d'environ 17 grades quand elle plonge de la moitié de ce rayon (voyez Deparcieux, *Académie des sciences*, 1759; Bossut, *Hydrodynamique*, art. 1046). J'observerai cependant qu'il est rapporté dans le *Manuel du meûnier* de Beguillet, p. 27, qu'une roue à aubes inclinées sur le rayon, essayée sur un moulin à bateau de Paris, n'a pas réussi. L'inclinaison était vraisemblablement trop grande, eu égard à la hauteur des aubes.

Dans l'incertitude où l'on se trouve encore sur ce sujet, il me paraît qu'il ne serait pas prudent d'attribuer au coëfficient k dans les formules précédentes une valeur plus grande que celle $k=2,5$, moyenne entre celles obtenues par M. Boistard, et c'est cette détermination que j'adopterai dans la suite.

Emploi des roues pendantes à la construction d'un moulin à blé.

§ 2. D'après ce qui précède, l'établissement d'un moulin à blé mu par une roue pendante pourra être fait au moyen des formules suivantes.

Nommons v la vîtesse ordinaire du courant, D le diamètre de la roue, pris au centre des aubes, Ω l'aire des aubes, d le diamètre de la meule, D′ le diamètre du rouet monté sur l'axe de la roue à aubes, d' celui de la lanterne montée sur l'axe de la meule qui engrène avec ce rouet. La vîtesse des aubes devra pour obtenir le le maximum d'effet être $\frac{1}{3}v$; la quantité d'action transmise à la roue sera $\frac{4}{27}k.1000\,\Omega\frac{v^3}{2g}=18,88\,\Omega v^3$ kil × mèt., en supposant $k=2,5$; et le nombre de tours fait par la roue dans une seconde $=\frac{v}{3\pi D}$. D'après la note (*di*) la quantité d'action dépensée par la meule en une seconde est $121,4\,d^2$, et en ajoutant $\frac{1}{10}$ pour tenir compte des frottements, $134\,d^2$ kil. × mèt. Ainsi on a pour déterminer Ω la relation $18,88\,\Omega v^3=134\,d^2$, d'où $\Omega=7,1\frac{d^2}{v^3}$ mèt. quarrés. D'après cette même note, le nombre de tours que la meule doit faire dans une seconde est $\frac{1,91}{d}$, d'où il suit que le rapport des diamètres du rouet et de la lanterne est $\frac{D'}{d'}=\frac{1,91\times 3\pi D}{v\,d}=18\frac{D}{v\,d}$. On voit dans les traités pratiques que, pour que les moulins de cette espèce réussissent bien, il faut que le diamètre D de la roue à aubes soit de 5^m au moins, et que le rayon D′ du rouet en soit environ la moitié. La hauteur des aubes ne doit pas être moindre de $0^m,33$, ni plus grande que le $\frac{1}{4}$ du rayon de la roue.

Pour donner un exemple de l'emploi de ces formules, je supposerai un moulin placé dans un courant dont la vîtesse est de $2^m,5=v$ par seconde, ayant une seule meule dont le diamètre est $2^m=d$. La formule $\Omega=7,1\frac{d^2}{v^3}$ donnera d'abord pour la surface des aubes $\Omega=1^{mq},82$: ainsi ces aubes pourront avoir $0^m,6$ de hauteur sur $3^m,1$ de longueur. Le diamètre de la roue à aubes étant supposé de $5^m=D$, la formule $\frac{D'}{d'}=18\frac{D}{v\,d}$ donnera $\frac{D'}{d'}=18$. Il serait impossible d'avoir un engrenage simple, car en ne donnant à la lanterne que $0^m,4$ de diamètre, celui du rouet devrait être encore de plus de 7^m. En adoptant un double engrenage, on pourra faire un premier rouet de 3^m de diamètre engrenant dans une lanterne de $0^m,75$, et un second rouet de $2^m,25$ engrenant dans une lanterne de $0^m,5$. La quantité de blé

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La circonférence des jantes de la roue est couverte d'ais, et forme un tambour dont la surface sert de fond à une espèce d'auge circulaire renfermée par d'autres ais, comme VX, entretenus ensemble par un nombre de petites cloisons composées de deux planches BC et CD. Ainsi l'espace renfermé entre deux cloisons BCD et EFG forme une cellule dans laquelle l'eau venant tomber, son choc et son poids font tourner la roue. On voit que d'après la figure qu'on donne aux cellules, il y en a toujours plusieurs dans lesquelles le poids de l'eau agit, parce que les premières H et I étant descendues en K et en L, retiennent encore la plus grande partie de l'eau qu'elles ont reçue. Quand la chute n'est pas assez haute pour faire passer l'eau au-dessus de la roue, on dispose les cellules d'un sens opposé à celui que nous venons de dire, comme on le voit dans la figure troisième, où l'eau se déchargeant à la hauteur du centre de la roue, il suffit que sa chute soit un peu plus haute que son axe. Mais, d'une manière comme de l'autre, ces sortes de roues, que les meûniers nomment *roues à pot*, sont défectueuses, en ce qu'elles perdent une bonne partie de l'eau, qui s'échappe par les côtés. Cependant quand on n'en a qu'en petite quantité on ne saurait trop la ménager, autrement le moulin chôme tous les jours pendant quelques heures. Pl. 1, Fig. 3.

644. Pour remédier à cet inconvénient, on ferait beaucoup mieux de conduire l'eau par une auge inclinée CAB, terminée en portion de cercle vers le bas de la roue, faite de manière que le fond et les côtés approchent de si près les aubes qu'il n'y ait que le jeu nécessaire, alors toute l'eau sera employée à faire tourner la roue. Son impulsion sera bien plus grande que dans le cas précédent, sans qu'on en dépense davantage, parce que tombant de toute la hauteur de la chute, elle acquerra une vîtesse qu'elle n'avait pas; et celle qui aura choqué les premières aubes, agira encore par son poids jusqu'à la sortie B (*dm*). Figure 8.

---

moulue dans une seconde sera, d'après la table de la note (*di*), $0^k,0874$, ce qui revient à 65 septiers de 117^k en 24 heures, en supposant qu'il n'y eût point de temps perdu, et en mouture économique à 41 septiers environ. Si le moulin était établi sur un bateau, le produit serait moindre, car une meule ne travaille pas aussi-bien lorsque le mécanisme n'est pas supporté sur un sol inébranlable; mais on manque d'observations pour évaluer avec exactitude l'influence de cette circonstance.

Dans les moulins bien construits, le produit journalier d'une meule est effectivement tel qu'on vient de le trouver, mais il y en a beaucoup, même dans les environs de Paris, où faute d'avoir disposé les engrenages de manière à faire prendre à la meule toute la vîtesse qu'elle devrait avoir, on n'obtient qu'un produit beaucoup moindre, tel que 15 à 20 septiers par jour.

(*dm*) L'auteur s'arrête à peine sur les roues à pots ou à augets, et la condamnation Les roues à gets, condamn

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Manière de tirer le meilleur parti qu'il est possible

645. Voici encore un moyen, quand on a une chute, de tirer tout l'avantage possible d'une petite quantité d'eau qu'on veut employer à faire

---

par Bélidor, sont au contraire fort avantageuses.

dont il les frappe a pu donner lieu à des fautes graves dans l'établissement des usines. Le perfectionnement proposé art. 645, et indiqué fig. 8, pl. 1, est d'ailleurs très-utile, et on ne peut douter qu'une roue ainsi disposée, bien loin d'être inférieure aux roues à aubes ordinaires qui prennent l'eau en-dessous, n'offre un des meilleurs moyens de tirer parti d'un petit courant d'eau. Je vais mettre dans son jour cette vérité, qui a été établie pour la première fois par Deparcieux (*Académie des sciences*, 1754), en développant les lois de l'établissement des roues de cette espèce.

Théorie des roues à augets.
PL. D, FIG. 2.

§ 1. Soit A le niveau d'un réservoir dont l'eau est conduite au moyen d'une buse sur une roue, où elle est reçue en M dans des augets, dans lesquels elle demeure contenue jusqu'à ce qu'elle s'échappe au point le plus bas D. Supposons le mouvement de la roue employé à élever le poids P par le moyen d'une corde, en admettant, pour plus de simplicité, que le bras de levier de ce poids soit égal au rayon CN de la circonférence MND passant par le centre des augets. Nommons H la hauteur totale de la chute AD, h la portion AB de cette chute; V la vîtesse du centre des augets quand le mouvement est parvenu à l'uniformité; m la masse de l'eau qui est fournie par la chute, et reçue sur la roue dans une seconde; g la vîtesse que la gravité imprime aux corps dans une seconde $=9^{m},809$.

Je remarquerai d'abord que le fluide ayant parcouru la hauteur $AB=h$ avant de rencontrer les augets, aura acquis la vîtesse $\sqrt{2gh}$. Ces augets tournant avec la vîtesse V, il se fera un choc au point de rencontre M, et le fluide perdra brusquement en ce point la vîtesse $\sqrt{2gh}-V$. De plus, quand il quittera les augets en D, ce fluide sera animé de leur vîtesse V. Cela posé, on se rappellera que, d'après les § 7 et 8 de la note (*ai*), dans tout système de corps en mouvement, la somme des quantités d'action imprimées pendant un certain temps est toujours égale à la moitié de la somme des forces vives acquises ou perdues pendant ce même temps. Considérons, par exemple, le temps qu'emploie le point M de la roue à parvenir au point D. Il se dépense pendant ce temps une quantité d'eau égale à celle contenue dans l'intervalle MND, dont la masse $=m.\frac{MND}{V}$, et le poids $=mg.\frac{MND}{V}$: et on voit 1° que puisque cette eau descend verticalement de la hauteur H, son poids imprime à la roue une quantité d'action $=mg.\frac{MND}{V}.H$; 2° que le poids P s'élevant en même temps d'une hauteur verticale égale à l'arc MND, il imprime en sens contraire une quantité d'action $=P.MND$; d'où il suit que la somme des quantités d'action imprimées est $mg.\frac{MND}{V}.H-P.MND$. D'un autre côté la vîtesse de l'eau, à l'instant où elle quitte la roue, étant V, la force vive qui a été réellement acquise dans le temps que l'on considère est $m.\frac{MND}{V}.V^2$; tandis que l'effet du choc qui a lieu en M est de faire perdre pendant ce même temps la force vive $m\frac{MND}{V}(\sqrt{2gh}-V)^2$. Égalant donc la somme des quantités d'action impri-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tourner une roue. On sait (643) que la ligne ST exprime le niveau de l'eau d'un ruisseau, ou d'un réservoir d'une médiocre profondeur, sou- d'une petite quantité d'eau qui répond à une chute.

mées à la moitié de la somme des forces vives acquises et perdues, il viendra $mg.\frac{MND}{V}.H-P.MND=\frac{1}{2}m.\frac{MND}{V}.V^2+\frac{1}{2}m.\frac{MND}{V}(\sqrt{2gh}-V)^2$, ou en réduisant, $PV=mg(H-h)+m(\sqrt{2gh}-V)V$; équation qui déterminera le mouvement de la roue, supposé parvenu à l'uniformité.

La quantité PV étant le produit du poids élevé multiplié par l'espace qu'il parcourt verticalement dans une seconde, on voit que le second membre de cette équation exprime la quantité d'action que la chute d'eau transmet à la roue pendant cet intervalle de temps, et par conséquent, conformément aux principes établis dans l'addition placée à la fin du livre précédent, de l'effet produit par cette roue, ou de la quantité de travail qu'elle peut effectuer, abstraction faite des résistances provenant de la machine à laquelle elle serait appliquée.

Conditions à remplir pour obtenir le plus grand effet possible.

L'établissement d'un moteur devant être dirigé de manière à en obtenir la plus grande quantité d'action possible, il faudra déterminer en conséquence la vîtesse V de la roue, et la hauteur h dont on fera tomber l'eau avant de la faire agir sur elle. En faisant d'abord varier V dans l'expression ci-dessus de PV, on trouve pour la valeur de V qui convient au maximum, $V=\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$, ce qui apprend que la vîtesse des augets doit être la moitié de la vîtesse que possède le fluide à l'instant où il vient frapper ces augets. Mettant cette valeur de V dans l'expression de PV, elle devient $PV=mg(H-\frac{1}{2}h)$, dont le maximum a lieu quand $h=0$, ou quand l'eau a une vîtesse infiniment petite avant d'entrer dans la roue; d'où il suit que la vîtesse de la roue doit aussi être infiniment petite.

Le plus grand effet possible est la quantité d'action représentée par la chute de l'eau.

En faisant $h=0$ et $V=0$ dans l'expression de PV, elle se réduit à $PV=mg.H$, ce qui apprend que la limite théorique de la quantité d'action transmise par une roue à augets est la quantité d'action représentée par la descente de l'eau qui agit sur elle. Cette roue est donc théoriquement aussi avantageuse qu'il soit possible, puisque la quantité d'action transmise à la résistance peut être égale à celle fournie par le moteur.

De la vîtesse d'une roue à augets, quand elle n'élève aucun poids.

On peut remarquer que si la roue n'avait aucune résistance à surmonter, ou que P fût $=0$, l'équation de son mouvement donnerait $V=\frac{1}{2}\sqrt{2gh}+\frac{1}{2}\sqrt{4gH-2gh}$. En faisant $h=0$, on a $V=\sqrt{gH}$; ce qui apprend que quand l'eau entre dans les augets avec une vîtesse infiniment petite, la limite de la vîtesse des augets est celle due à la moitié de la hauteur de la chute. Ce résultat, avancé par Borda, a été contredit, mais on s'en rend raison en observant que l'eau entrant dans les augets avec une vîtesse nulle, est obligée de prendre brusquement leur vîtesse V. Il arrive alors qu'une moitié de la quantité d'action représentée par la chute est employée à fournir la force vive perdue par ce changement brusque de vîtesse, et l'autre moitié à imprimer la force vive que l'eau possède à l'instant où elle quitte la roue. Dans l'expérience rapportée dans le dernier article de l'*Hydrodynamique* de Bossut, une roue qui n'élevait aucun poids n'a pris qu'une vîtesse due au quart de la chute à-peu-près.

§ 2. Dans la pratique, pour qu'une roue à eau marche régulièrement, il faut Application de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tenu par une vanne, qui étant levée à une certaine hauteur, proportionnée à la dépense du réservoir, entretient toujours l'eau à-peu-près au même

---

la théorie précédente à la pratique.

que sa circonférence ait une certaine vîtesse, d'autant plus grande que la masse de la roue est plus petite. L'expérience a appris qu'on pouvait fixer communément cette vîtesse à un mètre par seconde environ. Elle pourrait, pour une grande roue de 10^m de diamètre, être réduite à $0^m,6$ sans inconvénient (Smeaton, *The Miscellaneous papers*, p. 51 ; ou *Recherches expérimentales*, etc. trad. par M. Girard, p. 35).

La valeur de la vîtesse V étant fixée, celle de h, c'est-à-dire de la charge d'eau sur le point de la roue où l'eau entre dans les augets, devra être la hauteur due à une vîtesse double de V, c'est-à-dire qu'on devra avoir $2V = \sqrt{2gh}$, ou $h = \frac{2V^2}{g}$. Cette condition remplie, la quantité d'action transmise à la roue dans chaque seconde sera théoriquement $PV = mg\,(H - \frac{1}{2}h)$. Dans la pratique, cette quantité d'action est moindre, principalement parce que l'eau rejaillit hors des augets quand elle tombe dedans, et parce qu'elle s'en échappe avant d'être parvenue au point le plus bas D de la roue, et d'avoir parcouru toute la hauteur de la chute. La diminution qui a lieu ne peut se connaître que par des expériences, et on n'en a point sur ce sujet de plus concluantes que celles de Smeaton. Il ne connaissait pas la véritable expression théorique de la quantité d'action transmise par la roue, en sorte qu'il compare (Smeaton, *The miscellaneous papers*, p. 48 ; ou *Recherches expérimentales*, trad. par M. Girard, p. 29) l'effet qu'il a obtenu, tantôt à celui qui serait dû à la hauteur totale de la chute et représenté par $mg.H$, tantôt à celui qui serait dû seulement à la hauteur de la roue, et représenté par $mg(H - h)$. Il trouve dans le premier cas, comme on doit s'y attendre, l'effet d'autant plus petit que la hauteur de la chute surpasse davantage le diamètre de la roue. Dans le second cas, l'effet paraît au contraire, comme cela doit être aussi, augmenter à mesure que la hauteur de la chute est plus grande par rapport à ce diamètre. Mais en comparant cet effet à sa véritable valeur théorique $mg\,(H - \frac{1}{2}h)$, il lui demeure proportionnel, et il en est à-peu-près les 0,77. Comme ce rapport doit être au moins aussi fort en grand qu'en petit, et qu'on peut l'augmenter par un tracé bien entendu des augets, je supposerai la quantité d'action transmise dans une seconde par une roue à augets, quand la vîtesse des augets est la moitié de celle de l'eau qui les frappe, exprimée par $PV = \frac{4}{5}mg\,(H - \frac{1}{2}h)$. En représentant par E le volume d'eau dépensé par seconde exprimé en mètres cubes, ce qui donne $mg = 1000\,E$ kil., cette formule pourra se mettre sous la forme $PV = \frac{4}{5}.1000\,E\,(H - \frac{1}{2}h)$ kil. × mèt. L'effort P exercé par l'eau dans le sens de la circonférence passant par le centre des augets deviendra $P = \frac{4}{5}.1000\frac{E}{V}(H - \frac{1}{2}h)$ kil.

Si l'on suppose la vîtesse des augets $V = 1^m$, il faudra que h soit la hauteur due à la vîtesse 2^m, c'est-à-dire égal à $0^m,2$ environ. Ainsi le niveau du bief supérieur ne doit être élevé que d'une très-petite quantité au-dessus du sommet de la roue. Il est important de donner au profil des augets une forme telle que l'eau y soit retenue le plus long-temps possible. On y parviendra en adoptant le tracé suivant,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

niveau. L'opinion commune est que si l'on pratiquait un pertuis au pied de la chute, comme dans la seconde figure, l'eau ne suffirait pas pour

---

AE étant l'épaisseur des jantes de la roue entre lesquelles les augets sont pratiqués, et AA′ l'intervalle de deux augets, ABCD, A′B′C′D′ sont les profils de deux augets consécutifs, et l'on a $AA' = \frac{6}{5}AE$, $AB = \frac{1}{2}AE$, angle $DAE = 60$ grades, $HC = \frac{5}{6}AE$ (Robison, *Encycl. britan.*). Il est très-utile de placer dans les augets un ou plusieurs diaphragmes tels que B*m*, sur-tout quand on fait les roues en fer : elles en sont plus solides, en même temps que l'eau est conservée plus long-temps dans les augets. Il est utile aussi de pratiquer dans leur fond AB une ou plusieurs petites ouvertures garnies de soupapes, pour empêcher que les augets montants ne soulèvent, par l'effet de la pression atmosphérique, l'eau du bief inférieur dans laquelle ils viennent de plonger, circonstance qui nuit quelquefois très-sensiblement au jeu de la machine. Il faut d'ailleurs que les augets aient une capacité suffisante, telle par exemple qu'il n'entre dans chacun d'eux que le volume d'eau qui peut être contenu en HABC. Nommant *c* la distance de deux augets mesurée sur la circonférence de la roue, et A le volume d'eau que chaque auget devra recevoir, on a la relation $E = \frac{V}{c}A$, au moyen de laquelle on détermine la capacité des augets d'après le volume d'eau fourni par la chute. L'effort P, calculé au moyen de la formule ci-dessus, pourra être considéré comme une force appliquée tangentiellement à la circonférence passant par le centre des augets, vers le milieu de la portion de cette circonférence occupée par l'eau. Cette considération, sans être rigoureusement exacte, suffira dans la pratique pour le calcul des efforts exercés sur les tourillons de l'axe de la roue. Pl. D, Fig. 3.

Il est à remarquer que les résultats précédents ne s'appliquent véritablement qu'aux roues à augets proprement dites, représentées fig. 2, pl. D, et dans le cas seulement où elles reçoivent l'eau sur leur sommet. Les Anglais les désignent ordinairement par le nom de roues en-dessus (*overshot wheels*). Quand une roue à augets reçoit l'eau plus bas que son sommet, soit parce que son diamètre est plus grand que la chute, soit parce qu'on a voulu établir une charge considérable sur l'orifice par lequel l'eau est donnée, sa disposition est moins avantageuse, et la quantité d'action transmise moindre.

Calcul d'un moulin à blé décrit par Desaguliers.

On trouve dans les *Leçons de physique* de Desaguliers, t. 2, p. 526 de la traduction française, la description et le calcul d'un moulin à blé, qui marchait au moyen d'une roue à augets du genre de celles dont il vient d'être question : je vais lui appliquer les principes qui viennent d'être établis. Le mouvement de la roue à eau était communiqué, au moyen d'un engrenage simple, à une première meule de 5 pi. 8 po. (mesures anglaises) $= 1^m,73$ de diamètre, qui faisait 40 tours par minute, et au moyen d'un engrenage double à une autre meule de 4 pi. $= 1^m,22$ de diamètre, qui servait à moudre pour la farine fine, et qui faisait environ 55 tours par minute. Les dimensions du moulin étaient comme il suit.

Diamètre de la roue à eau, 16^{pi}; largeur des jantes $1^{pi}\frac{1}{2}$; d'où diamètre au milieu des augets $14^{pi}\frac{1}{2} = 4^m,42$.

Charge d'eau sur le sommet de la roue $7^{pi}\frac{1}{2}$; sur le centre des augets

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

faire tourner un roue à aube, sans réfléchir qu'en le faisant plus petit, on gagnera beaucoup plus de force par la vîtesse que l'on donnera à l'eau que l'on n'en perdra par la diminution de son volume.

$8^{pi}\,3^{po} = 2^{m},51 = h$; d'où hauteur de la chute $= 4^{m},42 + 2^{m},51 = 6^{m},93 = H$.

Orifice par où l'eau sort du réservoir, $10^{po}\frac{1}{2}$ de largeur sur 2^{po} de hauteur, ou $0^{mq},0136$ de surface; charge d'eau sur le centre de cet orifice $7^{pi}\,5^{po} = 2^{m},26$, à laquelle est due une vîtesse de $6^{m},66$. La dépense de cet orifice pouvait être à-peu-près la même que s'il eût été pratiqué dans une paroi mince, en sorte que $E = 0,62 \times 0^{mq},0136 \times 6^{m},66 = 0^{mc},0562$, et $m = \frac{1000\,E}{g} = 5,72$.

Nombre de tours fait par la grande roue dans une minute, 8; d'où vîtesse par seconde des augets $\frac{8 \times \pi \cdot 4^{m},42}{60''} = 1^{m},85 = V$.

On voit qu'ici la roue à eau a une vîtesse plus grande qu'il n'est nécessaire, et que cependant cette vîtesse est beaucoup trop petite par rapport à celle que l'eau possède à l'instant où elle entre dans les augets, parce que l'on avait établi une charge d'eau trop considérable snr le sommet de la roue. En mettant les valeurs ci-dessus dans la formule du § 1, $PV = mg(H - h) + m(\sqrt{2gh} - V)V$, on trouvera pour la quantité d'action théorique qui devait être transmise à la roue en une seconde $PV = 303^{k \times m}$. A l'égard de la quantité d'action qui était réellement transmise à cette roue, je crois qu'elle devait être ici au-dessous des $\frac{4}{5}$ de la valeur théorique, parce que la grande vîtesse avec laquelle l'eau frappait les augets devait donner lieu à un grand rejaillissement, et parce que le bas de la roue plongeait dans l'eau du bief inférieur, ce qui devait nuire à son mouvement : je la supposerai donc seulement les $\frac{7}{10}$ de cette valeur, c'est-à-dire de $212^{k \times m}$.

Pour avoir ensuite la quantité d'action transmise aux meules, il faut diminuer le nombre précédent en raison des frottements. Sans entrer dans le détail de leur calcul, qu'il serait impossible de faire avec exactitude faute des éléments nécessaires, on peut présumer, eu égard à ce que l'une des meules était mue par un double engrenage, que la quantité d'action consommée par les frottements était environ le $\frac{1}{8}$ de celle transmise à l'arbre de la roue à eau, en sorte que la quantité d'action qui faisait mouvoir les meules devait être environ $182^{k \times m}$.

Desaguliers porte le volume de la grande meule à $22,5^{pi.c} = 0^{mc},6371$, et son poids à 1912 liv. avoir-du-poids $= 867^{k}$: celui de la petite meule peut s'estimer en proportion. Il paraît d'après cela que ces meules étaient beaucoup plus légères qu'on ne les fait ordinairement, en sorte que, pour obtenir sur le blé la pression nécessaire, il fallait roidir fortement le palier : on trouve effectivement ici que le rapport du frottement causé par la résistance du blé au poids des meules, est plus grand que dans tous les autres moulins qui ont été soumis au calcul dans les notes de ce chapitre.

Quant à la quantité d'action dépensée comparée à la quantité de blé moulue, l'auteur dit que le moulin pouvait moudre 30 boisseaux en douze heures, chacun de $\frac{1}{32}$ plus grand que le boisseau de Winchester. Le volume de blé moulu en une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Deux réservoirs de différentes hauteurs donnant dans le même temps des quantités d'eau égales, lorsque les superficies de leurs orifices sont

---

seconde était donc $\frac{30 \times 0^{mc},03634}{43200''}$: en le multipliant par le poids du mètre cube de blé, qui est estimé en Angleterre de 734^k (voyez ci-dessus, p. 404), on aura pour le poids du blé moulu en une seconde $0^k,01852$. Ainsi la quantité d'action transmise aux meules en une seconde ayant été évaluée à $182^{k \times m}$, on voit qu'il y avait $\frac{18,52}{182} = 0^k,1018$ de blé moulu pour $1000^{k \times m}$ de quantité d'action dépensée.

Ce résultat est le plus faible parmi ceux qui ont été rassemblés dans la note (*di*). On peut attribuer en partie son infériorité à l'incertitude qui reste toujours sur les observations, et sur l'évaluation des mesures de capacité étrangères. Mais il est vraisemblable que cette infériorité tient aussi au peu de masse et de vîtesse des meules, et sur-tout de la plus grande. Cette meule ne faisait effectivement que 40 tours par minute, tandis que, d'après la table de la note (*di*), elle aurait dû en faire 74. Une grande partie de la quantité d'action représentée par la chute se trouvait d'ailleurs perdue, par suite de ce que le diamètre de la roue à eau était trop petit, et la charge sur son sommet trop grande. Supposons en effet qu'en fixant la vîtesse de la roue à 1^m, on eût fait seulement $h = 0^m,2$. Alors la quantité d'action théorique transmise à la roue eût été représentée par la formule $PV = 1000\,E(H - \frac{1}{2}h)$, qui en faisant $H = 6^m,93$, $h = 0^m,2$, $E = 0^{mc},0562$, donne $PV = 384^{k \times m}$. Les $\frac{4}{5}$ de cette quantité, ou $307^{k \times m}$, pouvaient être réellement transmis à l'axe de la roue à eau, et en retranchant $\frac{1}{9}$ pour les frottements, on aurait pu disposer pour la mouture du blé de $273^{k \times m}$. En donnant aux meules la masse et la vîtesse convenables, cette quantité d'action aurait moulu $0^k,0492$ de blé par seconde, au lieu de $0^k,02345$. Il paraît donc que ce moulin aurait pu faire environ le double d'ouvrage, si la disposition en eût été mieux combinée.

Des roues à augets contenues dans un coursier, et des roues de côté.

Pl. D. Fig. 4.

§ 3. La disposition des roues à augets éprouve souvent une modification qui, sans en changer entièrement la nature, doit néanmoins être considérée à part. Elle est indiquée sur la figure 4, qui représente une roue en-dessus de l'espèce nommée par les Anglais *balance wheel*. L'eau est reçue par les augets à peu de distance en-deçà du sommet, et pour prévenir les pertes d'eau qui ont lieu vers le bas de la roue, elle est contenue dans un coursier qui laisse le moins de jeu possible. Cette disposition a sur la précédente l'avantage de remédier effectivement en grande partie aux pertes d'eau dont on vient de parler, mais elle a un défaut particulier, qui consiste en ce que la partie inférieure de l'arc de la roue contenu dans le coursier y étant plongée dans l'eau, perd un poids égal à celui du volume d'eau dont elle tient la place, poids dont l'action est à retrancher sur l'effort dont la roue est capable. Cet inconvénient ne serait pas très-important pour des roues construites en fer, mais il l'est beaucoup pour les roues faites en bois.

Cette dernière construction offre d'ailleurs la facilité de donner l'eau à la roue dans un point quelconque de sa hauteur, sans que cette roue soit sensiblement moins avantageuse que dans le cas où elle recevrait l'eau sur son sommet, en sorte qu'on peut l'adopter même quand la hauteur de la chute est plus petite que le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans la raison réciproque des racines des hauteurs moyennes qui leur répondent (455), nommant a la base du pertuis supérieur; b sa hauteur;

Pl. D, Fig. 5. diamètre de la roue. On obtient alors la disposition indiquée fig. 5, et désignée par les Anglais sous le nom de roue de côté (*breast wheel*). Les augets sont remplacés par des aubes dont l'intervalle est à-peu-près égal à leur largeur, et qui doivent être un peu inclinées en avant sur le rayon. Il faut que les aubes soient en saillie sur les jantes, afin que ces dernières ne plongent point dans l'eau du coursier. La hauteur des aubes se fait à-peu-près le $\frac{1}{4}$ de leur longueur. Le jeu entre les aubes et les parois latérales et du fond du coursier, peut être réduit à 2 ou 3 centimètres dans les machines bien exécutées.

La théorie du § 1 doit s'appliquer à ces deux dernières espèces de roues. Il faut remarquer seulement pour les roues de côté, qu'outre la nécessité de leur donner une vîtesse telle qu'elles possèdent une quantité de mouvement assez grande pour que ce mouvement soit régulier, il y a encore une raison de les faire marcher plus vîte, qui est de diminuer l'effet des pertes d'eau résultant du jeu qu'il faut laisser entre la roue et le coursier. On fait par conséquent prendre aux roues de côté une vîtesse plus considérable qu'aux roues en-dessus, et qui peut aller jusqu'à 2^m par seconde. L'eau doit toujours frapper les aubes avec une vîtesse double, c'est-à-dire d'environ 4^m, laquelle est due à une chute de $0^m,8$, ce qui est à-peu-près la charge d'eau AM qu'il doit y avoir sur l'orifice par lequel l'eau est donnée à la roue. Quant à la quantité d'action qui lui est transmise, en appelant toujours H la hauteur totale de la chute, et h la charge AM, l'expression théorique de cette quantité sera encore ici pour le cas du maximum d'effet, $PV = 1000\,E(H - \frac{1}{2}h)$. Elle doit être diminuée d'abord à raison de la perte de poids que la roue éprouve dans l'eau. Nommant s la longueur MND de l'arc de la roue plongé dans l'eau du coursier, z la hauteur verticale BD de cet arc, p le poids du volume d'eau qu'il déplace, l'effort nécessaire pour faire équilibre à ce poids, supposé appliqué à la circonférence de la roue, sera exprimé par $p\frac{z}{s}$, et la quantité d'action consommée par cet effort sera $p\frac{z}{s}.V$. La quantité d'action transmise à la roue est donc réduite à.....

$PV = 1000\,E(H - \frac{1}{2}h) - p\frac{z}{s}.V$ kil. × mèt., et il faudrait lui faire subir une nouvelle diminution, à raison de la perte d'eau qui se fait autour des aubes; mais cet objet ne peut être estimé exactement, faute des observations nécessaires. On y aura égard dans la pratique, en augmentant de quelques centimètres les dimensions du coursier trouvées par le calcul. L'effort exercé à la circonférence de la roue est $P = 1000\frac{E}{V}(H - \frac{1}{2}h) - p\frac{z}{s}$ kil. Cet effort pourra, aussi-bien que dans le § précédent, être considéré comme une force appliquée tangentiellement à l'arc occupé par l'eau, vers le milieu de cet arc.

Si l'on nomme Ω l'aire des aubes, ou plutôt la section de la veine d'eau dans le coursier, on aura évidemment $E = \Omega V$, et les formules précédentes deviendront $PV = 1000\,\Omega V(H - \frac{1}{2}h) - p\frac{z}{s}.V$ kil. × mèt., et $P = 1000\,\Omega(H - \frac{1}{2}h) - p\frac{z}{s}$ kil. On

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et h la hauteur qui répond à la vîtesse moyenne de l'eau; c la base qu'on veut donner au pertuis inférieur; x sa hauteur, et H la hauteur qui

---

trouvera dans la note (*ds*) une application de ces formules au calcul d'un moulin mu par une roue de côté.

Dans la pratique les roues de côté ou en-dessus ne doivent guère avoir moins de 5^m de diamètre. Quand la hauteur de la chute surpasse 5^m, on augmente le diamètre de la roue, de manière que la différence entre ce diamètre et la chute soit la hauteur due à une vîtesse double de celle qu'on veut faire prendre à la roue. On a fait des roues de cette espèce qui avaient jusqu'à 15^m de diamètre. On peut remarquer que les roues en-dessus conviennent spécialement aux cas où l'on a une grande chute et une petite quantité d'eau. Lorsque le volume d'eau est considérable, comme le poids de celle qui agit sur la roue porte tout entier sur ses points d'appui, ils se trouvent très-chargés. Il vaut mieux alors employer les roues de côté, où le poids de l'eau est soutenu en partie par le fond du coursier.

Emploi des roues en-dessus ou de côté à la construction des moulins à blé.

§ 4. Lorsque les roues dont il vient d'être question seront employées à faire mouvoir un moulin à blé, leur établissement, d'après les résultats de la note (*di*), devra être fait comme il suit.

Conservant les dénominations précédentes et celles de cette note, supposant que le moulin ne doit faire tourner qu'une seule meule, et ajoutant à la quantité d'action dépensée à la meule $\frac{1}{10}$ pour tenir compte des frottements, on aura pour déterminer la dépense d'eau à faire par seconde 1° dans le cas des roues à augets considérées dans le § 2, l'équation $\frac{4}{3}.1000\,E(H-\frac{1}{2}h)=134\,d^2$, d'où $E=0{,}168\frac{d^2}{H-\frac{1}{2}h}$ mèt. cubes; 2° dans le cas des roues à augets contenues dans un coursier ou des roues de côté considérées dans le § 3, l'équation $1000\,E(H-\frac{1}{2}h)-p\frac{z}{s}V=137\,d^2$, d'où $E=\frac{1}{H-\frac{1}{2}h}(0{,}134\,d^2+0{,}001\,p\frac{z}{s}V)$ mètres cubes. Si l'on avait plusieurs meules tournantes, ces valeurs de E devraient être multipliées par le nombre des meules, en ayant toutefois égard à l'observation faite à la fin de la note (*di*).

Quant à la manière de régler les dimensions du rouet et de la lanterne, le diamètre de la roue à eau étant représenté par D, le nombre de tours qu'elle fera dans une seconde sera $\frac{V}{\pi D}$. On aura donc, en appelant D' le diamètre du rouet monté sur l'axe de la roue, et d' celui de la lanterne montée sur l'axe de la meule, $\frac{D'}{d'}=\frac{1{,}91\,\pi D}{Vd}=6\frac{D}{Vd}$.

Supposons par exemple une chute de $4^m=H$ de hauteur, et qu'on veuille faire marcher deux meules tournantes de $2^m=d$ de diamètre. On pourra employer une roue de côté de $6^m=D$ de diamètre, et faire prendre environ $2^m=V$ de vîtesse à sa circonférence. La quantité h sera donc la hauteur due à une vîtesse de 4^m, c'est-à-dire $0^m,82$; et par conséquent $H-\frac{1}{2}h=3^m,59$. La roue peut être considérée comme plongeant dans l'eau sur le quart inférieur de sa circonférence, et en la supposant exécutée en bois, le poids de l'eau qu'elle déplace pourra s'évaluer à environ 300^k. On a donc $p=300^k$, $\frac{z}{s}=\frac{3^m}{1^m,5\,\pi}$. Mettant ces valeurs dans la formule

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

répondra à la vîtesse moyenne; on aura $ab : cx :: \sqrt{H} : \sqrt{h}$, qui donne $ab\sqrt{h} = cx\sqrt{H}$, ou $x = \frac{ab}{c}\sqrt{\frac{h}{H}}$; qui montre que *pour avoir la hauteur du pertuis situé au pied de la chute, il faut diviser la superficie du premier pertuis par la base du second, et multiplier le quotient par celui que donnera la racine de la petite hauteur moyenne, divisée par la racine de la grande.*

Si la largeur du second pertuis est égale à celle du premier, on aura $a = c$, par conséquent $x = b\sqrt{\frac{h}{H}}$. Alors si la profondeur de l'eau derrière la vanne QR était de 20 pouces, et la hauteur du pertuis de 8, on trouverait (533 ou 534) que la hauteur qui répond à la vîtesse moyenne de l'eau serait de 16 pouces $\frac{2}{27}$; ce qui donne, à peu de chose près, $\sqrt{h} = 4$ pouces. Quant à la chute, nous la supposerons de 9 pieds, qui est celle qui convient aux roues à pots. Alors la hauteur relative à la vîtesse moyenne pourra être de 100 pouces, ce qui donnera $\sqrt{H} = 10$, par conséquent $\sqrt{\frac{h}{H}} = \frac{2}{5}$, ce qui étant multiplié par 8, donne $x = 3$ pouces $\frac{1}{5}$ pour la hauteur du pertuis de la chute, afin qu'il ne dépense que la même quantité d'eau que celui d'en haut.

646. Pour connaître le rapport de l'effet naturel de l'eau qui sortira des deux pertuis, en venant choquer les aubes d'une même roue, il faut se rappeler que les quantités de mouvement de la roue dans ces deux cas seront dans la raison composée des cubes des vîtesses de l'eau, ou des racines des hauteurs qui les expriment (593), et de la superficie des pertuis; par conséquent ici comme $abh\sqrt{h}$ est à $cd\,H\sqrt{H}$, en supposant $x = d$, ou comme $bh\sqrt{h}$ est à $dH\sqrt{H}$, en supposant $a = c$, comme dans le cas précédent; ce qui, en substituant les nombres, donne $8 \times 16 \times 4$, et $3\frac{1}{3} \times 100 \times 10$, ou $\frac{512}{3200}$, ou $\frac{4}{25}$, et fait voir que la quantité de mouvement de la roue qui recevrait l'eau du sommet de la chute, ne serait que les quatre vingt-cinquièmes de la quantité de mouvement de

---

$E = \frac{1}{H - \frac{1}{2}h}\left(0{,}134d^2 + 0{,}001p\frac{z}{s}V\right)$, on trouve $E = 0^{mc},256$, et comme il y a deux meules, il faut prendre pour le volume d'eau à dépenser par seconde $0^{mc},512$. En le divisant par la vîtesse des aubes, qui est 2^m, on aura pour la section de la veine d'eau agissant sur la roue $0^{mq},256$. Ainsi on pourra donner aux aubes 1^m de longueur horizontale sur $0^m,26$ de hauteur. Les dimensions du coursier devront être un peu plus considérables, et par conséquent la dépense d'eau un peu plus grande qu'on ne vient de la trouver. L'équation $\frac{D'}{d'} = 6\frac{D}{Vd}$ donne ici $\frac{D'}{d'} = 9$, et par conséquent il suffira d'un seul engrenage, en donnant aux rouets montés sur l'axe de la grande roue $4^m,5$ de diamètre, et aux lanternes qui font tourner les meules $0^m,5$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la même roue lorsqu'elle recevra l'eau du pied de la même chute. Ainsi dans cette dernière situation, elle pourra, avec la même quantité d'eau, moudre par jour au moins six fois autant de blé que dans la première, pourvu que le poids des meules tournantes dans les deux cas soient dans le rapport des forces qui les mettront en mouvement (638); c'est-à-dire dans la raison composée des superficies des pertuis et des hauteurs moyennes qui leur répondent.

Voilà assurément un avantage à ne point négliger, et qui mérite qu'on y fasse attention, étant naturel que le revenu d'un moulin soit proportionné à son produit (*dn*).

(*dn*) Dans ces deux articles l'objet des raisonnements de l'auteur est d'établir qu'il y a beaucoup plus d'avantage à employer l'eau d'une chute de la manière représentée fig. 2, où après avoir jailli par un orifice avec toute la vîtesse que la chute peut lui donner, elle vient frapper les aubes d'une roue, qu'à la faire tomber avec une petite vîtesse dans des augets, comme le représentent les fig. 3 et 4. Ce résultat est contraire à la vérité; et on sait actuellement qu'en supposant les deux espèces de roues également bien établies, la roue en-dessus doit, toutes choses égales d'ailleurs, transmettre une quantité d'action à-peu-près double de celle transmise par la roue en-dessous. L'erreur provient de ce que Bélidor considère dans l'art. 646 l'effort exercé sur les roues comme produit uniquement par le choc de l'eau contre les aubes ou les augets, ce qui est bien vrai dans le cas de la fig. 2, mais non dans celui des fig. 3 et 4, où il faut aussi tenir compte de l'action du poids de l'eau contenue dans la roue.

Remarques sur l'inexactitude des art. 645 et 646.

PLANCHE I. FIGURES 2, 3 et 4.

§ 1. La théorie des roues à aubes frappées en-dessous est d'ailleurs fondée sur les principes employés dans la note précédente. Soit toujours H la hauteur de la chute, m la masse de l'eau dépensée dans une seconde, V la vîtesse de la roue, P l'effort qui s'exerce à sa circonférence. On aura $\sqrt{2gH}$ pour la vîtesse avec laquelle l'eau viendra frapper les aubes, en sorte qu'elle perdra brusquement contre elles la vîtesse $\sqrt{2gH}-V$. Quand elle les aura frappées, et qu'elle cessera d'agir sur elles, il lui restera la vîtesse V. Cela posé, on remarquera que mg étant le poids de l'eau qui descend dans une seconde, la quantité d'action imprimée par l'effet de la descente de ce poids est $mg.H$, tandis que la quantité d'action imprimée en sens contraire pendant le même temps par l'élévation du poids P est PV. La quantité d'action imprimée au système dans chaque seconde est donc $mg.H-PV$. D'un autre côté la force vive perdue dans le même temps par l'effet du choc de l'eau contre les aubes est $m(\sqrt{2gH}-V)^2$, et celle qui a été acquise par l'eau à l'instant où elle quitte la roue est mV^2. On a donc, d'après les principes des § 7 et 8 de la note (*ai*), l'équation $mg.H-PV=\frac{1}{2}m(\sqrt{2gH}-V)^2+\frac{1}{2}mV^2$, d'où $PV=m(\sqrt{2gH}-V)V$. Cette équation est précisément celle obtenue dans le § 1 de la note précédente, où l'on aurait fait $h=H$.

Théorie des roues verticales mues par le choc de l'eau.

PL. D, FIG. 6.

La valeur de V qui rendra la quantité d'action transmise à la roue le plus grande possible est $V=\frac{1}{2}\sqrt{2gH}$, ce qui apprend que la vîtesse des aubes doit être la

Conditions à remplir pour obtenir le plus grand effet possible.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

647. Il y a des provinces où les roues à pot sont si communes, qu'il semble qu'on ne saurait faire aller un moulin sans leur secours; et lors-

---

moitié de celle de l'eau qui les frappe, comme on l'a déja trouvé d'une autre manière dans la note (*da*).

Le plus grand effet possible est théoriquement la moitié de la quantité d'action représentée par la chute de l'eau.

Cette valeur de V étant introduite dans l'équation précédente, donne $PV=\frac{1}{2}mg.H$, d'où il suit que la limite théorique de la quantité d'action transmise à la roue est ici la moitié de celle représentée par la chute de l'eau.

De la vîtesse d'une roue en-dessous qui n'élève aucun poids.

Si l'on suppose que la roue n'ait aucun poids à élever, ou $P=0$, l'équation ci-dessus donnera $V=\sqrt{2gH}$. Ainsi la limite de la vîtesse de la roue est ici celle due à la hauteur de la chute. La veine d'eau rencontrant les aubes avec une vîtesse égale à la leur, il n'y a point de choc, et par conséquent point de force vive perdue, en sorte que l'eau peut avoir acquis, à l'instant où elle quitte la roue, toute la force vive ou toute la vîtesse que la chute peut produire.

Application de la théorie précédente à la pratique.

§ 2. On voit par ce qui précède que les roues en-dessous ne doivent, d'après la théorie, fournir dans les mêmes circonstances que la moitié de la quantité d'action qu'on pourrait obtenir au moyen d'une roue en-dessus ou d'une roue de côté (voyez le § 1 de la note précédente). Ce résultat est confirmé par l'expérience. Smeaton conclut des siennes (*Miscellaneous papers*, p. 42; ou *Recherches expérimentales*, trad. par M. Girard, p. 23) que dans la pratique l'effet obtenu au moyen des roues en-dessous est seulement dans le cas du maximum les $\frac{2}{3}$ de la quantité d'action théorique, ou le $\frac{1}{3}$ de la quantité d'action représentée par la chute de l'eau, tandis que pour les roues en-dessus cet effet en est près des $\frac{4}{5}$. Bien loin d'être préférables aux roues à augets, les roues à aubes devraient donc être généralement proscrites, et on devrait dans tous les cas employer à leur place les roues de côté décrites dans le § 3 de la note précédente.

Disposition des roues en-dessous.

La meilleure manière de disposer les roues en-dessous paraît d'ailleurs être celle représentée fig. 6, où l'eau est donnée par un orifice placé au bas de la chute, et dont l'entrée est évasée. Les aubes doivent être espacées à une distance à-peu-près égale à leur hauteur, et être un peu inclinées en avant sur le rayon. Il doit rester très-peu de jeu entre elles et les parois du coursier, dont le fond doit être taillé suivant un arc concentrique à la roue. La hauteur des aubes doit être beaucoup plus grande que celle de la veine d'eau qui vient les frapper, afin qu'à l'instant du choc l'eau, qui s'élève contre l'aube, ne passe pas par-dessus. Les expériences de Smeaton et celles de Bossut (*Hydrodynamique*, t. 2, ch. 18) s'accordent à montrer que la valeur $V=\frac{1}{2}\sqrt{2gH}$, indiquée par la théorie pour la vîtesse des aubes, est une limite au-dessous de laquelle on doit se tenir dans la pratique, et qu'il convient de donner seulement aux aubes les $\frac{2}{3}$ de la vîtesse de la veine d'eau qui vient les frapper. La quantité d'action transmise à la roue étant les $\frac{2}{3}$ de la quantité d'action théorique, on a généralement dans la pratique $PV=\frac{2}{3}m(\sqrt{2gH}-V)V$, et dans le cas du maximum d'effet $PV=\frac{1}{3}mg.H$. En représentant par E le volume d'eau dépensé en une seconde exprimé en mètres cubes, ce qui donne $mg=1000\,E$ kil., l'effet produit en une seconde deviendra en général $PV=\frac{2}{3}.\frac{1000}{g}E(\sqrt{2gH}-V)V$ kil. × mèt.; et dans le cas du maximum, $PV=\frac{1}{3}1000\,E.H$ kil. × mèt. L'effort exercé au centre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'il n'y a point une chute suffisante pour donner à la roue un rayon ou un bras de levier d'une grandeur raisonnable, et qu'on a d'ailleurs

---

des aubes dans le sens de la circonférence de la roue sera en général..... $P=\frac{2}{3}.\frac{1000}{g}E(\sqrt{2gH}-V)$ kil., et dans le cas du maximum $P=\frac{1}{3}.\frac{1000}{g}E\sqrt{2gH}$. Il faut se rappeler que dans ces formules $\sqrt{2gH}$ doit représenter la véritable vîtesse de la veine d'eau qui vient contre la roue, et H la hauteur due à cette vîtesse; en sorte qu'on ne peut confondre cette hauteur avec celle de la chute, qu'autant que l'orifice d'écoulement est disposé de manière que la veine d'eau prenne dans le coursier la vîtesse due à la charge. On ne doit point effectivement perdre de vue les circonstances des expériences de Smeaton, sur lesquelles sont fondés les résultats précédents. Il observait la véritable vîtesse de l'eau, avant de la faire agir sur la roue, et prenait la hauteur due à cette vîtesse pour la hauteur H de la chute. Il observait également la dépense d'eau E qui avait effectivement lieu, et ses expériences, où les aubes remplissaient exactement la section du coursier, établissent entre les quantités H, E, et l'effet obtenu, les relations exprimées par les formules ci-dessus. On verra tout-à-l'heure comment la véritable vîtesse de l'eau peut être estimée d'après la nature de l'orifice, quand on ne peut la mesurer immédiatement.

Formules qui expriment la quantité d'action transmise aux roues en-dessous, d'après l'aire des aubes, et la vitesse de l'eau dans le coursier.

§ 3. On trouve dans divers ouvrages des observations sur les roues en-dessous qui sont présentées d'une autre manière, et il faut une attention particulière pour les rapprocher des précédentes. Telles sont celles rapportées dans l'*Hydrodynamique* de Bossut, art. 1029 et 1030. L'auteur observait seulement la vîtesse de l'eau, et l'aire de la portion de l'aube qui était plongée dans l'eau, ou, ce qui revient au même, la section de la veine d'eau à l'endroit où la roue était placée. Or il est évident qu'à l'endroit où les aubes plongent dans l'eau, si elles lui ferment entièrement le passage, l'eau a une vîtesse précisément égale à la leur. Donc si l'on nomme Ω l'aire de la portion de l'aube plongée dans l'eau, et V la vîtesse de l'aube, ΩV sera le volume d'eau dépensé dans une seconde. Mettant cette quantité à la place de E dans les formules ci-dessus, on aura pour la quantité d'action transmise en une seconde $PV=\frac{2}{3}.\frac{1000}{g}\Omega(\sqrt{2gH}-V)V^2$ kil. × mèt., et pour l'effort exercé à la circonférence de la roue $P=\frac{2}{3}.\frac{1000}{g}\Omega(\sqrt{2gH}-V)V$ kil. Si l'on supposait que V variât, Ω demeurant le même, la plus grande valeur que pût prendre l'expression de PV serait $PV=\frac{1}{6}.1000\,\Omega H\sqrt{2gH}$ kil. × mèt., et l'effort correspondant serait $P=\frac{1}{3}.1000\,\Omega H$ kil. Ces valeurs doivent être employées dans le cas où le mouvement de la roue aurait été réglé de manière à obtenir le maximum d'effet.

En comparant ces dernières formules aux expériences de Bossut indiquées ci-dessus, elles paraissent donner un effort un peu plus grand que celui qui a été observé. Mais comme ces expériences, qui n'avaient pas pour objet la mesure de cet effort, étaient faites fort en petit, et que la vîtesse du courant y était estimée d'une manière peu précise, cette légère discordance ne peut faire douter de l'exactitude des considérations précédentes, qui sont plutôt confirmées que contredites par ces observations. Ces formules paraissent susceptibles d'être employées sans erreur dangereuse dans le cas même où les aubes ne remplissent pas exactement la section du

Ces formules peuvent être employées dans le cas

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pl. 1, Fig. 6.

de l'eau à discrétion, on y fait les aubes fort larges. Passant dans un endroit où j'en vis une dans ce goût-là, je demandai pourquoi employer une roue ausi incommode, puisqu'en faisant une écluse, on aurait pu en construire une autre d'un diamètre aussi grand qu'on aurait voulu, qui

---

où les aubes ne remplissent point exactement le coursier.

coursier, et où il s'échappe inutilement de l'eau au pourtour de ces aubes. Alors ΩV n'est point considéré comme représentant la dépense totale qui se fait par l'orifice, mais comme représentant une portion de l'eau dépensée, qui exerce sur les aubes la même action qui aurait lieu si, ΩV étant la dépense totale, les aubes remplissaient exactement le coursier. Ici, aussi-bien que dans le § précédent, $\sqrt{2gH}$ est censé exprimer la véritable vîtesse de l'eau dans le coursier, celle qui aurait lieu dans l'emplacement de la roue si cette roue était enlevée. On ne doit faire H égal à la hauteur de la chute, qu'autant que l'eau peut être considérée comme se mouvant dans le coursier avec la vîtesse due à la chute. C'est ce qui ne peut arriver qu'autant que l'entrée de l'orifice qui donne l'eau est évasée, et que l'aire de cet orifice est au moins égale à la section de l'eau dans le coursier. Cette dernière condition se trouve ordinairement remplie, mais l'entrée de l'orifice n'est pas généralement évasée, malgré la grande utilité de cette disposition. La veine d'eau se contracte alors après son passage par l'orifice, et on peut juger, d'après ce qu'on a vu dans le § 3 de la note (*ck*), que, dans les cas ordinaires, cette contraction doit se faire à très-peu-près dans le rapport 0,63 quand elle a lieu sur les quatre côtés de l'orifice, et dans le rapport 0,67 quand elle a lieu sur trois côtés seulement, le fond du réservoir d'où l'eau sort étant de niveau avec celui de l'orifice. Ces proportions admises, on peut appliquer ici l'analyse du § 4 de la même note, en considérant le coursier comme un tuyau adapté à un vase; et par conséquent le rapport de la vîtesse qui aura réellement lieu dans le coursier à la vîtesse due à la chute, devra être exprimé par $\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}}$. Si l'on fait successivement dans cette formule $m=0{,}63$ et $m=0{,}67$, on trouvera pour ce rapport les deux valeurs 0,86 et 0,89. Ainsi H étant la hauteur de la chute, la vîtesse qui aura véritablement lieu dans le coursier sera à-très-peu-près $0{,}86\sqrt{2gH}$ si la veine se contracte sur le fond et les côtés de l'orifice; et $0{,}89\sqrt{2gH}$ si, comme cela arrive presque toujours, elle ne se contracte point sur le fond.

Comment la vîtesse de l'eau dans le coursier doit être évaluée.

Si l'orifice avait une largeur ou une profondeur sensiblement moindres que celles du coursier, la vîtesse prendrait dans le coursier une valeur plus faible, et qui dépendrait du rapport entre l'aire de l'orifice et la section de l'eau dans ce coursier : on la déterminerait par une analyse semblable à celle du § 4 de la note (*ck*). Je reviendrai sur ces objets dans les volumes suivants.

Emploi des roues en-dessous à la construction des moulins à blé.

§ 4. Si l'on veut employer une roue en-dessous à faire marcher un moulin à blé, le premier objet sera toujours de régler la vîtesse de la roue. On a à cet effet, en conservant les dénominations précédentes et celles de la note (*di*), l'équation $V=\frac{2}{3}\sqrt{2gH}$ qu'il faudra satisfaire pour obtenir le maximum d'effet. Pour déterminer ensuite la dépense d'eau nécessaire pour faire mouvoir une meule, on égalera l'expression $\frac{1}{3}.1000\,EH$ de la quantité d'action transmise, à celle $121\,d^2$ de la quantité d'action que la meule consomme, en augmentant cette dernière de la quantité

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aurait tourné en faisant passer l'eau par dessous. On me répondit que cela n'aurait pu se faire sans une grande dépense, parce que la hauteur de l'eau dans le réservoir n'étant que de 7 à 8 pouces, il aurait fallu, pour la rendre égale à la chute, qui était de 5 pieds, faire une excavation immense. Comme cette erreur est commune à tous ceux qui ignorent les principes de l'hydraulique, je vais faire en sorte de les désabuser, en mettant dans un plus grand jour ce que je viens d'insinuer.

Pl. 1, Fig. 3. Quand on soutient l'eau pour faire tourner une roue de moulin, la force du courant dépend uniquement de la hauteur moyenne de l'eau, et non de l'étendue du terrain qui lui sert de base au pied de l'écluse.

Je suppose que la ligne EG exprime la surface d'un terrain supérieur à VX de 5 à 6 pieds; que ce terrain sert de lit à un réservoir, ou ruisseau LM, qui n'aura, si l'on veut, que 6 pouces de profondeur: la plupart s'imaginent que quand même on aurait assez d'eau pour fournir à la dépense du pertuis CD, elle ne peut avoir de force pour faire tourner la roue qu'autant que le lit du réservoir se trouve à la profondeur DY sur une étendue considérable.

Prévenu que l'action de l'eau agit selon sa hauteur, et non selon sa quantité dans le réservoir (378, 379), il sera indifférent à celle qui doit fuir par le pertuis qu'il y en ait ou non sur l'étendue HY, pourvu que la source soit assez abondante pour entretenir toujours le niveau de l'eau à la hauteur LM, puisque son impulsion dépendra de la hauteur de la colonne DLIH, quelque petite que soit sa base DH. Par conséquent il suffira d'approfondir le terrain vis-à-vis de l'écluse, en donnant au profil de l'excavation la figure d'un trapèze DEFH, afin que les terres puissent se soutenir selon le talus naturel FH, pour éviter la dépense d'un revêtement de maçonnerie, sans se mettre en peine de la profondeur MG de l'eau, ni de l'étendue de son lit. On pourra donc, quand on n'aura qu'une médiocre quantité d'eau, pratiquer à peu de frais un pertuis au pied d'une chute, pour exécuter ce qui a été dit dans l'article 645 (*do*).

---

qui pourrait être consommée par les frottements. En estimant cette augmentation à $\frac{1}{10}$, on a $\frac{1}{3}.1000\,EH = 134\,d^2$, d'où $E = 0{,}402\,\frac{d^2}{H}$.

Le diamètre de la roue à eau pris au centre des aubes étant toujours nommé D, celui du rouet monté sur son axe D', et celui de la lanterne montée sur l'axe de la meule d', on a pour le nombre de tours fait par la roue dans une seconde $\frac{V}{\pi D} = \frac{2\sqrt{2gH}}{5\pi D}$. Le nombre de tours que la meule doit faire dans le même temps est $\frac{1{,}91}{d}$. Par conséquent le rapport des diamètres du rouet et de la lanterne est $\frac{D'}{d'} = \frac{1{,}91 \times 5\pi D}{2d\sqrt{2gH}} = 15\frac{D}{d\sqrt{2gH}}$.

On trouvera dans les notes (*dt*) et (*du*) des exemples de l'emploi de ces formules.

Remarque sur l'art. 647.

(*do*) Il n'est pas douteux, quand on veut absolument avoir une roue à aubes,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Description des moulins à eau ordinaires. Pl. 1, Fig. 7.

648. Les moulins dont nous avons parlé jusqu'ici sont composés d'une roue à aubes A B, dont l'arbre D appartient aussi à un rouet E qui s'engrène avec une lanterne G qui fait tourner la meule qu'on suppose dans le tonneau I, ayant pour essieu la barre de fer F.

On donne à la roue depuis 12 jusqu'à 18 pieds de diamètre; les aubes ont ordinairement 2 pieds $\frac{1}{2}$ ou 3 pieds de largeur, sur 10 à 12 pouces de hauteur. A l'égard de l'arbre, on lui donne depuis 15 jusqu'à 18 pouces de diamètre.

Le rouet a ordinairement 8 pieds de diamètre, pris de milieu en milieu de la largeur des jantes, c'est-à-dire à la hauteur où les dents agissent contre les fuseaux de la lanterne (287). Les jantes doivent être composées de deux membrures chacune de 8 pouces d'épaisseur, croisées l'une sur l'autre, sur une largeur de 8 pouces. Ce rouet a 48 dents de 4 pouces de hauteur sur 3 $\frac{1}{2}$ de largeur, 2 d'épaisseur à l'extrémité, et 2 $\frac{3}{4}$ par le bas, à cause du talon; leur racine est de 12 pouces de longueur sur 2 $\frac{1}{4}$ d'épaisseur en quarré par le haut, réduite à un pouce $\frac{1}{2}$ par le bas.

La lanterne est composée de deux tourteaux de 22 pouces de diamètre, et de 4 pouces d'épaisseur, dans lesquels on assemble 9 fuseaux de 2 pouces et demi de diamètre sur 18 pouces de hauteur. Le centre de ces fuseaux doit être placé sur une circonférence de 9 pouces de rayon, lequel doit être pris pour celui de la lanterne (287). On fait les fuseaux, ainsi que les dents, d'un bon bois dur, de poirier sauvage ou de cormier. La lanterne est traversée d'un essieu de fer de 2 pouces $\frac{1}{2}$ en quarré, et d'une hauteur proportionnée à la situation des meules par rapport à la position du rouet. Il doit être bien attaché à la meule de dessus, et réduit à un pivot d'environ 6 lignes de diamètre, qui tourne dans une crapaudine pratiquée dans l'épaisseur du palier. Les dimensions précédentes sont les mêmes que celles qu'on donne au rouet et à la lanterne des moulins à vent.

Manière de calculer l'effet de toutes les parties qui concourent à moudre le blé dans un moulin à eau. Pl. 1, Fig. 7.

649. Il y a à La Fère plusieurs moulins semblables au précédent : j'en prendrai un pour exemple de la manière de calculer tout ce qui peut intéresser dans une pareille machine, afin de découvrir principalement quelle est la force capable de surmonter la résistance que le blé oppose au mouvement de la meule, en faisant entrer dans le calcul le frottement des tourillons C de la roue A B sur les coussinets K, celui du rouet E contre les fuseaux de la lanterne G, et enfin celui du pivot de la même lanterne sur sa crapaudine encastrée dans le palier H, qui sont les seuls

---

mue en-dessous par le choc de l'eau, qu'il ne faille prendre le parti indiqué par l'auteur. Mais on a vu dans la note précédente combien ces roues étaient désavantageuses, comparées aux roues en-dessus ou de côté.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

auxquels on doive avoir égard. Je suppose que l'on connaît la hauteur de la retenue ou la chute de l'eau, la superficie des aubes, la vîtesse de la roue, le rayon de la même roue, ceux du rouet, de la lanterne et de la meule, avec le poids dont la crapaudine H est chargée, c'est-à-dire celui de la meule et de la lanterne avec son essieu F, et enfin le poids que soutiennent les tourillons C de l'arbre D.

La hauteur moyenne de l'eau qui s'échappe par le pertuis pour faire tourner la roue, est de 5 pieds. Ainsi l'on trouvera dans la table (469) que sa vîtesse dans le coursier est de 17 pieds 3 pouces 4 lignes par secondes.

La roue a 8 pieds de rayon depuis son centre jusqu'à celui d'impression d'une des aubes, ce qui répond à une circonférence de 50 pieds $\frac{2}{7}$; et comme cette roue fait 10 tours en une minute, sa vîtesse par seconde sera à-peu-près de 8 pieds 4 pouces 7 lignes, laquelle étant soustraite de celle du courant, il restera 8 pieds 10 pouces 9 lignes pour la vîtesse respective de l'eau qui frappe les aubes (585).

Il faut chercher quelle est la hauteur d'une colonne capable d'une vîtesse de 8 pieds 10 pouces 9 lignes par seconde (608), on trouvera qu'elle doit être de 15 pouces 9 lignes, qui répond à un choc de 92 liv. $\frac{1}{3}$, qu'il faut multiplier par la superficie d'une des aubes qui est ici de 2 pieds 2 pouces quarrés. Il vient 200 liv. pour la puissance qui fait agir la roue avec une vîtesse de 8 pieds 4 pouces 7 lignes par seconde (*dp*).

650. Pour calculer le frottement de la roue sur les tourillons, j'ai commencé par en avoir le poids, aussi-bien que du rouet et de l'arbre, en cherchant la quantité de pieds cubes dont le tout était composé : l'ayant fait, j'en ai trouvé 50 $\frac{1}{4}$, qui étant multipliés par 60 livres, pesanteur d'un pied cube de bois de chêne, il vient 3015 livres pour la charge des tourillons.

La pression du poids de la roue ne cause pas seule le frottement des tourillons, il y en a encore un autre qui doit y entrer nécessairement. Pour l'apercevoir, remarquez que la puissance appliquée à la roue, c'est-à-dire l'eau qui la frappe, agit selon une direction horizontale pour surmonter la résistance que les dents du rouet rencontrent à faire tourner la lanterne, et que cette résistance agit aussi selon la même direction. On peut donc dire que le rayon de la roue et celui du rouet composent ensemble les bras d'un levier situé verticalement, dont le point d'appui

(*dp*) La vîtesse avec laquelle l'eau vient rencontrer les aubes, ne pourrait être censée celle due à la hauteur de la chute, qu'autant que l'entrée de l'orifice serait évasée. De plus l'évaluation de la force de percussion contre les aubes, adoptée ici par l'auteur, est une suite de la fausse théorie de la résistance des fluides rectifiée dans les notes (*ct*) et (*db*).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

est à l'extrémité du diamètre horizontal des tourillons de la roue, c'est-à-dire diamétralement opposé aux puissances appliquées au levier (76), et qui causent ensemble une pression de 600 livres; car comme le rayon de la roue est double de celui du rouet, la puissance motrice étant de 200 liv., celle qui résiste aux dents du rouet sera de 400.

Il est donc manifeste que le centre des tourillons est attiré par deux puissances, dont l'une qui est le poids de la roue agit verticalement, et l'autre qui est la pression dont je viens de parler agit horizontalement. Or comme la pression horizontale ne détruit point l'action de la pesanteur de la roue, ni ne diminue point le frottement (68) causé par cette même pesanteur, il faut donc ajouter le tiers de cette dernière, qui est 1005 livres, avec 300 pour avoir 1305 livres pour le frottement des tourillons (243) (*dq*).

Manière de connaître le poids d'une meule.

651. Pour savoir aussi de quelle manière je suis parvenu à connaître le poids de la meule tournante, on saura qu'il y avait à la porte du moulin une vieille meule tirée de la même meulière que celle dont il s'agit, et dont la pierre m'a paru de même qualité. J'en ai fait rompre un morceau qui s'est trouvé du poids de 28 liv. $\frac{1}{4}$, je l'ai suspendu à une balance romaine pour le peser dans l'eau (626), où son poids ne s'est plus trouvé que de 10 liv. $\frac{1}{4}$, par conséquent il occupait la place de 18 liv. d'eau. Pour en savoir le volume, j'ai dit: Si 70 livres d'eau contiennent 1728 pouces pour un pied cube, combien contiendront 18 livres; j'ai trouvé environ 444 pouces. Pour savoir présentement ce que pèse le pied cube, j'ai dit: Si 444 pouces pèsent 28 livres $\frac{1}{4}$, combien peseront 1728; j'ai trouvé environ 110 liv. pour le poids d'un pied cube de la pierre dont nous parlons. La meule ayant 6 pieds de diamètre, et son épaisseur réduite, eu égard à son creux, s'étant trouvée de 16 pouces, sa solidité est de 37 $\frac{5}{7}$ pieds cubes, qui étant multipliés par 110, donnent 4148 liv. pour le poids de la meule; à quoi il faut ajouter celui de la lanterne et de son essieu que j'ai estimé de 200 liv., pour avoir le poids dont le palier était chargé, c'est-à-dire 4348 liv.

Voici le nom, la mesure et le poids de toutes les parties qui doivent entrer dans le calcul.

Inexactitude de l'évaluation du frottement de la roue sur ses tourillons.

(*dq*) Il y a ici erreur; et, malgré l'assertion de l'auteur, on ne doit point ajouter les frottements causés séparément par les forces horizontale et verticale qui agissent sur l'axe de la roue. Il faut composer ces deux forces en une seule, et évaluer le frottement de leur résultante, conformément à la note (*aq*). L'auteur n'a point fait cette faute dans un cas analogue, art. 663. De plus, le frottement ne doit pas être estimé le $\frac{1}{3}$ de la pression. Je me dispenserai de répéter cette dernière observation, qui s'applique à tous les articles suivants, et de faire remarquer qu'on doit négliger les frottements des engrenages, ou les évaluer d'après la note (*ax*).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

a = 8 pieds, rayon de la roue.

b = 4 pieds, rayon du rouet.

c = 9 pouces, rayon de la lanterne.

d = 2 pieds, rayon moyen de la meule.

f = 9 lignes, rayon des tourillons de la roue.

h = 2 lignes, rayon moyen de l'extrémité du pivot de la meule ou de la lanterne.

p = 200 livres, force de la puissance qui fait tourner la roue.

q = 1305 livres, frottement des tourillons.

r = 4348 livres, poids de la meule, de la lanterne et de son essieu.

x = le poids équivalent à la résistance que la meule trouve à moudre le blé.

652. Pour commencer le calcul que nous nous sommes proposé, faites attention que la résistance qu'éprouvent les dents du rouet pour faire tourner la lanterne, vient 1° du frottement que le poids de la meule et de son équipage fait naître du pivot contre la crapaudine; 2° de la résistance que la meule rencontre de la part du blé qu'elle veut moudre (*dr*).

Il faut donc pour réduire ces deux résistances à l'extrémité du rayon de la lanterne, multiplier le tiers de la charge du pivot par son rayon moyen (240), ce qui donne $\frac{1}{3}\ hr$; multiplier aussi l'effort x de la meule par son rayon moyen, ajouter le produit dx au précédent, et diviser l'un et l'autre par le rayon de la lanterne (60). On aura $\frac{hr}{3c} + \frac{dx}{c}$ qu'il faut multiplier par la fraction $\frac{19}{18}$, afin d'avoir égard au frottement du rouet et de la lanterne (290); multiplier $\frac{19hr}{54c} + \frac{19dx}{18c}$ par le rayon du rouet, ce qui donnera $\frac{19hrb}{54c} + \frac{19bdx}{18c}$ pour le produit du poids par son bras de levier. Il faut ajouter à cette quantité la résistance causée par le frottement des tourillons C (68), c'est-à-dire le produit du frottement q des tourillons par le rayon des mêmes tourillons (64, 65); on aura $\frac{19hrb}{54c} + \frac{19bdx}{18c} + qf$, qui est une quantité égale au produit de la puissance p par le rayon de la roue dans l'état d'équilibre (45); d'où l'on tire cette équation $\frac{19hrb}{54c} + \frac{19bdx}{18c} + qf = ap$, de laquelle dégageant l'inconnue, il vient $x = \frac{18acp}{19bd} - \frac{hr}{3d} - \frac{18cqf}{19bd}$. Il ne reste plus qu'à faire avec les nom-

---

(*dr*) L'auteur omet ici la considération du frottement latéral qu'éprouve l'axe de la meule et de la lanterne contre ses deux points d'appui, par suite de l'effort horizontal exercé par les dents du rouet. La résistance du blé ne cause aucun frottement latéral, parce qu'elle est la résultante de forces distribuées symétriquement autour de l'axe de rotation.

Omission du frottement latéral de l'axe de la meule.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

bres les opérations indiquées sur les lettres qui les expriment : on trouvera $142\frac{1}{9}$ pour le premier terme, 10 pour le second, et $7\frac{1}{3}$ pour le troisième. Ajoutant ensemble les deux derniers, il vient $17\frac{1}{3}$ pour la somme, qui étant retranchée de la valeur du premier, il reste à-peu-près 125 liv. pour la valeur de x, c'est-à-dire pour le poids équivalent à la résistance que le blé oppose à la meule.

653. Pour savoir présentement quelle partie de la puissance est employée à surmonter cette résistance, il faut être prévenu que le rouet a 48 dents, et la lanterne 9 fuseaux; que par conséquent la lanterne et la meule font 5 tours $\frac{1}{3}$, tandis que la roue n'en fait qu'un.

Le rayon moyen de la meule étant de 2 pieds (651), sa circonférence sera de $12\frac{4}{7}$, qu'il faut multiplier par $5\frac{1}{3}$, il vient 67 pieds pour le chemin que fait un des points de cette circonférence, tandis que le centre d'impression d'une des aubes en fait un de 50 pieds $\frac{5}{7}$. Ainsi multipliant la puissance 125 liv. par sa vîtesse 67 pieds, et divisant le produit par 50 pieds $\frac{5}{7}$, vîtesse de la puissance motrice, il viendra $166\frac{6}{11}$ pour l'expression d'une partie de cette puissance (89) uniquement employée à surmonter la résistance que le blé oppose au mouvement de la meule. En la retranchant de 200 liv., valeur entière de la puissance motrice, il restera $33\frac{5}{11}$ pour l'autre partie de cette puissance employée à surmonter le frottement de toutes les parties du moulin.

654. Pour connaître combien chaque pièce qui frotte emprunte de la force qui surmonte le frottement total, nous commencerons par celui du pivot de la lanterne sur la crapaudine, en supposant qu'elle est toujours chargée de la pesanteur absolue de la meule et de son équipage, c'est-à-dire de 4348 livres, quoique, selon l'article 637, l'action de ce poids varie sans cesse à cause du mouvement vertical de la meule; mais il faut statuer sur le plus grand obstacle. Ainsi le frottement dont nous parlons sera $\frac{r}{3}$ qu'il faut multiplier par $\frac{19}{18}$ (290) à cause du rouet et de la lanterne; il vient $\frac{19r}{54}$. Or, comme entre ce poids et la puissance qui le meut, il y a quatre bras de levier, le rayon de la roue, celui du rouet, celui de la lanterne, et le rayon moyen du pivot : nommant y la puissance qui doit surmonter ce frottement, on aura (73, 74) $ac : bh :: \frac{19r}{54} : y$, ou 6 pieds : 8 lignes :: 1530 livres : $y = 14$ liv. $\frac{1}{6}$.

Nommant u la puissance qui surmonte le frottement causé par l'action de la meule sur le blé, et m cette même action, qu'on peut regarder comme un poids de 125 livres, $\frac{m}{18}$ exprimera le frottement à la rencontre du rouet et de la lanterne (276). Et comme on a encore ici quatre bras de levier entre la puissance et la résistance $\frac{m}{18}$, qu'on doit regarder comme un

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

poids qui répond à l'extrémité du rayon moyen de la meule, on aura (73, 74) $ac : bd :: \frac{m}{18} : u$, ou 6 pieds : 8 pieds :: 6 livres $\frac{8}{9} : u = 9$ liv. $\frac{1}{6}$.

Si l'on nomme z, la puissance qui doit surmonter le frottement des tourillons de la roue, qui est q, et qu'on multiplie ce poids par son bras de levier f, divisant le produit par le rayon de la roue (48), on aura $\frac{qf}{a} = z = 10$ liv. $\frac{1}{3}$.

Ajoutant ensemble la valeur de y, u, z, il vient à-peu-près 33 liv. $\frac{1}{2}$ pour la puissance qui surmonte le frottement total, qu'on peut regarder comme le même nombre que nous avons trouvé dans l'article 653, n'ayant point d'égard à la différence des deux fractions, qu'on doit regarder comme nulle. Cela suffit pour prouver la justesse de tout ce qui précède, et pour servir d'introduction au calcul des machines en général.

Je ferai remarquer en passant l'erreur de ceux qui s'imaginent que dans les machines composées il y a toujours un tiers de la puissance motrice employé à surmonter le frottement, sans avoir égard à la longueur des bras de levier, à la situation des parties qui frottent, et si la machine est plus ou moins composée; puisqu'il est aisé de voir dans cet exemple qu'il n'y a guère qu'un sixième de cette puissance employé pour cela, 33 $\frac{1}{2}$ étant la sixième partie de 200. Cependant je puis bien assurer que les calculs précédents répondent parfaitement à l'effet du moulin dont il s'agit, m'en étant convaincu par plusieurs expériences faites avec beaucoup de soin.

La puissance qui surmonte l'action de la pesanteur relative d'une meule sur le blé, est à-peu-près la trente-cinquième partie de la pesanteur absolue de la meule.

655. Comme la puissance qui surmonte la résistance que le blé oppose à la meule agit selon une direction horizontale, on ne peut pas dire qu'elle est égale à la pesanteur relative de la meule, que nous ne connaissons pas. On sait seulement que cette pesanteur relative est toujours une même partie de la pesanteur absolue de la meule. Mais sans nous en mettre en peine, il n'y a point de doute que la puissance qui la surmonte n'ait toujours avec elle le même rapport. Cette puissance pourra donc avoir aussi un rapport constant avec la pesanteur absolue de la meule. Je veux dire, par exemple, que si la pesanteur relative d'une meule était la dixième partie de sa pesanteur absolue, et que la puissance qui surmonte la résistance du blé fût la moitié de la pesanteur relative, cette puissance serait toujours la vingtième partie de la pesanteur absolue.

Le calcul précédent ayant donné 125 livres pour la puissance qui surmonte la résistance que le blé oppose à une meule du poids de 4348 livres, cette puissance sera à la pesanteur absolue de la meule comme 125 est à 4348, ou à-peu-près comme 1 est à 35, qui est un rapport

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que nous regarderons comme exact, afin de nous en servir dans la suite (*ds*).

Calcul du moulin à blé de La Fère, d'après les principes établis dans les notes précédentes.

(*ds*) Après avoir indiqué dans les trois notes précédentes les inexactitudes du calcul commençant art. 649, je vais ici reprendre entièrement ce même calcul. L'auteur, en décrivant le moulin, ne fait aucune mention de la surface de l'orifice par lequel l'eau était donnée à la roue, ni de la forme de la paroi à l'entrée de cet orifice, et il ne dit point si la roue remplissait entièrement le coursier. On ne peut donc évaluer exactement la vîtesse et le volume de l'eau dépensée, et il faut employer ici les formules données dans le § 3 de la note (*dn*), d'après lesquelles l'effort exercé sur les aubes est exprimé par $P=\frac{2}{3}.1000\,\Omega\frac{(\sqrt{2gH}-V)V}{g}$. On a ici l'aire des aubes $\Omega=2^{pi}2^{po}=0^{mq},2286$. La hauteur de la chute $=5^{pi}=1^{m},62$, et par conséquent la vîtesse qui lui est due $=5^{m},64$. Comme il est extrêmement probable qu'il n'y avait point ici de contraction sur le fond, et qu'il y en avait une sur les côtés de l'orifice, j'admettrai que la vîtesse de l'eau dans le coursier était les 0,89 de celle due à la chute, c'est-à-dire que je ferai $\sqrt{2gH}=5^{m},02$. La vîtesse des aubes $V=8^{pi}4^{po}7^{li}=2^{m},72$. Mettant ces valeurs dans la formule, où l'on fera aussi $g=9^{m},809$, on trouvera pour l'effort cherché $P=97,3$ kil.

Je vais maintenant chercher l'effort exercé sur la meule, qui sera représenté par Q. En se rappelant que, d'après le § 3 de l'addition au premier livre, lorsqu'une machine se meut d'un mouvement uniforme, l'effort P du moteur, et celui Q de la résistance, ont des valeurs telles qu'ils se font mutuellement équilibre au moyen de la machine; il ne s'agira que d'exprimer les conditions de l'équilibre entre P et Q, en ayant égard aux frottements.

En représentant par q l'effort que les dents du rouet exercent contre les fuseaux de la lanterne, on voit que l'axe de la roue à aubes est soumis à l'action de la force horizontale $P+q$, et de la force verticale 3015 liv. $=1476$ kil. qui est le poids de cette roue. La résultante de ces deux forces est $\sqrt{(1476)^2+(P+q)^2}$, et le frottement qu'elle occasionne sur les tourillons est, conformément à la note (*aq*), $f'\sqrt{(1476)^2+(P+q)^2}$. D'après cela, en faisant attention que le rayon de la roue au centre des aubes est $8^{pi}=2^{m},6$, celui du rouet $4^{pi}=1^{m},3$, et celui des tourillons $9^{li}=0^{m},02$, on verra que l'équilibre entre les forces agissant autour de l'axe de la roue est exprimé par l'équation $2,6.P=1,3.q+0,02.f'\sqrt{(1476)^2+(P+q)^2}$, laquelle, en faisant $P=97,3$ kil., donnera la valeur de q. Quant à la valeur de f', en supposant que le frottement des tourillons de l'axe s'exerce fer sur fer sans enduit, on voit par les tableaux de la note (*al*) qu'il ne peut y avoir d'erreur sensible à supposer $f'=0,2$. Il serait beaucoup trop long de résoudre rigoureusement l'équation par rapport à q, et il suffira de mettre pour q sous le radical la valeur qu'aurait cette quantité s'il n'y avait point de frottement, laquelle serait $q=\frac{2,6}{1,3}P=194^{k},6$. De cette manière, on trouvera pour la valeur cherchée, avec une approximation suffisante, $q=189,4$ kil.

Il reste maintenant à exprimer l'équilibre entre l'effort q exercé sur les fuseaux de la lanterne, et l'effort Q provenant de la résistance du blé, et que je supposerai

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

656. Un moulin tel que celui dont nous venons de faire le calcul, qui a une meule mobile de 6 pieds de diamètre pesant avec son équipage en-

Estimation de la quantité de blé que le moulin pré-

appliqué à la circonférence de la meule. Pour y parvenir, il faut remarquer que l'axe de la meule est soumis à une force verticale qui est le poids de la meule et de son équipage = 4348 liv. = 2128 kil., laquelle produit un frottement = f. 2128 kil., dont le bras de levier est $2^{li} = 0^{m},005$; et aux forces horizontales provenant de l'effort q et de la résistance du blé. Cette dernière résistance ne cause aucun frottement, comme on l'a déja remarqué dans la note (*dr*), mais on doit tenir compte de celui provenant de q, dont la valeur est $f'q$, et dont le bras de levier, qui n'est autre chose que le rayon de l'axe, peut être supposé de $0^{m},027$. D'après cela, et en faisant attention que le rayon de la lanterne est $9^{po} = 0^{m},244$, et celui de la meule $3^{pi} = 0^{m},975$, l'équilibre autour de cet axe s'exprimera par l'équation $0,244 . q = 0,975 . Q + 0,005 . f . 2128 + 0,027 . f' q$; d'où, mettant pour q la valeur ci-dessus 189,4 kil., et faisant toujours f et $f' = 0,2$, on tire pour l'effort exercé à la circonférence de la meule, $Q = 44,2$ kil.

Sans les frottements, le rapport des efforts P et Q serait le rapport inverse des vîtesses respectives de leurs points d'application, conformément au principe des vîtesses virtuelles. Ainsi, puisque la meule fait 5,33 tours pendant que la roue en fait un, et que leurs rayons respectifs sont $0^{m},975$ et $2^{m},6$, on aurait $P = \frac{0,975 \times 5,33}{2,6} Q = 88,4$ kil. Mais la véritable valeur de P étant 97,3 kil., on voit qu'il y a 8,9 kil., c'est-à-dire $\frac{1}{11}$ de cet effort, employé à surmonter les frottements. Le frottement des tourillons de l'axe de la roue à aubes n'entre dans cette quantité que pour 2,1 kil. Le reste est consommé par le frottement de l'axe de la meule.

L'effort $Q = 44,2$ kil. provenant de la résistance du blé, et supposé appliqué à l'extrémité du rayon de la meule, étant réduit aux $\frac{2}{3}$ de ce rayon, devient 66 kil. Cette quantité est le $\frac{1}{32}$ du poids 2128 kil. de la meule et de son équipage, au lieu du $\frac{1}{35}$ trouvé dans le texte.

Rapport de l'effort exercé sur la meule au poids dont elle est chargée.

Lambert a donné des recherches expérimentales sur un moulin du même genre que le précédent (*Académie de Berlin*, 1775). Le résultat de son calcul est que l'effort exercé sur la meule, réduit aux $\frac{2}{3}$ du rayon, est le $\frac{1}{24}$ du poids de la meule. Mais je dois faire remarquer que Lambert calcule cet effort par le même procédé que Bélidor, lequel ne peut donner un résultat exact, si ce n'est par des compensations d'erreurs entièrement fortuites. Je vais refaire ce calcul en employant les formules données dans les notes précédentes, qui sont fondées sur des notions plus rigoureuses. La vîtesse due à la chute du moulin est $14^{pi},16$ du Rhin $= 4^{m},443$, et en prenant comme ci-dessus les 0,89 de cette vîtesse pour celle de l'eau dans le coursier, on a $\sqrt{2gH} = 3^{m},86$. L'aire de la partie des aubes plongée dans l'eau $\Omega = 8\frac{1}{3}^{pi\,q} = 0^{m\,q},8201$. La vîtesse du centre des aubes $V = 8^{pi},7 = 2^{m},73$. Mettant ces valeurs dans la formule $P = \frac{2}{3} . 1000 \frac{\Omega(\sqrt{2gH} - V)V}{g}$, on trouve pour l'effort exercé sur les aubes $P = 172^{k}$. Cet effort, eu égard aux frottements, et en le supposant appliqué aux $\frac{2}{3}$ du rayon des meules, doit, d'après Lambert, être réduit

Calcul d'un autre moulin mu par une roue en-dessous; décrit par Lambert.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cédent peut moudre par jour.

viron 4348 livres et faisant 53 tours par minute, peut moudre en 24 heures 120 septiers de blé du poids de 75 livres chacun, quand la meule est nouvellement piquée et qu'elle est de bonne qualité; circonstance qui entre pour beaucoup dans le plus ou moins de farine qu'elle peut faire, l'expérience faisant voir que les plus dures et les plus spongieuses sont préférables aux autres. Cependant, comme dans une théorie telle que je l'ai établie ici, on ne peut se dispenser de faire abstraction des accidents, nous supposerons dans la suite que les meules dont il sera question seront à-peu-près de même nature que celle sur laquelle j'ai fait mes observations, parce que, tout bien considéré, quand cela ne se rencontrerait pas absolument de même, la chose ne peut pas tirer à conséquence dans l'application qu'on fera de nos principes.

Examen du moulin précédent pour voir de combien il est éloigné du plus grand effet.

657. Il reste à examiner si le moulin sur lequel nous venons d'opérer fait tout l'effet qu'on peut en attendre. Il faut se rappeler que nous avons démontré qu'une machine mise en mouvement par un courant était dans sa perfection lorsque la vîtesse de la roue était le tiers de celle du courant qui la fait agir (588, 589, 594). C'est ce qui ne se rencontre pas ici, où la vîtesse de la roue est à-peu-près la moitié de celle du courant. Ainsi la

---

dans le rapport 135 : 371. Il deviendra donc $62^{k},7$. Les deux meules que le moulin faisait marcher pesaient ensemble 3300 liv. de Berlin = 1543 kil. Ainsi l'effort exercé aux $\frac{2}{3}$ de leur rayon était le $\frac{1}{25}$ environ de leur poids.

Calcul d'un moulin mu par une roue de côté, décrit par Lambert.

Lambert examine dans un second mémoire (*Académie de Berlin*, 1775) un moulin mis en mouvement par une roue de côté, et calcule l'effort exercé par l'eau à-peu-près de la manière indiquée dans le § 3 de la note (*dm*). L'expression de cet effort, dans le cas du maximum d'effet dont il paraît que la roue s'écartait fort peu, est $P = 1000\,\Omega\,(H - \frac{1}{2}h) - p\frac{z}{s}$ kil. On a, d'après les données de Lambert, à-très-peu-près $H - \frac{1}{2}h = 4^{pi}\,10^{po}$ du Rhin $= 1^{m},52$. La longueur des aubes $28^{po} = 0^{m},732$, leur saillie mesurée dans le sens du rayon $6^{po}\frac{1}{2} = 0^{m},17$; d'où $\Omega = 0^{mq},1244$. Le poids de l'eau déplacée par l'arc de la roue contenu dans le coursier $p = 221$ liv. de Berlin = 103 kil.. Le rapport de la hauteur verticale de cet arc à sa longueur $\frac{z}{s} = \frac{4,17}{7,8}$. Ces nombres donnent P = 134 kil., valeur qui, réduite aux $\frac{2}{3}$ du rayon de la meule, devient $134 \cdot \frac{90}{214} = 56$ kil. Le poids de la meule étant 1915 liv. = 896 kil., le rapport de l'effort à ce poids est ici $\frac{1}{16}$.

On trouvera dans la note (*dv*) le calcul d'une expérience sur un moulin d'une autre espèce, dont il résulte que la résistance du blé, supposée appliquée aux $\frac{2}{3}$ du rayon de la meule, est le $\frac{1}{21}$ du poids de cette meule. Ces résultats ne diffèrent pas entre eux plus qu'on ne devait s'y attendre, eu égard à l'incertitude qui reste sur l'évaluation de l'action de l'eau et des frottements, et aux différences qu'il peut y avoir dans la manière de conduire les moulins. Il paraît qu'on s'éloignera très-peu de la vérité en admettant que la résistance du blé, appliquée aux $\frac{2}{3}$ du rayon de la meule, est moyennement le $\frac{1}{22}$ du poids dont cette meule est chargée.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

roue va beaucoup plus vîte qu'elle ne devrait aller, ce qui vient de ce que la meule n'est point assez pesante eu égard à la force du courant, dont la vîtesse respective n'est pas bien ménagée.

Voulant savoir quel est le poids de la meule qu'il faudrait employer à ce moulin pour le rendre capable du plus grand effet, il faut commencer par chercher la force respective de l'eau contre les aubes, dans le cas dont nous parlons, en disant : Si le quarré de 8 pieds 10 pouces 9 lignes donne 200 livres, que donnera le quarré de $11\frac{1}{2}$, qui sont les deux tiers de $17\frac{1}{4}$? on trouvera 339 liv. (568).

Il faut présentement avoir recours à l'équation $\frac{19hrb}{54c}+\frac{19bdx}{18c}+qf=ap$ (652), et faire attention que puisque x exprime la résistance que le blé oppose au mouvement de la meule, $35x$ exprimera le poids de la même meule, y compris celui de son équipage (655). On pourra donc à la place de r substituer $35x$, et l'on aura $\frac{665hbx}{54c}+\frac{19bdx}{18c}+qf=ap$, dont tous les termes étant multipliés par $54c$, donnent après la réduction $665hbx+57bdx+18cfq=54acp$. Dégageant l'inconnue, il vient $x=\frac{54acp-54cfq}{665bh+57bd}$, dans laquelle les lettres connues ont la même valeur que ci-devant, puisqu'il s'agit de la même machine, excepté p qui exprime la puissance, qui vaut ici 339 liv. au lieu de 200, et q qui vaut 1513 livres au lieu de 1305, à quoi il faut bien prendre garde dans le calcul numérique, lequel donnera $54acp=109836$, $54cfq=3704$, et 106132 pour leur différence. On trouvera de même $665bh=27$, et $57bd=456$. Ajoutant ces deux nombres ensemble, on a 483 pour le diviseur de 106132, et le quotient donne 220 liv. pour la valeur de l'inconnue x, c'est-à-dire pour le poids équivalent à la résistance que le blé oppose au mouvement de la meule; lequel étant multiplié par 35, donne 7700 livres pour le poids dont le palier doit être chargé, d'où retranchant celui de la lanterne et de son essieu (651), il reste 7500 liv. pour la pesanteur de la meule.

Si on donne à cette meule le même diamètre qu'à la première, les vîtesses de l'une et de l'autre seront dans le rapport de celle qu'aura la roue dans ces deux cas, c'est-à-dire comme $8\frac{5}{12}$ est à $5\frac{3}{4}$. Or si l'on multiplie le poids de chaque meule par la vîtesse qui lui répond, les produits seront dans la raison des quantités de blé qu'elles pourront moudre dans le même temps (638). Si l'on en fait la proportion, on trouvera que la meule qui convient au plus grand effet pourra moudre environ 145 septiers en 24 heures, c'est-à-dire 25 de plus que ne faisait le moulin dans l'état où il était quand j'en ai fait le calcul (*dt*). On peut juger de-là

(*dt*) Les calculs contenus dans cet article, dont l'objet est de trouver une meilleure Calcul pour l'établissement du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

combien il importe de mettre dans une juste proportion toutes les parties d'une machine ; on n'aurait peut-être pas soupçonné que celle-ci fût susceptible de tant de recherches.

Voulant connaître, comme ci-devant, quelle est la force appliquée à la roue uniquement employée à surmonter la résistance du blé, on fera attention qu'entre la puissance et le poids il y a quatre bras de levier, qui sont le rayon de la roue, celui du rouet, celui de la lanterne, et le rayon

---

moulin de La Fère, d'après les données du texte, et les principes établis dans les notes précédentes.

disposition pour le moulin de La Fère, étant une application des principes inexacts établis dans le texte, et rectifiés dans les notes précédentes, je ne m'attacherai point à les critiquer en détail. Je crois préférable de rechercher les perfectionnements qu'aurait pu recevoir cette machine, d'après les notions que j'ai données.

Il eût été convenable de faire marcher ce moulin au moyen d'une roue de côté, conformément aux principes établis dans le § 3 de la note (*dm*). Mais en employant une roue en-dessous, il faudrait l'établir dans les règles du § 4 de la note (*dn*). On aurait donc d'abord pour régler la vîtesse des aubes l'équation $V = \frac{2}{5}\sqrt{2gH}$, qui, en faisant $\sqrt{2gH} = 5^{m},64$, l'entrée de l'orifice étant évasée, donne $V = 2^{m},26$, au lieu de $2^{m},72$ qui avaient effectivement lieu d'après les observations de Bélidor.

Pour régler ensuite la grandeur de la meule d'après la puissance de la chute, il faut connaître le volume d'eau qui agissait sur la roue. Or, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, l'aire des aubes était $0^{mq},2286$, et leur vîtesse $2^{m},72$: ainsi, en supposant qu'elles fermassent tout passage à l'eau, ou faisant abstraction de la perte qui pouvait avoir lieu entre les aubes et le coursier, ce volume d'eau en une seconde était $0^{mq},2286 \times 2^{m},72 = 0^{mc},622$. Faisant donc $E = 0^{mc},622$ et $H = 1^{m},62$ dans l'équation $\frac{1}{3}.1000\,EH = 134d^{2}$, elle donnera pour le diamètre de la meule $d = 1^{m},58$, et d'après la table de la note (*di*) cette meule devra peser environ 1700^{k}. Dans l'exécution la meule avait $1^{m},95$ de diamètre, et pesait 2128^{k}. La quantité de blé moulue dans une seconde aurait été, d'après la même table, d'environ $0^{k},056$, et par heure 200^{k} : les observations de Bélidor la portent à 183^{k}.

Pour imprimer à la meule la vîtesse convenable, le rapport des diamètres D' et d' du rouet de la lanterne doit être réglé par l'équation $\frac{D'}{d'} = 15\frac{D}{d\sqrt{2gH}}$, qui, en faisant $D = 5^{m},2$, $d = 1^{m},6$, $\sqrt{2gH} = 5^{m},64$, donne $\frac{D'}{d'} = 8,64$. Ainsi, en n'employant qu'un seul engrenage, il eût fallu donner au diamètre du rouet 3^{m}, et à celui de la lanterne $0^{m},35$ environ. Dans l'exécution ces diamètres étaient $2^{m},6$ et $0^{m},49$.

En comparant les résultats de ce calcul avec ce qui avait effectivement lieu, on voit que ce moulin s'écartait assez peu de la disposition le plus convenable. Il eût fallu seulement diminuer un peu la grandeur et le poids de la meule, et augmenter sa vîtesse, en faisant la lanterne plus petite et le rouet plus grand. Ce résultat est contraire à celui auquel l'auteur parvient art. 657, puisqu'il trouve qu'il faudrait, pour perfectionner le moulin, augmenter considérablement le poids de la meule. Mais les résultats établis dans la note (*di*) conduisent à penser que, pour faire diminuer la vîtesse de la roue à aubes, ce qui est nécessaire pour s'approcher du maximum d'effet, il eût été plus convenable ici d'augmenter la vîtesse de la meule que sa masse.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

moyen de la meule; qu'il y a même raison du produit du premier par le troisième, à celui du second par le quatrième, je veux dire de 6 à 8, que du poids 220 liv. à la puissance (73), qu'on trouvera de 293 liv. $\frac{1}{3}$. Cette quantité étant retranchée de 339, il reste 45 liv. $\frac{2}{3}$ pour la force qu'il faut de plus à cette puissance pour surmonter le frottement de toute la machine, au lieu de 33 liv. $\frac{1}{3}$ que nous avons trouvé ci-devant; ce qui fait une différence de 12 liv. $\frac{1}{3}$ provenant de la plus grande pesanteur de la seconde meule.

Manière de disposer les parties d'un moulin, pour que la même roue fasse tourner deux meules à-la-fois.

PLANCHE 8. FIGURES 2 et 3.

658. Quand on a beaucoup d'eau et une chute suffisante, on peut disposer le moulin de façon que la même roue fasse tourner deux meules à-la-fois; comme on en peut juger par la seconde et la troisième figure de la planche 8, où l'on voit que le rouet G qui répond à l'arbre de la roue F s'engrène avec la lanterne I, dont l'essieu K est aussi celui d'un autre rouet L, qui tournant horizontalement s'engrène avec les lanternes M et N pour faire tourner les meules H.

Comme on n'a pas toujours assez de grain à moudre pour occuper les deux meules à-la-fois, il faut faire la lanterne de deux pièces suivant les dessins D, E, F, afin qu'elle puisse s'ouvrir par le moyen des charnières pour n'être plus en prise aux dents du rouet. Quand on veut qu'elle agisse, on la referme. Pour que la lanterne, étant ouverte, n'abandonne pas l'essieu, il faut qu'une de ses moitiés y soit arrêtée haut et bas par des colliers de fer, comme on le voit au bas de la figure 4, par le plan D d'un des tourteaux. On pourrait, au lieu de briser la lanterne, se contenter d'ôter deux fuseaux à celle qui répond à la meule que l'on veut faire chômer.

PLANCHE 9. FIGURES 2 et 4.

Pour qu'un moulin soit complet, il faut qu'il puisse bluter la farine à mesure que le blé est moulu.

FIGURES 4 et 5.

659. Pour qu'un moulin soit complet, il doit bluter la farine; voici comment on s'y prend. On a des chausses de plusieurs espèces, plus ou moins fines, faites avec du canevas comme les tamis. On met une de ces chausses dans un tonneau percé par les deux fonds; on la soutient tendue par plusieurs petits cerceaux, servant aussi à la suspendre dans le tonneau, qui doit être un peu incliné. Le fond le plus élevé reçoit la farine, laquelle étant entrée dans la chausse est secouée deux ou trois fois à chaque tour de lanterne, par le moyen du bâton H, qui est mis en mouvement par des bouts de fuseaux qui excèdent le tourteau supérieur ou inférieur, ou bien l'on met deux morceaux de bois en croix formant une espèce de tourniquet, qu'on attache au sommet ou au bas de la lanterne, et qui donne le mouvement au bâton. Ainsi la farine tombe dans le tonneau et se sépare du son, qui de son côté suit la pente du blutoir pour se rendre dans une auge ou dans un sac. Afin que le bâton H fasse bien son effet, il doit être un peu forcé par un bout de règle passé entre deux cordes tordues ensemble.

La cinquième figure est un autre blutoir où l'on voit plus distinctement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce que je viens d'insinuer, mais différemment disposé. Comme le dessin en fait assez sentir la manœuvre, je ne m'y arrêterai pas. Ce n'est même qu'avec répugnance que je parle de semblables bagatelles ; mais il faut savoir préférer l'utile à des objets plus intéressants à décrire, et qui n'auraient pas la même fin.

Description d'un moulin exécuté à Mont-Royal avant la démolition de cette place.

660. Voici un moulin qui a été exécuté autrefois à Mont-Royal. On sait que cette place était située dans la presqu'île de Trabanne, sur un rocher escarpé, entouré en partie de la Moselle. Il y a dans cette rivière plusieurs îles, dans l'une desquelles on avait établi un poste; et comme il était aisé de rétrécir en cet endroit le passage du courant pour faire gonfler les eaux, on a fait un moulin dans une tour élevée exprès pour le mettre à l'abri de l'ennemi, étant d'une grande conséquence pour la garnison. Quoique ce moulin n'ait rien de singulier, je ne laisserai pas de le rapporter comme un exemple, pour étendre davantage l'application de nos principes sur le frottement.

PLANCHES 2 ET 3.

Cette tour est rectangulaire, comme on en peut juger par la figure ABCD qui en est le plan intérieur, dont on a supprimé l'épaisseur des murs. On y remarquera que chaque flanc est percé par un aquéduc, dont le premier EF sert à introduire l'eau dans un canal qui traverse la tour, et le second GH en facilite la sortie. A l'endroit IK est une vanne pour retenir l'eau à une certaine hauteur, et faire tourner deux roues L, M, placées de suite. Pour juger de la disposition de ces roues, il faut considérer les profils de la tour, l'un coupé sur la largeur du plan, et l'autre sur la longueur. Dans ce dernier (Planche 3), on voit la vanne IK, qui répond à l'entrée de l'eau, et la première roue qui en reçoit le choc. Sur la gauche en est une autre dont on s'est contenté de ponctuer la circonférence, pour qu'on pût voir distinctement plusieurs parties cachées par la précédente.

Si l'on considère les deux profils (Pl. 2 et 3), on verra que chaque roue est accompagnée d'un rouet dont les dents s'engrènent dans une lanterne; que cette lanterne est traversée par un arbre au sommet duquel est un autre rouet qui fait tourner une seconde lanterne qui donne le mouvement à la meule.

Manière de faire chômer une ou plusieurs roues qui se trouvent dans le même coursier, sans empêcher que les autres ne tournent.

661. Les deux roues se trouvant de suite, on a fait en sorte que lorsqu'on serait obligé d'en faire chômer une, l'autre pût toujours aller. On a posé sur les bords du canal (planche 3) un châssis VTXY des deux côtés de la roue. Dans les montants TV et XY sont des coulisses, le long desquelles les extrémités V et Y des coussinets qui portent les tourillons de la roue, peuvent monter et descendre. C'est pourquoi on y a fait des écrous où entrent les verins qui accompagnent les châssis. Quand on veut empêcher qu'une roue agisse, on l'élève à la hauteur où on veut l'arrêter, et on passe des boulons dans les trous que l'on a fait aux mon-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tants des coulisses, afin d'en soutenir le poids; ce qui se fait sans que la lanterne renfermée dans le châssis devienne un obstacle, parce que les dents du rouet s'engrenant au bas des fuseaux qui ont au moins 18 pouces de hauteur, on peut élever la roue autant qu'il le faut pour que les aubes ne soient pas choquées par le courant.

Je passe sous silence le détail de ce qui appartient à la tour; puisque les batteries de canon, haute et basse, qui servaient à défendre le passage de la rivière, sont assez distinctement marquées par les embrasures. On voit aussi que la voûte, qui n'a que 18 pieds de largeur sur 3 pieds d'épaisseur, recouverte de 4 pieds de terre, mettait ce moulin à l'épreuve de la bombe.

On remarquera en passant qu'il y a bien des endroits où dans le temps des grandes eaux les roues des moulins sont submergées pendant une partie de l'hiver. Pour éviter cet inconvénient, le moyen le plus ordinaire est d'élever l'arbre de la roue de quelques pieds, en se servant d'une machine destinée à cet usage, et rien ne me paraît plus simple que celle dont nous venons de parler. Mais pour cela, il faut que les fuseaux de la lanterne soient d'une hauteur convenable, afin que les dents du rouet puissent toujours s'engrener avec les fuseaux, qu'il faut fortifier par deux tourteaux posés horizontalement dans l'intérieur de la lanterne.

Quelles devaient être les proportions du moulin de Mont-Royal dans l'état de perfection.

662. Il y apparence que le peu de chûte qu'avait le courant qui faisait aller les roues du moulin du Mont-Royal, est cause que l'on a été obligé d'employer deux rouets et deux lanternes pour donner aux meules une vîtesse convenable. Il est vrai que la machine devenant par-là plus composée, les frottements en sont aussi devenus plus considérables, ce qui demande nécessairement une augmentation de force au moteur; et voilà le cas où se trouvent tous les moulins qu'on établit sur des bateaux, et les autres machines qui sont mises en mouvement par le courant d'une rivière. La seule ressource qui reste est de donner aux aubes autant de superficie qu'il en faut pour suppléer à la vîtesse du courant. Nous allons présentement faire voir de quelle manière on aurait dû déterminer les principales proportions du moulin dont nous parlons pour le rendre parfait, en connaissant seulement le diamètre de la roue, celui de la meule, son poids et la vîtesse du courant. Ainsi, sans nous mettre en peine de ce que l'on a suivi dans l'exécution, nous nous attacherons à la première roue.

On suppose qu'on a été assujetti à donner 7 pieds de rayon à cette roue, dont la circonférence sera par conséquent de 44 pieds, et que le courant n'a que 9 pieds de vîtesse par seconde, parce qu'on ne peut faire gonfler les eaux qu'à une hauteur médiocre. Sa vîtesse par minute sera de 540 pieds, dont le tiers, qui est 180, sera celle qu'aura le centre d'impression d'une des aubes dans le même temps pour le *plus grand effet*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

(595); ainsi cette roue fera environ 4 tours par minute. Si l'on veut que la meule en fasse 60 dans le même temps (638), il faut proportionner le nombre des dents des rouets et celui des fuseaux des lanternes, de façon que la quantité de tours de la première lanterne, multipliée par la quantité de tours de la seconde, à chaque tour de roue, donne 15 au produit; parce qu'alors la roue faisant 4 tours par minute, la meule en fera 60. Pour cet effet, il n'y a qu'à donner 4 pieds de rayon au premier rouet, et l'accompagner de 48 dents; 16 pouces de rayon à sa lanterne, et la faire de 16 fuseaux : alors elle fera trois tours contre un que fera le rouet. D'autre part, si l'on donne 3 pieds 9 pouces au rayon du second rouet, qu'on l'accompagne de 45 dents, 9 pouces au rayon de sa lanterne, et qu'elle soit de 9 fuseaux, elle fera 5 tours contre le rouet un. Ainsi l'on aura les nombres 3 et 5, dont le produit répond à l'objet qu'on s'est proposé.

Il nous reste à déterminer la superficie qu'il faut donner aux aubes, pour que le courant soit capable de surmonter la résistance que le bled oppose à la meule, eu égard à son poids et à tous les frottements qui se rencontrent ici. Nous supposerons que la meule a 3 pieds de rayon, et que son épaisseur réduite est de 12 pouces, ce qui donne 28 pieds 3 pouces cubes de solidité; mais nous négligerons les 3 pouces pour le vide de *l'œil*. Multipliant 28 par 110 (651), il vient 3080 liv. pour le poids de la meule, auquel il faut ajouter 200 livres pour celui de la lanterne et de son essieu (651). Ainsi la crapaudine sera chargée de 3280 liv., qui, étant divisée par 35, il vient 94 liv. pour le poids équivalent à la résistance que le bled oppose à la meule (655), lequel étant multiplié par son bras de levier, c'est-à-dire par les deux tiers du rayon de la meule (240), donne 188.

Manière de faire le calcul de toutes les parties du moulin de Mont-Royal.

663. Pour calculer le frottement du pivot de la meule sur sa crapaudine, il faut, comme à l'ordinaire, prendre le tiers du poids dont elle est chargée, qui est de 1093 liv., le multiplier par les deux tiers du rayon du pivot (240), c'est-à-dire par 2 lig., il vient 15 : lesquels, étant ajoutés avec le produit précédent, je veux dire avec 188, il vient 203, qu'il faut diviser par le rayon de la lanterne qui est de 9 pouces. On aura 270 $\frac{8}{9}$ pour la résistance du bled, jointe au frottement du pivot de la meule réduite au point où les fuseaux et les dents du rouet se rencontrent : c'est pourquoi il faut multiplier ce nombre par $\frac{19}{18}$ (290), et il vient 286 liv. pour le poids qui répond à l'extrémité du rayon du rouet supérieur. Ce poids étant multiplié par ce même rayon, qu'on peut considérer comme un bras de levier de 3 pieds 9 pouces, et le produit divisé par le rayon de la première lanterne, qui est de seize pouces, que l'on peut regarder aussi comme le second bras de levier, donnera 804 liv. pour une partie de la résistance que les dents du premier rouet rencontreront à mouvoir les fuseaux de la lanterne. Car il faudra y ajouter encore celle que peut causer le frottement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de l'extrémité du pivot de l'arbre vertical sur sa crapaudine (240) que nous supposerons chargé de 960 liv., dont on multipliera le tiers qui est 320 liv. par les deux tiers du rayon du pivot, c'est-à-dire par 4 lig.; et divisant le produit par 16 pouces, rayon de la lanterne d'en-bas, il vient 6 liv. $\frac{2}{3}$, qui, étant ajoutées avec 804 liv., donnent 810 liv. $\frac{2}{3}$, qu'il faut multiplier par $\frac{19}{18}$ (292) à cause du frottement du rouet et de la lanterne, pour avoir 856 liv.

Le rayon du rouet d'en-haut et celui de la lanterne d'en-bas composant ensemble un levier recourbé à angle droit, qui a pour point d'appui la crapaudine du pivot d'en-bas et le collier du pivot d'en-haut, il faut chercher la diagonale du parallélogramme rectangle (72) qui aurait pour côtés les nombres 286 et 856, qu'on trouvera de 902, dont on prendra la moitié (251) qui est 451 liv. pour le frottement, qu'on multipliera par 6 lignes, rayon des pivots; et divisant le produit par 16 pouces, rayon de la lanterne, il vient à-peu-près 14 liv. $\frac{1}{6}$ pour ce frottement réduit au fuseau de la lanterne, qu'il faut multiplier par $\frac{19}{18}$. Il vient 15 liv. qui, étant ajoutées avec 856, donnent 871 liv. pour la résistance totale que les dents du rouet d'en-bas rencontreront à faire tourner la lanterne. Or, multipliant ce nombre par 4 pieds, rayon du rouet, et divisant le produit par 7, rayon de la roue, il viendra 498 liv. pour la puissance qui doit être appliquée à la roue; à quoi il faut ajouter ce qui lui manque pour surmonter le frottement des tourillons de la même roue.

Je suppose que la roue, le rouet qui l'accompagne et l'arbre qui leur est commun pèsent ensemble 3450 liv., dont il faut prendre le tiers qui est 1150 pour la pression qui se fait selon la verticale; ensuite ajouter ensemble les nombres 871 et 498, c'est-à-dire les puissances qui agissent sur les fuseaux de la lanterne d'en-bas et à l'extrémité du rayon de la roue, et prendre la moitié de leur somme qui est 684 liv. $\frac{1}{2}$ (selon l'article 251), et l'ajouter avec 1150. Il viendra 1834 liv. $\frac{1}{2}$ pour le frottement des tourillons, qu'il faudra multiplier par le rayon des mêmes tourillons, c'est-à-dire par 9 lignes, et diviser le produit par celui de la roue. Il vient environ 16 liv. qui, étant ajoutées avec 498 liv., donnent 514 liv. pour la puissance qui doit surmonter tous les obstacles qui se rencontrent dans la machine.

Connaissant la vîtesse d'un courant et la puissance qu'il faut pour faire tourner une roue de moulin, trouver la superficie des aubes.

664. Ayant dit (662) que la vîtesse du courant était de 9 pieds par seconde et supposé que celle de la roue en était le tiers, la vîtesse respective de l'eau contre les aubes sera de 6 pieds par seconde, laquelle répond (*table I, page* 268) à un réservoir de 7 pouces $\frac{1}{5}$ de hauteur, dont la base étant d'un pied quarré sera chargée d'une colonne d'eau de 42 liv. (*table III, page* 363). Ainsi la force respective du courant sera capable d'une impulsion de 42 liv. par pied quarré; et comme la puissance doit être de 514, divisant ce nombre par 42, il vient 12 pieds $\frac{1}{4}$ pour la super-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ficie qu'il faudra donner à chaque aube (596), que l'on fera de telle largeur et hauteur que l'on voudra, pourvu que le produit de ces deux dimensions ne fasse pas moins de 12 pieds $\frac{1}{4}$, et que son centre d'impression soit éloigné de 7 pieds de celui de la roue, puisque c'est le bras de levier sur lequel nous avons fait notre calcul (576).

N'ayant égard qu'à la résistance que le bled oppose à la meule, que nous avons trouvée (662) de 94 liv., et à la raison réciproque de la vîtesse de ce poids et de celle de la puissance motrice, qui est comme 7 est à 30; on trouvera 403 liv. pour la puissance motrice, qui, étant retranchée de 514 liv., il reste 111 liv. pour la force destinée à surmonter tous les frottements, c'est-à-dire à-peu-près la cinquième partie de la force totale (*du*).

Calculs pour l'établissement du moulin de Mont-Royal, d'après les données du texte, et les principes établis dans les notes précédentes.

(*du*) Je ne m'attacherai pas non plus à suivre en détail les calculs des art. 662, 663 et 664, dont le lecteur, d'après tout ce qui précède, apercevra facilement les défauts. Mais je vais, en adoptant les données de l'auteur, refaire les calculs de l'établissement du moulin de Mont-Royal, ce qui présentera une nouvelle application des règles de la note (*dn*).

D'après les données du texte la vîtesse de l'eau à la sortie de l'orifice est $9^{pi} = 2^m,92$, le diamètre de la roue à aubes $14^{pi} = 4^m,55$, et le diamètre de la meule $6^{pi} = 1^m,95$.

La vîtesse des aubes devant, pour qu'on obtienne le maximum d'effet, être les $\frac{2}{5}$ de celle du courant, il faudra la régler ici à $2^m,17$. En conservant les dénominations des notes précédentes, le rapport des diamètres du rouet et de la lanterne devra être exprimé par l'équation $\frac{D'}{d'} = 15\frac{D}{d\sqrt{2gH}}$: faisant $D = 4^m,55$, $d = 1^m,95$, $\sqrt{2gH} = 2^m,92$, on trouve $\frac{D'}{d'} = 12$. Ce rapport est assez grand; et comme il convient, pour qu'un moulin marche bien, que le diamètre du rouet ne surpasse guères la moitié de celui de la roue à aubes, sur-tout quand la vîtesse de cette roue est médiocre, il est convenable d'employer ici un double engrenage, comme cela avait effectivement lieu dans l'exécution. On pourra donc établir par exemple un premier rouet sur l'axe de la roue à aubes de $2^m,1$ de diamètre engrenant dans une lanterne de $0^m,7$; puis sur l'axe de cette lanterne un second rouet de $1^m,6$, engrenant dans la lanterne montée sur l'axe de la meule, laquelle aurait $0^m,4$. Le produit des deux rapports $\frac{2,1}{0,7} \times \frac{1,6}{0,4}$ équivaut en effet au nombre 12.

Pour évaluer ensuite la dépense d'eau, on observera que la quantité d'action nécessaire pour faire marcher une meule de $1^m,95$ de diamètre est pour chaque seconde, d'après la table de la note (*di*), équivalente à $460^{k \times m}$ environ. On a trouvé dans le moulin calculé dans la note (*ds*) que les frottements consommaient $\frac{1}{10}$ en sus de la quantité d'action utilisée. Ici j'observerai que l'engrenage est double, et sans faire un calcul exact des frottements, ce qui n'offrirait qu'une répétition inutile de ce qu'on trouve dans les notes (*ds*) et (*dv*), j'évaluerai la quantité d'action totale à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Manière de régler la pente qu'il faut donner à un coursier dans lequel il se trouve plusieurs roues de suite, pour que le courant puisse les frapper toutes de la même force.

665. On remarquera, au sujet des roues qui se rencontrent dans le même coursier, qu'afin que l'eau qui a choqué la première acquière ensuite la vîtesse qu'elle a perdue pour choquer la seconde, il faut donner au coursier une certaine pente. Par exemple, nous avons supposé ici que la vîtesse de l'eau était de 9 pieds, et que la vîtesse de la première roue était le tiers de celle du courant. Il ne lui restera donc, après avoir choqué les aubes, que la vîtesse de 3 pieds par seconde. Ainsi il faudra donner au coursier une certaine pente, pour que le courant puisse acquérir encore 6 pieds de vîtesse. Pour cela, il n'y a qu'à voir de quelle hauteur il faudrait que tombât un corps pour acquérir une vîtesse uniforme de 9 pieds par seconde. On trouvera dans la table III, page 363, qu'elle doit être de 16 pouces $2\frac{1}{2}$ lignes, dans le cas où il n'aurait eu d'abord aucun mouvement. Mais si ce corps était déja capable d'une vîtesse de 3 pieds par seconde, il ne faudrait pas qu'il tombât de si haut: c'est pourquoi il faudra retrancher de la hauteur précédente celle qu'il aurait dû d'abord parcourir pour avoir cette vîtesse de 3 pieds, laquelle doit être d'un pouce $9\frac{1}{2}$ lignes, qui, étant retranchée de 16 pouces $2\frac{1}{2}$ lignes, reste 14 pouces 5 lignes pour la différence des deux hauteurs, qui est la pente qu'il faut donner au coursier dans l'intervalle des deux roues. Quand il y aurait 5 ou 6 roues de suite, elles iront toutes avec la même vîtesse, dès qu'elles se trouveront dans le cas des deux précédentes.

$530^{k\times m}$ environ. Il faudra donc, conformément au § 4 de la note (*dn*), poser l'équation $\frac{1}{3}.1000\,EH = 530^{k\times m}$, laquelle donne $E = \frac{1,59}{H}$. Ici la hauteur H de la chute doit être censée celle due à la vîtesse $2^m,92$ qui a été supposée à l'eau, c'est-à-dire que $H = 0^m,435$. On a donc $E = \frac{1,59}{0,435} = 3^{mc},658$. Ainsi, l'entrée de l'orifice étant évasée, de manière que l'eau y prenne toute la vîtesse due à la chute, l'aire de cet orifice devra être $\frac{3,658}{2,92} = 1^{mq},253$. On pourra lui donner $2^m,3$ de largeur sur $0^m,55$ de hauteur, et en conservant au coursier la même largeur de $2^m,3$, qui serait aussi la longueur des aubes de la roue, on donnerait à ces aubes au moins $1^m,5$ de hauteur, afin d'être certain que la veine d'eau ne passerait point par-dessus après les avoir choquées. Si l'entrée de l'orifice n'était point évasée, en sorte que la veine de fluide se contractât après son passage par cet orifice, la vîtesse $2^m,92$ et la section $1^{mq},253$ devraient être censées avoir lieu après la contraction; et il faudrait que la hauteur de la chute fût plus grande que $0^m,435$, conformément aux observations faites, et aux rapports établis dans les § 2 et 3 de la note (*dn*). Il n'est pas besoin de dire d'ailleurs qu'il ne faudrait pas dans la pratique compter tellement sur ces calculs, qu'on ne se réservât la faculté de donner plus ou moins d'eau en faisant varier la hauteur de la vanne de l'orifice.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Description d'un moulin fort simple, dans le goût de ceux qu'on fait en Provence.

PLANCHE 4.

666. En Provence et dans une bonne partie du Dauphiné, les moulins y sont d'une grande simplicité, n'ayant qu'une roue horizontale D, de 6 ou 7 pieds de diamètre, dont les aubes sont faites en *cuillères* pour recevoir le choc de l'eau qui coule ordinairement dans une auge A. L'arbre E, qui répond à la meule supérieure, est la seule pièce qui sert à lui communiquer le mouvement, et je ne crois pas qu'il soit possible de faire un moulin à moindres frais. Il est vrai qu'il faut pouvoir ménager une chûte comme celle que l'on voit ici, et qui sont très-fréquentes dans ce pays-là.

La roue tourne sur un pivot dans une crapaudine pratiquée au milieu de l'entre-toise du châssis OF, servant à approcher les deux meules par le moyen de la vis qui est à l'extrémité de la pièce G, et de l'écrou H, que l'on fait tourner pour hausser ou baisser le châssis.

Les roues que l'on voit exécutées dans le goût de celle-ci ont leurs cuillères simplement assemblées à l'arbre par un tenon et une cheville, fortifiées par le dessous par des membrures qui les entretiennent toutes ensemble. D'autres sont faites comme on le voit au plan M et à son profil N, que la seule inspection de la figure fait assez connaître, pour qu'il n'y ait pas besoin d'explication.

Quand le meûnier veut arrêter le moulin, il peut sans sortir interrompre le cours de l'eau en poussant la perche I et baissant le clapet L, qui est attaché aussi-bien que le bras de levier K à un tourniquet qui facilite cette manœuvre. Plus haut, il y a une vanne à l'entrée du canal, comme on le voit marqué à l'endroit C du plan, pour empêcher que l'eau n'y entre, et qu'elle ne se perde en passant par-dessus les bords, comme cela arriverait si l'on ne fermait que le clapet L : on la ménage dans un réservoir, lorsque le moulin chôme pendant quelque temps, pour en avoir ensuite avec plus d'abondance.

Ce moulin est exécuté à Briançon : l'eau de la Durance en fait tourner trois semblables dans le même bâtiment (*dv*).

(*dv*) Ces roues horizontales à palettes recevant le choc de l'eau étant fréquemment employées, et offrant plusieurs avantages, il est utile d'en exposer ici la théorie.

Théorie des roues horizontales mues par le choc de l'eau.

PL. D, FIG. 7.

§ 1. Nommons H la hauteur AC de la chute, V la vîtesse circulaire horizontale du point C de la palette rencontré par l'axe de la veine d'eau, α l'angle DCM formé par la surface de la palette au point C avec un plan horizontal, et x l'angle que l'axe BC de la veine d'eau forme avec la normale à la surface de la palette en C. Supposons que l'action de l'eau sur la roue soit employée à élever le poids P, au moyen d'une corde enroulée sur un tambour d'un rayon égal à celui de la roue. Cela posé, en supposant la vîtesse de l'eau à l'instant où elle frappe la palette en C due à la hauteur de la chute, elle sera exprimée par $\sqrt{2gH}$, et si les palettes étaient immobiles, cette eau perdrait contre elles par l'effet du choc la vîtesse $\sqrt{2gH}.\cos.x$. Mais les palettes se mouvant horizontalement avec la vîtesse V, laquelle estimée perpendiculairement au plan de la palette est $V\sin.\alpha$, on voit que l'eau ne perd

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

667. Pour profiter de l'occasion que me fournit la planche quatrième de donner un exemple de la manière de mesurer le choc de l'eau qui

Manière de calculer la force que l'eau acquiert en

---

véritablement contre la palette que la vîtesse $\sqrt{2gH}.\cos.x - V\sin.\alpha$. On observera ensuite qu'après le choc l'eau a conservé d'abord la composante de sa vîtesse qui est dirigée parallèlement à la palette, laquelle est exprimée par $\sqrt{2gH}.\sin.x$, puis la vîtesse même de la palette $V\sin.\alpha$. Ces deux vîtesses sont perpendiculaires entre elles, et leur résultante $\sqrt{2gH.\sin.^2x + V^2\sin.^2\alpha}$ exprime la vîtesse conservée par le fluide, à l'instant où il cesse d'agir sur la roue.

En employant maintenant le même principe dont on a fait usage dans la note (*dn*), et appelant toujours m la masse de l'eau dépensée dans une seconde, on verra, comme dans cette note, que le mouvement de la roue étant supposé parvenu à l'uniformité, la somme des quantités d'action imprimées dans une seconde est $mg.H - PV$, la force vive perdue par le choc de l'eau contre les palettes dans le même temps $m(\sqrt{2gH}.\cos.x - V\sin.\alpha)^2$, et celle possédée par l'eau à l'instant où elle cesse de faire partie du système $m(2gH.\sin.^2x + V^2\sin.^2\alpha)$. L'équation du mouvement de la roue est donc $mg.H - PV = \frac{1}{2}m(\sqrt{2gH}.\cos.x - V\sin.\alpha)^2 + \frac{1}{2}m(2gH.\sin.^2x + V^2\sin.^2\alpha)$, ou en réduisant, $PV = m(\sqrt{2gH}.\cos.x - V\sin.\alpha)V\sin.\alpha$, d'où l'on déduirait la valeur de la vîtesse V prise par la roue.

Conditions à remplir pour obtenir le plus grand effet possible.

PV représentant la quantité d'action transmise à la roue dans une seconde, ou le travail qu'elle peut effectuer, il s'agit de déterminer les relations qui doivent avoir lieu entre α, V et x pour que cette quantité soit un maximum. Or on voit sur-le-champ à l'égard de x que la valeur de cos. x doit être la plus grande possible, c'est-à-dire $= 1$, d'où $x = 0$; ce qui apprend que l'axe de la veine d'eau doit être dirigé perpendiculairement aux palettes, résultat qu'il était aisé de prévoir. Cette condition étant supposée remplie, la valeur de PV devient $PV = m(\sqrt{2gH} - V\sin.\alpha)V\sin.\alpha$, qui est un maximum quand $V\sin.\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2gH}$, ou quand $V = \frac{\sqrt{2gH}}{2\sin.\alpha}$.

Le plus grand effet possible est la moitié de la quantité d'action représentée par la chûte de l'eau.

Si l'on met pour V cette dernière valeur dans celle de PV, on aura $PV = \frac{1}{2}mg.H$, en sorte que cette roue, aussi-bien que les roues verticales placées dans un coursier, et prenant l'eau en-dessous, peut transmettre une quantité d'action dont la limite théorique est la moitié de celle représentée par la chute de l'eau qui la fait mouvoir. Mais il y a cette différence, que dans les roues à aubes verticales, quand on veut obtenir la plus grande quantité d'action possible, la vîtesse des palettes est déterminée et doit être la moitié (ou suivant l'expérience les $\frac{2}{5}$) de celle du courant, tandis que dans la roue dont il s'agit ici, on peut, en réglant convenablement l'inclinaison des palettes et la direction de la veine d'eau, faire varier à volonté la vîtesse de la roue, qui produira toujours le plus grand effet dont elle est susceptible tant que la relation $V = \frac{\sqrt{2gH}}{2\sin.\alpha}$ sera satisfaite. Il paraît ainsi que M. Fabre se trompe en affirmant que dans ces roues horizontales les palettes doivent être verticales et la direction de la veine horizontale (*Essai sur la construction des machines hydrauliques*, p. 44). Dans cette supposition on aurait $\sin.\alpha = 1$, et la formule précédente donnerait $V = \frac{1}{2}\sqrt{2gH}$, comme on l'a trouvé dans la note (*dn*).

Il serait à souhaiter que les roues de cette espèce eussent été étudiées par des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

coulant dans un canal incliné. PLANCHE 4.

coule sur un plan incliné, nous supposerons que celle du réservoir que soutient la vanne C est toujours entretenue à 17 pouces de profondeur,

---

expériences. Il est vraisemblable qu'on aurait de l'avantage à rendre la vîtesse de la roue un peu plus petite que le calcul précédent ne l'indique, et à courber dans le bas la surface des palettes, comme on le voit sur la figure, afin de profiter un peu de l'action du poids de l'eau avant qu'elle ne tombe sous la roue. Il faut d'ailleurs ménager sous cette roue, comme sous toutes les autres, une hauteur suffisante pour que l'eau s'échappe sans gêner le mouvement de rotation. Malgré ces précautions, il y a tout lieu de présumer qu'on n'obtiendrait pas de cette roue un effet plus avantageux que des roues verticales placées dans un coursier, c'est-à-dire qu'elle ne transmettrait que les $\frac{2}{3}$ à-peu-près du maximum théorique trouvé ci-dessus, ou le $\frac{1}{3}$ de la quantité d'action représentée par la chute de l'eau. Mais les roues horizontales, quand elles sont employées à faire tourner un moulin à blé, offrent sur les autres d'assez grands avantages à raison de la simplicité et l'économie de leur construction, de la suppression de tout engrenage, et de la faculté de faire varier la vîtesse à volonté, sans rien perdre sur l'effet obtenu.

Établissement d'une roue horizontale mue par le choc de l'eau.

Pour faire l'établissement de ces roues, on suivra la même marche indiquée pour les autres dans les notes précédentes. Ainsi, la vîtesse et l'inclinaison des palettes, ayant été réglées comme il a été dit ci-dessus, de manière à produire le maximum d'effet, la quantité d'action correspondante transmise dans une seconde sera à-peu-près $PV=\frac{1}{3}mgH$, ou, en représentant par E la dépense d'eau faite par seconde, ce qui donne $mg=1000.E$ kil., $PV=\frac{1}{3}.1000.EH$ kil. × mètres. L'effort exercé sur le centre des palettes, dans le sens du mouvement de la roue, sera donc $P=\frac{1}{3}.1000\frac{EH}{V}=\frac{1}{3}.\frac{1000}{g}E\sin.\alpha.\sqrt{2gH}$ kil., et il faudra mettre en équilibre avec lui l'effort provenant de la résistance du blé.

Calcul d'une expérience faite sur une roue de cette espèce.

§ 2. M. Fabre a publié (*Essai sur la construction des machines hydrauliques*, p. 233), une expérience sur une roue de cette espèce, que je vais soumettre au calcul d'après les résultats précédents. Elle offre les données suivantes :

Inclinaison des palettes sur l'horizon $=69^{\circ}\ 50'$ anciens $=\alpha$.

Angle de la veine d'eau avec la normale à la surface de la palette $=5^{\circ}\ 35'$ anciens $=x$.

Section de la veine d'eau $=30^{\text{po q}}=0^{\text{m q}},02198$.

Vîtesse par seconde de l'eau $=28^{\text{pi}},3=9^{\text{m}},19=\sqrt{2gH}$.

Dépense par seconde $=9,19\times0,02198=0^{\text{m c}},202=E$, d'où $\frac{1000}{g}.0,202=m$.

Vîtesse par seconde du centre des palettes $=10^{\text{pi}},88=3^{\text{m}},53=V$.

Rayon de la roue au centre des palettes $=2^{\text{pi}}\ 2^{\text{po}}=0^{\text{m}},704$.

Rayon de la meule $30^{\text{po}}=0^{\text{m}},812$.

Rayon moyen du pivot $=2^{\text{li}}=0^{\text{m}},005$.

Poids de la meule et de l'équipage $=3990^{\text{liv}}=1953^{\text{kil}}$.

D'après ce qui précède, l'effort exercé au centre des palettes est généralement $P=m(\sqrt{2gH}.\cos.x-V\sin.\alpha)\sin.\alpha$. En substituant dans cette formule les nombres précédents, on trouve $P=113$ kil. pour la valeur théorique de cet effort. En n'en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et que le pertuis a 4 pouces de hauteur sur 12 de largeur. Ainsi la hauteur moyenne de l'eau sera à-peu-près de 15 pouces (534), qu'il faut, selon

---

prenant que les $\frac{2}{3}$, d'après ce qui vient d'être dit, on aura seulement P = 75 kil.

En appelant toujours Q la résistance du blé supposée appliquée à la circonférence de la meule, il faudra chercher la valeur de Q qui fera équilibre à celle de P. Si l'on veut prendre en considération les frottements (qui pourraient être ici négligés sans inconvénient), on remarquera 1° que l'axe commun à la meule et à la roue est ici chargé verticalement du poids de 1953 kil., et de la composante verticale de la pression exercée sur les palettes, dont on verra facilement que la valeur est $P\frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha}$; en sorte qu'il se fait sur le pivot un frottement qui est exprimé par $f\left(1953+P\frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha}\right)$; et 2° que la résistance du blé n'exerçant aucun effort sur cet axe, dont le rayon sera supposé de $0^m,027$, il est seulement poussé horizontalement par l'effort P. L'équilibre des forces qui agissent autour de l'axe sera donc exprimé par l'équation $0,704.P = 0,812.Q + 0,005.f\left(1953+P\frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha}\right) + 0,027.f'P$. En faisant dans cette équation $P = 75^k$ et $f = f' = 0,2$, on trouve Q = 62 kil. On peut remarquer que, sans les frottements, la valeur de P qui ferait équilibre à celle de Q serait $P = 62.\frac{0,812}{0,704} = 72$ kil. : il y a donc 3 kil., ou environ $\frac{1}{25}$ de la force, perdu par l'effet des frottements.

La valeur 62 kil. qui vient d'être trouvée pour la résistance du blé supposée appliquée à la circonférence de la meule est $\frac{1}{34}$ environ de la charge de cette meule. En la supposant appliquée aux $\frac{2}{3}$ du rayon, elle en sera le $\frac{1}{21}$.

On peut demander maintenant si le moulin de l'expérience précédente était disposé de manière à faire le plus de travail possible. Or on voit d'abord que l'angle x étant très-petit, la veine d'eau était à-très-peu-près perpendiculaire aux palettes, en sorte que la première condition était remplie. Quant à la vîtesse de la roue, en supposant, comme cela est assez vraisemblable, que la proportion trouvée par expérience pour les roues verticales doive avoir lieu ici, il faudrait que l'on eût, au lieu de $V\sin.\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2gH}.\cos.x$, que donne la théorie, la relation $V\sin.\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{2gH}.\cos.x = \frac{2}{5}.9^m,147 = 3^m,66$. Or on avait effectivement $V\sin.\alpha = 3^m,31$, quantité qui ne diffère pas sensiblement de la précédente. Ainsi ce moulin était disposé d'une manière conforme à la théorie présentée dans cette note, dont par conséquent cette expérience est une confirmation.

Application de roues horizontales mues par le choc de l'eau à la construction des moulins à blé.

§ 3. Pour établir maintenant des formules générales au moyen desquelles on puisse adapter les roues de cette espèce aux moulins à blé, on observera d'abord que le nombre de tours que la roue horizontale doit faire dans une seconde, en nommant D son diamètre, est exprimé par $\frac{V}{\pi D}$. Le nombre de tours de la meule, d'après la note (*di*), est dans le même temps $\frac{1,91}{d}$. Ainsi lorsque la meule est montée sur l'arbre de la roue, on doit avoir l'équation $\frac{V}{\pi D} = \frac{1,91}{d}$, c'est-à-dire, en met-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'article 578, multiplier par 16 pieds qui est la hauteur que nous donnerons au canal incliné A, ou à l'élévation du pertuis au-dessus de la roue D; ensuite extraire la racine quarrée du produit, qu'on trouvera de 4 pieds 5 pouces 8 lignes pour la hauteur de la colonne d'eau qui aurait pour base le pertuis ou le tiers d'un pied quarré. Prenant dans la table troisième le tiers du choc qui répond à une chûte de 4 pieds 5 pouces 8 lignes, on trouvera 103 livres $\frac{1}{3}$ pour l'expression du choc de l'eau qui fait tourner la roue, quoique celui de la même eau ne soit capable que d'environ 29 livres immédiatement à la sortie du pertuis; ce qui fait voir combien elle a acquis de force par son accélération (*dx*).

Si la vanne était élevée jusqu'au niveau de l'eau, et que la source fût assez abondante pour fournir à la dépense d'une ouverture de 12 pouces de largeur sur 17 de hauteur, qui donne un pied 5 pouces de superficie; la hauteur moyenne serait alors les quatre neuvièmes de la profondeur

---

tant à la place de V la valeur indiquée ci-dessus pour le cas du maximum d'effet, $\frac{2\sqrt{2gH}}{5\sin.\alpha.\pi D}=\frac{1,91}{d}$, ou $\sqrt{2gH}=15\frac{\sin.\alpha.D}{d}$: telle est la relation à laquelle la vîtesse de l'eau, les diamètres de la roue et de la meule, l'inclinaison des palettes et de la veine doivent satisfaire, pour que la meule ait la vîtesse convenable et qu'on obtienne le maximum d'effet.

Il faut ensuite que la quantité d'action $\frac{1}{3}.1000\,EH$ que la roue pourra transmettre dans le cas du maximum d'effet, soit égale à celle consommée par la meule. Cette dernière est exprimée par $121,4\,d^2$, et si conformément au résultat du calcul précédent, on ajoute $\frac{1}{24}$ pour tenir compte des frottements, elle se trouvera portée à $127\,d^2$ environ. On écrira donc $\frac{1}{3}.1000\,EH=127\,d^2$, d'où la dépense d'eau $E=0,381\frac{d^2}{H}$ mèt. cubes par seconde.

Il est à remarquer que dans la pratique le diamètre d de la meule est ordinairement compris entre $1^m,3$ et $2^m,2$; celui D de la roue ne peut guères être plus petit que $1^m,3$, ni plus grand que 4^m; enfin l'angle α paraît devoir rester compris entre l'angle droit et sa moitié. Si la hauteur de la chute était telle qu'on ne pût satisfaire à la relation $\sqrt{2gH}=15\frac{\sin.\alpha.D}{d}$ sans sortir de ces limites, il faudrait employer un engrenage. On réglerait alors le diamètre D′ du rouet monté sur l'axe de la roue, et celui d' de la lanterne montée sur l'axe de la meule, de manière à satisfaire à la relation $\frac{D'}{d'}=\frac{1,91\times5\sin.\alpha.\pi D}{2\sqrt{2gH}.d}=15\frac{\sin.\alpha.D}{\sqrt{2gH}.d}$. Mais la complication qui résulterait de cette disposition ferait perdre à cette machine son principal avantage, qui consiste dans la simplicité de sa construction. Quand on pourra faire les frais d'un mécanisme soigné, il sera toujours préférable d'employer une roue de côté verticale. Les roues horizontales dont il sera question dans la note suivante sont d'ailleurs fort supérieures à celle-ci.

Remarque sur l'inexactitude de l'art. 667.

(*dx*) Ce calcul est erronné : on peut voir à ce sujet la note (*cx*).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de l'eau (524), c'est-à-dire de 7 pouces 6 lignes 8 points. En les multipliant par 16, hauteur du canal incliné (578), on aura un produit dont la racine quarrée donne environ 3 pieds 2 pouces pour la hauteur de la colonne qui aurait pour base le plan de la section de l'eau au sommet du canal. Cherchant dans la table troisième le choc qui répond à une chute de 3 pieds 2 pouces, on le trouvera de 222 livres, qui étant multipliées par un pied 5 pouces, donnent 314 liv. $\frac{1}{2}$ pour le choc de l'eau à la sortie du canal, au lieu qu'elle ne peut être capable que d'un choc de 62 liv. à son sommet (*dy*).

668. On voit à quelques endroits, sur la Garonne, des moulins qui sont encore d'une construction assez singulière. La roue est une espèce de tambour qui a la figure d'un cône tronqué renversé qui tourne dans une cuve de maçonnerie faite exprès. Les aubes de cette roue sont appliquées obliquement sur la surface du tambour où elles forment des portions de spirales. Ces aubes ainsi disposées obligent la roue à tourner avec une extrême vîtesse, par conséquent la meule qui répond à son essieu, et pour cela il ne faut qu'un filet d'eau (*dz*).

Autre espèce de moulin en usage sur la Garonne. Pl. 1, Fig. 5.

669. De tous les moulins à eau qui ont été imaginés jusqu'ici, je crois qu'il n'y en a pas de plus ingénieux et de plus simple que ceux qui ont été exécutés au Basacle à Toulouse, comme on en va juger.

Description des moulins du Basacle à Toulouse. Planches 5 et 6.

Il y a aux moulins du Basacle 25 meules de front qui vont incessamment, et qui entretiennent de farine la ville et les environs; et comme elles agissent toutes de même par la force du courant, et que leur action est indépendante l'une de l'autre, je ne rapporterai que ce qui convient à trois de ces meules.

La première figure montre le plan de plusieurs piles de maçonnerie servant de piédroits à des arcades fermées par des vannes qu'on voit dans la huitième figure, qui est une élévation prise sur la longueur AB. Chaque vanne répond à un coursier 7, revêtu de maçonnerie, allant en rétrécissant jusqu'à l'endroit CD où il aboutit à un cylindre ou tonneau CED sans fond, qui est aussi de maçonnerie. L'eau retenue derrière la vanne 5 passant par le pertuis 22, entre avec précipitation dans le coursier; et ne trouvant point pour sortir un passage aussi grand que celui par lequel elle est entrée, gonfle et s'introduit avec plus de force dans

Figures 1 et 6.

(*dy*) Ce calcul est encore plus fautif que celui de l'alinéa précédent, l'auteur s'appuyant sur la règle très-fausse de l'art. 524 qui a été rectifiée dans la note (*em*), et employant toujours sa méthode inexacte pour l'évaluation de la force du choc, rectifiée dans la note (*ev*).

Remarque sur l'inexactitude de la 2e partie du même art.

(*dz*) On trouvera dans le § 3 de la note suivante (*ea*) la théorie de l'espèce de roues horizontales indiquées dans cet article.

On renvoie à la note (*ea*) pour la théorie des roues indiquées dans l'art. 668.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le tonneau en formant un tourbillon. Elle contraint de tourner avec elle une roue horizontale qui est dans le fond, représentée aux endroits F, et mieux encore dans les figures 4 et 5. L'arbre I de cette roue aboutit à la meule K de la sixième figure.

L'eau qui est entrée dans le tonneau, après avoir fait plusieurs tours et frappé les aubes de la roue, s'échappe par le vide qui se trouve dans l'intervalle que ces mêmes aubes laissent entre elles, sort par le fond du tonneau, et s'écoule du côté d'aval, où on a ménagé une pente. Voilà une idée générale de la manœuvre de ces sortes de moulins que je vais détailler succinctement.

A la roue est un pivot tournant sur la crapaudine pratiquée dans le palier N. Ce palier est appuyé à l'endroit V sur un seuil avec lequel il est encastré de quelques pouces. L'extrémité X est attachée avec un boulon à un poteau pendant O suspendu au balancier PQ, appuyé d'une part à l'endroit P, suspendu de l'autre à la pièce QR, percé vers le haut de plusieurs trous pour recevoir un boulon. Comme toutes les pièces jouent ensemble quand on hausse ou baisse l'extrémité R, on peut par leur moyen faire monter ou descendre la roue F, afin d'approcher la meule supérieure K de son inférieure, selon l'usage ordinaire des moulins.

Pl. 6, Fig. 6.

La hauteur du tonneau est exprimée par LM, et l'on voit que du côté de la sortie de l'eau, la maçonnerie dont il est composé est portée par des poutres M et T, et qu'à cet endroit il y a une arcade S derrière chaque tonneau, qu'on ne peut bien distinguer que dans la septième figure, qui est une élévation du moulin du côté d'aval, prise depuis le radier jusqu'à la hauteur du rez-de-chaussée, où l'on distingue les différentes parties que l'on peut voir dans l'enfoncement depuis l'entrée de l'eau jusqu'à sa sortie. Pour les reconnaître, il ne faut que chercher les chiffres et les lettres semblables répandues dans les différentes figures, qui font voir la relation qu'elles ont entre elles, puisqu'elles répondent aux mêmes choses vues de différents sens. La troisième figure montre le plan du radier du côté d'aval, et de quelle manière sont assemblées les pièces de charpente sur lesquelles on a établi la maçonnerie qui compose les tonneaux; car comme l'eau passe par-dessous, il a fallu les porter en l'air, et se contenter d'appuyer leur base sur les piles Y.

La deuxième figure fait voir le plan du rez-de-chaussée du moulin où sont placées les meules, et l'assemblage des pièces de charpente qui en font la séparation. Elles sont disposées de manière qu'on peut démonter tout ce qui appartient à une des meules, quand il y a quelque réparation à faire, sans interrompre le travail des autres, ayant chacune leur coursier qu'il suffit de fermer pour avoir la liberté de manœuvrer haut et bas.

Comme il n'y a que 5 pieds 4 pouces du centre d'une meule à celui de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'autre, sur une rivière de 10 à 11 toises de large, on peut en placer jusqu'à 12, au lieu qu'ordinairement on n'en met que 4, encore faut-il faire deux bâtiments, un sur chaque bord. Ici il n'y a ni rouet ni lanterne, et par conséquent d'autre frottement que celui du pivot de la roue, ce qui rend les réparations moins fréquentes. Cette roue, qui n'a que 3 pieds de diamètre, est composée d'une seule pièce; pour la faire, on prend un tronçon d'un gros arbre, et on y taille les aubes que l'on incline sur son épaisseur, les faisant un peu courbes, comme on le peut voir par les quatrième et cinquième figures, qu'on a rapportées en grand pour les rendre plus sensibles.

Pour donner à cette roue toute la perfection dont elle me paraît susceptible, il y aurait plusieurs recherches curieuses à faire, auxquelles je ne m'arrêterai point : je dirai seulement que l'eau qui la pousse la fait agir avec une force composée de l'action de sa pesanteur et de la direction circulaire que le tonneau lui donne; que la courbure des aubes devrait suivre celle de la développée d'un cercle, et que l'obliquité qu'elles ont de haut en bas devrait faire, avec l'arbre qui leur sert d'essieu, un angle de 55 degrés, puisque ces aubes sont dans le même cas que les ailes d'un moulin à vent (*ea*).

(*ea*) L'explication donnée à la fin de cet article du mouvement des roues qui y sont décrites n'est pas très-satisfaisante, et indépendamment de ce que l'angle de 55° est loin de convenir aux ailes de moulins à vent, comme on le verra dans la suite, l'eau n'agit point sur ces roues comme le vent sur les ailes des moulins. Il paraît en effet que la disposition très-remarquable des roues du moulin du Basacle est celle que Borda avait en vue dans la théorie qu'il a donnée d'une espèce particulière de roues horizontales à palettes courbes (*Académie des sciences*, 1767), théorie qui, d'après la marche adoptée dans ces notes, doit être présentée comme il suit. Remarques sur l'art. 669.

§ 1. MN étant la roue horizontale dont il s'agit, on la suppose garnie de palettes courbes telles que CD, et que l'eau dirigée par un tuyau BC, s'introduit entre les palettes tangentiellement à leur courbure, et s'écoule à leur extrémité inférieure D. Nommons H la hauteur totale de la chute, et h la hauteur AC depuis le niveau du réservoir jusqu'au-dessus de la roue, en sorte que $H-h$ sera la hauteur de cette roue; m la masse de l'eau dépensée dans l'unité de temps; V la vîtesse des palettes au point où la veine d'eau entre dans la roue; P le poids élevé par la roue au moyen d'une corde qui s'enroule sur un tambour du même diamètre qu'elle; θ l'angle ACB formé par la direction de la veine d'eau avec la verticale; φ l'angle que la tangente DE au point le plus bas de la courbe fait avec la verticale. Théorie des roues horizontales à palettes courbes mues par la pression de l'eau. Pl. D, Fig. 8.

En faisant abstraction des frottements, la vîtesse de l'eau, à l'instant où elle arrive au point C, est $\sqrt{2gh}$: on peut la concevoir composée de deux autres vîtesses, l'une verticale $= \cos.\theta\sqrt{2gh}$, l'autre horizontale $= \sin.\theta\sqrt{2gh}$. Or la vîtesse des aubes étant horizontale et $= V$, si l'on veut considérer, non plus

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Manière de se servir du flux et reflux de la mer

670. Il me reste à décrire une autre espèce de moulin dont je crois qu'aucun auteur n'a parlé, étant nouvelle et peu connue. Elle se réduit

---

la vîtesse effective de l'eau, mais celle avec laquelle elle doit couler le long de l'aube pendant qu'elle est emportée par le mouvement de la roue, il est clair que la composante horizontale de la vîtesse de cette eau devra être diminuée de la vîtesse de la roue, c'est-à-dire réduite à $\sin.\theta\sqrt{2gh}-V$. La composante verticale n'éprouvant aucune altération, on voit que l'eau commence à couler le long de l'aube, en même temps qu'elle est emportée par la roue, avec la vîtesse $\sqrt{2gh.\cos.^2\theta+(\sin.\theta\sqrt{2gh}-V)^2}$, ou $\sqrt{2gh-2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+V^2}$, laquelle est due à la hauteur $\frac{1}{2g}(2gh-2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+V^2)$. On remarquera maintenant que l'eau, en coulant le long de l'aube, parcourt une courbe contre laquelle elle ne perd aucune vîtesse, conformément au § 4 de la note (*ai*), en sorte que, quand elle est arrivée au point D, la hauteur à laquelle est due sa vîtesse est augmentée de la quantité $H-h$. Cette hauteur est donc $\frac{1}{2g}(2gh-2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+V^2)+H-h$, et la vîtesse de l'eau au point D est par conséquent $\sqrt{2gH-2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+V^2}$. La direction de cette dernière vîtesse étant celle de la tangente DE, on peut la considérer comme composée de la vîtesse verticale $\cos.\varphi\sqrt{2gH-2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+V^2}$, et de la vîtesse horizontale $\sin.\varphi\sqrt{2gH-2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+V^2}$. Mais cette dernière expression convient à la vîtesse avec laquelle le fluide coule le long de l'aube pendant qu'il est emporté par la roue, en sens contraire de son mouvement, avec la vîtesse V. Donc quand l'eau quitte la roue, sa vîtesse réelle horizontale est seulement $\sin.\varphi\sqrt{2gH-2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+V^2}-V$; et en composant cette vîtesse avec la vîtesse verticale, que le mouvement de la roue n'altère point, on trouve pour leur résultante, qui exprime la vîtesse réelle possédée par le fluide à l'instant où il vient de quitter la roue

$$\sqrt{[2gH-2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+2V^2-2V\sin.\varphi\sqrt{2gH-2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+V^2}]}.$$

Cela posé, le mouvement de la roue étant devenu uniforme, on observera que la somme des quantités d'action imprimées dans l'unité de temps est $mgH-PV$, et que l'eau n'éprouvant aucun choc à son entrée dans la roue, en sorte qu'il n'y a point ici de force vive perdue dans le système, cette somme doit être égale (conformément au principe du § 7 de la note (*ai*)) à la moitié de la force vive acquise par le système dans l'unité de temps, c'est-à-dire à la moitié de la force vive possédée par la masse d'eau qui coule dans l'unité de temps, à l'instant où elle vient de quitter la roue. L'équation du mouvement de la roue est donc

$$mgH-PV=\tfrac{1}{2}m[2gH-2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+2V^2-2V\sin.\varphi\sqrt{2gH-2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+V^2}],$$

ou en réduisant,

$$PV=m(\sin.\theta\sqrt{2gh}-V+\sin.\varphi\sqrt{2gH-2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+V^2})V.$$

Conditions à remplir pour obtenir le plus grand effet possible.

Il faut maintenant déterminer les quantités φ, θ et V de manière à rendre cette valeur de la quantité d'action transmise à la roue un maximum : or on voit d'abord à l'égard de φ, qu'il faut que $\sin.\varphi$ soit le plus grand possible, c'est-à-dire $=1$; ce qui apprend que la tangente à l'extrémité inférieure D de la courbe de l'aube doit être horizontale. Cette condition remplie, la quantité d'action transmise devient

$$PV=m(\sin.\theta\sqrt{2gh}-V+\sqrt{2gH-2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+V^2})V,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à faire en sorte d'assujettir le flux et le reflux de la mer pour faire tourner des roues toujours du même sens, ce qui s'exécute d'une manière

pour faire tourner les roues toujours du même sens.

---

et si l'on cherche la valeur de V qui rend cette quantité le plus grande possible, on trouvera $V = \frac{gH}{\sin.\theta\sqrt{2gh}}$.

En mettant ensuite cette valeur de V dans celle de PV, on aura $PV = mg.H$, d'où il suit que la quantité d'action transmise à la roue est théoriquement égale à la quantité d'action représentée par la chute d'eau qui la fait mouvoir, en sorte que cette roue est aussi avantageuse qu'il soit possible.

Le plus grand effet possible est égal à la quantité d'action représentée par la chute d'eau.

Avant d'aller plus loin, je remarquerai que la valeur trouvée ci-dessus pour la vîtesse correspondante au maximum d'effet, pourrait être obtenue d'une manière plus simple. On voit effectivement que si l'eau, à l'instant où elle quitte la roue, n'avait aucune force vive, ou si sa vîtesse était nulle, la quantité d'action PV représentée par l'élévation du poids serait nécessairement égale à la quantité d'action $mg.H$ représentée par la chute de l'eau. Or cette condition se trouverait remplie si la direction du mouvement de l'eau au point D était horizontale, ou si l'on avait $\sin.\varphi = 1$, et si la vîtesse absolue de l'eau en ce point, dans le sens horizontal, était nulle, circonstance exprimée par l'équation

Principe général de l'établissement des roues hydrauliques.

$$\sqrt{2gH - 2V\sin.\theta\sqrt{2gh} + V^2} - V = 0,$$

d'où l'on déduit $V = \frac{gH}{\sin.\theta\sqrt{2gh}}$, comme on l'a trouvé ci-dessus. Cette remarque paraît très-propre à insinuer l'esprit dans lequel les roues de ce genre doivent être disposées, en montrant qu'il ne s'agit jamais que de régler le mouvement de manière que l'eau quitte la roue avec une vîtesse nulle, et y laisse par conséquent toute la force vive qu'elle aurait pu acquérir en parcourant librement la hauteur de sa chute.

La théorie suppose essentiellement que l'eau, en entrant dans la roue en C, n'éprouve aucun choc. On remplira cette condition en donnant à la tangente de la courbe de l'aube en C, la direction du mouvement de l'eau à l'instant où elle commence à couler le long de cette aube. En représentant par BC la vîtesse $\sqrt{2gh}$ de l'eau quand elle arrive en C, et par BF la vîtesse V de la roue, la ligne FC représentera en grandeur et en direction la vîtesse avec laquelle l'eau commence à couler dans la roue, et par conséquent le premier élément de la courbe de l'aube en C devra être dans la direction de cette ligne. La courbure de cette aube est d'ailleurs indifférente, pourvu qu'elle n'offre point de jarrets, et que la direction de la tangente au point extrême D soit aussi horizontale qu'il est possible, sans gêner le dégagement de l'eau. En comparant ces dispositions à celles indiquées art. 669, on voit qu'elles s'en rapprochent beaucoup, et que l'eau agissait dans les roues du moulin du Basacle d'une manière tout-à-fait analogue à celle considérée dans la théorie précédente, d'après laquelle on pourra perfectionner les roues de cette espèce.

Application de la théorie précédente à la pratique.

Il sera toujours convenable de donner à la veine d'eau et aux aubes peu de largeur dans le sens du rayon de la roue, comme la figure l'indique; parce que, comme la vîtesse de rotation n'est pas la même pour les points différemment éloi-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fort ingénieuse. On en attribue la première invention à un nommé Perse, maître charpentier de Dunkerque, qui mérite assurément beaucoup d'é-

---

gnés de l'axe, il n'y a jamais qu'un point de l'aube qui puisse avoir la vîtesse capable de donner le maximum d'effet. Si l'on avait une grande quantité d'eau, on pourrait la faire arriver par plusieurs tuyaux ou bâches inclinées, distribuées au pourtour de la roue dans des plans verticaux tangents à sa circonférence. On pourrait aussi, comme Euler l'a proposé (*Académie de Berlin*, 1754), recevoir l'eau dans un réservoir cylindrique d'un diamètre égal à celui de la roue, placé verticalement au-dessus d'elle, au travers duquel l'axe de cette roue passerait, et d'où l'eau s'échapperait par un grand nombre d'ajutages inclinés, distribués à la circonférence du tambour. Il faudrait que l'entrée de ces ajutages fût évasée. Une disposition symétrique par rapport à l'axe des conduits ou ajutages qui fournissent l'eau à la roue, aura cet avantage, que l'effort du moteur ne causera sur les points d'appui de l'axe aucune pression latérale. Si l'effort de la résistance devait en causer une, on pourrait combiner la position des ajutages de manière que cette pression fût détruite par l'effort du moteur. (Voyez la note (*be*), § 1).

Quant au degré d'avantage que ces roues peuvent présenter dans la pratique, on n'a point fait les observations nécessaires pour le constater. Borda les croit susceptibles de transmettre environ les $\frac{3}{4}$ de la quantité d'action représentée par la chute de l'eau qui les fait mouvoir (*Académie des Sciences*, 1767, page 285). Cette estimation paraît modérée, et il me semble qu'en donnant à ces roues plus de hauteur qu'on n'est dans l'usage de le faire, afin que l'eau ait le temps de perdre, en glissant le long des aubes, toute sa vîtesse verticale, et en adoptant la manière de leur donner l'eau qui vient d'être indiquée, on peut en espérer au moins les $\frac{4}{5}$ de la quantité d'action dépensée. Ainsi, pour en faire l'établissement, après avoir fixé la hauteur h que l'eau devra parcourir avant d'entrer dans la roue, l'inclinaison θ de la veine d'eau, et la vîtesse de rotation V, d'après les circonstances particulières à la machine qu'on veut construire, et de manière à satisfaire à la relation $V = \frac{gH}{\sin.\theta\sqrt{2gh}}$, on aura, pour exprimer la quantité d'action transmise en une seconde $PV = \frac{4}{5} mg.H$ kil. × mèt.; ou, en nommant E le volume d'eau dépensé en une seconde, ce qui donne 1000 $E = mg$, $PV = \frac{4}{5}.1000\,EH$ kil. × mèt. L'effort exercé à une distance de l'axe égale à celle du milieu des aubes, sera $P = \frac{4}{5}.1000\frac{E}{V}H$.

De la vis d'Archimède employée comme roue hydraulique.

On a proposé d'employer pour moteur hydraulique une vis d'Archimède dont l'axe serait vertical, et qui recevant l'eau à son extrémité supérieure, tournerait par l'effet de la réaction produite par la descente de cette eau dans les tuyaux dont la vis se compose, et par son écoulement à l'extrémité inférieure. Il est évident que la théorie de ce moteur rentre absolument dans la précédente; et on voit que, pour qu'il fût bien disposé, il faudrait 1° qu'à l'extrémité supérieure la direction de la veine d'eau, déterminée par l'angle θ, et l'angle formé avec l'axe par l'hélice passant par le centre des tuyaux, fussent réglés l'un d'après l'autre, comme il a été dit ci-dessus; 2° qu'en approchant de l'extrémité inférieure, ces tuyaux s'infléchissent progressivement, de manière qu'à l'instant où l'eau quitte la roue, la direction de son

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

loges, n'y ayant point de gloire plus digne d'un bon citoyen, que celle de produire quelque invention utile à la société. En effet, combien n'y

---

mouvement fût aussi horizontale qu'il serait possible; 3° enfin que la vîtesse de rotation fût déterminée de manière à satisfaire à la relation $V = \frac{gH}{\sin.\theta\sqrt{2gh}}$, laquelle montre que si la vis occupait la plus grande partie de la hauteur de la chute, il faudrait qu'elle tournât très-vîte.

Cas où l'axe de la vis d'Archimède serait incliné à l'horizon.

On peut également employer une vis d'Archimède comme roue hydraulique, en inclinant son axe sur l'horizon, comme cela se fait quand cette machine sert à monter de l'eau. Dans ce cas, l'eau ne tourne point autour de l'axe, comme dans le précédent; elle ne forme point une masse continue en parcourant chaque tuyau, et la machine change entièrement de nature. L'eau qui entre dans les tuyaux à chaque révolution de la vis, demeure, à mesure qu'elle descend, dans les *arcs hydrophores*, formés par les révolutions de ces tuyaux. (Ceci s'entendra mieux après avoir lu, dans la dernière note de ce volume, la théorie de la vis d'Archimède, employée comme machine à élever l'eau). Elle y agit d'une manière analogue à celle d'un corps descendant le long d'un plan incliné, qui transmettrait une quantité d'action par l'effet de sa descente, et cette eau produira d'autant plus d'effet, que la vîtesse avec laquelle elle s'écoulera sera moindre. Il faudrait donc donner à une machine de ce genre le mouvement le plus lent qu'il serait possible, sans qu'il devînt irrégulier; et il est vraisemblable, abstraction faite des difficultés de disposition et de construction, qu'on en obtiendrait dans la pratique un résultat aussi avantageux pour le moins que de toute autre roue hydraulique.

On examine le cas où l'eau sortirait d'une roue à aubes courbes plus près ou plus loin de l'axe qu'elle n'est entrée.

§ 2. Le caractère de la machine considérée dans le § précédent, consiste en ce que le point où l'eau entre dans la roue, et celui où elle s'échappe, sont tous deux situés à la même distance de l'axe de rotation. Il en résulte que le mouvement de cette eau n'éprouve dans la roue aucune modification, si ce n'est une augmentation de vîtesse provenant de la distance verticale qu'elle y parcourt, et un changement dans sa direction. On peut, en laissant toujours l'eau couler librement entre des aubes courbes, faire en sorte que l'endroit où elle s'échappe soit plus approché ou plus éloigné de l'axe de rotation, que le point où elle entre dans la roue. Il arrivera dans les deux cas que le mouvement de l'eau sera modifié par l'action de la force centrifuge, ce qui peut changer les résultats.

Pour s'en rendre compte, nommons v la vîtesse angulaire de la roue, r' la distance à l'axe du point où elle entre, r'' celle du point où elle sort, et conservons d'ailleurs les dénominations du § précédent. La vîtesse de rotation du point de la roue où l'eau entre étant vr', on verra, comme ci-dessus, que la vîtesse relative de l'eau, à l'instant où elle commence à être emportée par la roue, est $\sqrt{2gh - 2vr'\sin.\theta\sqrt{2gh} + v^2r'^2}$. La force vive qu'elle possède à cet instant est donc pour la masse d'eau qui se dépense dans l'unité de temps, $m(2gh - 2vr'\sin.\theta\sqrt{2gh} + v^2r'^2)$. Or après son entrée dans la roue, l'eau s'y trouve soumise à deux forces, savoir la gravité et la force centrifuge; et quand cette eau est arrivée au point le plus bas, il faut, conformément au principe du § 7 de la note (*ai*), que sa force vive ait augmenté d'une quantité égale au double des quantités d'action qui lui ont été

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

a-t-il point de choses essentielles à la vie, dont on ne connaît le prix que quand on en est privé? Les moulins en général sont dans ce cas-là. On

---

imprimées simultanément par chacune de ces deux forces. La quantité d'action qui a été imprimée par la gravité est $mg\,(H-h)$. Quant à celle qui a été imprimée par la force centrifuge, je remarque que quand l'eau est située à une distance quelconque r de l'axe de rotation, sa vîtesse de rotation est vr, et l'effort qu'exerce sur elle la force centrifuge $m\frac{v^2r^2}{r}=mv^2r$, conformément au § 4 de la note (*ai*). La quantité d'action qu'imprime la force centrifuge dans l'élément du temps et dans le sens du mouvement de l'eau, est donc $\pm mv^2r.dr$, les signes + ou — ayant lieu suivant que l'eau s'éloigne ou s'approche de l'axe; en sorte que la quantité d'action totale imprimée par cette force est la valeur de l'intégrale $\pm\int mv^2r\,dr$ prise depuis $r=r'$ jusqu'à $r=r''$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}mv^2(r''^2-r'^2)$. Ajoutant cette quantité d'action à celle imprimée par la gravité, on a $mg\,(H-h)+\frac{1}{2}mv^2(r''^2-r'^2)$. Le double de ce nombre étant l'augmentation qu'éprouve la force vive de l'eau en parcourant la roue, on voit que cette force vive, à l'instant où l'eau est prête à en sortir, est exprimée par

$$m\,(2gh-2vr'\sin.\theta\sqrt{2gh}+v^2r'^2)+2mg\,(H-h)+mv^2(r''^2-r'^2),$$

ou en réduisant, par

$$m\,(2gH-2vr'\sin.\theta\sqrt{2gh}+v^2r''^2).$$

La vîtesse relative de l'eau à cet instant est donc $\sqrt{2gH-2vr'\sin.\theta\sqrt{2gh}+v^2r'^2}$, et si l'on suppose sa direction horizontale, comme la roue l'emporte en sens contraire de son mouvement avec la vîtesse vr'', on voit qu'à l'instant où l'eau quittera la roue, sa vîtesse absolue sera

$$\sqrt{2gH-2vr'\sin.\theta\sqrt{2gh}+v^2r''^2}-vr''.$$

En égalant cette quantité à zéro, on trouve pour vr' la même valeur qui a été trouvée pour V dans le § précédent: d'où il faut conclure que, soit qu'on fasse sortir l'eau plus loin ou plus près de l'axe de rotation qu'elle n'est entrée, la force centrifuge n'apporte aucun changement aux effets, l'augmentation ou la diminution qu'elle cause dans la vîtesse de l'eau étant compensée exactement par la vîtesse plus grande ou plus petite du point de la roue où l'eau s'échappe. Ainsi, en faisant varier la distance de ce point, on ne perd ni ne gagne rien sur la quantité de travail que la roue peut produire, et on obtiendra toujours théoriquement le maximum d'effet en donnant au point de la roue où l'eau entre une vîtesse de rotation exprimée par $\frac{gH}{\sin.\theta\sqrt{2gh}}$.

De la roue à réaction. Sa théorie est celle-même donnée dans le § précédent.

Lorsque l'eau entre dans la roue près de l'axe de rotation, et s'en éloigne à mesure qu'elle descend, la machine est analogue à celle désignée communément sous le nom de *roue à réaction*, et dont la première idée, due, à ce que je crois, au docteur Barker, a été publiée en 1744 dans le t. 2 du *Cours de physique expérimentale* de Desaguliers; à la vérité sous un titre et dans des termes qui donneraient lieu de croire que l'inventeur et l'auteur n'avaient aucune intelligence de la nature de cette machine (*). Peu après, Segner la proposa de nouveau dans ses *Exercitationes*

(*) Desaguliers (*Cours de physique expérimentale*, t. 2, p. 537 de la traduction française)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

doit savoir bon gré à ceux qui nous ont mis en état d'en construire partout. Par exemple, à Calais, comme il n'y serpente point de rivières, on

---

hydraulicæ, et Euler en fit l'objet de plusieurs mémoires (*Acad. de Berlin*, 1750, 1751 et 1754). J. A. Euler s'en est également occupé (*Commentaires de Gœttingue*, 1775), aussi bien que Bossut (*Hydrodynamique*, t. 1, p. 550). MM. Mathon de la Cour (*Journal de physique*, 1775) et Waring (*Transactions of the american philosophical society*, t. 3) en ont donné des théories entièrement inexactes, dont la dernière a été néanmoins adoptée par M. Gregory (*A treatise of mecanics*, t. 2, p. 114). Cette machine peut être considérée dans deux hypothèses différentes, dont la diversité est en partie cause du peu d'accord des résultats auxquels les savants sont parvenus sur son sujet. En effet on peut supposer que l'eau entre dans la roue avec une vîtesse acquise, et y coule librement entre des cloisons ou dans des tuyaux courbes : dans ce cas la théorie qui lui convient est celle du § précédent, c'est-à-dire 1° que la relation entre la hauteur H de la chute, la hauteur h que l'eau a parcourue avant d'entrer dans la roue, l'angle θ sous lequel la veine d'eau doit être dirigée à son entrée dans la roue, et la vîtesse de rotation V du point de la roue où l'eau y entre, est, dans le cas du maximum d'effet, exprimée par l'équation $V = \frac{g\,H}{\sin.\theta \cdot \sqrt{2gh}}$; et 2° que la limite théorique de ce maximum d'effet est la quantité d'action même représentée par la chute de l'eau. C'est à cette disposition que se rapporte le troisième mémoire d'Euler, et il y parvient à un résultat semblable. On peut ensuite admettre que l'eau entre dans la roue avec une vîtesse très-petite, s'y accumule comme dans un vase, et en sort dans le bas par des orifices très-petits, en sorte que la vîtesse relative de l'eau dans la roue est très-petite par rapport à la vîtesse avec laquelle cette eau s'écoule par les orifices. Cette dernière supposition se rapprochera davantage de la disposition proposée originairement par le docteur Barker, adoptée il y a peu d'années par M. Manoury Dectot dans des moulins dont je parlerai plus bas, et à laquelle se rapportent les deux premiers mémoires d'Euler.

De la roue à réaction dans le cas où la vîtesse relative de l'eau dans la roue est infiniment petite.

Pour adapter à cette dernière hypothèse les résultats du § précédent, il faut supposer que la vîtesse acquise par l'eau, à l'instant où elle entre dans la roue, est infiniment petite, ou que la hauteur de la roue est égale à celle de la chute. Cette supposition donne $\sqrt{2gh} = 0$, et conduit à une valeur infinie pour la vîtesse de

annonce « que le docteur Barker, en lui communiquant la pensée de cette machine, lui dit que « ce serait une preuve expérimentale de la proposition de Parent (voyez ci-dessus l'art. 588, « et la note (*da*)) du maximum de la force de l'eau, lorsqu'elle agit sur une roue qui prend « l'eau en-dessous. » Il décrit ensuite la machine sous ce titre : « Machine pour prouver par « expérience la proposition de M. Parent, qu'un moulin à eau qui prend l'eau par dessous a « le plus de force lorsque la roue à aubes n'a que le tiers de la vîtesse de l'eau naturelle qui « la meut. » Cela m'a semblé si extraordinaire, que n'ayant pas l'ouvrage original sous les yeux j'aurais peut-être soupçonné quelque méprise du traducteur, si M. Brewster ne m'apprenait que cette machine est quelquefois appelée en Angleterre *Parent's mill*, et que, suivant Desaguliers, on doit donner aux orifices le tiers de la vîtesse due à la chute. (*Ferguson's lectures*, t. 2, p. 205.)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

n'y a point fait de moulins à eau, et ceux qui vont par le vent chômant une partie de l'année, il y a des temps où cette ville se trouve sans

---

rotation V; d'où il résulte qu'ici le maximum d'effet a lieu quand la vîtesse de rotation de la roue est infiniment grande. Ce résultat est indépendant des distances de l'axe auxquelles l'eau entre dans la roue et en sort, et la grandeur de ces deux distances est absolument indifférente à l'effet obtenu, pourvu toutefois que la dernière ne soit pas infiniment petite.

On peut arriver directement au même résultat de la manière suivante. S'il n'y a point de choc à l'entrée de l'eau dans la roue, et si les sections des tuyaux que l'eau y parcourt sont très-grandes par rapport à l'aire des orifices, la vîtesse d'écoulement à ces orifices, la roue étant immobile, sera d'après la note (*cc*) exprimée par $\sqrt{2gH}$. Mais quand la roue tournera, la force centrifuge accroîtra cette vîtesse, et on verra dans le § 1 de la note (*fn*) que la vîtesse de rotation des orifices d'écoulement étant V, l'action de la force centrifuge augmente, dans l'endroit où sont placés ces orifices, la pression provenant du poids du fluide, d'une quantité due à la même hauteur que la vîtesse V. La pression qui aura lieu contre les orifices, quand la roue sera en mouvement, sera donc due à la hauteur $H+\frac{V^2}{2g}$; en sorte que la vîtesse d'écoulement sera alors $\sqrt{2gH+V^2}$. Mais puisque le mouvement de la roue emporte l'eau en sens contraire avec la vîtesse V, la vîtesse absolue de l'eau à l'instant où elle s'échappe est $\sqrt{2gH+V^2}-V$. Cette quantité ne peut être rendue nulle qu'en supposant V^2 infini par rapport à $2gH$: telle est donc la condition nécessaire pour obtenir le maximum d'effet.

Application à la pratique de la théorie de la roue à réaction.

On voit par ce qui précède qu'il y a théoriquement du désavantage à retenir l'eau stagnante dans la roue, au lieu de l'y laisser descendre librement. Mais il ne faut pas croire que cela puisse dans la pratique influer beaucoup sur les résultats, si ce n'est dans le cas où la chute serait fort grande. En effet, nommons n le rapport de la vîtesse de rotation V des orifices à la vîtesse $\sqrt{2gH}$ due à la chute : l'expression de la vîtesse absolue de l'eau, à l'instant où elle quitte la roue, deviendra $\sqrt{2gH}\,(\sqrt{1+n^2}-n)$; et par conséquent la force vive que l'eau emportera avec elle, et qui ne sera point transmise à la roue, sera $m.2gH\,(\sqrt{1+n^2}-n)^2$. Si l'on voulait donc, par exemple, que cette force vive fût seulement le $\frac{1}{10}$ de celle $m.2gH$ représentée par la chute de l'eau, on poserait $(\sqrt{1+n^2}-n)^2=\frac{1}{10}$, d'où $n=1,42$. Il suffit donc que la vîtesse des orifices surpasse une fois et demie environ celle due à la chute, pour qu'il y ait moins de $\frac{1}{10}$ de perte sur la quantité d'action théorique représentée par la chute de l'eau. Supposons que la roue doive faire un tour par seconde, ce qui est à-peu-près la vîtesse convenable pour les moulins à blé dont les meules sont grandes, et que la distance des orifices à l'axe soit de 2^m. Leur vîtesse serait alors $2\pi.2^m=12^m,57$, et celle due à la chute devrait être $\frac{12^m,57}{1,42}=8^m,83$, qui répond dans la table de la page 274 à une chute de $3^m,97$. Pour toutes les chutes au-dessous de celle-ci, la perte de quantité d'action serait au-dessous de $\frac{1}{10}$, et elle serait moindre encore si le rayon de la roue surpassait 2^m, et si elle faisait plus d'un tour par seconde. On voit donc que la roue à réaction peut être employée,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

farine, et j'ai vu la garnison, en 1730, obligée de faire venir du pain de Saint-Omer; au lieu qu'en se servant du flux et reflux de la mer, on pour-

---

avec des orifices d'écoulement très-petits, dans des limites assez étendues, sans que la perte qui en résultera théoriquement devienne fort considérable.

Disposition à donner à la roue à réaction.

On a disposé cette roue de diverses manières. D'après la description de Desaguliers citée ci-dessus, et les modèles qu'on en trouve ordinairement dans les cabinets de physique (voyez le *Traité élémentaire des machines*, de M. Hachette, p. 19), elle consiste dans un tuyau vertical, au travers duquel passe l'axe, et dont la hauteur est presque égale à celle de la chute : l'eau verse dans ce tuyau à son extrémité supérieure, et il est assemblé à son extrémité inférieure avec deux ou plusieurs autres tuyaux horizontaux, aux extrémités desquels sont pratiqués les orifices d'écoulement, qui doivent être placés de manière que l'eau en sorte horizontalement, et en sens contraire du mouvement de rotation. Cette disposition présente quelques inconvénients, et il est sur-tout difficile d'éviter qu'il n'y ait un choc, à l'instant où l'eau entre dans le tuyau vertical. M. Mathon de la Cour en a décrit une autre dans le *Journal de physique* pour 1775, qui diffère peu de celle adoptée par M. Manoury Dectot dans des moulins qu'il a fait construire, et dont il a déposé un modèle au Conservatoire des arts et métiers. Cette dernière est représentée pl. **D**, fig. 9 : L'axe AC est supporté en E par des galets qui en facilitent le mouvement. Au bas de cet axe sont assemblés des tuyaux courbes MC, NC, dans lesquels l'eau du réservoir arrive par dessous, au moyen du tuyau de communication BDC, et dont elle s'échappe par les orifices placés en M, N. Il faut que les tuyaux aient le plus de grosseur possible sans trop charger la roue, et il serait à desirer que l'angle qu'ils forment à leur jonction en C fût adouci par des courbes, afin que l'eau n'eût point à changer brusquement de direction en ce point. On diminuerait la résistance de l'air au mouvement des tuyaux en les enfermant dans nn tambour cylindrique. Il ne faut point chercher d'ailleurs à rendre la roue très-légère, parce qu'il est avantageux qu'elle puisse faire la fonction d'un volant.

Pl. **D**, Fig. 9.

Établissement de la roue à réaction.

On n'a point d'observations propres à faire juger avec précision du degré d'avantage que cette machine peut offrir dans la pratique. Il dépend beaucoup de sa construction, et du rapport entre l'aire des orifices et la grosseur des tuyaux parcourus par l'eau. Si ces orifices sont très-petits, en sorte que l'eau ait fort peu de vîtesse dans les tuyaux, et si ces tuyaux n'offrent pas de coudes brusques, la quantité d'action transmise doit différer très-peu de la quantité d'action théorique, abstraction faite des frottements et de la résistance de l'air. Pour faire l'établissement de cette roue, on remarquera que la force vive emportée par l'eau, à l'instant où elle vient de quitter la roue, étant $m(\sqrt{2gH+V^2}-V)^2$, tandis que la force vive qu'elle aurait acquise si elle eût tombé librement est $m.2gH$, la force vive théorique transmise à la roue, qui est la différence de ces deux quantités, sera $2m(\sqrt{2gH+V^2}-V)V$. La quantité d'action transmise que je représente toujours par PV, est la moitié de la force vive : donc on a théoriquement $PV=m(\sqrt{2gH+V^2}-V)V$, ce qui n'est autre chose que l'expression du § précédent, où l'on aurait fait $\sqrt{2gh}=0$. Si l'on représente maintenant par E le volume d'eau dépensé en une seconde, ce qui donne $mg=1000.E$ kil., et si l'on admet

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rait construire autant de moulins à eau que l'on voudrait. Il y a d'autres villes dans le voisinage de la mer sujettes au même inconvénient, parce

---

que la quantité d'action transmise en effet en une seconde soit seulement les $\frac{4}{5}$ de la quantité d'action théorique, on aura pour la formule à employer dans les applications $PV=\frac{4}{5}.\frac{1000}{g}E(\sqrt{2gH+V^2}-V)V$ kil. × mèt. L'effort exercé à une distance de l'axe égale à celle des orifices d'écoulement, sera $P=\frac{4}{5}.\frac{1000}{g}E(\sqrt{2gH+V^2}-V)$ kil. On cherchera toujours à donner à la roue la plus grande vîtesse possible, eu égard à l'usage auquel elle sera destinée.

De la vîtesse de la roue à réaction quand elle n'élève aucun poids.

On peut remarquer que si dans l'équation $PV=m(\sqrt{2gH+V^2}-V)V$, qui exprime la relation théorique existant entre l'effort P exercé à la circonférence de la roue, et la vîtesse V que l'action du fluide lui fait prendre, on suppose $P=0$, on aura $\sqrt{2gH+V^2}-V=0$, d'où $V=\infty$. On conclut de là que lorsqu'aucun effort n'est exercé sur la roue, l'action du fluide tend à lui faire prendre une vîtesse infinie.

Des roues où l'eau sort par un orifice contigu à l'axe.—Danaïde.

§ 3. Si, par une disposition contraire à la précédente, on admet que l'eau entre dans la roue à une certaine distance de l'axe, et s'en approche à mesure qu'elle descend, en sorte qu'elle s'écoule par un orifice contigu à cet axe, on aura une autre espèce de roue hydraulique semblable à celle décrite art. 668, et représentée fig. 5, pl. 1. Pour que cette roue soit disposée convenablement, il faut qu'il n'y ait point de choc, et par conséquent que l'inclinaison des aubes, à l'endroit où l'eau entre, soit déterminée d'après celle de la veine d'eau conformément à ce qui a été indiqué dans le § 1, et que l'axe de cette veine soit dans le plan tangent à la surface du cône sur lequel les aubes sont placées. l'écoulement de l'eau dans des points situés près de l'axe n'apporte d'ailleurs, comme on l'a vu au commencement du § précédent, aucune modification à la théorie, et la vîtesse qui donnera le maximum d'effet sera toujours exprimée par la formule $V=\frac{gH}{\sin.\theta\sqrt{2gh}}$. Pour qu'il ne se perde point d'eau inutilement, il faut que les aubes soient beaucoup plus larges que la veine d'eau, ou qu'il y ait très-peu de jeu entre elles et le cône de maçonnerie dans lequel la roue est contenue. Il serait préférable d'enfermer ces aubes dans une enveloppe conique qui ferait partie de la roue, comme les aubes de la roue, fig. 8, pl. D, sont enfermées dans une enveloppe cylindrique. C'est effectivement ce parti qu'avait adopté M. Manoury Dectot dans une machine qu'il a proposée il y a quelques années, et à laquelle on a donné le nom de *Danaïde*. Elle différait seulement de la précédente en ce que l'eau, qui entrait toujours dans la roue avec une vîtesse acquise et sous une direction inclinée, descendait d'abord entre deux cylindres verticaux concentriques, puis, parvenue au fond de la roue qui était horizontal, s'approchait de l'orifice contigu à l'axe, en perdant sa vîtesse de rotation contre des cloisons dont ce fond était garni, et qui étaient placées dans le sens des rayons. Les aubes courbes disposées sur la surface d'un cône, comme celles de la fig. 5, pl. 1, paraissent préférables, parce qu'il y aura toujours du désavantage à faire passer l'eau brusquement d'une direction verticale à une direction horizontale.

Pl. 1, Fig. 5.

Etablissemen

L'établissement des roues de cette espèce se fera d'ailleurs de la manière indiquée

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'apparemment elles ignorent le moyen d'y remédier. C'est principalement en leur faveur que j'ai écrit ce qui suit.

---

pour les roues du § 1, et la quantité d'action réellement transmise devra être à-peu-près la même. Je remarquerai qu'il est nécessaire ici que l'eau arrive dans la roue avec une vîtesse plus grande que la sienne, et ait dans cette roue un mouvement relatif, qu'elle perde peu-à-peu en s'approchant de l'axe. On ne peut pas supposer que l'eau soit reçue dans la roue comme dans un vase, s'y amasse, et n'y ait aucune vîtesse sensible, comme dans le cas où les orifices d'écoulement sont situés à une certaine distance de l'axe. En effet, dans ce dernier cas, c'est la force de réaction résultant de cet écoulement qui, agissant au bout d'un certain bras de levier, fait équilibre à l'effort de la résistance. Mais si les orifices sont contigus à l'axe, le bras de levier devient nul, en sorte que la force de réaction ne peut détruire aucun effort. La machine ne tournerait donc point, si l'eau, dans l'intérieur de la roue, n'exerçait contre des cloisons une pression propre à déterminer le mouvement; et c'est ce qui ne peut arriver qu'autant que cette eau se meut avec une vîtesse finie le long de ces cloisons.

Des roues à aubes courbes où la veine d'eau choquerait les aubes à son entrée dans la roue.

§ 4. La nécessité de disposer les machines de manière qu'il n'y ait point de choc, quoique établie depuis long-temps par la théorie et par l'expérience, n'est pas aussi généralement reconnue qu'il serait à desirer. J'en donnerai pour exemple le passage qui se lit t. 2, p. 207 des *Ferguson's lectures*, édit. de 1806. M. Brewster y annonce qu'il a souvent eu l'idée qu'on pourrait construire une machine hydraulique très-puissante, en combinant l'impulsion avec la réaction de l'eau, et indique à cet effet la roue hydraulique horizontale considérée dans le § précédent, en traçant les aubes de manière que la veine d'eau les choque perpendiculairement à son entrée dans la roue; en sorte que la machine offrirait une combinaison des effets des roues à aubes courbes, et des roues mues par le choc qui font l'objet de la note (*dv*). Il est évident que le résultat de cette combinaison participerait nécessairement de l'infériorité de ces dernières roues, et pour le démontrer je ferai encore l'analyse de la disposition proposée par M. Brewster; en supposant, pour plus de simplicité, que l'eau s'échappe à la même distance de l'axe qu'elle est entrée, ce qui ne change rien aux résultats, comme on l'a vu au commencement du § 2.

Soit donc toujours H la hauteur totale de la chute, h la portion de cette chute parcourue par l'eau avant d'entrer dans la roue, en sorte que $H-h$ est la hauteur de cette roue, θ l'angle que la veine d'eau fait avec la verticale, V la vîtesse de rotation de l'aube, à l'endroit où la veine d'eau la frappe. On verra, comme dans la note (*dv*), que l'eau, en choquant l'aube, perd contre elle la vîtesse $\sqrt{2gh}-V\sin.\theta$, et la force vive $m(\sqrt{2gh}-V\sin.\theta)^2$. A cet instant l'eau n'a plus aucune vîtesse relative dans la roue, mais en parcourant dans cette roue la hauteur $H-h$, elle acquiert la vîtesse relative $\sqrt{2g(H-h)}$, en sorte que, quand elle vient de quitter la roue, elle possède la vîtesse effective $\sqrt{2g(H-h)}-V$, et la force vive $m(\sqrt{2g(H-h)}-V)^2$. Ainsi puisque la quantité d'action imprimée représentée par $mgH-PV$, doit toujours être la moitié des forces vives acquises et perdues, on a pour l'équation du mouvement de la roue,

$$mgH-PV=\tfrac{1}{2}m(\sqrt{2gh}-V\sin.\theta)^2+\tfrac{1}{2}m(\sqrt{2g(H-h)}-V)^2,$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pl. 7, Fig. 1. La figure première comprend trois canaux, dont celui du milieu KCM se ferme avec deux vannes placées aux endroits B et E. Les deux autres

---

d'où l'on tire

$$PV=\tfrac{1}{2}m\left(2V\sin.\theta\sqrt{2gh}+2V\sqrt{2g(H-h)}-V^2\sin.^2\theta-V^2\right).$$

Cette valeur de l'effet produit par la roue dans une seconde peut varier suivant celles qu'on donnera à V, h et θ. Déterminant d'abord la valeur de V qui rendra PV un maximum, on trouve $V=\frac{\sin.\theta\sqrt{2gh}+\sqrt{2g(H-h)}}{\sin.^2\theta+1}$; et en substituant cette valeur dans celle de PV, il vient $PV=\frac{1}{2}m.\frac{(\sin.\theta\sqrt{2gh}+\sqrt{2g(H-h)})^2}{\sin.^2\theta+1}$.

Cherchant ensuite la valeur de h qui rend cette dernière expression la plus grande possible, on trouve $h=\frac{H}{\sin.^2\theta+1}$; et la valeur correspondante de la quantité d'action transmise est $PV=m\left(\frac{\sin.\theta\sqrt{2gH}}{1+\sin.^2\theta}\right)^2$.

Enfin faisant varier θ dans cette dernière expression, on a pour la valeur correspondante au maximum $\sin.\theta=1$; et cette valeur substituée dans les précédentes donne successivement $h=\frac{1}{2}H$, $V=\sqrt{gH}=\sqrt{2gh}$, $PV=\frac{1}{2}mg.H$. On conclut de ces résultats que dans le cas où la roue transmet la plus grande quantité d'action possible : 1° la veine d'eau est dirigée horizontalement; 2° la hauteur parcourue par l'eau avant d'entrer dans la roue est la moitié de la hauteur totale de la chute; 3° la vîtesse de rotation du point où l'eau choque les aubes est due à la moitié de la hauteur de la chute, ou égale à celle qui avait été acquise par cette eau, en sorte qu'il n'y a point de choc; 4° enfin le maximum d'effet est la moitié seulement de la quantité d'action représentée par la chute de l'eau. On voit donc que la disposition proposée par M. Brewster est encore plus défavorable qu'on ne l'aurait peut-être pensé au premier coup-d'œil, et qu'il est impossible de combiner avec avantage dans une roue hydraulique les effets du choc à ceux de la réaction. Dès qu'il doit y avoir un choc à l'entrée de l'eau dans la roue, il se perd une quantité d'action aussi grande que si ce choc se faisait au bas de la chute, comme dans les roues considérées dans la note (*dv*).

Conditions à remplir pour obtenir le maximum d'effet.

Le maximum d'effet est la moitié de la quantité d'action représentée par la chute de l'eau.

Emploi des roues horizontales à la construction des moulins à blé.

§ 5. Les roues hydrauliques qui sont l'objet de cette note paraissent convenir spécialement aux moulins à blé. Il est vraisemblable qu'en les disposant d'après les principes des § précédents, on en obtiendra un effet pour le moins aussi avantageux que des roues à augets ou des roues de côté; et elles l'emportent de beaucoup sur ces dernières pour la simplicité et la solidité de la construction. On se rendra compte qu'elles peuvent être employées avec facilité pour des chutes comprises entre 1^m et 4 ou 5^m. Pour faciliter l'application des règles, je donnerai l'exemple de l'établissement d'un moulin à blé au moyen d'une roue semblable à celles considérées dans le § 1.

Supposons qu'ayant une chute de 3^m, on veuille faire tourner une meule de 2^m de diamètre. On verra par la table de la note (*di*) que cette meule dépense en une seconde une quantité d'action de $485^{k\times m},5$. Si l'on ajoute d'abord $\frac{1}{20}$ pour tenir compte des frottements, puis un quart à raison de la perte que la roue doit faire

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

GDL et HFI se ferment aussi par les vannes D et F. Pour entendre la manœuvre qui fait aller le moulin, dont la roue est placée en C, on suppose que l'eau de la mer entre du côté de M, et sort du côté de K, pour s'aller rendre dans un grand réservoir où elle reste en dépôt.

Quand la mer monte, on lève les vannes B, E, et l'on baisse les deux autres D et F; alors l'eau passant par le canal du milieu, fait tourner la roue environ 4 heures $\frac{1}{2}$ des 6 que la mer emploie à monter, parce que lorsqu'elle approche de se mettre de niveau avec l'eau du réservoir, la roue cesse de tourner pendant une heure et demie avant que la marée ait atteint sa plus grande hauteur, et encore une heure et demie après. Ainsi des 12 heures que comprend le temps du flux et reflux, il y en a trois pendant lesquelles le moulin chôme.

Quand la mer commence à baisser, on ferme les vannes E et B, et l'on ouvre les deux autres D et F. L'eau du réservoir est contrainte de passer dans le canal GDL; et ne pouvant s'échapper du côté de la mer, elle vient passer sous la roue C, qu'elle fait tourner du même sens qu'auparavant : de là elle s'échappe par le canal HFI, et va s'écouler à la mer. Ainsi toute la manœuvre se réduit à ouvrir et à fermer alternativement toutes les six heures les vannes E, B, et D, F. Pour interrompre le mou-

---

éprouver sur la quantité d'action théorique, on aura $637^{k\times m}$ pour la quantité d'action que la chute doit représenter. Donc E étant le volume d'eau à dépenser par seconde, on a $1000\,E\times 3^m = 637^{k\times m}$, d'où $E = 0^{mc},212$: c'est la quantité d'eau que la source devra fournir pour faire marcher la meule.

D'après la table qui vient d'être citée, la meule, et par conséquent la roue, devra faire à-très-peu-près un tour par seconde. Ainsi si l'on donne 2^m de diamètre à cette roue, ce diamètre étant pris au milieu des aubes, la vîtesse de rotation V sera $\pi.2^m = 6^m,29$. On posera donc l'équation $6^m,29 = \frac{g\,H}{\sin.\theta\sqrt{2gh}}$, et en y faisant $H = 3^m$, elle donnera $\sqrt{2gh} = \frac{4,68}{\sin.\theta}$. On ne peut pas faire $\sin.\theta > 1$, et en le supposant $= 0,9$, en sorte que la direction de la veine d'eau ferait avec l'horizon un angle d'environ 28°, on aura $\sqrt{2gh} = 5^m,2$, et $h = 1^m,28$. La hauteur de la roue devrait donc être $3^m - 1^m,28 = 1^m,72$. Si l'eau entre dans la roue en sortant d'un grand réservoir par de petits ajutages dont l'entrée soit évasée, elle aura, à très-peu de chose près, la vîtesse $5^m,2$, due à la hauteur $1^m,28$ qu'elle aura parcourue. Mais si elle arrive par des bâches ou tuyaux, sa vîtesse ne sera pas tout-à-fait celle due à cette hauteur : il faudra donc alors augmenter h, et diminuer un peu la hauteur de la roue. Comme le volume d'eau à dépenser par seconde est $0^{mc},212$, il faudra que la somme des aires des orifices qui fournissent l'eau $= \frac{0,212}{5,2} = 0^{mq},041$. On conçoit d'ailleurs, d'après la propriété connue des maximum, qu'on peut s'écarter de ces déterminations dans des limites assez étendues, sans nuire sensiblement à l'effet qu'on veut obtenir.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lin quand on le juge à propos, on a placé une vanne à l'endroit A, qui empêche que la mer ne passe au-delà.

La seconde figure comprend deux moulins qui agissent de la même manière que le précédent, mais avec un peu plus de circuit; on suppose que le côté L répond au rivage, et le côté K au réservoir. Quand la mer monte, on ouvre les trois vannes A, G, C, et l'on ferme les trois autres B, D, H. Ainsi l'eau fait tourner d'abord la roue F, ensuite l'autre E, de-là passe dans le canal MCI pour se rendre au réservoir.

Quand la mer baisse, on ferme les trois passages A, G, C, et l'on ouvre les trois autres B, D, H : l'eau du réservoir vient faire tourner la roue E de même sens qu'auparavant, de-là coule par le passage D, et va faire tourner la roue F comme en premier lieu ; ensuite elle s'échappe par le canal PBO, et va se jeter à la mer. Ainsi la manœuvre consiste à ouvrir et à fermer alternativement les vannes.

Exemple d'un moulin exécuté autrefois à Dunkerque, et qui allait par le flux et reflux.

671. Voici les développements d'un moulin dans le goût des précédents, qui a été exécuté à Dunkerque, et qui a subsisté encore long-temps après la démolition, n'ayant été détruit que depuis quelques années par le propriétaire même, piqué de voir qu'on voulait l'obliger d'entrer dans les frais de l'entretien des canaux de *Furnes* et de *la Moëre*, qui facilitaient la manœuvre de ce moulin, situé dans la ville entre ces deux canaux. Il faut être prévenu que le fond du canal de la Moëre est de niveau avec l'ancien port, et que le fond de celui de Furnes est de 6 pieds plus élevé. Ainsi le moulin manœuvrait à la marée montante par le canal de la Moëre, et continuait à la marée descendante par celui de Furnes, de la manière du monde la plus commode, comme on en va juger.

Planche 8.

Ce moulin contenait huit meules, marquées H, dont six tournaient par le moyen de la mer, et les deux autres par celui du vent; c'est pourquoi on a pratiqué la galerie de charpente K L en-dehors de la tour, pour disposer l'axe des ailes dans la direction du vent.

Le plan fait voir trois coursiers A, B, C, dans chacun desquels tournait une roue qui donnait le mouvement à deux meules, comme le profil le fait assez sentir. Je ne dis rien du mouvement de la roue F, qui, répondant dans le coursier C, avait la liberté de tourner tantôt d'un sens, tantôt d'un autre, suivant le flux et reflux, pour ne m'arrêter qu'aux deux autres répondants aux coursiers A et B, dont l'équipage de chacune est représenté par le second profil. Pour leur donner le mouvement, on a fait quatre portes à deux battants D, E, F, G, qui s'ouvraient et se fermaient alternativement d'elles-mêmes par l'action de l'eau. Par exemple, à la marée montante, les portes E et F s'ouvraient, et les deux autres D et G se fermaient. L'eau venant passer par les coursiers du sens marqué par les flèches, faisait tourner les roues pendant le flux. A la marée descendante, les portes G et D s'ouvraient, et les deux premières E et F se

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fermaient. L'eau se trouvant arrêtée en E passait par la porte G, et sortait par l'entrée D, après avoir fait tourner les deux roues du même sens qu'auparavant.

672. J'ai fait réflexion que l'on pouvait se servir de la marée pour faire aller des moulins d'une manière encore plus simple que celle que je viens de décrire. Je suppose que RST marque la basse mer, et KQM la haute mer; que l'on a creusé le terrain au niveau des plus basses marées sur l'étendue SLAGNT, qui aboutit à deux réservoirs DOH et GPI, dont le lit du premier doit être de 6 ou 7 pieds plus élevé que celui du second qu'on fera de niveau avec la basse mer. On ménagera une chûte à l'endroit HI, accompagnée d'une écluse fermée avec des vannes pour soutenir les eaux du canal supérieur, et faire tourner plusieurs moulins. A l'entrée du bassin supérieur, il faudra faire une écluse AB fermée par deux portes busquées D, qui s'ouvriront d'elles-mêmes du côté du canal à la marée montante. L'eau entrera à la hauteur de 7 à 8 pieds, et s'y trouvera enfermée sans en pouvoir sortir si ce n'est en ouvrant les pertuis des moulins, parce que les portes D se refermeront d'elles-mêmes aussitôt que la mer commencera à baisser.

Autre manière de se servir du flux et reflux pour faire tourner des roues.

Pl. 7, Fig. 8.

On construira aussi une écluse EF à l'entrée du bassin inférieur, dont les portes G regardant la mer se fermeront d'elles-mêmes quand elle montera, et elle ne pourra entrer dans ce bassin uniquement destiné à recevoir les eaux d'en-haut; car le radier des moulins étant à-peu-près de niveau avec le lit du bassin supérieur, l'eau pourra passer de l'un dans l'autre, et de-là aller se jeter à la mer, lorsque la marée, en baissant, laissera la liberté aux portes G de s'ouvrir pour mettre ce bassin à sec de 12 heures en 12 heures. Or si l'on proportionne l'étendue de celui d'en-haut à la quantité d'eau que les moulins dépenseront pendant 9 ou 10 heures, afin d'avoir égard au temps que la mer mettra à baisser et à remonter jusqu'à un certain point, les moulins iront continuellement sans aucune sujétion.

Comme toutes les rivières qui vont se jeter à la mer ont un flux et reflux qui s'étend sensiblement à plusieurs lieues en-deçà de leur embouchure, on peut encore profiter de cet avantage pour la commodité des villes qui en sont à portée. Par exemple, ABCDE représente une rivière qui va se jeter à la mer du côté de A : on se servira du circuit BCD, afin de construire les moulins à l'endroit MN. Pour cet effet, il faudra creuser deux bassins FMNG et MIKN, le premier plus profond que le second, le faisant de niveau avec le lit HA; ce qui s'exécutera d'autant plus commodément, que les rivières ont toujours beaucoup de profondeur à mesure qu'elles approchent de leur embouchure : on fera une écluse FG, dont les portes H regarderont la mer, et une autre IK, dont les portes L regarderont les moulins. On aperçoit d'abord que la mer venant à monter

Pl. 7, Fig. 9.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fermera l'écluse d'en-bas, et ouvrira celle d'en-haut, et que quand elle se retirera, l'eau du bassin supérieur fermera l'écluse d'en-haut, et l'eau du bassin inférieur ouvrira celle d'en-bas pour s'aller jeter a la mer, ainsi alternativement.

Manière de faire une roue de moulin qui puisse tourner étant entièrement plongée dans l'eau d'une rivière.

673. Les rivières qui sont dans le cas que nous venons de supposer, grossissant de 12 ou 15 pieds, on ne peut y faire de moulin dont les roues ne soient submergées deux fois par jour, et les machines qu'elles font agir ne remplissent guère que le quart de leur destination, à moins qu'on n'élève les roues de la façon que nous l'avons insinué dans l'article 661. Mais c'est une sujétion qu'on peut éviter par une nouvelle construction de roues imaginées par MM. Gosset et de la Deuille, prêtres du diocèse de Laon, à l'occasion d'un projet d'une machine qu'on devait exécuter contre l'une des arches du Pont-au-Change à Paris. Il s'agissait de donner une plus grande abondance d'eau à la ville que ne font les pompes du pont Notre-Dame, qui ne vont pas lorsque la rivière est fort grosse, quoiqu'on élève les roues jusqu'à une certaine hauteur, au lieu que celle dont je parle tournera continuellement sans bouger de sa place, que la rivière soit haute ou basse, parce qu'elle peut y être entièrement plongée. En voici le détail.

Pl. 7, fig. 10.

On suppose que la ligne GH exprime la surface des plus hautes eaux, la ligne LM celle des plus basses, et que le courant suit la direction de la flèche N; il est question de faire en sorte que la roue puisse toujours tourner sur son axe IK. Il faut être prévenu que la figure que nous donnons ici est un profil représentant un assemblage de charpente qui doit être répété plusieurs fois le long de l'arbre, selon la longueur que l'on veut donner aux aubes, afin que les planches qui doivent composer ces aubes, aient autant de points d'appui qu'il convient de leur en donner pour soutenir le choc de l'eau sans fléchir. Ce que cette roue a de singulier se réduit seulement à attacher sur les rayons, avec des charnières, les planches qui doivent composer les aubes, afin qu'elles puissent se présenter en face comme D, quand elles sont au bas de la roue pour recevoir le choc de l'eau, et qu'au contraire elles ne se présentent que de profil comme A, lorsqu'elles sont vers le sommet, parce qu'alors l'eau ayant incomparablement plus de prise en bas qu'en haut, la roue sera contrainte de tourner, au lieu que si les planches étaient arrêtées à demeure, comme de coutume, le choc se trouvant égal en-bas et en-haut, la roue resterait immobile.

On voit qu'aussitôt que les planches D sont parvenues vers M, elles commencent à flotter comme en E et plus encore en F, et que ce n'est qu'en A qu'elles se trouvent dans une situation horizontale; qu'ensuite étant parvenues en B, elles sont prêtes à se coucher sur leur appui, et c'est à quoi le courant les contraindra lorsqu'elles seront descendues au-dessous de l'axe de la roue, ce qui arrivera toujours de même, à quelque

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

hauteur que soit le niveau GH de l'eau, au-dessus ou au-dessous de l'axe IK, pourvu que lorsqu'il sera au plus bas LM, l'aube verticale PQ soit entièrement plongée. J'ai été appelé à la première épreuve que l'on a faite d'une pareille roue à Paris, qui a réussi avec tout le succès qu'on pouvait desirer (*eb*).

(*eb*) Les roues à eau décrites dans cet article ont été peu employées : cependant M. Dussaussoy, officier d'artillerie, en a fait construire une en Espagne qui a bien réussi. Il serait à souhaiter que leurs effets fussent étudiés par des expériences spéciales.

Observations sur les roues à ailes mobiles décrites art. 673.

Il y a d'ailleurs d'autres moyens de remédier aux variations du niveau de l'eau dans les moulins mus par la marée, et j'exposerai d'abord ici les procédés employés à cet effet dans un moulin construit sur les bords de la Tamise, à East-Greenwich, par M. John Lloyd, et décrit par M. Gregory, *A treatise of mechanics*, t. 2, p. 502, dont j'ai traduit ce qui suit :

Description d'un moulin mu par la marée exécuté en Angleterre.

« La roue à eau qui fait marcher ce moulin imprime le mouvement à huit paires de meules : elle tourne alternativement dans deux sens, suivant que la marée monte ou descend. Le côté du bâtiment parallèle au cours de la rivière, a $12^{m},2$ de longueur dans œuvre, et on peut livrer passage à l'eau sur cet intervalle entier, au moyen de portes d'écluse qui descendent jusqu'au niveau des plus basses marées. L'eau franchit ce passage pendant que la marée monte, et se rend dans un grand réservoir qui occupe environ 16200^{mq} de terrain. Derrière ce réservoir, il y en a un plus petit, dans lequel l'eau est retenue, ce qui offre la facilité de faire dans l'occasion des chasses pour enlever les vases ou sédiments qui finiraient par encombrer la machine. La roue à eau a son axe parallèle au bord de la rivière, et par conséquent aux portes d'écluse qui donnent passage à l'eau. La longueur de cette roue est de $7^{m},93$, son diamètre de $3^{m},35$, et le nombre de ses aubes 32. Ces aubes ne sont pas placées dans un même plan dans toute la longueur de la roue; mais cette longueur est partagée en quatre parties égales, et les portions des aubes appartenant à chacune de ces parties, sont placées l'une au-dessous de l'autre, d'une quantité égale au quart de la distance de deux aubes, mesurée sur la circonférence de la roue. Cette disposition, qu'on entendra mieux en jetant les yeux sur la figure, a pour objet d'égaliser l'action de l'eau sur cette roue, et d'empêcher qu'elle ne se meuve par secousses. La roue et l'appareil dont elle est chargée pèsent environ 20000 kilogrammes, et le tout est soulevé par la marée montante quand elle est introduite par les portes d'écluse. Cette roue est placée dans le milieu du passage de l'eau, laissant de chaque côté un intervalle d'environ 2^{m}, pour faire couler de l'eau dans le réservoir, indépendamment de celle qui met la roue en mouvement. Aussitôt que la marée s'est élevée à sa plus grande hauteur (qui à ce moulin est souvent de 6^{m} au-dessus des plus basses eaux), on laisse l'eau couler du réservoir dans la rivière, et de cette manière elle donne à la roue à eau un mouvement de rotation en sens contraire de celui qui lui était imprimé par la marée montante. Les dispositions par lesquelles la roue est élevée et abaissée, et les mouvements des parties intérieures du moulin conservés dans une même direction, quoique celui de la roue à eau soit changé, méritent une description détaillée. AB est une section de la roue à

Pl. E, Fig. 1 *b*.

Pl. E, Fig. 1 *a*.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Règle pour déterminer le nombre d'aubes qu'il

674. Il ne paraît pas que dans la construction des roues de moulins on ait suivi jusqu'ici aucune règle pour déterminer le nombre des aubes

---

eau; 1, 2, 3, 4, 5, etc., ses aubes; CD la première roue dentée, montée sur son axe. L'axe vertical PE porte les deux pignons égaux E, F, dont l'un ou l'autre, suivant que l'occasion le requiert, peut être mis en mouvement par la première roue CD; et par conséquent cette roue agissant sur E et F en des points diamétralement opposés, peut, quoique son propre mouvement soit changé, faire tourner l'axe vertical toujours dans une même direction. Dans la figure la roue E est montrée en action, tandis que F est écartée de la roue dentée CD: au retour de la marée la roue F est mise en action, et celle E est retirée. Ce mouvement est opéré par le levier G, dont le point d'appui est en H, et dont l'autre extrémité est supportée par la crémaillère K, qui engrène avec le pignon L monté sur le même axe que la roue M. Dans cette roue engrène le pignon N, sur l'axe duquel est fixée la manivelle O, au moyen de laquelle un homme est capable d'élever ou d'abaisser les pignons quand il le faut. Le centre du levier se voit plus

Pl. E, Fig. 1 *b*.

clairement dans la fig. 1*b*, où *ab* est une section du levier, qui est composé de deux fortes barres de fer. Elles portent en *a*, *b* deux pitons d'acier qui sont engagés dans une gorge ou rainure pratiquée sur la circonférence de la roue I, laquelle est fixée aux quatre barreaux montants environnant l'axe, dont trois seulement peuvent être vus dans la figure en *c*, *d*, *e*. Les extrémités de ces barreaux sont fortement arrêtées à vis et écroux aux moyeux des pignons E, F, lesquels sont adaptés à l'axe vertical de manière à pouvoir glisser dans le sens de sa longueur avec peu de frottement. Ainsi ces roues peuvent être élevées ou abaissées le long de cet axe, pendant que le pivot sur lequel il porte demeure dans la même situation. Quand le pignon supérieur est engagé, il est soutenu sur un renfort qui l'empêche de descendre plus bas; quand c'est le pignon inférieur, on passe un verrou qui traverse le moyeu du pignon supérieur et l'axe, et qui soutient le poids du levier G, en même temps qu'il empêche qu'il n'y ait trop de frottement de la part des clous ou pitons de ce levier dans la rainure de la roue I.

« Quand la marée monte, après que le moulin s'est arrêté un temps suffisant pour

Pl. E. Fig. 1 *a*.

gagner un chûte d'eau modérée, on laisse l'eau entrer et tomber sur la roue par l'orifice Q, et sortir par l'orifice R. La pression de l'eau agissant contre le fond S du chassis qui supporte la roue, et en même temps entre les portes pliantes T, W, qui sont ainsi converties en un très-grand soufflet hydrostatique, fait flotter la roue et son châssis (quoique pesant, comme on l'a déja observé, près de 20000 kilogrammes), et les soulève graduellement de manière que la roue n'est jamais, suivant l'expression des ouvriers, *noyée* par la marée montante. L'eau ne peut pas s'échapper sous le châssis de la roue, étant arrêtée par les portes pliantes, qui vont de l'une à l'autre de ses extrémités. De cette manière la roue et son châssis sont soulevés par une charge d'eau de $1^m,22$, et le moulin travaille avec une charge de $1^m,5$ à $1^m,7$.

« Quand la marée descend, et que l'eau revient du réservoir dans la rivière, on pourrait peut-être s'attendre à ce que, en conséquence de l'abaissement graduel de l'eau, la roue à eau devrait s'abaisser aussi graduellement. Mais de peur que de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'il convenait d'y appliquer, eu égard à leur hauteur, et relativement à la grandeur du diamètre qu'il faudra donner à la roue. Cependant il im-

faut donner aux roues selon la grandeur de leur diamètre.

---

l'eau retenue entre le châssis de la roue en S et les portes pliantes T W, ne puisse l'empêcher (*), il y a de fortes crémaillères en fer fondu, au moyen desquelles le châssis peut être suspendu à quelque hauteur que ce soit, ou graduellement abaissé, de manière à donner à l'eau qui revient du réservoir une charge convenable sur la roue. Alors l'orifice R est fermé, et V ouvert aussi-bien que X, et l'eau entrant en X agit sur la roue et s'écoule en V. La surface supérieure du châssis de la roue est quadrangulaire, et à chaque angle est une forte barre en fer fondu, qui monte et descend en glissant dans une rainure disposée de manière à permettre son mouvement vertical, mais à prévenir toute déviation latérale qui pourrait être causée par l'impulsion du courant.

« A chaque extrémité de la roue à eau est un axe vertical, avec deux pignons et une première roue dentée, comme F, E et CD. Chacun de ces axes fait tourner une grande roue horizontale, à une distance convenable au-dessus des pignons, et chacune de ces roues horizontales conduit quatre pignons égaux placés à égales distances sur son pourtour. Chacun de ces pignons a un axe vertical, à l'extrémité supérieure duquel est fixée la meule supérieure de la paire correspondante. D'autres roues conduites par l'un ou l'autre de ces pignons, donnent le mouvement aux machines à bluter, et aux diverses parties subordonnées du moulin.

« Quoique l'axe vertical placé à chaque extrémité de la roue à eau s'élève et s'abaisse avec cette roue, cependant la grande roue horizontale tournant avec cet axe ne s'élève et ne s'abaisse point avec lui, mais demeure toujours dans un même plan horizontal, et en contact avec les quatre pignons qu'elle conduit. La disposition pour cet objet est très-simple, mais très-efficace. Chaque grande roue horizontale a un moyeu qui porte sur des galets, et qui est traversé verticalement par une ouverture carrée, assez grande pour permettre à l'axe P d'y glisser librement en montant et descendant, mais non de tourner sans communiquer son mouvement de rotation à la roue. De cette manière le poids de la roue la fait presser sur les galets, et la retient dans le même plan horizontal, et l'action des angles de l'axe vertical sur les parties correspondantes de l'ouverture carrée dans le moyeu, fait prendre à cette roue le mouvement de rotation, ce mouvement étant toujours dans le même sens, en conséquence de la disposition par laquelle l'un ou l'autre des pignons mobiles E, F est mis en contact avec les points opposés de la première roue dentée CD.

« Plusieurs des parties subordonnées de ce moulin sont admirablement construites, mais nous pouvons seulement faire mention ici des moyens par lesquels la direction du mouvement peut être changée à volonté dans les machines à bluter.

(*) Il me semble que ce n'est point là la raison pour laquelle la roue ne descend point sans effort quand la marée s'abaisse. Cela tient, je crois, à ce que l'eau ayant exercé son effort contre les aubes après avoir franchi l'orifice X, et communiquant aussitôt avec l'eau inférieure par l'orifice V, le dessus du châssis n'est point pressé de haut en bas pendant la marée descendante par l'eau supérieure, comme le dessous l'est de bas en haut pendant la marée montante. Il n'y a plus, pour faire baisser le châssis, que la pression exercée sur les ventaux T W.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

porte qu'elles soient distribuées à propos, sans en employer plus qu'il ne faut, comme on le fait toujours, ce qui les empêche de recevoir toute la

---

Sur un axe vertical sont fixées à la distance d'environ $0^m,4$ deux roues dentées égales, et une autre roue dentée fixée sur un axe horizontal est disposée de manière à pouvoir être élevée ou abaissée au moyen d'une vis, et mise ainsi en contact avec la supérieure ou l'inférieure des deux roues montées sur l'axe vertical. On voit par là que la direction du mouvement est changée avec une grande facilité en changeant la position de l'axe horizontal, de manière que la roue qui lui est adaptée puisse être conduite alternativement par les deux autres. Une roue et un pignon placés à l'autre extrémité de l'axe horizontal, donnent le mouvement aux machines à bluter. »

M. Gregory ajoute que si l'on eût placé l'axe de la roue à eau perpendiculairement à la direction du cours de la rivière, au lieu de le placer parallèlement à cette direction, on aurait pu (en employant une disposition semblable à celles indiquées ci-dessus art. 670 et 672), faire tomber l'eau sur la roue toujours dans la même direction, et la pression hydrostatique aurait agi aussi complètement pour l'abaisser pendant la marée descendante que pour l'élever pendant la marée montante. Il lui paraît en conséquence qu'on aurait épargné le travail d'un homme qui dans la disposition présente doit avoir soin de la roue à eau, et que tout l'appareil employé pour changer la direction du mouvement de rotation aurait pu être supprimé, ce qui aurait diminué la dépense première.

Indication de roue flottante M. Williamson.

On n'emploie pas toujours d'aussi grands moyens pour opérer l'abaissement ou l'élévation d'une roue hydraulique. Le lecteur a vu, art. 661, cette manœuvre opérée par des verrins. On a aussi proposé des roues flottantes, et le *Bulletin de la société d'encouragement*, octobre 1815, en offre une disposée d'une manière ingénieuse par M. Williamson. Mais il paraît que ces derniers procédés s'appliquent plutôt à des moulins placés sur des rivières où le niveau de l'eau n'éprouve pas de variations très-grandes ni très-fréquentes, qu'à des moulins mus par la marée.

Roue submergée proposée par Dryden.

J'indiquerai pour ces derniers une roue verticale dont l'invention est attribuée par M. Gregory (*A treatise of mechanics*, t. 2, p. 507) à M. Dryden, qui peut être adaptée aux moulins mus par la marée, dans lesquels on ferait agir le courant toujours dans un même sens, et qui n'a pas besoin d'être élevée ou abaissée lorsque la marée monte ou descend, étant disposée de manière à pouvoir tourner toujours, quoique immergée dans l'eau. « La fig. 2, pl. E, est une élévation de cette roue, dont le point le plus haut est supposé surmonter de 50 à 60 centimètres le niveau le plus élevé que la marée puisse atteindre. L'axe de la roue est fixe, et elle travaillera à la haute mer quand le niveau de l'eau supérieure sera en B et celui de l'eau inférieure en A. Elle travaillera aussi presque de la même manière quand l'eau supérieure sera au niveau C, et l'eau inférieure au niveau D du bas de la roue. Les aubes forment toutes le même angle avec le rayon, et on a laissé une ouverture de 25 millimètres au moins entre chaque aube et le bordage du tambour de la roue. Cette ouverture est destinée à empêcher l'eau inférieure de nuire au mouvement de la roue; car lorsque l'auget s'élève hors de l'eau, il ne peut s'y former aucun vide, l'air y ayant une libre entrée, en sorte que l'eau

Pl. E, Fig. 2.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

force du courant, parce que se couvrant les unes sur les autres, elles n'en sont choquées qu'imparfaitement.

---

ne suit nullement la roue et l'abandonne très-librement. C'est ce qui n'arrive point aux roues faites dans la manière ordinaire : car si ces roues sont *ouvertes*, leurs aubes sont faites de telle manière qu'elles entraînent l'eau inférieure si elles y sont immergées à quelque profondeur; ou, si elles sont *fermées*, la roue manque d'un évent qui permette à l'air de prévenir la formation d'un vide dans l'auget qui s'élève, et d'éviter ce que les meûniers appellent *sucer l'eau du bief inférieur*. En D est un radier circulaire concentrique à la roue, de manière que cette roue ferme presque entièrement le passage de l'eau. E, F, G, H, sont des vannes toutes tenues ensemble par la barre de fer I, et levées par le moyen d'une roue dentée, deux pignons et une manivelle, le premier pignon engrenant dans la crémaillère K. Ces vannes sont destinées à arrêter la roue quand il le faut, quoique une pût suffire pour lui fournir l'eau. Les jantes de cette roue peuvent être faites en fer fondu ou en bois. Les aubes peuvent être en lames de fer rivées ensemble, etc. »

Roue de côté ordinaire mue par la marée.

Pl. E, Fig. 3.

Il paraît que cette roue n'a pas encore été exécutée en grand : le succès n'en est donc pas complètement assuré. Dans les localités préparées favorablement, on peut éviter l'emploi de roues entièrement submergées, ou qui dussent être élevées ou abaissées, en adoptant la disposition indiquée art. 672. AB est le fond du réservoir supérieur, dont le niveau est supposé partager également la hauteur dont la mer s'élève; CD est le fond du réservoir inférieur, qui est au niveau de la basse mer. MM est le niveau de la haute mer, et NN celui de la basse. A l'instant où la mer est haute, l'eau est en M dans le réservoir supérieur, et en n dans le réservoir inférieur. Pendant la marée descendante, l'eau s'abaisse successivement dans le premier jusqu'en m, et elle monte d'abord dans le second au-dessus de n, puis redescend jusqu'en N. Pendant la marée montante, l'eau descend d'abord dans le réservoir supérieur au-dessous de m, puis elle s'élève au-dessus de ce niveau jusqu'en M, tandis que dans le réservoir inférieur, elle s'élève successivement jusqu'en n. L'établissement de la roue se fait d'après les règles données dans le § 3 de la note (*dm*). Il faut remarquer que la hauteur de la chûte éprouve dans le cours de la marée des variations, dont l'étendue dépend de la dépense d'eau faite pour la roue, comparée à la capacité des réservoirs. S'il fallait creuser exprès ces réservoirs, il en coûterait d'ailleurs beaucoup plus que pour construire une machine plus compliquée, et qui monterait ou descendrait avec la marée.

Avantage des roues horizontales pour les moulins mus par la marée.

Les roues hydrauliques horizontales paraissent offrir dans les cas où le niveau des eaux éprouve des variations considérables, des dispositions plus simples que les roues verticales. On peut les employer de deux manières différentes. Si, d'après les procédés indiqués art. 670 et 672, on forme un barrage pour se procurer une chute, on se servira, à l'imitation des moulins du Basacle (art. 669), des diverses roues considérées dans la note (*ea*), lesquelles tourneront, quoique noyées dans l'eau du bief inférieur. Si l'on ne veut point faire un tel établissement, on emploiera une disposition du genre de celle proposée par M. Leslie (*Annales des arts et manufactures*, t. 22; *Essai sur la composition des machines*, p. 50), c'est-à-dire une roue horizontale immergée dans un courant, et tournant toujours dans le même sens,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pl. 7, Fig. 5. Si l'on suppose la circonférence d'une roue divisée en un nombre de parties égales par autant de rayons, à chacun desquels on ait attaché une aube, comme LE et CB, la première oblique au courant, et la seconde perpendiculaire; il est certain que si la première trempe dans l'eau tandis que la seconde est encore dans la verticale, tirant du point E la perpendiculaire ED sur le rayon AB, que si la ligne HI représente la surface du courant, la partie EF couvrira l'aube CB sur toute la hauteur CD, qui ne sera point choquée, puisqu'elle ne peut l'être que sur la hauteur BD. Il est vrai que cette diminution semble être réparée par l'impulsion que recevra la partie FE, mais comme elle est oblique au courant, elle sera moindre que celle que recevrait CD, ou FG, dans la raison réciproque de FG à FE (583) ou de AD à AE, c'est-à-dire du sinus de l'angle AED, complément de l'angle EAD, au sinus total. Il faut donc, pour bien faire, que la base E de l'aube LE ne fasse que rencontrer la surface du courant HI, au moment que l'aube CB cesse d'être verticale. Alors la hauteur CB de chaque aube pourra être exprimée par le sinus verse de l'angle EAB que doivent former entre eux les rayons de la roue.

Figure 6.

Présentement il sera aisé, lorsqu'on connaîtra le rayon d'une roue et la hauteur qu'on voudra donner aux aubes, de déterminer le nombre des mêmes aubes; ou bien le nombre des aubes étant donné, avec leur lar-

---

quoique la direction du courant soit changée, Le succès de l'appareil de M. Leslie me paraît toutefois très-douteux, et il serait plus sur et beaucoup plus simple d'employer une roue horizontale analogue à celles dont on s'est servi pour les panémones (*Essai sur la composition des machines*, p. 22), en fixant sur ses rayons des corps susceptibles de présenter à l'eau différentes résistances, suivant qu'ils en sont choquées sur une face ou sur la face opposée (voyez ci-dessus la note (*da*), § 9). M. Fourrier qui s'était occupé en Égypte, où le vent est très-variable, des moyens d'établir des moulins dont le mouvement fut indépendant de sa direction, a vu en Dauphiné une roue à eau de ce genre. Elle était formée par un axe vertical, auquel étaient assemblés plusieurs rayons horizontaux plongés dans l'eau. Chacun de ces rayons portait deux palettes inclinées en sens contraire, formant un angle-plan dont l'arête était horizontale, et dirigée dans le sens du rayon. Ces angles étant disposés dans le même sens sur tous les rayons, on conçoit que le courant, quelle que fût sa direction, devait frapper d'un côté de la roue les ouvertures des angles-plans, et de l'autre leurs sommets, et par suite de la différence des efforts résultant de ces chocs, faire tourner la roue toujours dans le même sens.

Une théorie complète de ce genre de machines offre un sujet intéressant de recherches théoriques et expérimentales. Au défaut de résultats exacts, j'observerai, pour ceux qui voudraient se former à-peu-près l'idée de la puissance d'une roue de ce genre, qu'en nommant Ω l'aire transversale que l'ouverture de l'angle offre au courant, h la hauteur due à la vîtesse relative moyenne, Π le poids de l'unité de volume du fluide, l'effort exercé contre cette ouverture, moins l'effort exercé contre le sommet, peut être environ $= \Pi . 0,8\, \Omega h$.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

geur, de trouver le diamètre de la roue; ou encore le diamètre de la roue étant donné et le nombre des aubes, de trouver leur hauteur, puisque ces trois cas se réduisent à de simples calculs de trigonométrie. Cependant, pour plus de commodité, voici une petite table qu'a donnée M. Pitot, le premier, que je sache, qui ait traité ce sujet exactement.

Nombre des aubes.

4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20

Largeur des aubes.

1000. 691. 500. 377. 293. 234. 191. 159. 134. 114. 99. 86. 76. 67. 60. 54. 49.

675. Pour faire usage de cette Table, il faut être prévenu qu'elle a été calculée pour un rayon divisé en 1000 parties égales, et que les chiffres qui sont dans la seconde ligne, comprennent le nombre des parties du rayon qu'il faudra donner à la hauteur des aubes. Voulant savoir combien il en faudra employer de 2 pieds de hauteur à une roue qui aurait 10 pieds de rayon, il faut faire cette règle de proportion : Si 10 pieds, rayon de la roue proposée, donnent mille pour le rayon de la table, combien donneront 2 pieds, hauteur des aubes proposées, pour le nombre des parties des aubes de la même table? On trouvera 200 pour le terme que l'on demande; on cherchera le nombre le plus approchant dans la seconde ligne de la table, on trouvera 191, et le nombre 10 qui répond au-dessus marquera le nombre d'aubes qu'il faut donner à la roue.

Si l'on voulait résoudre la même question sans le secours de la table, considérez qu'ayant le rayon AB de la roue, et la hauteur CB des aubes, on connaîtra dans le triangle rectangle AEC les côtés AE et AC; par conséquent la valeur de l'angle EAC formé par deux rayons. Si l'on divise 360 par le nombre de degrés que comprendra cet angle, il viendra au quotient le nombre des aubes qu'il faudra donner à la roue. Les autres questions que l'on peut faire sur ce sujet sont si aisées à résoudre, que je ne crois pas devoir m'y arrêter. Pl. 7, fig. 6.

Je ne dis rien ici de la largeur qu'on peut donner aux aubes en général, parce qu'elle est arbitraire, et qu'elle dépend de la force que l'on veut emprunter du courant, puisque cette force sera toujours proportionnée à la superficie des aubes. Quant à leur hauteur, il n'en est pas de même, étant le plus souvent assujettie à la profondeur de l'eau où elles doivent tremper. Je ne dis rien non plus de la grandeur du rayon de la roue : elle dépend du bras du levier dont on a besoin, ou de la situation de la machine au-dessus du niveau de l'eau.

676. Les aubes formant à chaque instant des angles différents avec la verticale, l'impulsion qu'elles reçoivent du courant varie continuellement. Et comme la situation verticale est la plus avantageuse de toutes, il y en a aussi une autre qui est la plus désavantageuse, laquelle se rencontre Pl. 7, Fig. 5.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lorsqu'une aube est entièrement couverte par celle qui la suit immédiatement; ce qui arrive toutes les fois que l'angle BAL que forment leurs rayons est divisé en deux également par la verticale AG, parce que l'eau ne frappe que la première CB obliquement, et ne s'étend que sur la partie DB, y en ayant toujours une autre DC hors de l'eau. Ainsi on pourra comparer la plus grande impression avec la moindre, en supposant l'aube verticale FG, et en abaissant la perpendiculaire BE pour avoir le triangle rectangle BED, afin de faire le même raisonnement que dans l'article 674 (*ec*).

677. Ayant promis sur la fin du Chapitre onzième du quatrième Livre de la *Science des Ingénieurs* la description de quelques moulins à bras et à cheval, pour entretenir de farine en temps de siège la garnison d'une forteresse, voici l'occasion de satisfaire à mes engagements.

Description d'un moulin à bras. Pl. 9, Fig. 1.

La première figure représente le profil d'un moulin à bras; deux hommes le font aller avec assez d'aisance avec des espèces de béquilles attachées à la manivelle B, qui a 2 pieds de coude. Cette manivelle donne le mouvement à la lanterne C, qui a 15 pouces de diamètre et 15 fuseaux qui s'engrènent dans la roue D de 18 pouces de diamètre et de 16 dents. Cette roue fait tourner la lanterne E de 7 pouces de diamètre, composée de 6 fuseaux. Suivant la disposition de ces pièces, chaque tour de manivelle en fait faire 2 $\frac{1}{2}$ à la meule, laquelle a 3 pieds de diamètre sur 5 pouces d'épaisseur, et peut se hausser et se baisser avec le palier G. L'essieu de la lanterne est accompagné d'une volée H, composée de deux règles chacune de 6 pieds de longueur, mises en croix et chargées aux extrémités de tables de plomb, pour rendre le mouvement plus uniforme.

Autre moulin à bras. Pl. 9, Fig. 3.

678. Comme dans les machines qui concourent à la même fin on doit préférer les plus simples à celles qui le sont moins, voici un autre moulin dans le goût du précédent, dont la troisième figure représente le profil. Ce moulin, comme on le verra par la suite, peut être mis en mouvement

---

Remarques sur les règles données par l'auteur pour la disposition des roues à aubes.

(*ec*) Le contenu de ces deux articles est le résultat des recherches de Pitot (*Académie des sciences*, 1729). Elles sont fondées sur la théorie du choc des fluides, dont on a montré le vice dans les notes du livre précédent, et cette théorie n'y est pas même employée avec exactitude, comme Bossut l'a remarqué (*Hydrodynamique*, art. 389). Les recherches de Bossut sur ce même sujet offrent plus de rigueur, mais il parvient à des formules si compliquées qu'il est à-peu-près impossible d'en faire aucun usage (*Idem*, 2^e partie, chap. 14 et suiv.), circonstance qui ne peut d'ailleurs faire naître beaucoup de regrets, puisque ces formules étant toujours fondées sur la théorie ordinaire de choc des fluides, on est assuré qu'elles ne représentent point les effets naturels, et qu'elles ne peuvent même pas être considérées comme suffisamment approchées pour la pratique. Jusqu'à-présent l'expérience seule peut apprendre à disposer convenablement les aubes des roues hydrauliques, et on n'a rien à ajouter sur ce sujet aux indications données dans les notes précédentes, et particulièrement dans les notes (*dl*) et (*dn*).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

par deux hommes appliqués à une manivelle de 12 pouces de coude, laquelle répond à un rouet de 12 pouces de rayon accompagné de 12 dents. Ainsi l'on peut regarder la puissance comme si elle agissait immédiatement sur les fuseaux de la lanterne, laquelle a 6 pouces de rayon et 6 fuseaux. Par conséquent la meule fera deux tours, contre la manivelle un. Pour entretenir l'uniformité du mouvement, on a accompagné l'essieu de cette lanterne d'une volée semblable à celle du moulin précédent, et on en a aussi ajouté une autre à la manivelle.

Le diamètre de la meule est de 3 pieds 6 pouces, et son épaisseur à sa circonférence est de 6 pouces 6 lignes, et seulement de 5 pouces 9 lignes au centre, parce que son creux est de 9 lignes de profondeur. Ainsi son épaisseur réduite est de 6 pouces, et sa solidité de 8316, dont il faut retrancher le vide formé par l'œil, lequel ayant 5 pouces de diamètre, se trouve d'environ 170 pouces cubes. Par conséquent la solidité de la meule ne sera que de 8146, et on en aura le poids, en disant : Si 1728 pouces cubes donnent 110 liv. pour la pesanteur d'un pied cube de la pierre dont on fait les meules, combien donneront 8146? On trouvera 518 livres pour le poids de la meule, à quoi il faut ajouter celui de la lanterne, de son essieu et de la volée qui l'accompagnent, que j'estime ensemble de 182 livres : on aura donc 700 livres pour la charge du palier.

Calcul d'un moulin à bras, y compris celui des frottements.

679. Selon l'article 655 la résistance que le blé oppose au mouvement de la meule est la trente-cinquième partie de la charge du palier. Ainsi divisant 700 par 35, il vient 20 pour cette résistance, que je multiplie par son bras de levier, c'est-à-dire par 14 pouces, rayon moyen de la meule; et divisant le produit par 6 pouces, rayon de la lanterne, le quotient donne 46 liv. $\frac{2}{3}$ pour la puissance appliquée à la manivelle, et uniquement employée à moudre le blé.

Il reste à chercher de combien il faudra augmenter cette puissance pour la rendre capable de surmonter le frottement. Nous commencerons par celui du pivot de la lanterne, dont nous supposerons le diamètre de 4 lignes à son extrémité. Son rayon moyen, ou le bras de levier du frottement, sera d'une ligne et un tiers, qu'il faut multiplier par le tiers de la charge du palier (240), et le produit par $\frac{10}{18}$, à cause du frottement du rouet et de la lanterne (290); et divisant ce second produit par le rayon de la lanterne, il viendra 4 liv. $\frac{1}{2}$ pour la puissance appliquée à l'extrémité du même rayon.

Le poids équivalent à la résistance que le blé oppose au mouvement de la meule, étant de 20 livres, le frottement que ce poids causera à la rencontre du rouet et de la lanterne en sera la dix-huitième partie, c'est-à-dire $\frac{20}{18}$ ou $\frac{10}{9}$; qui étant multipliés par le rayon moyen de la meule, et le produit divisé par celui de la lanterne, il vient 2 liv. $\frac{4}{7}$, qui étant ajoutées à 4 liv. $\frac{1}{2}$ donnent à-peu-près 7 liv. pour la somme des deux frottements. Par conséquent la puissance appliquée à la manivelle doit être de 53 liv. $\frac{2}{3}$,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou de 54 liv., pour surmonter les trois résistances dont nous venons de faire mention.

Pour le frottement de la manivelle, il faut se rappeler qu'il doit être exprimé dans le cas où il est le plus grand, c'est-à-dire lorsque la direction de la puissance et du poids sont paralleles (248); ce qui arrive quand la manivelle se trouve dans la situation où elle est représentée dans la figure. Alors le point d'appui se rencontre à l'extrémité du diamètre horizontal de la manivelle, et se trouve pressé selon la même direction par le poids et la puissance, c'est-à-dire par 108 liv.; parce que le poids, qui se réduit à la difficulté que les dents du rouet ont à faire tourner la lanterne, a la même vîtesse que la puissance. Mais comme la pesanteur de la manivelle, celle du rouet et de la volée, que nous supposons ensemble de 200 liv., pressent les deux appuis selon une direction verticale, il résulte une pression composée des deux précédentes, qui sera par conséquent exprimée par la diagonale d'un rectangle (72), dont l'un des côtés serait de 108 parties et l'autre de 200. Cette diagonale se trouvant de 226 parties, il en faut prendre la moitié pour le frottement (250), qui sera par conséquent de 113 liv., lesquelles étant multipliées par le rayon de la manivelle (108) que je suppose de 8 lignes, et le produit divisé par la longueur de son coude, il vient 3 liv. $\frac{1}{2}$ qui étant ajoutées avec 54 livres, donneront 57 livres pour la puissance qui moud le blé et qui surmonte tous les frottements.

680. La force d'un homme ordinaire, appliquée à une manivelle, étant de 27 à 28 livres (120), on voit que deux hommes pourront faire agir ce moulin sans difficulté, et faire faire à la manivelle 30 tours par minute, qui est une vîtesse modérée, en ne les faisant travailler que pendant une heure sans interruption; ayant remarqué plusieurs fois à la construction des écluses du Canal de Picardie et ailleurs que les manœuvres qui épuisaient l'eau avec des chapelets, ne faisaient pas moins de 55 tours de manivelle par minute, encore la manivelle avait-elle 16 pouces de coude, et qu'ils agissaient chacun avec une force de 35 liv. $\frac{1}{2}$, selon le calcul que j'en ai fait. Il est vrai que ce travail est un peu forcé, aussi n'ai-je pas voulu me régler là-dessus, pour ne compter que sur ce qui se pratique communément. Je ne détermine point le temps qu'on donnera pour le repos de ceux qu'on relevera du travail, ce qui dépend du monde dont on peut disposer : au reste, quand il s'agit de la subsistance d'une garnison assiégée, les hommes ne manquent pas pour une semblable besogne.

681. Pour savoir la quantité de farine que ce moulin pourra moudre en 24 heures, il faut se rappeler que les produits de deux meules différentes sont dans la raison composée de leur pesanteur absolue et de leur vîtesse par minute (638), et que chacune de ces vîtesses doit être exprimée par le produit du rayon moyen, multiplié par le nombre de tours

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que chaque meule fait dans le même temps. Sur quoi nous savons qu'une meule du poids de 4348 livres, dont le rayon moyen est de 24 pouces, et qui fait environ 53 tours par minute, moud 120 setiers de blé en 24 heures (656). On pourra donc faire cette proportion 4348 liv. × 24 pouces × 53 tours : 120 setiers :: 700 liv. × 14 pouces × 60 tours : un quatrième terme, qu'on trouvera de 12 setiers et environ $\frac{2}{3}$ pour la quantité de farine que le moulin pourra moudre en 24 heures; ce qui revient à une demi-setier de blé par heure, le setier dont je parle pesant 75 liv. comme j'ai dit ailleurs.

C'est ainsi que dans les machines de même espèce, lorsqu'on est parvenu à en bien développer une, on en tire de justes conséquences pour les autres; et ce qui me satisfait le plus est de voir que toute la théorie sur laquelle j'ai fondé les calculs précédents, se trouve conforme à l'expérience (*ed*).

(*ed*) Le calcul de ce moulin se trouvant affecté des inexactitudes des principes adoptés par l'auteur, lesquelles ont été rectifiées dans les notes du chapitre 3 du livre précédent, je vais le refaire en employant les données plus exactes contenues dans ces notes, et dans celles du présent chapitre. Calcul du moulin à bras décrit art. 678 et suiv.

Le diamètre de la meule étant supposé de $3^{pi}\,6^{po} = 1^m,14$, son poids joint à celui de l'équipage devra, d'après la table de la note (*di*), être d'environ 870^k. D'après cette même note la résistance du blé sera $\frac{1}{22}.870^k$, et son bras de levier $\frac{1}{3}.1^m,14$. En supposant comme l'auteur le diamètre de l'extrémité du pivot de $4^{li} = 0^m,009$, et adoptant 0,2 pour le rapport du frottement à la pression, le frottement provenant de la charge supportée verticalement par ce pivot sera $0,2 \times 870^k$, et son bras de levier $\frac{1}{3}.0^m,009$. Enfin nommant q l'effort qui s'exerce perpendiculairement à l'axe sur les fuseaux de la lanterne, cet effort produira un frottement latéral dont la considération a été omise par l'auteur, exprimé par $0,2q$, et dont le bras de levier peut être supposé de $0^m,03$. L'équilibre autour de l'axe de la meule, en observant que le rayon de la lanterne est $6^{po} = 0^m,16$, devra donc s'exprimer par l'équation $q.0^m,16 = \frac{1}{22}.870^k \times \frac{1}{3}.1^m,14 + 0,2 \times 870^k \times \frac{1}{3}.0^m,009 + 0,2q \times 0^m,03$, d'où l'on déduit $q = 99^k$.

Avant de calculer l'équilibre autour de l'axe de la manivelle, il faut remarquer que le nombre de tours que la meule devra faire dans une seconde en raison de son diamètre, est, d'après la table de la note (*di*), 1,77. En admettant comme l'auteur que la manivelle fera 30 tours par minute, ou 0,5 tour par seconde, on aura $\frac{1,77}{0,5}$ pour le rapport des rayons de la roue et de la lanterne. Le rayon de la roue devra donc être $0^m,16 \times \frac{1,77}{0,5} = 0^m,57$. L'auteur l'a supposé de $12^{po} = 0^m,32$, mais il en résulterait que la meule n'aurait pas toute la vîtesse qui convient pour qu'elle travaille le plus avantageusement possible. J'observerai maintenant que, dans une machine où le mouvement est régularisé par des volants, la manivelle doit être considérée, non pas dans la situation la plus désavantageuse, mais dans la situation où l'effort sup-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pl. 10, Fig. 1.

682. La première figure de la planche dixième exprime une autre manière de faire agir une petite meule, en donnant le mouvement aux manivelles G d'une façon fort commode. Ce mouvement est entretenu par trois volées D, E, F, dont chacune est croisée par une seconde volée, qu'on

---

porté par l'axe a sa valeur moyenne, c'est-à-dire ici lorsque la force agissant sur la manivelle, que je représenterai par P, est dirigée verticalement. Ainsi, puisque le poids dont l'axe est chargé est de $200^{liv} = 98^k$, il faut considérer cet axe comme soumis à l'action d'une force horizontale q, et d'une force verticale $P + 98^k$, dont la résultante est $\sqrt{q^2 + (P+98)^2}$. Le frottement qui en résultera est $0{,}2\sqrt{q^2+(P+98)^2}$, agissant avec un bras de levier de $8^{li} = 0^m{,}018$. Les bras de levier des efforts q et P sont d'ailleurs respectivement $0^m{,}57$ et $0^m{,}32$. Ainsi l'équilibre autour de l'axe de la manivelle s'exprime par l'équation $P.0^m{,}32 = q.0^m{,}57 + 0{,}2\sqrt{q^2+(P+98)^2}.0^m{,}018$. Au lieu de la résoudre rigoureusement, on cherchera une première valeur de P en supposant cette quantité nulle dans le second membre, laquelle sera $P = 178^k$. Mettant ensuite ce nombre à la place de P sous le radical, on trouvera pour seconde valeur suffisamment approchée $P = 184^k$.

La manivelle faisant $\frac{1}{2}$ tour par seconde, et son rayon étant $0^m{,}32$, la vîtesse du point d'application de la force P est $0^m{,}32\,\pi$. La quantité d'action qui se consomme pour faire tourner la manivelle est donc pour une seconde $= 0^m{,}32\,\pi . P = 185^{k\times m}$. D'après la table de la note (*di*) la quantité d'action nécessaire pour faire marcher une meule de $1^m{,}14$ de diamètre est pour une seconde $158^{k\times m}$. Il y a donc ici $27^{k\times m}$, ou environ $\frac{1}{7}$ de la quantité d'action fournie par le moteur, consommée inutilement par les frottements.

Le résultat auquel on vient de parvenir pour l'évaluation de l'effort P à exercer sur la manivelle est bien différent de celui du texte, où cet effort n'est évalué qu'à $57^{liv} = 28^k$. Cette différence tient à ce que l'auteur évalue la résistance du blé sous la meule au-dessous de sa véritable valeur, et sur-tout à ce que la machine, telle qu'il l'établit, ne procure point à la meule la masse et la vîtesse qui lui conviennent pour travailler le plus avantageusement possible. Si en admettant un travail forcé, comme le fait Bélidor, on suppose l'effort de chaque homme sur la manivelle de 13 à 14^k, il faudra véritablement employer au moins quatorze hommes au lieu de deux. Mais le produit du moulin sera aussi beaucoup plus considérable, car d'après la table de la note (*di*) la meule de $1^m{,}14$ de diamètre, avec la masse et la vîtesse admises ci-dessus, moudra $0^k{,}02845$ de blé par seconde, ou 2458^k par jour, au lieu des $12\frac{2}{3} \times 75^{liv} = 465^k$ trouvés par l'auteur. L'augmentation du produit n'est cependant pas tout-à-fait en raison de l'augmentation de la force, et on peut assurer que le moulin, tel qu'il est calculé dans le texte, n'aurait point tenu dans l'exécution les promesses de l'auteur. Il faut remarquer d'ailleurs qu'en disant art. 681 que le moulin mu par deux hommes moudrait $12\frac{2}{3}$ setiers en 24 heures, l'auteur sous-entend nécessairement que les hommes seraient relayés, de manière à entretenir continuellement le travail.

Remarque sur l'art. 681.

On voit au surplus que la même machine peut fournir des produits, et consommer des quantités d'action très-différentes, suivant qu'on donnera à la meule plus ou moins de masse ou de vîtesse. Mais il paraît certain qu'il n'y aura jamais qu'à perdre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ne peut voir dans le dessin, lequel est assez intelligible, sans qu'il soit besoin que je m'y arrête davantage (*ee*).

Description d'un moulin à bras plus simple encore que le précédent. PLANCHE 7. FIGURES 3 et 4.

683. La troisième et la quatrième figure de la planche septième représentent le plan et le profil d'un autre moulin à bras, qui est de la dernière simplicité, n'ayant d'autre frottement que celui de deux pivots. Il est composé de deux roues AB et CD, posées horizontalement, ayant chacune un canal à leur circonférence comme aux poulies. La première est de 4 pieds de diamètre, et l'autre de deux. Ces roues sont embrassées par une corde sans fin; ainsi la première ne peut tourner sans que la seconde ne tourne aussi.

L'essieu F de la roue CD est commun à une autre roue GH de 3 pieds $\frac{1}{2}$ de diamètre, et de 5 à 6 pouces d'épaisseur, laquelle sert de volée pour rendre uniforme le mouvement de la meule. Quant à l'essieu de la roue AB, on voit qu'il est coudé à la hauteur de 4 pieds pour former une manivelle K, et qu'il est aussi accompagné d'une double volée E, E. Deux hommes font tourner la manivelle en se servant de béquilles, comme je l'ai dit dans l'article 677, ou de deux potences tournantes LM, dont il est aisé d'imaginer l'effet.

Comme la meule fera deux tours contre la manivelle un, si l'on suppose à cette meule les mêmes dimensions qu'au moulin précédent, elle pourra moudre comme l'autre un demi-setier de blé par heure, avec une puissance de 50 liv. tout au plus (*ef*).

---

tant sur le produit comparé à la quantité d'action dépensée, que sur la qualité de la farine, à ne pas donner à cette meule toute la masse et toute la vîtesse que supposent les résultats établis dans la note (*di*).

Observation sur la manière de faire agir les hommes sur les moulins à bras.

(*ee*) Il est utile de faire remarquer ici qu'en faisant agir les hommes d'après la disposition de ce moulin, on en obtient une quantité d'action beaucoup moins grande que quand ils font mouvoir une manivelle, et sur-tout quand ils agissent sur cette manivelle avec des crosses ou béquilles, comme cela est indiqué art. 677. Voyez le tableau de la page 396.

Indication de divers moulins à bras simplifiés.

(*ef*) On peut se proposer deux objets dans la construction des moulins à bras. S'il s'agit de machines permanentes, au moyen desquelles on desire obtenir un produit considérable et de bonne farine, il faut adopter des dispositions semblables à celles qui viennent d'être indiquées, en employant de fortes meules et leur imprimant une grande vîtesse; car il y aura toujours plus d'avantage à mettre beaucoup d'hommes à-la-fois sur une machine puissante, qu'à les disperser sur plusieurs machines plus faibles. Mais s'il s'agit seulement d'avoir des appareils simples, peu coûteux, et faciles à transporter, pour changer du grain en farine, il faut recourir à d'autres moyens. On peut distinguer à cet effet, l'appareil proposé par M. T. Rustall, sous le nom de *Family mill and bolter* (*Transactions of the society for the encouragement of arts*, t. 17). Il est décrit t. 2 du *Traité de mécanique* de M. Gregory: le blé est écrasé entre deux petites meules verticales, dont l'une reçoit immédiate-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Manière de déterminer les dimensions d'un moulin mis en mouvement par un cheval.

Pl. 10, Fig. 2.

684. La seconde figure de la planche 10 comprend le dessin d'un moulin à cheval composé d'un grand rouet A, que l'on suppose accompagné de 100 dents, qui s'engrènent avec la lanterne B de 20 fuseaux, dont l'essieu répond à un autre rouet C de 48 dents, qui s'engrène avec la lanterne D qui a 6 fuseaux. Selon cette disposition, le cheval attelé au palonnier H faisant un tour, La meule en fera 40. Cependant, pour éviter les engrenages inutiles, voici un autre moulin représenté par la figure 6 de la planche 9, lequel est beaucoup plus simple, et par conséquent préférable à celui de la planche 10.

Pl. 9, Fig. 6.

685. Pour montrer de quelle manière on doit s'y prendre lorsqu'on veut faire le projet d'une machine, nous allons déterminer les parties du moulin dont il est question, en nous servant des règles tirées de l'expérience et du raisonnement, ce qui pourra servir d'exemple pour se conduire dans tout autre cas que celui-ci.

Mon premier objet est de faire en sorte que la machine soit le plus simple qu'il est possible; cependant je ne puis me dispenser d'employer un rouet et une lanterne pour donner à la meule une vîtesse qui lui fasse faire au moins 40 tours par minute. Ensuite je vois qu'il faut proportionner la résistance qu'on aura à surmonter à la force moyenne d'un cheval, estimée de 180 liv. (123) lorsqu'il agit selon une direction horizontale, et qu'il fait une petite lieue par heure, ou deux mille toises (124).

Je donne 8 pieds au rayon du rouet, et j'accompagne sa circonférence de 112 dents, lesquelles s'engrenant avec une lanterne de 7 fuseaux, la meule fera 16 tours contre un que fera le rouet. Et comme il doit y avoir même raison du nombre des dents à celui des fuseaux, que du rayon du rouet à celui de la lanterne, le rayon de la lanterne doit être de 6 pouces.

Quant au bras de levier à l'extrémité duquel doit être attelé le cheval, je considère que si je le fais trop long, l'animal ayant une grande circonférence à décrire, ne fera qu'un petit nombre de tours par minute, et qu'il faudra un bâtiment d'une largeur considérable pour loger le moulin. Ainsi, sans avoir égard à l'avantage que la puissance peut tirer d'un plus grand bras de levier, je le détermine de 12 pieds, ne pouvant guère lui donner moins, autrement le cheval ne tournerait pas commodément.

---

ment d'une manivelle à axe horizontal son mouvement de rotation. Mais quoique cette machine soit réduite à un grand degré de simplicité, elle pourrait encore, dans certaines circonstances, et particulièrement dans le service des armées en campagne, laisser à desirer sous ce rapport. Il paraît que les derniers degrés de perfectionnement ont été atteints à cet égard dans les moulins construits en 1812 par M. Ch. Albert, et sur-tout dans ceux de M. Regnier. Ils sont décrits dans le *Bulletin de la société d'encouragement*, juillet et décembre 1813.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il décrira donc à chaque tour une circonférence de 12 toises $\frac{4}{7}$, et comme il en peut parcourir 2000 par heure, il fera 160 tours dans le même temps; lesquels étant multipliés par 16, on a 2560 pour le nombre de tours que fera la meule en une heure, ce qui revient à 42 par minute.

Il s'agit présentement de connaître les dimensions de la meule, et comme on a la liberté de lui donner tel diamètre qu'on veut, nous le déterminerons de 5 pieds, afin d'avoir le rayon moyen, ou le bras de levier qui doit répondre à la puissance résistante. Il ne reste donc plus qu'à trouver son épaisseur, qui n'est point arbitraire, dépendant de la puissance motrice.

La meule devant tourner sur un pivot, on sait que ce n'est pas son poids que la puissance motrice doit surmonter, mais seulement la trente-cinquième partie, qui est égale à la résistance que le blé oppose à son mouvement (655). Ainsi nommant x la pesanteur de la meule jointe à celle des autres parties qui reposent sur le palier, on aura $\frac{x}{35}$, qu'on ne peut connaître que par l'analyse : c'est pourquoi voici le nom et la valeur des grandeurs qui doivent entrer dans le calcul.

$a =$ 12 pieds, bras de levier du moteur.
$b =$ 8 pieds, rayon du rouet.
$c =$ 6 pouces, rayon de la lanterne.
$d =$ 20 pouces, rayon moyen de la meule.
$f =$ 9 lignes, rayon du pivot du rouet.
$g =$ 2 lignes, rayon moyen du pivot de la lanterne.
$p =$ 180 livres, force de la puissance motrice.
$q =$ 1500 livres, poids du rouet et de son arbre.
$x =$ le poids de la meule et de la lanterne ensemble.
$\frac{x}{h} = \frac{x}{35} =$ la résistance que le blé oppose au mouvement de la meule.
$\frac{m}{n} = \frac{19}{18} =$ le frottement du rouet et de la lanterne.

686. Voulant comprendre, dans le calcul que nous allons faire, le déchet causé par les frottements, nous commencerons par celui du pivot de la lanterne, qui sera sur la crapaudine $\frac{1}{3}x$, qu'il faut multiplier par g son rayon moyen, et le produit par $\frac{m}{n}$ à cause qu'il y a ici un engrenement (290) : on aura $\frac{mgx}{3n}$. Il faut de même multiplier la résistance du blé, j'entends $\frac{x}{h}$, par d rayon moyen de la meule, et le produit par $\frac{m}{n}$: on aura $\frac{mdx}{nh}$ qu'il faut ajouter avec $\frac{mgx}{3n}$, et diviser ces deux termes par c rayon de la lanterne. Il viendra $\frac{mgx}{3nc} + \frac{mdx}{nhc}$ pour la résistance qui répond aux dents du rouet.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour avoir aussi égard au frottement de la surface du pivot de l'arbre du rouet, il faut ajouter la puissance P aux deux termes précédents, prendre la moitié de la somme (243), multiplier le tout par f, rayon du pivot. On aura $\frac{mfgx}{6nc}+\frac{mdx}{2nch}+\frac{1}{2}fp$, à quoi il faut ajouter le tiers du poids q (240) multiplié par $\frac{2}{3}f$, c'est-à-dire $\frac{2}{9}fq$. Il vient $\frac{mfgx}{6nc}+\frac{mfdx}{2nch}+\frac{1}{2}fp+\frac{2}{9}fq$ pour le frottement horizontal et vertical du pivot, dans le cas le plus désavantageux où se trouverait la puissance (69). Ensuite multiplier $\frac{mgx}{3nc}+\frac{mdx}{nhc}$ par b rayon du rouet, et ajouter le produit aux termes précédents. On aura une quantité égale au produit de la puissance par son bras de levier, c'est-à-dire l'équation suivante $\frac{mbgx}{3nc}+\frac{mbdx}{nhc}+\frac{mfgx}{6nc}+\frac{mfdx}{2nhc}+\frac{1}{2}fp+\frac{2}{9}fq=ap$; ou $\frac{m}{n}\left(\frac{bgx}{3c}+\frac{bdx}{hc}+\frac{fgx}{6c}+\frac{fdx}{2hc}\right)=ap-\frac{1}{2}fp-\frac{2}{9}fq$; d'où dégageant l'inconnue, il vient enfin $x=\frac{ap-\frac{1}{2}fp-\frac{2}{9}fq}{\frac{m}{n}\left(\frac{1}{30}bg+\frac{bd}{ch}+\frac{fg}{6c}+\frac{fd}{2ch}\right)}=\frac{25602^{\text{liv.}}}{10\frac{2}{3}}$. Or, si l'on divise 25602 liv. par $10\frac{2}{3}$, le quotient donnera 2400 liv. pour la valeur de x, c'est-à-dire pour le poids dont la crapaudine de la meule sera chargée : d'où retranchant celui de la lanterne et de son essieu, que je suppose de 200 livres, il restera 2200 livres pour le poids de la meule.

A l'égard de l'épaisseur de cette meule, il faut chercher combien elle contiendra de pouces cubes, en disant : Si 110 livres (651) donnent 1728, combien 2200? Il vient 34560, qu'il faut diviser par la superficie d'un cercle de 5 pieds de diamètre, qui est de 2828 pouces quarrés. Le quotient donnera 12 pouces 3 lignes pour l'épaisseur que l'on cherche; et comme le creux de la meule doit être d'environ 10 lignes, il faudra ajouter le tiers de cette profondeur à ce que l'on vient de trouver. On aura 12 pouces 6 lignes pour l'épaisseur réduite.

Manière de calculer le produit du même moulin.

687. Pour connaître le produit de ce moulin, il faut faire la même proportion que dans l'art. 681, c'est-à-dire : comme 4348 liv. × 24 pouc. × 53 tours est à 120 setiers, ainsi 2400 liv. × 20 pouc. × 42 tours est à un quatrième terme, qu'on trouvera d'environ 44 setiers, qui est la quantité que ce moulin pourra moudre en 24 heures.

Si l'on divise 2400 livres par 35, on trouvera 68 liv. $\frac{4}{7}$ pour la résistance que le blé oppose au mouvement de la meule (655). Ainsi voulant savoir quelle partie de la puissance motrice est employée à moudre le blé, considérez que le rapport du rayon moyen de la meule au rayon de la lanterne est $\frac{10}{3}$, et que celui du rayon du rouet au bras de levier de la puissance est $\frac{2}{3}$; multipliant ces deux rapports l'un par l'autre, et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le produit $\frac{20}{9}$ par $68\frac{4}{7}$, on aura $152\frac{2}{3}$ pour ce que l'on cherche, qui étant retranché de 180 livres, il en restera $27\frac{1}{3}$ pour la partie de la puissance qui doit surmonter le frottement.

Pour faire agir un moulin comme celui-ci, rondement et sans interruption, j'estime qu'il faut trois chevaux, dont chacun travaillera trois heures de suite alternativement.

On compte ordinairement qu'un cheval attelé à une machine tient lieu de sept hommes (123), lesquels font ensemble à-peu-près le même effet. Or si l'on se rappelle que dans l'art. 681 nous avons trouvé que deux hommes pouvaient moudre 12 setiers $\frac{2}{3}$ en 24 heures, cherchant par proportion ce que pourraient faire sept hommes, on trouvera qu'ils pourront moudre 44 setiers, c'est-à-dire à-peu-près autant que le cheval qui ferait agir le moulin que nous venons de détailler; car la pesanteur des meules de part et d'autre étant proportionnée à la force des moteurs, il y aura aussi, à-peu-près, la même force dans les frottements (*eg*).

Pour estimer le nombre des moulins à bras et à cheval qu'il faudra dans une forteresse, eu égard à la garnison qu'on jugera devoir y être enfermée en temps de siége, il est bon de savoir que les entrepreneurs des vivres ont pour règle qu'un sac de farine pesant 200 liv. suffit pour la subsistance d'un soldat pendant six mois, en lui donnant la ration simple.

688. Après avoir parlé de plusieurs sortes de moulins, il ne sera pas

Description des greniers à poire,

(*eg*) Les notes précédentes me paraissant offrir un nombre suffisant d'exemples de calculs de moulins à blé, je me dispenserai de refaire encore celui-ci. Je remarquerai seulement que, d'après le tableau de la page 396, la quantité d'action fournie par un cheval marchant au trot, n'est, pendant la durée d'une seconde, que de $30^{k} \times 2^{m},2 = 66^{k \times m}$. En comparant ce résultat avec la quantité d'action nécessaire pour faire marcher les meules, telle qu'elle est indiquée dans la note (*di*), on voit qu'un seul cheval ne pourrait faire mouvoir qu'une très-petite meule, en lui imprimant la vîtesse convenable; et que pour faire marcher convenablement une meule de 1^{m} de diamètre, il faudrait employer au moins deux chevaux, puisque le mouvement de cette meule consomme $121^{k \times m}$ de quantité d'action dans une seconde. L'observation faite dans la note (*ed*) sur l'art. 681, doit d'ailleurs s'appliquer ici. Quand l'auteur annonce qu'un cheval moudrait 44 setiers en 24 heures, il entend nécessairement que ce cheval serait relayé, de manière que le mouvement fût entretenu pendant les 24 heures entières.

Remarques sur le calcul du moulin à cheval commençant art. 685.

J'observerai aussi que quand l'auteur, art. 685, se donne le diamètre de la meule, puis fait dépendre son épaisseur, et par conséquent son poids, de la puissance motrice, il suit une marche vicieuse. Car, comme on l'a vu dans la note (*di*), le poids d'une meule doit être réglé d'après son diamètre, de manière à soumettre toujours le blé à une pression déterminée. Ainsi quand on s'est donné le diamètre d'une meule, son poids et la puissance motrice en sont une conséquence nécessaire.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pour conserver le blé, à l'imitation de ceux d'Ardres.

hors de propos de rapporter une excellente manière de conserver long-temps le blé. Il y a sous le terre-plein d'un bastion de la ville d'Ardres, petite place forte proche Calais, neuf magasins construits dans un grand souterrain, destinés à renfermer le grain de la garnison, en cas de siége, appelés communément *les Poires d'Ardres*; c'est sur leur modèle que j'ai fait le plan et les profils que l'on voit sur la planche 10.

PLANCHE 10. FIG. 3, 4 et 5.

On peut construire plus ou moins de ces poires, suivant le besoin et la capacité du terrein, et les faire plus grandes ou plus petites que celles-ci. Je me contente d'en rapporter six seulement, ce qui suffira pour en faire connaître la disposition. Il faut creuser en terre, à la profondeur de 30 pieds, et établir une première voûte pour avoir le souterrain GG, représenté dans la quatrième figure, et en même temps élever les poires, ou cylindres de maçonnerie FF, dont le sommet, terminé en demi-sphère, ira aboutir à une seconde voûte, répondant à un rez-de-chaussée, prenant garde que chaque poire soit isolée, afin que l'air circulant autour, puisse tenir le blé plus sec. On pourrait bien aussi les construire ailleurs que dans des caves, et les placer entre deux planchers; mais il serait plus difficile de les garantir de la bombe.

On fait à chaque poire deux ouvertures E et G, l'une en-haut pour l'entrée du blé, et l'autre en-bas pour sa sortie; la première, qui se ferme par une trappe, doit avoir 18 pouces en quarré; la seconde, terminée en forme de tuyau, se ferme avec un clapet à charnière et un cadenas.

Tous ceux qui connaissent ces poires conviennent qu'on n'a jamais rien imaginé de mieux. Je crois qu'on pourrait s'en servir avec autant d'avantage pour conserver la poudre à canon; on y en mettrait une bien plus grande quantité dans un même espace qu'aux magasins ordinaires, où il ne peut y avoir, tout au plus, que quatre barils en gerbe, et elle se maintiendrait sèche et en bon état fort long-temps. Dans les lieux éminents, comme sont ordinairement les forts et les citadelles, on serait sûr, en prenant les précautions ordinaires, de mettre ces magasins à l'épreuve de la bombe, et de n'avoir rien à craindre da ce côté-là.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ADDITION.

ART. 1^er^. *Sur divers appareils susceptibles d'être introduits dans les moulins à blé, et propres à diminuer la main-d'œuvre que leur service exige.*

L'OBJET du chapitre précédent, et des notes qui y ont été ajoutées, est de faire connaître les principaux procédés au moyen desquels on fait produire à un courant d'eau un mouvement de rotation, de faire l'application de ces procédés à la construction des moulins à blé, et de montrer comment on peut les soumettre au calcul. Les détails sur l'aménagement intérieur des moulins, et les diverses manutentions qu'on fait subir au blé et à la farine, ont été supprimés comme objets étrangers à la nature de cet ouvrage, et sur lesquels on doit consulter les traités spéciaux, tels que ceux cités au commencement de la note (*di*). Néanmoins je crois devoir indiquer ici sommairement divers appareils, qui sont encore peu employés en France, et qu'il serait cependant utile d'introduire dans toutes les grandes usines.

Indication de divers moyens pour opérer les transports du blé et de la farine dans l'intérieur des moulins.

Ces appareils ont pour objet principal d'opérer dans l'intérieur du moulin les transports du blé et de la farine, lesquels sont nécessaires pour la suite des opérations auxquelles ces matières sont soumises, par le moyen du même moteur qui fait agir les meules, en épargnant les ouvriers qui effectuent ordinairement ces transports. On trouve dans le t. 4 du *Repertory of arts and manufactures*, et dans le t. 9 de *Annales des arts et manufactures*, un dessin et une description d'un moulin construit en Amérique par M. Ellicot, qui me dispensent d'entrer ici dans de grands détails. J'observerai seulement que le blé versé de la voiture ou du navire qui l'amène dans des entonnoirs placés à l'extérieur du moulin, est transporté d'abord dans une direction horizontale par des vis d'Archimède qui servent aussi de cribles. Il est ensuite élevé verticalement par une espèce de noria formée de seaux fixés sur une bande de cuir qui tourne sur deux roues placées verticalement l'une au-dessus de l'autre. D'autres vis d'Archimède horizontales le conduisent ensuite à l'aplomb des trémies placées sur les meules. La farine, après sa formation, est transportée par des mécanismes analogues, disposés de manière à en accélérer le refroidissement; en sorte que personne ne touche au blé, depuis l'instant où il entre dans le moulin, jusqu'à celui où la farine est reçue dans des sacs et pesée.

Des dispositions de ce genre sont employées dans les beaux moulins de Gray sur la Saône (*Bulletin de la société d'encouragement*, février 1818). Il paraît qu'elles ne sont encore que peu ou point usitées en Angleterre, à en juger par la manière dont M. Gregory en recommande l'emploi (*A treatise of mechanics*, t. 2, p. 505).

Observations sur l'emploi des bandes sans fin.

Ayant parlé de bandes de cuir passant sur deux roues, et communiquant le mouvement de l'une à l'autre, je crois devoir mentionner une propriété de ce genre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pour transmettre les mouvements de rotation.

d'appareil qu'il est essentiel de connaître. Elle consiste en ce qu'une bande ou ceinturon, tendue sur deux roues en mouvement, s'approche continuellement, par l'effet de la force centrifuge, de l'endroit où le diamètre est le plus grand. Il ne faut donc point, quand on emploie ces bandes, que le fond de la gorge des roues soit concave, comme on le fait ordinairement pour les cordes, mais qu'il soit un peu convexe et renflé dans le milieu, comme l'indique la fig. 4. Avant que l'expérience eût fait découvrir cette curieuse propriété, on avait beaucoup de peine à empêcher les bandes de s'échapper de la circonférence des roues. Les bandes s'emploient maintenant dans un grand nombre de machines, où on les substitue avantageusement aux engrenages pour la communication des mouvements de rotation. Elles ont en effet sur eux l'avantage de transmettre ces mouvements à de grandes distances, et de céder lorsque quelque partie de la machine rencontre un obstacle qui la briserait sans cela. On peut aussi par leur moyen arrêter ou mettre en mouvement une partie du mécanisme avec facilité et sans secousses. Il ne faut point oublier d'ailleurs qu'elles ne transmettent pas la vîtesse toute entière d'une roue à l'autre, et qu'il s'en perd toujours une partie par l'effet de l'élasticité de la bande.

Pl. E, Fig. 4.

Art. 2. *Sur les moyens de maintenir l'uniformité du mouvement dans les moulins à blé, et en général dans les usines mues par une chute d'eau.*

L'établissement d'un moulin à blé requiert rarement l'emploi des volants, parce que les meules tournantes en sont elles-mêmes d'assez puissants. Mais, comme on l'a remarqué dans le § 5 de l'addition au premier livre, les volants, propres à remédier aux intermittences qui ont lieu dans les actions de la force motrice ou de la résistance, ne peuvent prévenir une accélération progressive de la vîtesse qui proviendrait d'une augmentation continue dans l'action du moteur, ou d'une diminution dans celle de la résistance. Il faut recourir pour cela aux régulateurs, tels que ceux formés au moyen du pendule conique décrit dans l'endroit cité.

Pendule conique employé pour régulariser le mouvement des meules.

Une première application du pendule conique à la construction des moulins à blé, est l'appareil employé en Angleterre, et connu sous le nom de lève-crochet (*lift tenter*). Ce pendule est monté sur l'axe même de la meule tournante, et quand le mouvement devient trop rapide, l'écartement des poids fait soulever une des extrémités d'un levier, lequel est assemblé à la tige qui soutient le bout du palier: cela opère l'abaissement de cette meule, et une augmentation de frottement au moyen de laquelle la vîtesse est modérée. On trouve la description et le dessin de cet appareil dans l'*Essai sur la composition des machines*, p. 49. J'indiquerai seulement une disposition plus simple que celle qui y est rapportée. Elle consiste dans un seul pendule suspendu sous une roue fixée sur l'axe de la meule tournante, et au-dessus de cette meule. L'écartement ou le rapprochement de ce pendule abaisse ou élève l'extrémité du levier, qui embrasse l'axe par un enfourchement.

Pl. E, Fig. 5.

Pendule conique employé à régler l'écoulement de l'eau.

Une seconde application du même pendule est celle connue sous le nom de gouverneur des roues à eau (*water-wheel governor*). Elle a pour objet d'opérer l'abaissement ou l'élévation de la vanne par laquelle l'eau est fournie à la roue, lorsque la vîtesse de la machine devient trop grande ou trop petite. M. Robertson Buchanan (*Practical essays on mill-work*, ess. 5) a décrit diverses dispositions employées pour

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ce genre de gouverneur, et je vais rapporter ici l'une des plus simples. Le pendule conique ALM reçoit de la roue à eau un mouvement de rotation continu au moyen des roues dentées M, N. B est une griffe qui peut glisser le long de l'axe, mais qui est forcée de tourner avec lui. K est une boîte qui jouit de la même propriété, et qui est suspendue aux verges des poids L, L, en sorte qu'elle s'élève quand ces poids s'écartent, et s'abaisse quand ils se rapprochent. Les deux roues A, A peuvent tourner autour de l'axe du pendule à frottement doux, en sorte qu'il ne leur communique son mouvement de rotation qu'autant que la griffe B est engagée dans l'une ou dans l'autre de ces roues. La roue verticale E engrène dans les deux roues horizontales A, A, et son axe, au moyen de la vis sans fin F et de la roue G, communique le mouvement à un autre axe horizontal portant une nouvelle vis sans fin H, laquelle engrène dans le quart de cercle denté I, et fait hausser ou baisser le clapet qui livre passage à l'eau. La boîte K et la griffe B sont assujetties l'une à l'autre au moyen de la double équerre CC, dont les extrémités portent des enfourchements qui s'engagent dans des gorges ou rainures pratiquées dans la boîte et la griffe; en sorte que ces dernières tournent avec l'axe sans cesser d'être embrassées par la double équerre, quoiqu'elle soit tenue fixement dans sa position par la pièce D, qui lui permet seulement de monter et descendre verticalement. Cela posé, on voit facilement que quand le moulin tourne avec une vîtesse convenable, la hauteur à laquelle la boîte K se trouve soutenue est telle, que la griffe B n'est engagée dans aucune des roues A, et par conséquent qu'aucun mouvement n'est transmis au clapet. Mais si le moulin vient à marcher trop vîte ou trop lentement, la boîte K est soulevée ou abaissée, ce qui fait engager la griffe dans la roue supérieure ou dans la roue inférieure, et communique dans un sens ou dans l'autre aux axes horizontaux un mouvement de rotation qui fait baisser ou hausser le clapet. Il n'est pas besoin de dire que les diamètres des roues dentées doivent être déterminés comme il convient, pour que le mouvement du moulin n'éprouve jamais de secousses par des variations trop brusques dans la grandeur de l'orifice qui livre passage à l'eau; l'axe de rotation du clapet doit être placé au tiers de sa hauteur, afin que les actions de l'eau sur ses deux parties se fassent équilibre, et que son mouvement n'exige aucun effort (voyez ci-dessus, art. 413).

PLANCHE E. FIG. 6a, 6b et 6c.

Les gouverneurs des roues à eau sont particulièrement utiles dans les moulins qui font marcher des filatures, où les variations de la vîtesse ont de grands inconvéniens.

ART. 3. *Sur la forme et les dimensions des axes, et de leurs tourillons.*

Aux détails précédents, extraits des *Essays* de M. Robertson Buchanan, je vais en ajouter plusieurs autres dont il m'a paru utile de répandre la connaissance.

§ 1. Les axes des grandes roues sont faits en bois ou en fer. Quand on les fait en bois, on préfère le chêne, et à son défaut on emploie le sapin. L'objet important est de fixer solidement aux axes les tourillons par lesquels ils sont supportés. La meilleure disposition adoptée jusqu'à ces derniers temps consistait dans le tourillon indiqué fig. 7a et 7b. On est obligé, pour le faire entrer dans le bois, d'enlever la portion ADE, qu'on remplace par un morceau rapporté. L'extrémité de l'axe est ensuite frettée, et on y enfonce des coins, pour que le tourillon soit parfaitement serré.

Des axes, et de la manière de leur assujettir les tourillons.

PLANCHE E. FIG. 7a et 7b.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

PLANCHE E. FIG. 8 *a* et 8 *b*. On substitue avec avantage à ce genre de tourillons d'autres qui s'exécutent en fer fondu. La partie qui entre dans le bois a la forme d'une croix. Ils laissent le bois plus entier, en même temps qu'ils y sont mieux arrêtés. La fig. 8 *c* indique un tourillon de ce genre, mais portant une frette qui remplace celle en fer forgé dont il faut que l'extrémité de l'axe soit garnie.

FIGURE 8 *c*.

PLANCHE E. FIG. 9 *a* et 9 *b*. Les fig. 9 *a* et 9 *b* représentent un axe en fer fondu pour les grandes roues. Il est fait en trois parties, le corps et les deux tourillons. Ces derniers sont tournés, et doivent entrer avec précision dans les extrémités de l'axe, qui sont forées et tournées pour les recevoir. Ils sont assujétis avec des boulons passant au travers des rebords. Le corps de l'axe porte de petites saillies servant d'arrêts pour les rayons de la roue.

L'emploi d'un cylindre creux est très-convenable pour les grands axes, cette forme étant celle qui, avec le moins de matière, offre le plus de force et le moins de flexibilité. Mais diverses circonstances, et particulièrement la difficulté de les bien fondre, empêchent d'employer des axes creux sous de petites dimensions. On adopte souvent alors ce qu'on nomme axes emplumés (*feathered shafts*), dont les fig. 10 *b*, 10 *c*, 10 *d* indiquent diverses sections transversales, et dont le nom tient à leur ressemblance avec la partie d'une flèche (*shaft*) qui est garnie de plumes. M. Robertson Buchanan observe avec raison que ces axes, très-propres à supporter des pressions transversales, résistent avec moins d'avantage aux efforts qui tendraient à les tordre, et que le manque de matière entre les côtes ou plumes les rend d'ailleurs sujets à un tremblement continuel. Il conseille de conserver au corps de l'axe un diamètre au moins égal à ceux de ses tourillons, et de n'ajouter des plumes que vers le milieu, uniquement pour prévenir la flexion. Il pense d'ailleurs que la forme quarrée, (fig. 11 *a* et 11 *b*), qui s'exécute plus facilement, est trouvée dans la pratique, aussi avantagense qu'aucune autre qui ait été essayée.

PLANCHE E. FIG. 10 *a*, 10 *b*, 10 *c* et 10 *d*.

PLANCHE E. FIG. 11 *a* et 11 *b*.

De la grosseur à donner aux tourillons, eu égard aux efforts qu'ils supportent.

§ 2. Les tourillons sur lesquels les axes s'appuient peuvent être faits en fer fondu ou forgé. Ils peuvent être soumis à des efforts de pression ou de torsion. Ces divers cas doivent être considérés à part.

Des tourillons soumis à une force de pression.

De la comparaison du poids de diverses roues avec la grosseur donnée à leurs tourillons dans plusieurs moulins bien exécutés, M. Robertson Buchanan conclut comme règle susceptible d'être employée dans pratique : que la racine cube du poids d'une roue, exprimé en *quintaux*, est presque égale au diamètre exprimé en *pouces*, d'un tourillon en fer fondu assez fort pour la supporter. Ainsi nommant M le poids de la roue, d le diamètre des tourillons, on a $d = M^{\frac{1}{3}}$. Pour transporter cette formule dans notre système de mesures, il faut faire attention que le *pouce anglais* $= 0^{m},0254$, et que le *quintal* $= 112$ *liv. avoir du poids* $= 50^{k},785$; d'où il suit qu'en supposant d exprimé en centimètres, et M en kilogrammes, la formule devra s'écrire $2{,}54d = (50{,}785\,M)^{\frac{1}{3}}$, d'où $d = 1{,}458\,M^{\frac{1}{3}}$. La règle dit *presque égale*, parce qu'il convient de faire les tourillons un peu plus forts que ne l'indique le résultat du calcul, tant pour obtenir plus de sécurité, qu'en considération de ce qu'ils diminuent de grosseur en s'usant. Il est important de ne point donner trop de longueur aux tourillons, et ils doivent être placés exactement dans l'axe des roues. Il est utile, pour les axes en bois, de tourner de nouveau les tourillons, après qu'ils leur ont été assujéttis.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

D'après les resultats établis par le professeur Robison (*Encyclopædia britan.*, art. *strength of materials*), la force de cohésion de la fonte et du fer forgé sont dans le rapport de 2 à 3; et M. Robertson Buchanan ayant comparé, par des expériences spéciales, les résistances de tourillons en fonte et en fer forgé, a trouvé qu'elles étaient à-peu-près dans le rapport de 9 à 14, qui diffère peu du précédent. D'après cela, si l'on veut que la formule ci-dessus convienne au fer forgé, il faut écrire $d = 1{,}458\left(\frac{9}{14}\mathrm{M}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Cas où les deux tourillons d'un axe supportent des pressions différentes.

Les formules précédentes donnent le diamètre qui convient à chacun des tourillons d'un axe sur lequel il est exercé un effort transversal M, en supposant cet effort également réparti entre les deux tourillons, et que chacun d'eux en supporte la moitié. Si l'effort dont il s'agit se partageait inégalement entre les deux tourillons, il faudrait calculer d'après les formules de la note (*m*) les pressions qu'ils supportent respectivement, et qu'on nommera μ et ν. Les diamètres respectifs de chaque tourillon se déduiront alors des formules ci-dessus, en y mettant 2μ ou 2ν à la place de M.

Des tourillons soumis à un effort de torsion.

La résistance d'un tourillon à la torsion, toutes choses égales d'ailleurs, est, aussi-bien que sa résistance à la rupture, proportionnelle au cube de son diamètre, ainsi qu'il est aisé de le démontrer. On voit aussi très-facilement que la force qui tend à le tordre est en raison directe de la quantité d'action transmise par la machine, et en raison inverse de la vîtesse de rotation de l'axe, ou du nombre de tours qu'il fait dans un temps donné. Il suit de là qu'en nommant A la quantité d'action transmise dans un temps donné, dans une minute, par exemple, *n* le nombre de tours que l'axe fait dans le même temps, et *d* le diamètre des tourillons, on a la relation $d = \left(k.\frac{\mathrm{A}}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$, *k* étant un nombre constant à déterminer par expérience.

L'auteur cité ci-dessus, d'après diverses observations faites sur des machines exécutées, a reconnu que le nombre *k* devait avoir des valeurs numériques différentes, suivant les circonstances dans lesquelles l'axe se trouvait placé, et les fonctions qu'il avait à remplir. Supposant la quantité d'action A évaluée en action d'un cheval (*horse power*), et le diamètre *d* en pouces, le résultat de ses observations le conduit: 1° pour les tourillons des axes des volants des machines à feu (où la puissance est modérée), à faire $k = 400$; 2° pour les tourillons des axes des roues à eau, ou autres qui supportent une charge considérable, $k = 200$; 3° dans les parties ordinaires intérieures des moulins, $k = 100$.

Pour traduire maintenant ces valeurs en d'autres qui s'adaptent à notre système de mesures, j'observerai que M. Robertson Buchanan ne donne point, dans son *Essay on the shafts of mills*, la valeur numérique qu'il a adoptée pour l'action du cheval, mais renvoie pour cela à un autre ouvrage que je n'ai pu me procurer. Les évaluations données par les savants anglais pour cette action diffèrent entre elles assez considérablement, comme on a pu le voir dans le § 1 de l'addition placée à la fin du livre précédent. Cependant une grande précision n'est pas nécessaire ici, et il n'est pas vraisemblable qu'on se trompe beaucoup en prenant pour l'action d'un cheval en une minute 20000 *livres avoir-du-poids élevées à un pied*, ce qui est d'ailleurs une des évaluations les plus modérées. Ainsi comme la livre avoir-du-poids $= 0^{k},4534$, et le pied anglais $= 0^{m},3048$, il faudra, si l'on exprime A en kilogrammes élevés à un mètre, diviser *k* par $20{,}000 \times 0{,}4534 \times 0{,}3048$. Si l'on veut ensuite que

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le nombre d dans le premier membre de l'équation soit évalué en centimètres, au lieu de l'être en pouces anglais, il faudra multiplier k par le cube de 2,54, en sorte que le nombre par lequel on devra multiplier les valeurs ci-dessus de k est définitivement $\frac{(2,54)^3}{20,000 \times 0,4534 \times 0,3048} = 0,00593$. Ainsi, en supposant dans la formule $d = \left(k.\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$ le diamètre d du tourillon exprimé en centimètres, et la quantité d'action transmise dans une minute A exprimée en kil. × mèt., les valeurs qu'il conviendra de donner au coëfficient k, dans les trois cas spécifiés ci-dessus, seront respectivement en nombres ronds $k = 2,4$, $k = 1,2$ et $k = 0,6$.

Si l'on veut maintenant, des résultats précédents, qui conviennent au fer fondu, passer à ceux qui s'appliqueraient au fer forgé, il faudra, comme on l'a fait ci-dessus, réduire l'effort qui peut être exercé dans le rapport 9 : 14. La formule deviendra donc $d = \left(k \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$. On y donnera à k les mêmes valeurs qui viennent d'être indiquées.

De la forme et de la grosseur à donner au corps des axes.

§ 3. Lorsque les axes en fer fondu ou forgé n'ont aucun effort transversal à soutenir, si ce n'est celui de leur propre poids, l'expérience prouve qu'il suffit toujours de donner à leur section transversale la forme d'un quarré dont le côté est égal au diamètre de leurs tourillons, ou le surpasse très-peu. Cela suffit même dans le cas où les axes supportent des charges considérables, lorsqu'ils sont courts, ou que les points d'application de ces charges sont situés près des extrémités. On entend par un axe *court*, celui dont la longueur ne surpasse point dix à douze fois la grosseur, et la règle précédente peut s'appliquer jusqu'à cette limite. Lorsque la longueur de l'axe doit être plus grande, ce qu'il y a de mieux à faire est de le renfler au point où l'effort transversal s'exerce, en diminuant la grosseur depuis ce point jusqu'aux extrémités, suivant une courbe convexe régulière.

Quant à la quantité dont l'axe doit être renflé à l'endroit où la charge qu'il supporte tend à le rompre, il faut observer qu'on doit s'attacher à donner aux axes deux qualités également nécessaires, mais qui dépendent d'éléments un peu différents. Il faut en effet qu'ils ne puissent ni *rompre*, ni *fléchir*, sous l'action de la force transversale qui agit sur eux. Or on démontre 1° que la résistance d'un barreau prismatique à une force qui le rompt transversalement est en raison directe de sa largeur et du quarré de son épaisseur, et en raison inverse de la distance du point de rupture à la direction de la force; 2° que sa résistance à une force qui fléchit le barreau sans le rompre est en raison directe de sa largeur et du cube de son épaisseur, et en raison inverse du cube de la même distance. D'après cela, considérons d'abord un axe chargé dans le milieu de sa longueur, qui sera représentée par l. Soit d le diamètre de ses tourillons, calculé d'après les règles du § précédent. Il suffirait, si l ne surpassait point $12d$, de faire cet axe quarré, en lui donnant par-tout une grosseur égale à d. Mais si l est plus grand, on procurera à cet axe la même force, ou la même résistance à la rupture, en lui donnant au milieu de sa longueur une grosseur $= d\left(\frac{l}{12d}\right)^{\frac{1}{3}}$; et on lui procurera la même roideur ou la même résistance à la flexion, en lui donnant au milieu une grosseur $= d\left(\frac{l}{12d}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Si l'axe n'est point chargé dans le milieu de sa longueur, il faudra, comme on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'a vu dans le § précédent, déterminer séparément les efforts μ et ν supportés par chaque tourillon, et les diamètres que chacun d'eux devrait avoir. Soit d le diamètre ainsi calculé d'un des tourillons, et l sa distance au point d'application de la charge. Si l ne surpassait point $6d$, il suffirait, d'après ce qui a été dit plus haut, de donner à l'axe sur toute l'étendue de l une grosseur égale à d. Mais si l est plus grand, on conservera à l'axe la même force en lui donnant au point d'application de la charge une grosseur $= d\left(\frac{l}{6d}\right)^{\frac{1}{3}}$, et on lui conservera la même roideur, en lui donnant au même point une grosseur $= d\left(\frac{l}{6d}\right)^{\frac{3}{4}}$.

Des axes cylindriques creux.

On a dit ci-dessus qu'il était convenable d'employer des tuyaux de fonte pour former les axes des grandes roues. On pourrait aussi les renfler vers le milieu, mais on préfère leur conserver un grand diamètre aux extrémités, ce qui permet d'y assujettir plus solidement les tourillons. Pour donner les moyens de proportionner les dimensions de ces axes creux aux efforts qu'ils auraient à soutenir, je remarquerai que d'après les règles de la résistance des solides, si l'on nomme d la grosseur d'un barreau quarré, ou le diamètre d'un barreau cylindrique plein, ou le diamètre extérieur d'un tuyau, et d' le diamètre intérieur du même tuyau, leurs forces seront respectivement proportionnelles aux quantités

Rapports des résistances d'un prisme à base quarrée, d'un cylindre plein et d'un cylindre creux.

$$\left.\begin{array}{c} d^3 \\ 0{,}7365\,d^3 \\ 0{,}7365\,\dfrac{d^4 - d^2 d'^2 - d'^4}{d} \end{array}\right\} \text{pour la résistance à la rupture,} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{c} d^4 \\ 0{,}5903\,d^4 \\ 0{,}5903\,(d^4 - d'^4) \end{array}\right\} \text{pour la résistance à la flexion;}$$

ces forces étant toujours réciproques, dans le premier cas au bras de levier de la charge, et dans le second au cube de ce bras de levier. Si, par exemple, on avait trouvé par les règles précédentes que la grosseur à donner à un axe quarré plein est d, et qu'on voulût lui substituer un axe creux de même roideur, il faudrait que les diamètres extérieurs et intérieurs δ et δ' de cet axe, fussent tels qu'on eut $d^4 = 0{,}5903\,(\delta^4 - \delta'^4)$. Il est à remarquer qu'un barreau quarré offre la même roideur, soit qu'on le plie dans le sens d'un côté de sa base ou dans le sens d'une diagonale.

Des axes en bois.

A l'égard des axes en bois, M. Robertson Buchanan, que je continue à extraire, admet que la résistance du chêne à la rupture est, à dimensions égales, le $\frac{1}{4}$ de celle de la fonte, et que celle du sapin en est seulement le $\frac{1}{5{,}5}$. Ainsi ayant calculé, d'après ce qui précède, la grosseur à donner à un axe en fonte au point d'application de la charge, il faudra l'augmenter dans le rapport $\sqrt[3]{4} : 1$ pour un axe en chêne, et dans le rapport $\sqrt[3]{5{,}5} : 1$ pour un axe en sapin.

L'auteur compare dans le tableau suivant les dimensions résultant des règles précédentes avec celles données à divers axes exposés à des pressions transversales considérables, et à des efforts de torsion, dans plusieurs moulins exécutés par un habile constructeur (*Essay on the shafts of mills*, p. 129). Ce rapprochement montre que ces règles peuvent être employées avec sécurité dans la pratique. Peut-être en les suivant en France, faudrait-il avoir égard à ce que la fonte, suivant l'opinion générale, y est d'une qualité un peu inférieure à celle de la fonte anglaise.

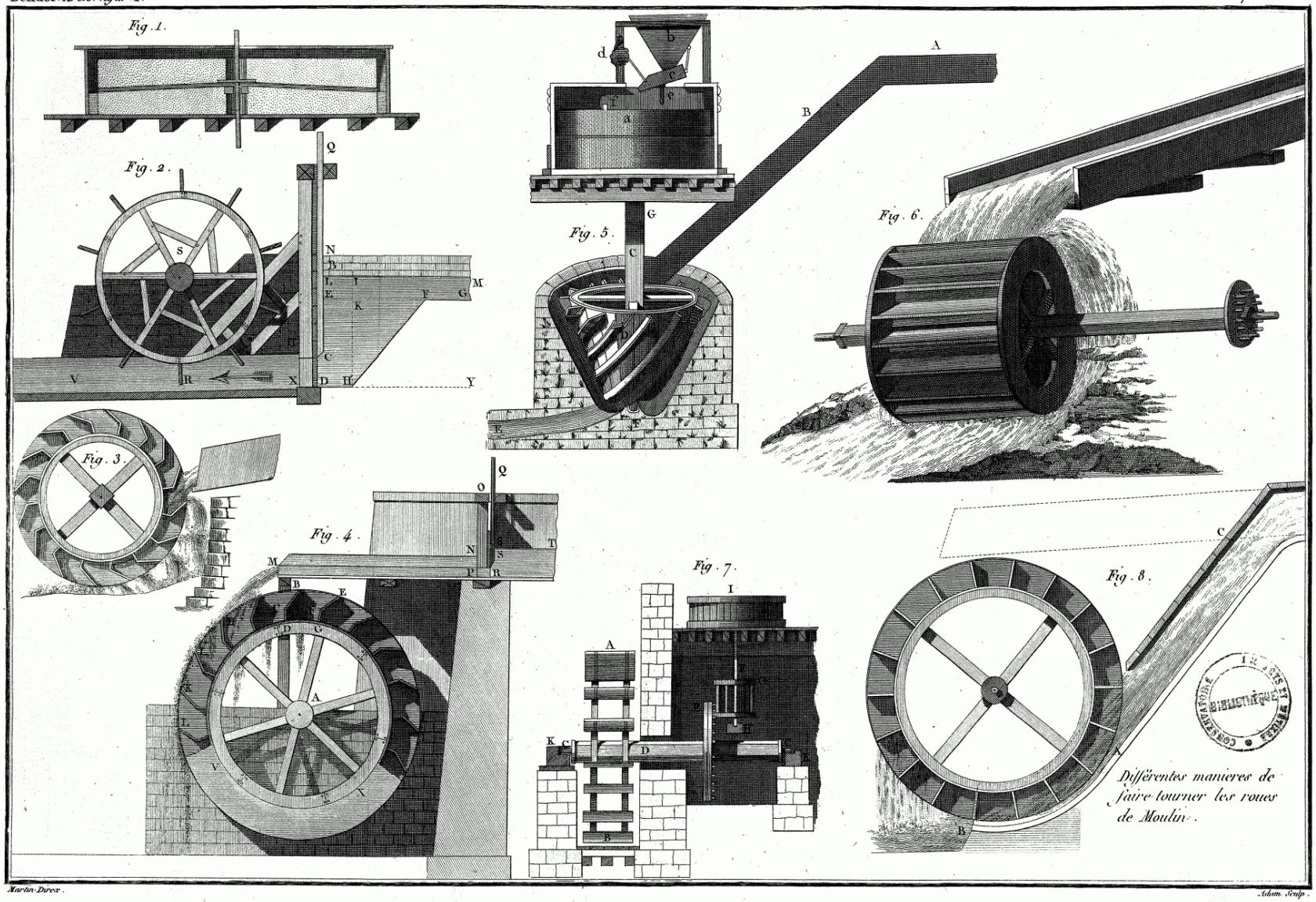
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Tableau contenant l'indication des grosseurs données à divers axes, et à leurs tourillons, avec la comparaison de ces grosseurs et de celles déduites des formules précédentes.

Espèce des axes.	Quantité d'action transmise par la machine = A.	Nombre de tours fait par l'axe en une minute = n.	Diamètre des tourillons.	Longueur de l'axe.	Grosseur de l'axe au milieu de la longueur.	Diamètre des tourillons calculé = d.
	kil. × mèt. par minute.		centimètres	mètres	centimètres	centimètres
Axes horizontaux en fer fondu, emplumés.	55280	20	15,2	3,35	19,7	18,8
	49752	22	14,6	3,35	17,8	17,6
	44224	22	13,3	3,20	17,8	16,9
	38696	24	10,6	3,05	17,1	15,7
	33168	25	10,6	2,90	15,2	14,7
	27640	25	12,1	2,74	15,9	13,8
	22112	27	10,2	2,74	15,2	12,5
	16584	28	10,8	2,59	14,6	11,2
	13820	30	9,8	2,59	13,3	10,3
	11056	32	9,5	2,44	12,1	9,4
Axes horizontaux en fer fondu, quarrés.	8292	34	8,3	2,44	10,2	8,4
	5528	46	7,0	2,44	7,6	7,2
	2764	40	5,1	2,44	8,3	5,5
Axes horizontaux en fer forgé.	16584	28	7,6	2,59		9,7
	13820	30	8,3	2,44		8,9
	11056	32	5,1	2,44		8,1
	8292	34	5,1	2,44		7,2
	5528	36	4,4	2,44		6,2
	2764	40	2,5	2,29		2,2

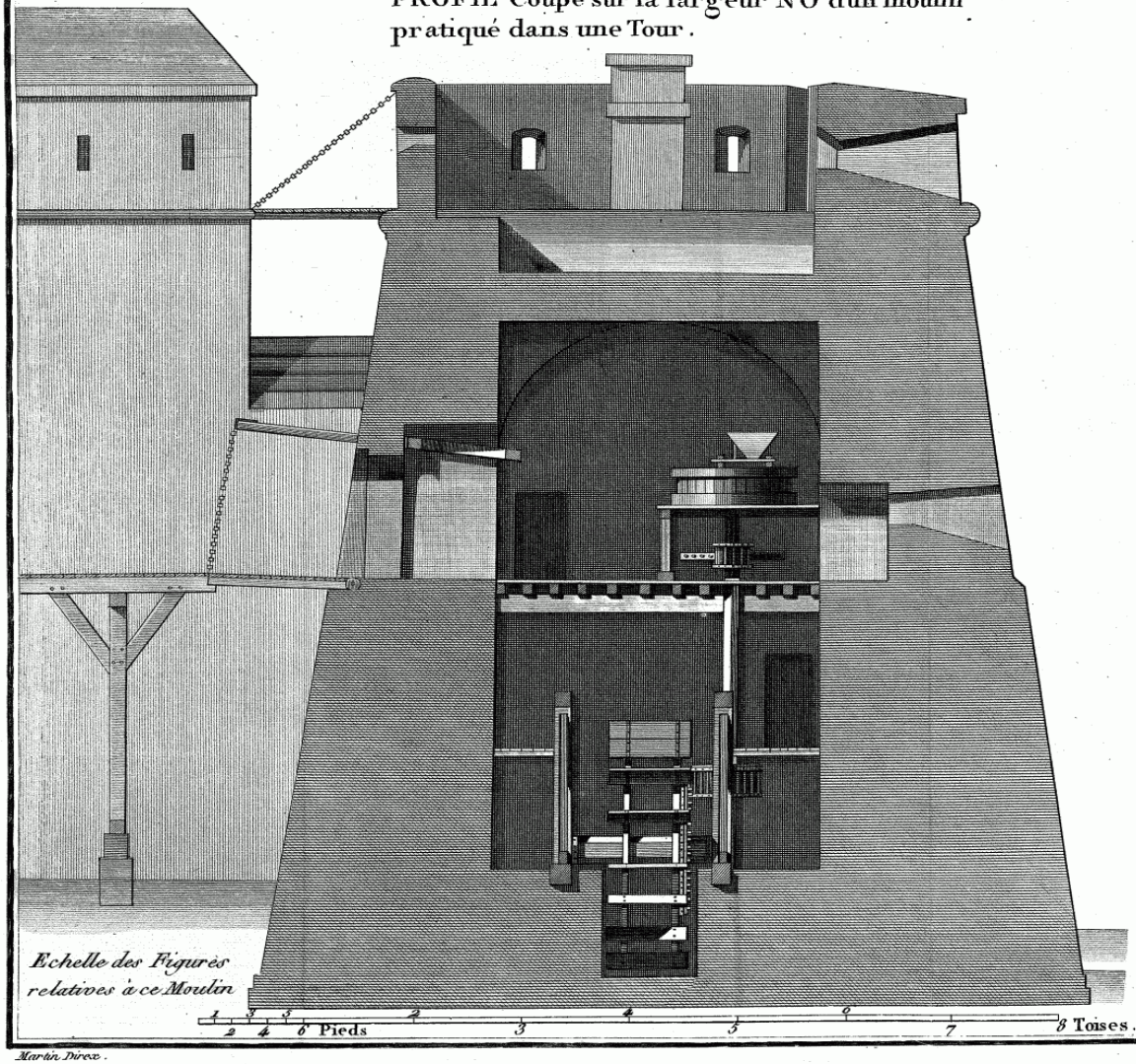
Nota. Les diamètres indiqués dans la dernière colonne ont été calculés pour le fer fondu par la formule $d = \left(k.\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$, et pour le fer forgé, par la formule $d = \left(k.\frac{9}{14}.\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$, en faisant toujours $k = 2,4$, ce qui est la plus grande valeur à attribuer à ce coëfficient.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

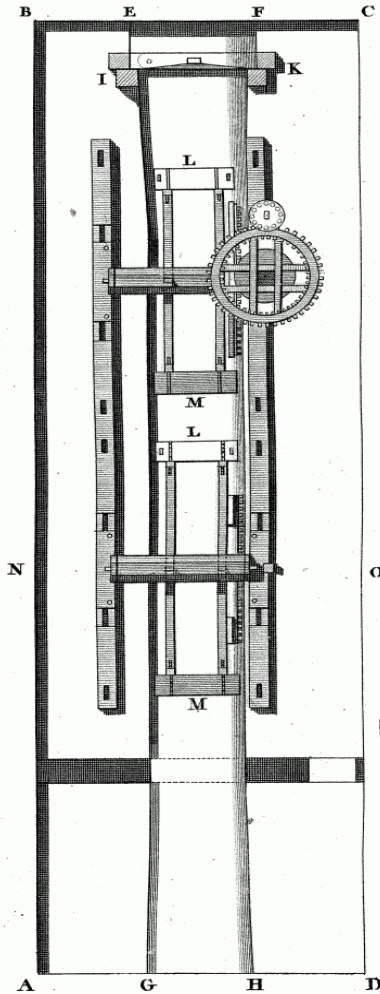


Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

PROFIL Coupé sur la largeur NO d'un moulin pratiqué dans une Tour.



PLAN Intérieur du rez-de-chaussée de la Tour & du Moulin.



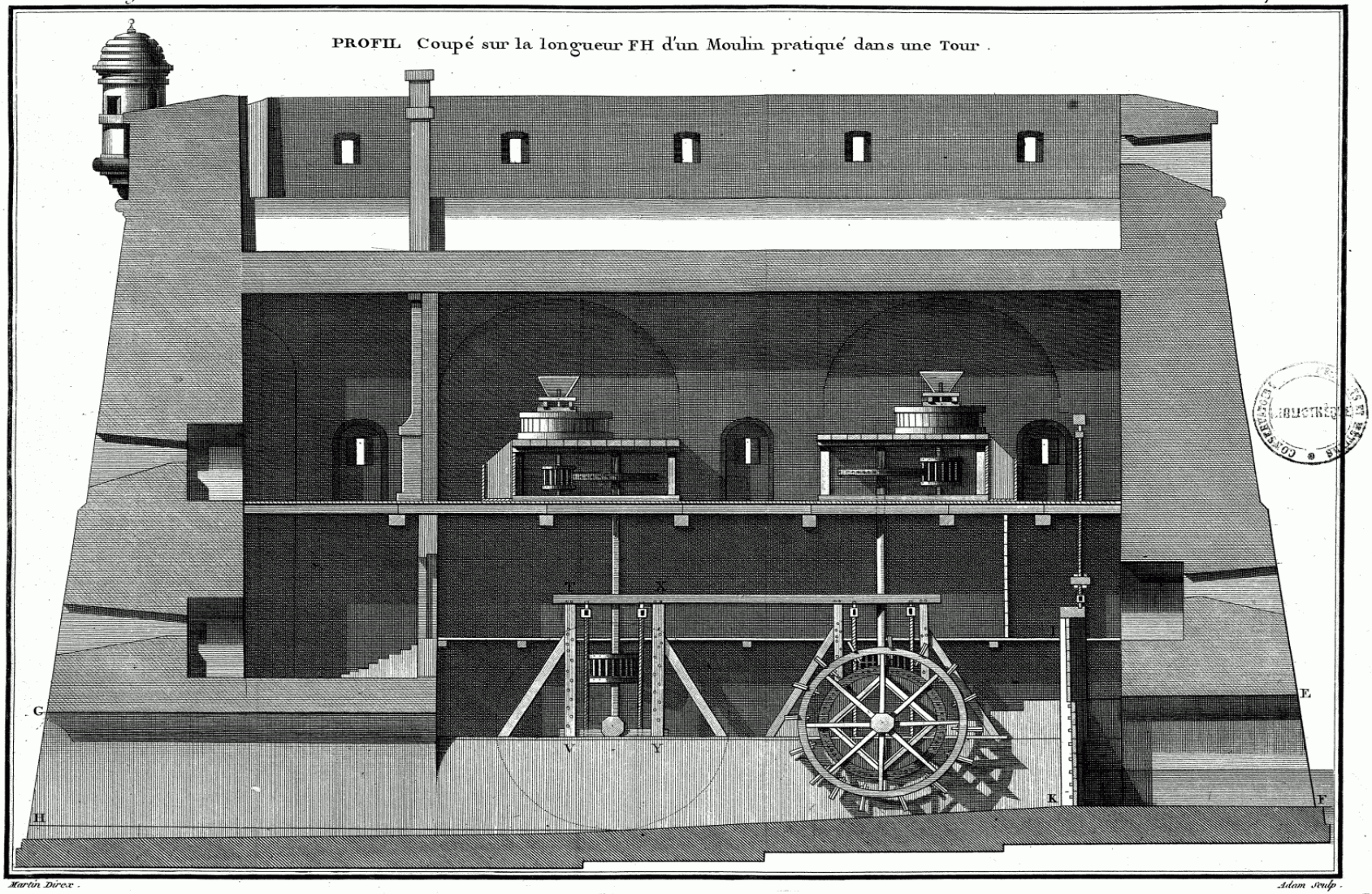
BIBLIOTHÈQUE

Martin Direx. *Adam Sculp.*

I. 20

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

PROFIL Coupé sur la longueur FH d'un Moulin pratiqué dans une Tour.

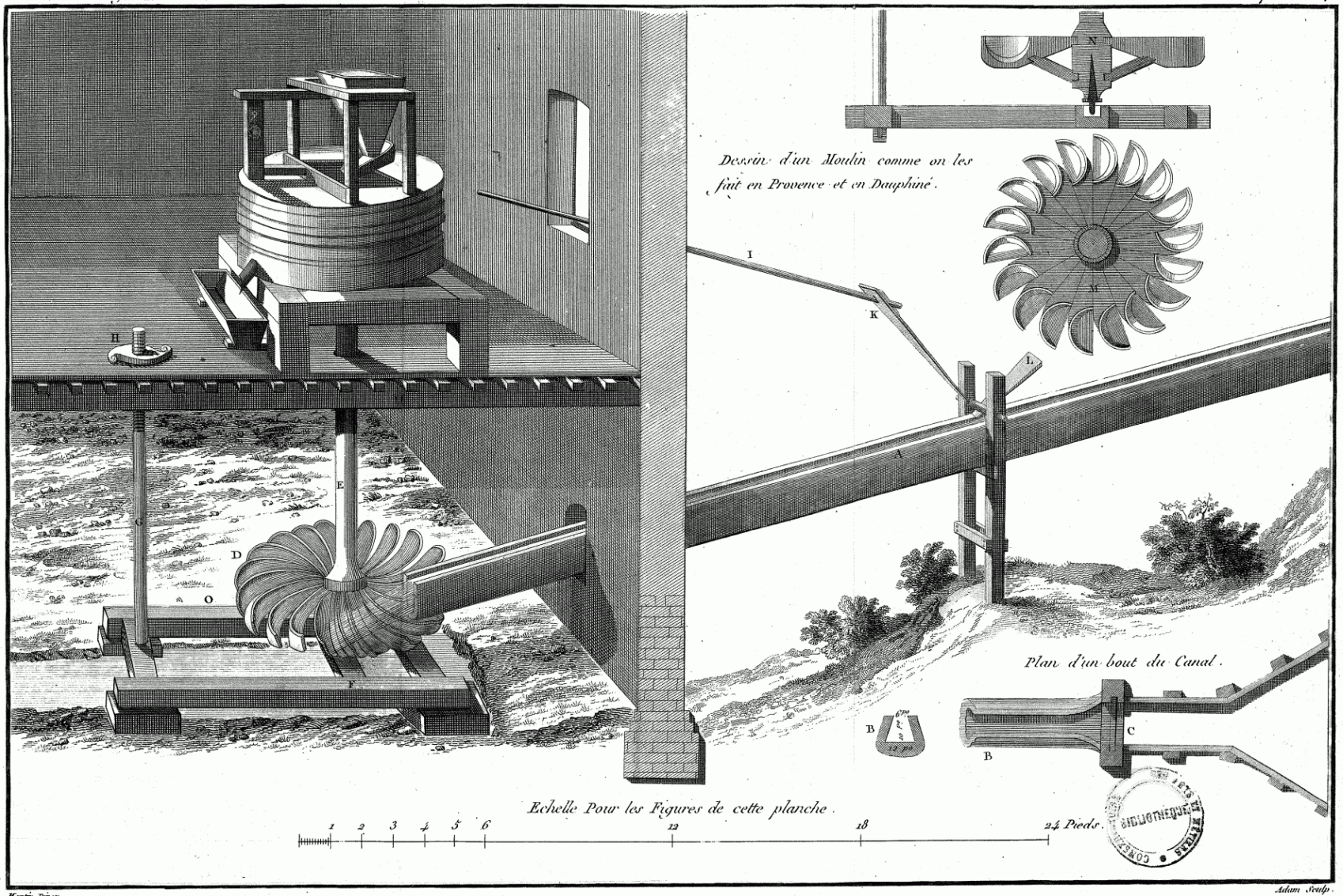


BIBLIOTHÈQUE DES ARTS ET MÉTIERS CONSERVATOIRE

Martin Direx. Adam Sculp.

I. 21.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

PLAN du radier des Moulins du Basacle.

Fig. 1re

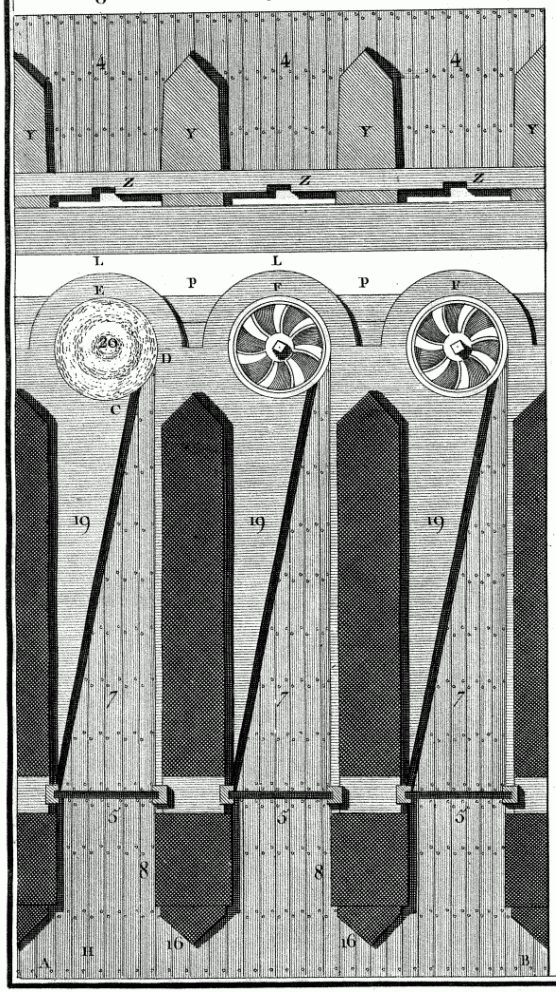
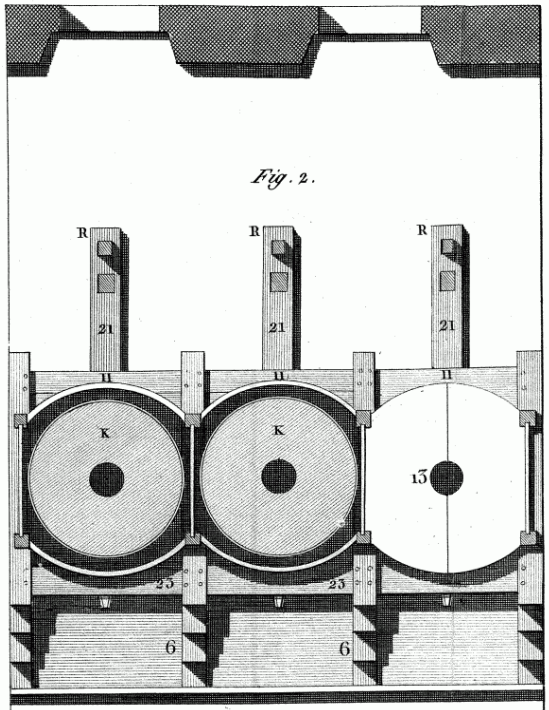
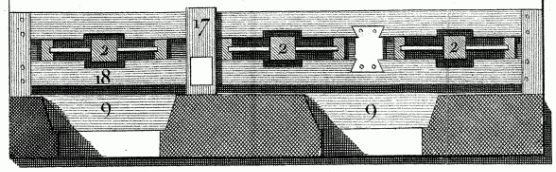


Fig. 2.

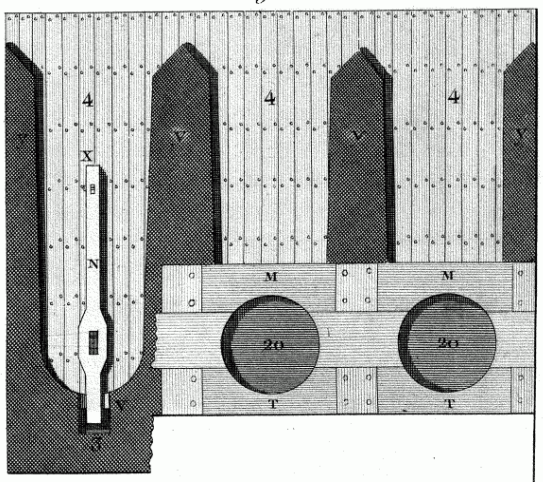


Plan du Rez de Chaussée des Moulins.

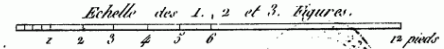


PLAN du radier du côté d'Aval et des cylindres ou Tonneaux vus à la hauteur des Roues.

Fig. 3.

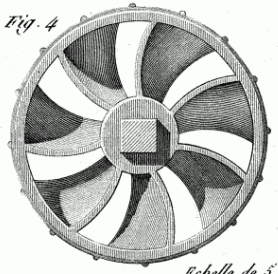


Echelle des 1., 2 et 3. Figures.



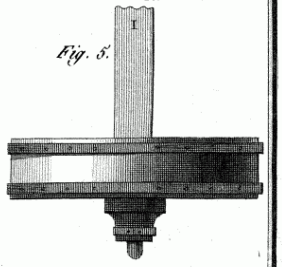
Plan de la Roue que l'on nomme aussi Rodet.

Fig. 4



Elévation de la Roue

Fig. 5.



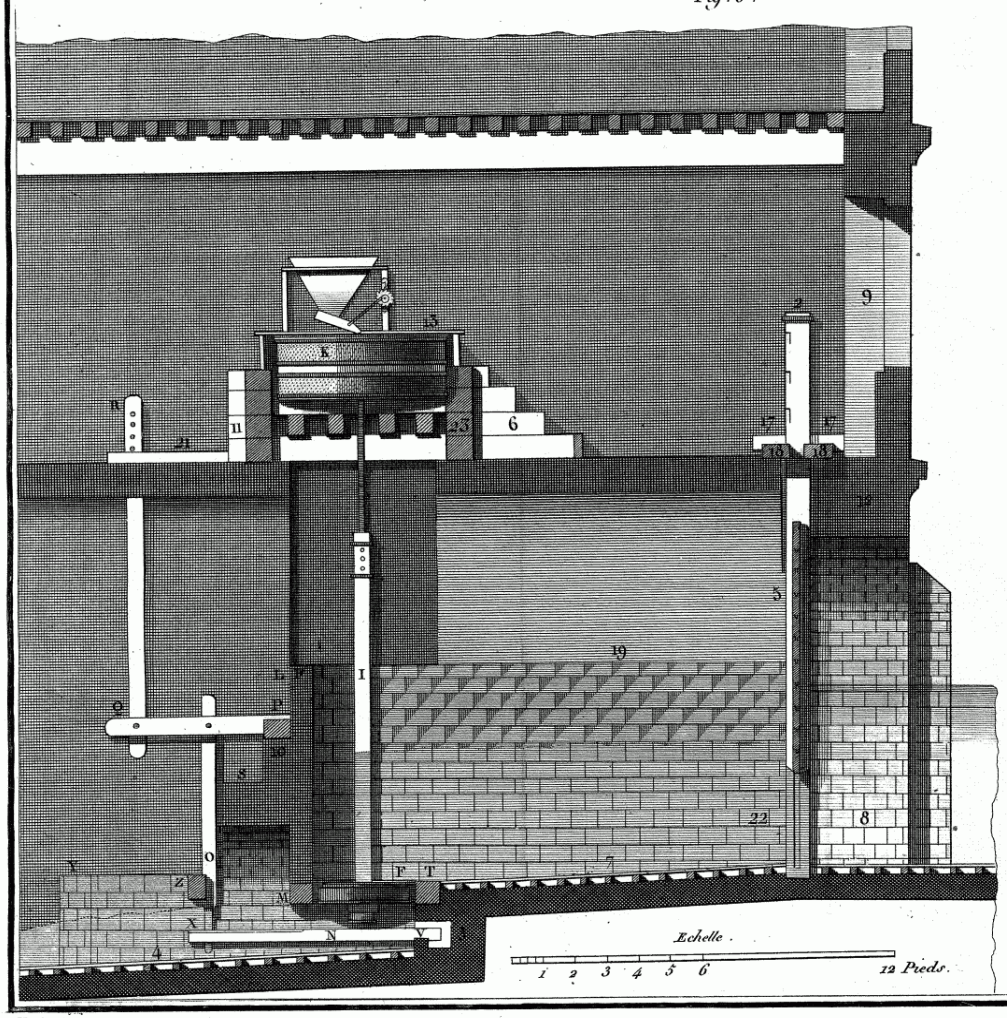
Echelle de 5 pieds pour la 4e et 5e Figure.

Adam scrip.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

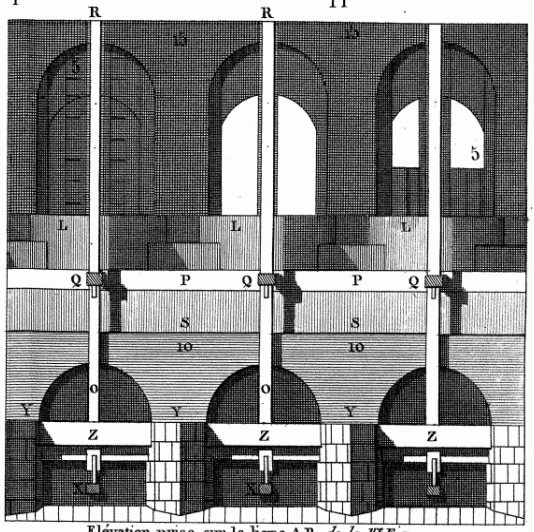
PROFIL Coupé sur la ligne GH qui fait voir la disposition de toutes les parties qui ont rapport aux plans et élévations des Moulins du Bafacle.

Fig. 6.



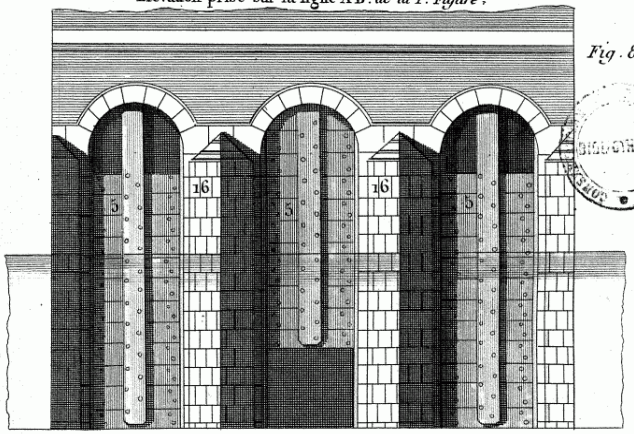
PROFIL et élévation pris sur la ligne QR de la figure premiere, rélatifs aux autres développements.

Fig. 7.



Elévation prise sur la ligne AB. *de la I^re Figure.*

Fig. 8.



BIBLIOTHÈQUE

Martin Direx. *Adam Sculp.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Moulin qu'on fait aller par le flux et reflux de la mer.

Fig. 1.

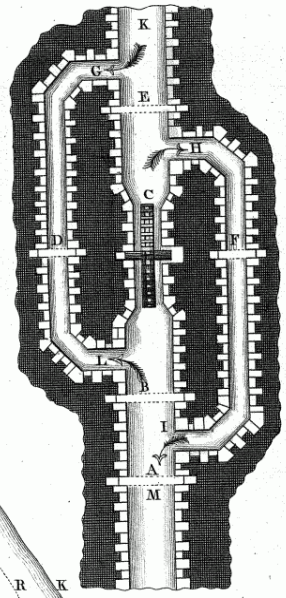


Fig. 2.

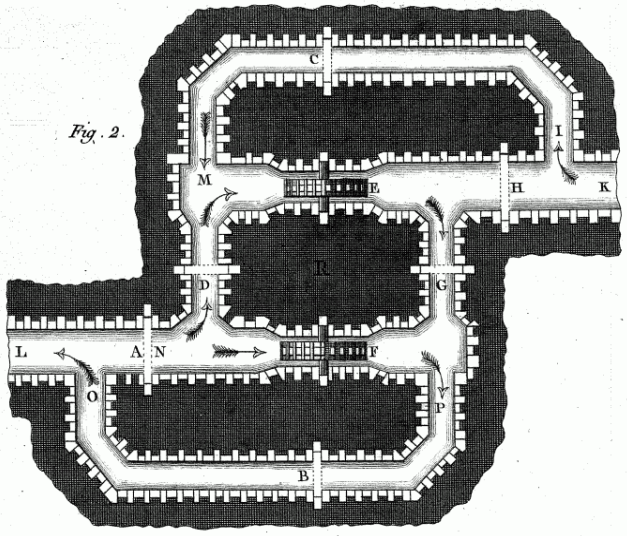


Fig. 3

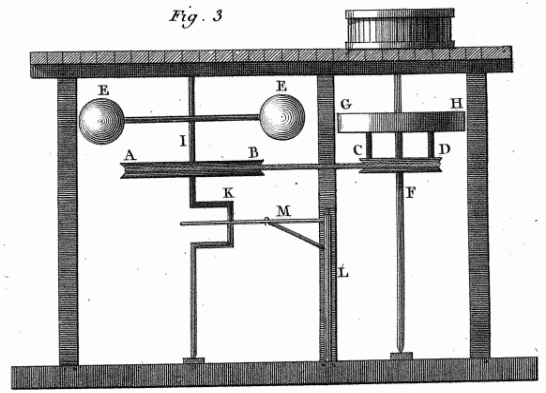


Fig. 4.

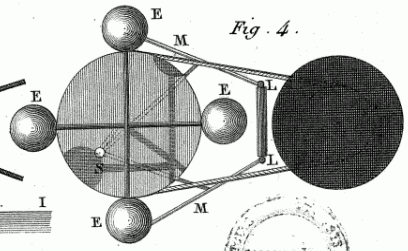


Fig. 5.

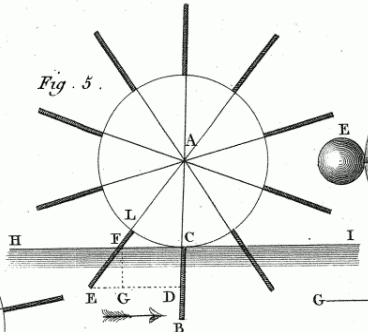


Fig. 6.

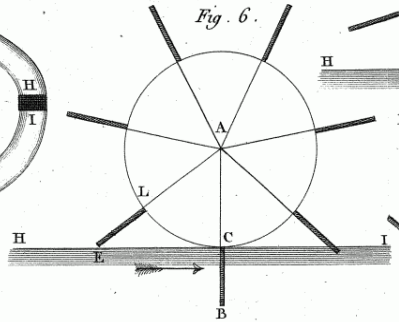


Fig. 7.

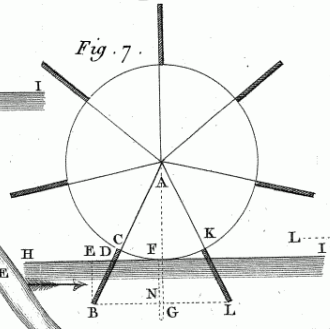
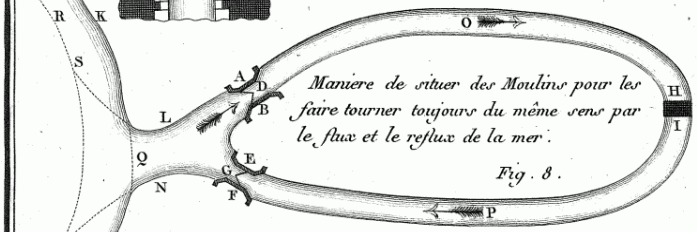
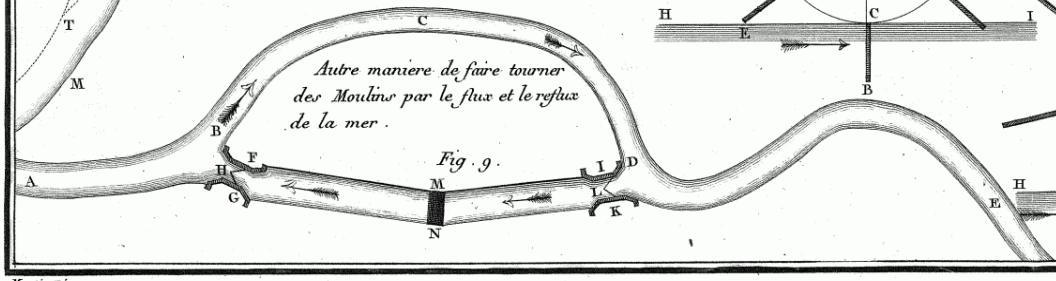


Fig. 8.



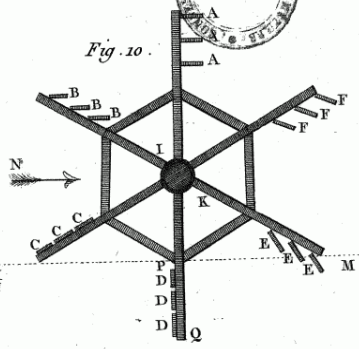
Maniere de situer des Moulins pour les faire tourner toujours du même sens par le flux et le reflux de la mer.

Fig. 9.

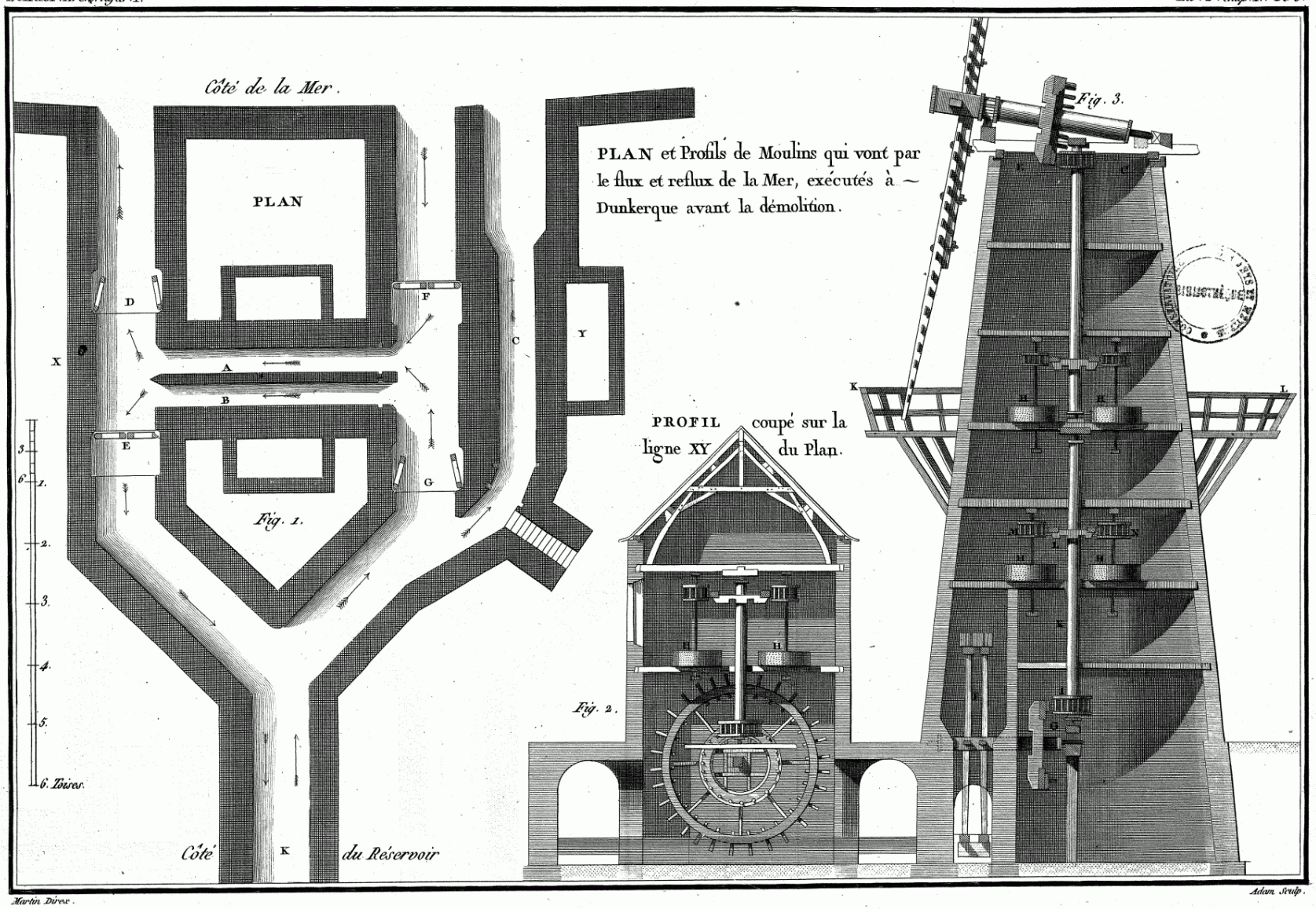


Autre maniere de faire tourner des Moulins par le flux et le reflux de la mer.

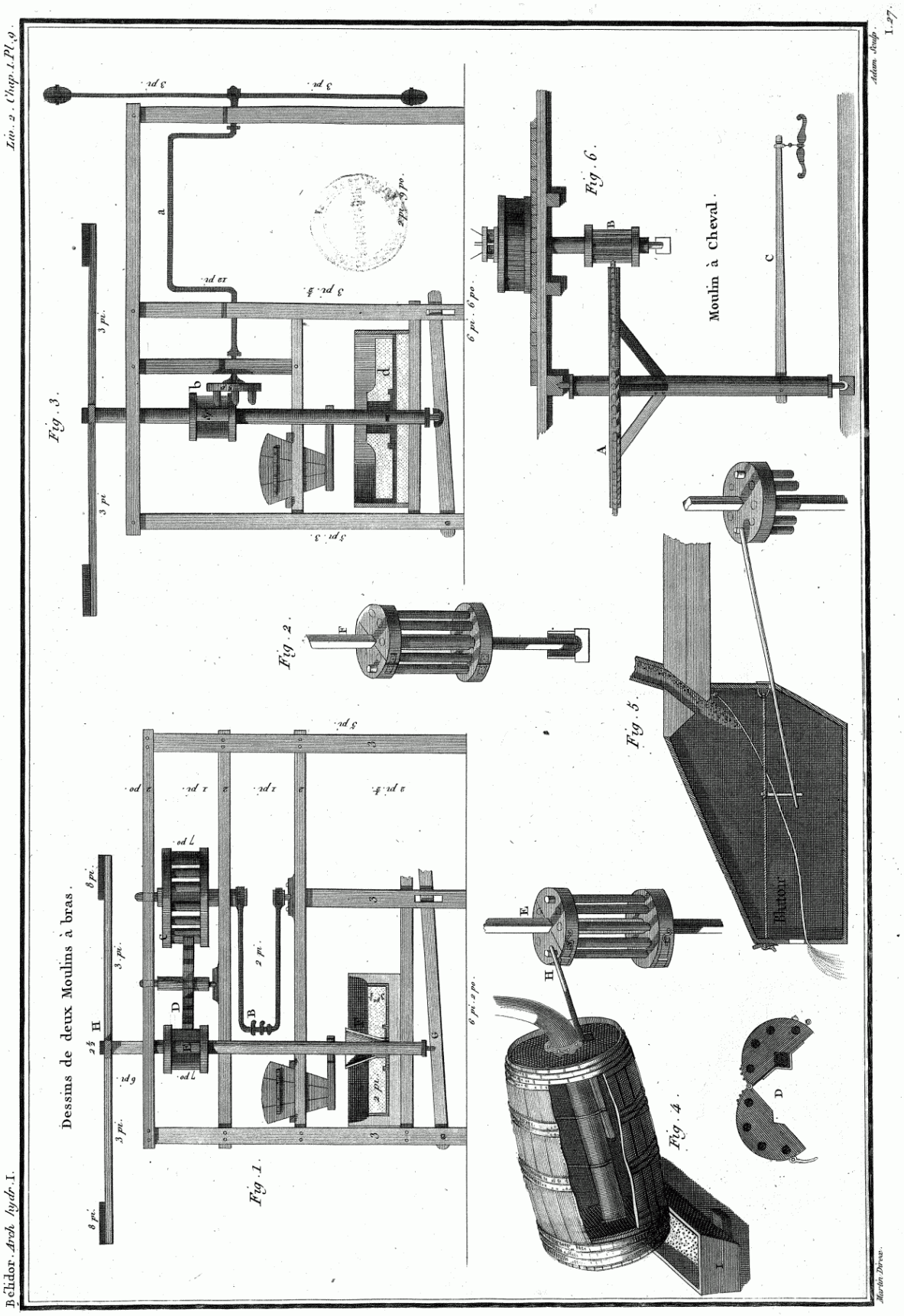
Fig. 10.



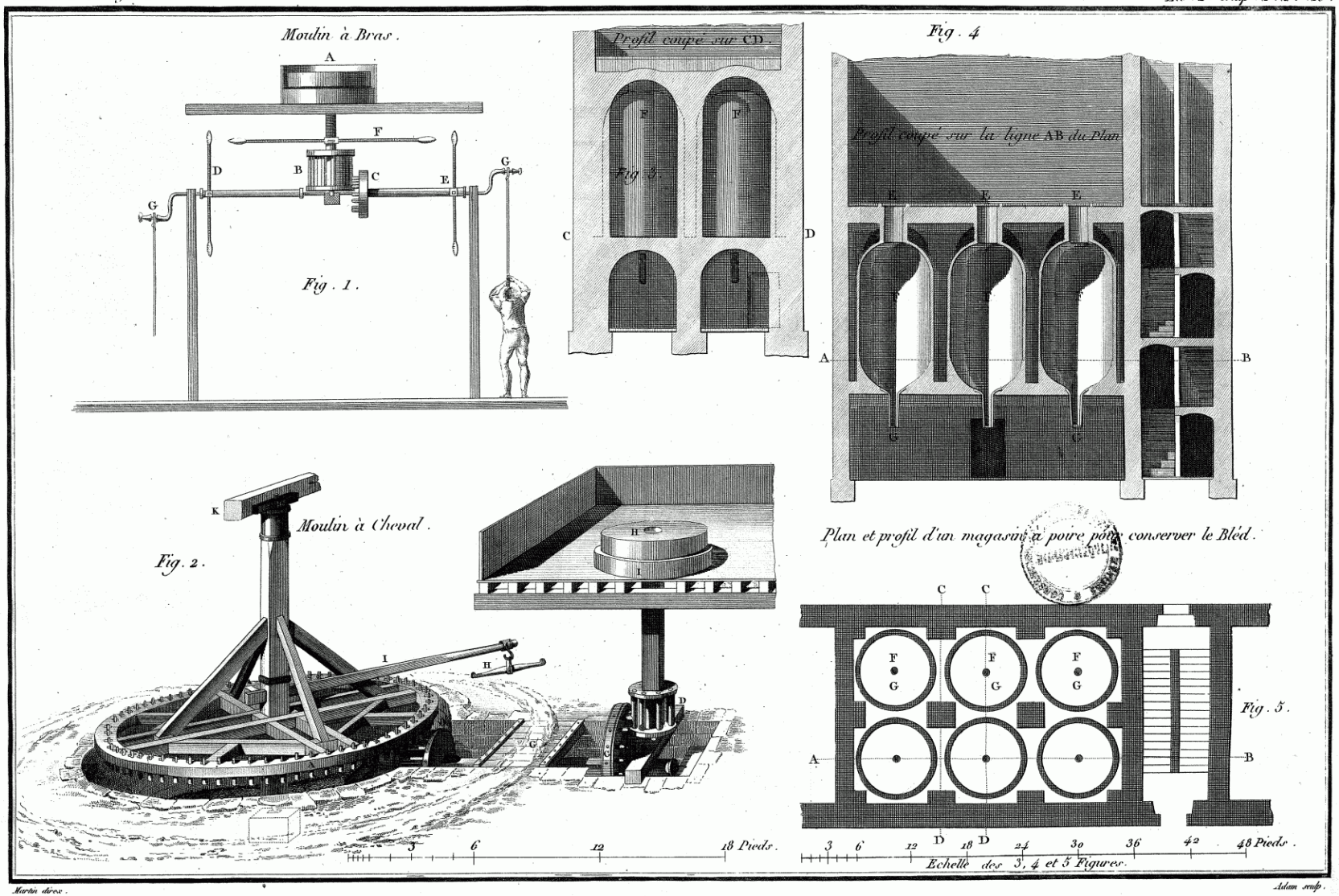
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



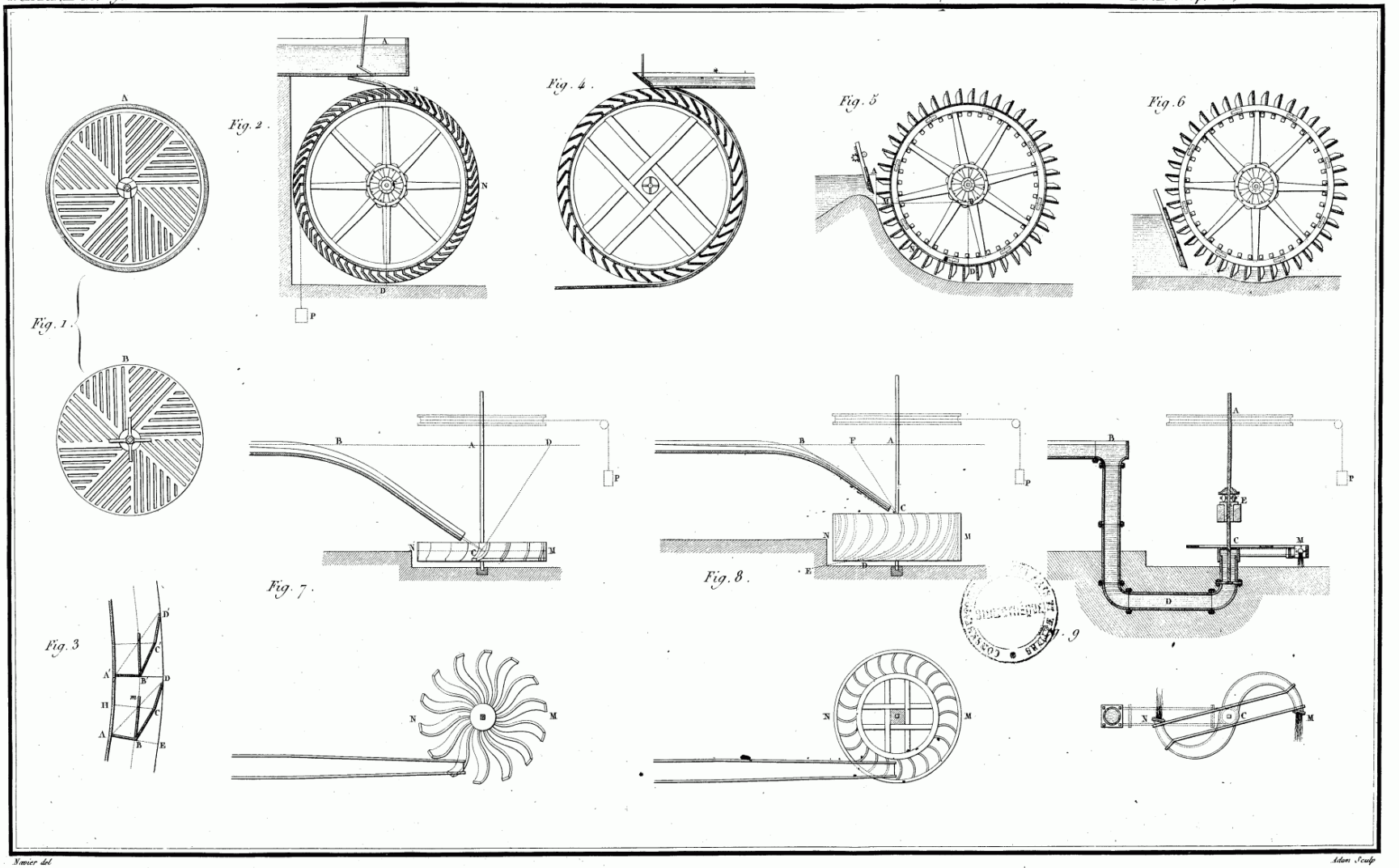
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



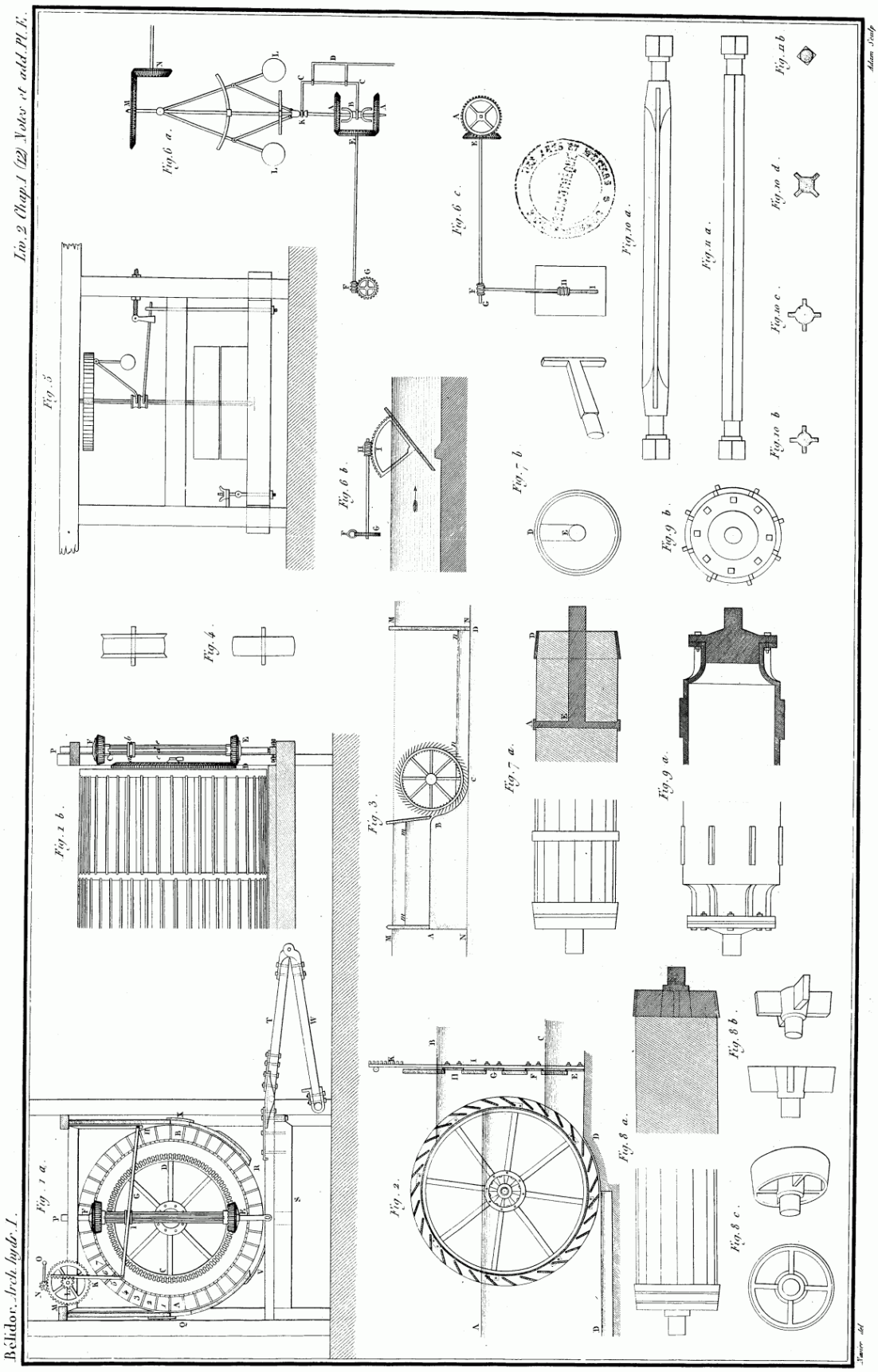
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE II.

Des moulins à scier le bois, le marbre, et à percer les tuyaux.

Je crois qu'il n'est pas nécessaire de faire sentir les avantages d'un moulin à scier dans les endroits où l'on fait de grands travaux, comme aux arsenaux de marine et d'artillerie, aussi-bien que dans les autres lieux où l'on débite une grande quantité de bois, qu'on ne pourrait faire scier à force de bras qu'avec beaucoup de dépense; au lieu que le moulin une fois construit, son entretien est un petit objet, et ce moulin est d'une bien plus prompte exécution, pouvant faire travailler trois ou quatre scies à-la-fois, pourvu que l'on ait assez d'eau pour donner à la roue un certain degré de vîtesse.

Ce sont ces considérations qui ont engagé la cour à en faire construire un à La Fere en 1736, pour l'usage de l'arsenal. Comme j'ai été chargé du projet et de son exécution, je n'ai rien négligé pour lui donner toute la perfection dont il pouvait être susceptible. On en pourra juger par le détail avec lequel je vais en expliquer les parties développées dans les plans et profils des planches 1 et 2, et ce chapitre servira à montrer dans quel goût les machines doivent être traitées.

689. Le mécanisme d'un moulin à scier se réduit à trois choses principales. La première que la scie hausse et baisse aussi long-temps qu'il est nécessaire, par le mouvement que l'eau communique à la roue. La seconde que la pièce qu'on veut scier avance d'un mouvement uniforme, pour recevoir les traits de scie; car ici c'est le bois qui doit aller à la rencontre de la scie, au lieu qu'ordinairement c'est la scie qui va à la rencontre du bois : ainsi le mouvement du bois et celui de la scie doivent dépendre immédiatement l'un de l'autre. La troisième que lorsque la scie a parcouru la longueur de la pièce, toute la machine s'arrête d'elle-même et demeure immobile, de peur que n'ayant plus d'obstacle à surmonter, la force de l'eau ne fît tourner la roue avec trop de vîtesse, et ne cassât quelques pièces.

A quoi se réduit le mécanisme d'un moulin à scier.

La première figure de la planche première exprime le profil du moulin, pris sur sa longueur AB. La seconde, son plan au rez-de-chaussée, qu'on suppose élevé de 8 pieds au-dessus de la surface de la terre. La troisième, le profil coupé sur la largeur du moulin. La quatrième, le plan de la cave où est logée la machine, où l'on entre par une porte I, en descendant 4 ou 5 degrés. Pour entrer dans le moulin, on monte par une rampe douce du côté A.

Planche 2. Fig. 1, 2, 3, 4.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Description générale d'un moulin à scier.

690. On a construit ce moulin entre la rivière d'Oise et la muraille de la place, et comme à cet endroit il y a une écluse qui retient l'eau, on a fait un canal KL, qui a une chûte à l'endroit M où il y a une vanne. Ainsi l'eau qui est dans l'intervalle NL s'écoulera avec beaucoup de vîtesse, à cause de la pente qu'on a donnée au coursier. Si l'on considère la quatrième figure, on verra que l'eau fait tourner la roue N; qu'à l'arbre de cette roue il y a un rouet O, dont les dents s'engrènent dans les deux lanternes P et R. La première de ces lanternes répond à une manivelle Q, servant à faire monter et descendre la scie. La seconde à un treuil S, sur lequel file une corde qui sert à amener dans le moulin le bois que l'on veut scier; et la lanterne R ne devant tourner que pour ce sujet, on l'éloigne quand on veut des dents du rouet.

On reconnaîtra dans la première et la troisième figure une partie des choses qu'on vient de voir. Premièrement, l'élévation de la roue N, le rouet O qui s'engrène dans la lanterne P, la manivelle Q qui fait mouvoir la scie T, dont le châssis VX hausse et baisse dans une coulisse. Pour cela, il y a une chasse YQ attachée par une de ses extrémités Y à l'entretoise inférieure du châssis de la scie, par le moyen d'une écharpe de fer traversée d'un boulon, comme on le peut voir plus distinctement dans la huitième figure. A l'autre extrémité Q est un œil dans lequel passe la manivelle, laquelle a 15 pouces de coude. Ainsi quand la lanterne P fait tourner cette manivelle, la chasse joue librement, et donne le mouvement à la scie, qui monte et descend sur la hauteur de 30 pouces.

De quelle manière avance le chariot qui porte la pièce qu'on veut scier.

Planche 2. Figures 9 et 10.

691. Pour juger de la manière dont la pièce de bois avance pour être sciée, on remarquera dans les deuxième, neuvième et dixième figures, qu'il y a deux *coulisses f f* attachées sur le plancher du moulin, servant à entretenir un châssis *g g* nommé *chariot*, qui peut se mouvoir aisément d'un bout de la coulisse à l'autre. On voit que le chariot est traversé par un *chevet*, où il est encastré sur la profondeur de 2 pouces, afin que, sans y être attaché à demeure, il puisse se maintenir fixe. Sur ce chariot repose encore un *coussinet* K, qui est un bout de madrier taillé en dessous de façon à s'emboîter avec les *brancards g g*, afin qu'il puisse les parcourir sans s'écarter de la direction où il doit être : et pour le fixer aux endroits où on veut l'arrêter, on se sert de deux boulons placés en K qui, après avoir traversé le coussinet, sont recourbés à angles droits et applatis pour se loger chacun dans une rainure pratiquée dans l'épaisseur des brancards du chariot. Les extrémites des boulons qui paraissent au-dessus du coussinet sont percées pour recevoir une clavette, à l'aide de laquelle ces boulons arrêtent le coussinet avec le chariot. C'est sur le chevet *j* et sur le coussinet K que l'on pose la pièce *l* qu'on veut scier, dont la longueur détermine la position du coussinet. Cependant comme l'effort que fait la scie ne manquerait pas de faire sortir cette pièce de l'alignement où elle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

doit rester, si on ne la maintenait inébranlable, on se sert de plusieurs crochets *m* à deux pointes, et de deux épées *h* qui sont deux pièces de fer faites comme les ciseaux des charpentiers, ayant une tête à une de leurs extrémités, et un tranchant à l'autre, que l'on enfonce de 3 ou 4 lignes dans un des bouts de la pièce; et comme c'est par celui-là qu'elle commence à être sciée, on pratique une fente, de 2 pouces de largeur, dans le milieu du coussinet pour loger la scie. On remarquera aussi dans la neuvième figure que les brancards du chariot sont hérissés de dents par dessous, lesquelles s'engrènent dans deux lanternes O pour faire avancer le chariot, et par conséquent la pièce, à la rencontre de la scie; ce qui se fait ainsi.

Sur l'entretoise supérieure *b* du châssis de la scie exprimée dans la première et la cinquième figure, il y a une verge de fer *cb*, attachée à l'endroit *s* par le moyen d'une charnière. L'autre extrémité *c* est aussi attachée à un bras de levier *ac* avec une autre charnière, afin que dans le mouvement que la scie donne à cette verge, elle agisse librement. Le bras de levier *ac* aboutit à un essieu *g*, avec lequel il est attaché à tenons et mortaises : cet essieu a deux tourillons, sur lesquels il tourne dans deux pièces suspendues à la charpente du moulin. A cet essieu est encore attaché avec une charnière une hampe *de*, portant un pied de biche *e* qui aboutit sur les dents de la roue Z. Le corps de cette roue est composé de plusieurs jantes, embrassées d'un cercle de fer dentelé en cremaillère. Son moyeu *t* est traversé par un essieu de fer quarré *pq* fig. 6 et 10, comme on le voit dans la sixième et la dixième figure. PLANCHES 1 et 2. FIGURES 1 et 5. FIGURES 6 et 10.

Cet essieu sert d'axe à deux lanternes ou pignons O, O, qui s'engrènent avec les dents du chariot, dont le profil, aussi-bien que celui des coulisses et du chariot, est représenté dans la fig. 6. Présentement on remarquera que quand la scie monte, la verge *cf* et le bras de levier *ac* font faire un mouvement à l'essieu *g*, par lequel le pied de biche est poussé en avant pour contraindre la roue Z de tourner tant soit peu. Quand la scie descend, le pied de biche recule; et pour qu'il n'arrive pas la même chose à la roue, et qu'elle soit contrainte de rester un moment dans la situation où le pied de biche l'a fait avancer, il y a un déclit *u* attaché au plancher du moulin avec une charnière, qui retient la roue en s'accrochant contre un de ses crans. Il ne serait pas mal d'avoir deux déclits au lieu d'un, afin que si le premier venait à échapper le cran qu'il doit retenir, le second pût en accrocher un autre. A chaque fois que la scie monte, la roue avance, et les lanternes O, O qui sont à son essieu, font cheminer le chariot, et par conséquent la pièce de bois qui est dessus; et comme la vîtesse de cette pièce dépend absolument de celle avec laquelle la scie agit, on voit que de part et d'autre le progrès est uniforme. FIGURE 5.

La roue Z est traversée de plusieurs chevilles, entre lesquelles on en- FIGURES 1 et 6.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

gage un levier pour la faire tourner du sens opposé à celui dont nous venons de parler, afin de ramener le chariot sur ses pas, et recommencer la même manœuvre. Cela peut se faire aussi par le moyen du treuil qui sert à amener le chariot roulant (j'entends celui qui apporte le bois), en attachant une poulie de retour au milieu de l'entretoise qui est à l'extrémité de la coulisse, du côté de la rampe; car faisant passer la corde du treuil sur cette poulie, et l'accrochant ensuite à l'entretoise *n* du chariot, elle la tirera du côté A, ce qui peut être commode lorsque le chariot est chargé d'un gros arbre, dont le poids donnerait trop de peine à un homme seul pour le ramener de l'autre façon.

De quelle manière le moulin s'arrête de lui-même lorsque la pièce est sciée sur toute sa longueur.

PLANCHES 1 ET 2. FIGURES 8 et 10.

692. Pour montrer de quelle manière la machine cesse d'agir lorsque la scie a parcouru la pièce qu'on veut débiter, on remarquera dans la 8e fig. que la vanne 2, qui doit répondre à la roue à aubes, se lève et se baisse à l'aide d'un levier 5 6, qui passe à travers le poteau 4, où il est maintenu par un boulon qui lui sert de point d'appui. Lorsque la vanne est levée et que la roue tourne, l'extrémité 6 du levier est contrainte de rester dans la situation où on la voit, par le moyen d'une corde qui y est attachée, à l'autre bout de laquelle il y a un anneau accroché à un déclit pratiqué à l'endroit 7 dans l'épaisseur d'un montant de la coulisse de la scie. Or, si l'on considère la 10e fig., on verra que vis-à-vis du même montant 7 on a attaché au chevet *i* une bande de fer X, qui venant à appuyer contre le déclit lorsque cette extrémité du chariot est arrivée jusques-là, l'anneau qui est à la corde du levier 5 6 échappe le levier, et la vanne baisse par l'action du poids 8 qu'on y a suspendu. Alors le passage de l'eau étant interrompu, la roue cesse de tourner, et toute la machine demeure immobile.

De quelle manière la machine fait avancer la pièce que l'on veut scier.

FIG. 1, 2, 4 et 7.

693. Pour amener le bois que l'on veut scier du pied de la rampe jusques sur le chariot où il doit être posé, on se sert de la lanterne R et du treuil S de la quatrième figure, comme nous l'avons dit plus haut. Le tourillon qui répond à l'extrémité 15 repose sur un chevalet, et celui qui est à l'autre extrémité, tourne dans une pièce de bois de bout, exprimée par le nombre 12 dans la septième figure, sur laquelle je m'arrêterai un moment. Cette pièce 12 repose sur une semelle 16, à laquelle elle est attachée par une charnière 11. Vers le milieu est attaché encore avec une charnière un bout de solive, ou clapet 10, qui repose sur un talon 13. Quand on veut que la lanterne R tourne, la pièce 12 est maintenue comme on la voit sans pouvoir se déranger, parce que d'un côté elle est appuyée contre le plancher du moulin à l'endroit 17, et de l'autre contre le poteau 18, à l'aide du clapet 10; car le poteau 18 est immobile, étant attaché à demeure par ses extrémités. Alors les fuseaux de la lanterne s'engrenant avec les dents du rouet, le treuil tourne, et la corde file dessus en traversant le plancher par une fente pratiquée à l'endroit 19 de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fig., passe sur une poulie on un rouleau, et de-là va aboutir à un petit chariot marqué 20, chargé de la pièce que l'on veut scier, qu'elle attire depuis le pied de la rampe jusqu'au moulin; ce qui est un grand soulagement pour les ouvriers, sur-tout quand il est question de gros arbres qu'on ne pourrait transporter qu'à force de bras, au lieu que par ce moyen les bois en grume étant rendus sur le chantier, un homme seul, pour peu qu'il sache se servir du levier et de la pince, les pose sur le chariot 20 qui est fort bas, les manœuvre et les débite aisément. Quand le chariot est arrivé, on détache la corde qui y était accrochée, on va à l'endroit 14 de la deuxième figure, où l'on voit que le plancher est percé. Pour empêcher que le treuil qui attire la pièce ne tourne davantage, on écarte vers la droite la pièce 12 de la septième figure pour séparer la lanterne du rouet, après avoir tiré la corde 21 qui sert à lever le clapet 10. Alors on appuie la pièce 12 contre le bord opposé du plancher, où elle reste jusqu'à ce que la nécessité oblige à la redresser; et tout cela se fait sans être obligé de descendre dans la cave.

Voilà en général tout le mécanisme de ces sortes de moulins, qui est des plus simples, puisqu'il n'y a d'autre sujétion que de placer sur le chariot des coulisses la pièce que l'on veut scier, d'accrocher l'anneau au déclit qui interrompt le mouvement au moment qu'il doit cesser, et d'approcher ou d'éloigner du rouet la lanterne qui amène le bois à la porte du moulin : la machine est chargée du reste.

Détail de ce qui appartient à la scie. Pl. 2, Fig. 8.

694. Ayant passé légèrement sur plusieurs articles qui, pour être bien entendus, demandent un peu de détail, je vais le faire en commençant par ce qui appartient à la scie. Considérant dans la 8^{e} fig. les *jumelles* 22, 23 dans lesquelles sont pratiquées les coulisses, on verra qu'elles sont attachées en-haut et en-bas à deux poutres du moulin avec des boulons, et que le châssis de la scie est maintenu de chaque côté dans la coulisse par trois *clefs* marquées 21. Ces clefs, qui sont de bois, traversent les deux jumelles et sont retenues derrière avec des *clavettes*, afin de pouvoir les ôter quand on veut faire quelque réparation au châssis de la scie : les deux *montants* V, X du châssis de la scie ne touchent pas immédiatement contre l'épaisseur des jumelles 22, 23 qui forment les coulisses, parce qu'il y a entre deux une règle d'environ 10 lignes d'épaisseur. Ces règles sont mises pour pouvoir être renouvelées lorsque le frottement du châssis de la scie les ayant usées, il se trouve avoir trop de jeu et n'agit pas bien perpendiculairement, au lieu que sans cela il faudrait le réparer assez souvent.

On remarquera aussi que ce châssis a par le haut deux entretoises 24 et 25, qu'il n'y a que la première 24 qui soit attachée fixement à tenons et mortoises avec les deux montants; au lieu que la seconde 25, à laquelle répond la scie, a deux tenons qui peuvent monter et descendre dans les

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rainures pratiquées dans l'épaisseur des montants sur la hauteur d'un pied seulement, et l'on y introduit ces tenons par le moyen d'une entaille faite à l'endroit 26, sans être obligé de démonter le châssis. Ces entretoises sont traversées par deux vis 27, posées la tête en bas sous la seconde 25; et au-dessus de la première 24, il y a un écrou à chaque vis, que l'on fait tourner avec une clef de fer pour attirer l'entretoise 25 contre la supérieure 24 pour bander la scie. J'ajouterai que cette scie est plus large en haut qu'en bas, afin qu'à mesure que les dents descendent elles puissent pénétrer davantage dans le bois.

La châsse qui joint la manivelle avec la scie doit avoir 8 pieds de longueur entre les deux points autour desquels elle agit, quoiqu'elle n'en ait guère que 5 dans le dessin, parce que dans les fig. 1re et 3e on a donné trop de hauteur aux chevalets qui portent le rouet et les lanternes. Il faudra les abaisser, afin que la châsse YQ manœuvre avec plus d'aisance, et afin que l'obliquité où elle se rencontre lorsque le coude de la manivelle est horizontal, soit le moins sensible qu'il est possible, pour que la direction de la puissance qui élève la scie ne s'éloigne que peu de la perpendiculaire : c'est à quoi je n'avais pas fait attention en traçant ces figures.

PLANCHE 2. FIGURES 5 et 8.

Le bras de levier *ac* dans la 5e fig. a 6 pieds de longueur depuis le centre du mouvement de l'essieu *a* jusqu'à la verge de fer *cf*, qui a 22 pouces de long. La distance du centre de mouvement de l'essieu au centre de mouvement de la charnière *d* est de 6 pouces, et la distance depuis ce dernier centre jusqu'au fond du cran où l'extrémité du pied de biche tourne la roue, est de 11 pieds 6 pouces. Quand la scie est en repos, le levier *ac* est dans une situation horizontale.

Proportions qu'il faut donner à la roue dentée et à la hampe du pied de biche qui la fait tourner.

695. La roue Z doit être de 3 pieds 4 pouces de diamètre, y compris l'épaisseur du cercle de fer. Ce cercle doit avoir 384 crans de 4 lignes de largeur et 2 $\frac{1}{2}$ de hauteur. Il est à propos que les angles des crans dans lesquels appuie le pied de biche et le déclit soient un peu aigus, pour éviter que les crans n'échappent. Chaque fois que la scie monte, cette roue avance de deux crans. Pour en voir la raison, jetez les yeux sur

PL. 3, FIG. 5.

la fig. 5e, pl. 3e, qui n'est autre chose qu'une répétition de la 5e de la pl. 2e, que je n'ai exprimée que par de simples traits, pour qu'on pût mieux apercevoir ce qu'il m'a paru nécessaire d'insinuer. On y remarquera que le point E exprime le centre de mouvement de l'essieu ABCD qui fait tourner la roue dentée; que lorsque le bras de levier EF qui répond au châssis G de la scie est horizontal, on a un triangle EDH formé par la ligne ED de 6 pouces (qui marque la distance du centre du mouvement E au centre D de la charnière de la hampe du pied de biche), par la ligne DH de 11 pieds 6 pouces (qui exprime la distance du point D à l'endroit où le pied de biche touche la roue Z, quand elle est en repos), et par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la ligne EH de 11 pieds 11 pouces 4 lignes (qui marque la distance du centre E au même point H). Or, on fera attention que quand l'extrémité F de la verge de fer est montée de 30 pouces, qui est le chemin de la scie, le treuil prend une autre situation. Le point D tombe en M, parce que les deux lignes ED et DH n'en font plus qu'une seule EI de 12 pieds: alors le point H tombe en I par le mouvement que le pied de biche fait faire à la roue, la ligne EI devient plus grande que la ligne EH de la valeur de deux crans. C'est de quoi il est aisé de se convaincre en faisant attention que les angles DEH et LE*f* sont égaux, le premier étant formé par la descente de la scie, et le second par sa montée; que le triangle rectangle EL*f* ayant le côté E*f* de 5 pieds 7 pouces, et le côté *f*L de 30 pouces, l'angle LE*f* se trouve de 26 degrés 24 minutes. Or le triangle DEH ayant un angle de la même valeur, on verra par le calcul que le côté EH est nécessairement plus petit de 8 lignes que la somme des deux autres côtés ED et DH.

Il est à propos de faire le côté DH un peu plus long que nous ne l'avons supposé, quand ce ne serait que de deux lignes, n'étant guère possible que les deux côtés ED et DH puissent former une ligne parfaitement droite, quoique la scie soit arrivée au sommet des coulisses, ce qui pourrait empêcher que le point H ne fasse un chemin exactement de 8 lignes; au lieu qu'avec cette précaution on sera sûr que le pied de biche fera toujours tourner la roue de deux crans, et qu'il ne manquera pas d'accrocher l'extrémité du second, qui pourrait quelquefois échapper sans cette précaution.

Si sur le prolongement de la ligne HD on fait le triangle rectangle EKD, l'angle FEK pourra être pris pour un levier recourbé dont le point d'appui est en E. Alors la puissance qui agit sur l'extrémité F sera à celle qui pousse la roue Z selon la direction KH dans le premier instant de son action, comme EK est à EF, c'est-à-dire à-peu-près comme 1 est à 26. Ce qui fait voir que la roue Z est poussée avec 26 fois plus de force que n'en a la puissance qui fait avancer le chariot, dont l'action va toujours en diminuant à mesure que l'extrémité F du grand bras de levier monte, à proportion que la perpendiculaire EK diminue, tant que les deux côtés ED et DH ne forment qu'une même ligne.

Détail des parties du chariot qui fait avancer la pièce qu'on veut scier.

PLANCHE 2. FIG. 6, 9, 10.

696. Le chariot a ici 30 pieds de longueur, mais on peut lui en donner davantage pour le proportionner à celle des plus grandes pièces qu'on veut débiter. Comme il y en a une partie à découvert, qui n'est point renfermée dans le moulin, qui n'a que 36 pieds, on voit dans la 1re et 2e fig. de la planche 1re, que le plancher s'étend en dehors à droite et à gauche, et que du côté B il y a une espèce de pont. Les dents du chariot doivent avoir environ 18 lignes de hauteur, 16 de largeur à la racine, et autant d'épaisseur: il y en a 24 à la toise. Les lanternes où elles engrènent

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ont 10 pouces de diamètre, et 8 fuseaux de 16 lignes de diamètre : elles sont liées par des cercles de fer.

Pour diminuer le frottement chaque brancard est porté par des roulettes de fonte posées de 4 en 4 pieds, qui ont un pouce d'épaisseur sur 4 de diamètre; l'épaisseur de l'essieu est d'un demi-pouce. Elles ne paraissent point en dehors, étant pratiquées dans l'épaisseur du bois, et n'excèdent le dessous des brancards que d'environ 4 lignes. Pour empêcher aussi le frottement des faces du brancard contre les joues des coulisses, on a placé encore des roulettes de revers dans les mêmes brancards, lesquelles tournent horizontalement, et n'excèdent que d'environ 2 lignes; elles ont 3 pouces de diamètre sur 1 d'épaisseur.

Dimensions des principales parties du moulin.

697. La grande roue doit avoir 5 pieds $\frac{1}{4}$ de rayon aboutissant au centre d'impression des aubes, et son arbre 16 pouces; le rouet 2 pieds $\frac{1}{2}$ de rayon et 32 dents; les lanternes chacune 8 pouces de rayon. Elles doivent avoir 8 fuseaux, chacun de 2 pouces 9 lignes de diamètre. Les autres parties, dont je ne donne point les dimensions, seront faciles à connaître avec le secours des échelles relatives aux figures.

La résistance que la puissance motrice doit surmonter, se réduit à enlever le poids du châssis de la scie.

698. Comme la puissance motrice, c'est-à-dire le courant qui fait tourner la roue, est principalement employée à donner le mouvement à la scie, l'effort qu'elle a à surmonter répondra immédiatement à la manivelle. Or, comme la scie ne travaille que lorsqu'elle descend, et non pas quand elle monte, si l'on suppose cette puissance en équilibre avec le poids du châssis de la scie et celui de la châsse qui communique le mouvement, la difficulté se réduira à élever ce poids à chaque tour de manivelle, c'est-à dire, à faire monter la scie, et quand elle sera parvenue à son plus haut point, elle descendrait d'elle-même par l'action de son propre poids, et avec plus de vîtesse que n'en peut avoir la manivelle, si elle ne trouvait rien qui lui fût opposé. Cependant si les dents rencontrent en chemin une pièce de bois, elles s'accrocheront aux fibres, et le temps de la descente de la scie sera d'autant plus retardé que ces fibres seront en plus grand nombre, c'est-à-dire que le bois aura plus d'épaisseur. Le nombre de ces fibres pourrait même être tel que la somme de leur résistance à être rompues se trouverait en équilibre avec l'action du poids de la scie, indépendamment de la force motrice. Mais si cette force est jointe à celle du poids de la scie, comme elle s'y joint en effet pour la faire descendre, alors l'équilibre sera rompu et les fibres seront divisées fort promptement. Car comme la force qui les sépare sera double de ce que nous venons de la supposer, elle pourrait être en équilibre avec un nombre de fibres double, parce qu'on peut regarder la force de la manivelle, prise indépendamment de sa vîtesse, comme un poids qu'on aurait ajouté à celui de la scie. Cependant la vîtesse de la manivelle étant une force réelle (99) qui détruira l'équilibre, il s'ensuit que toutes les fibres seraient rompues

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

avec une vîtesse égale à celle que la scie a eue en montant, quoique la pièce à scier eût une épaisseur double.

699. Si l'on fait abstraction des frottements, il suit de ce que nous venons d'insinuer que lorsque la pesanteur de la scie sera en équilibre avec les $\frac{4}{9}$ de la force absolue du courant réduite au coude de la manivelle, ce qui est le cas du plus grand effet (589), la scie en descendant aura, indépendamment de sa vîtesse, une force équivalente aux $\frac{8}{9}$ de celle du courant (*eh*).

Dans le cas du plus grand effet, la scie, en descendant, aura une action équivalente à celle des $\frac{8}{9}$ de la force absolue du courant.

Pour faire voir l'exactitude que l'on peut apporter dans le calcul des

---

(*eh*) L'explication du jeu de la scie contenue dans ces deux articles ne paraît pas très-nette, et la conclusion du dernier n'est point exacte. Je vais tâcher d'établir sur ce sujet des notions mieux fondées.

Erreur des art. 698 et 699.—Détermination exacte de l'action que le moteur doit exercer dans le sciage du bois.

Au moyen de la manivelle la scie est soulevée et abaissée alternativement. Pendant sa montée elle n'agit point sur le bois. Pendant sa descente elle le coupe, et éprouve une résistance qu'elle doit vaincre. Or pour évaluer l'action du moteur, il ne faut point avoir égard à l'élévation du poids de la scie, car ce poids, en descendant, rend à la machine une quantité d'action parfaitement égale à celle qu'a exigée sa montée. Si a pesanteur de la scie était nulle, l'effort du moteur serait diminué pendant la montée; mais il serait augmenté d'autant pendant la descente. Ainsi, abstraction faite des frottements, le moteur n'a ici d'autre fonction à faire que de vaincre la résistance que la scie éprouve pendant qu'elle coupe le bois.

Cette résistance varie probablement avec la vîtesse de la scie; mais si, pour plus de simplicité, on considère sa valeur moyenne représentée par F, et qu'on nomme h la hauteur verticale parcourue par la scie à chaque oscillation, la quantité d'action consommée par la machine pendant un tour de la manivelle sera, abstraction faite des frottements, exprimée par Fh. J'observerai maintenant que, suivant la grandeur du poids de la scie, cette quantité d'action Fh à dépenser pendant chaque tour de la manivelle pourra être répartie différemment sur la durée de cet intervalle. Il est évident d'abord qu'il ne peut jamais y avoir que du désavantage à donner à la scie un poids plus grand que la résistance F. Si ce poids est précisément égal à F, alors il faudra que pendant la montée de la scie le moteur soulève ce poids, et pendant sa descente il n'aura aucun effort à faire. Si le poids de la scie est plus petit que F, et égal par exemple à $F-F'$, pendant la montée le moteur soulevera le poids $F-F'$, et pendant la descente il exercera de haut en bas l'effort F'. On voit donc qu'en diminuant le poids de la scie, on tend à régulariser l'action du moteur, et cette action sera aussi régulière et constante que le comporte la nature de la machine, si $F-F'=F'$, ou si le poids de la scie $=\frac{1}{2}F$.

Mais quelque inégal que soit d'ailleurs l'effort à exercer par le moteur, considéré a l'extrémité du coude de la manivelle, les volants que l'on place sur son axe, ou la roue à eau qui en fait fonction, régularisent le mouvement, et la vîtesse de cette roue devient sensiblement constante. L'effort du moteur considéré sur les aubes de la roue à eau est donc aussi sensiblement constant, et par conséquent, en faisant toujours abstraction des frottements, on doit lui attribuer une valeur moyenne P,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

machines, lorsqu'on veut prendre la peine de les examiner de près, nous ne négligerons rien de tout ce qui mérite attention dans celle dont nous parlons, sur-tout à l'égard des frottements.

Puisque la scie en montant fait avancer le chariot, la puissance qui fait monter la scie a donc quelque chose de plus à surmonter que le poids de la scie. Quand il n'y aurait que cette seule difficulté, on ne pourrait pas dire que le poids de la scie, dans le cas du plus grand effet, peut être exprimé par les $\frac{4}{9}$ de la force absolue du moteur, réduite au coude de la manivelle. Nous commencerons donc par rechercher quelle est la force capable de faire avancer le chariot, que nous supposerons chargé du plus grand fardeau qu'il puisse jamais porter; et, pour plus d'intelligence, le lecteur ne ferait pas mal de revoir les articles 282, 283, 284, qui ont été rapportés exprès pour le cas dont il s'agit.

Calcul de la force qu'il faut pour faire avancer le chariot, lorsqu'il est chargé du plus gros arbre que la scie puisse jamais débiter.

700. Nommant p le poids du chariot, y compris celui de l'arbre dont il est chargé, $\frac{1}{3}p$ exprimera le frottement des roulettes contre leur essieu (256), qu'il faut multiplier par $\frac{19}{18}$ à cause de l'engrènement de la lanterne et des dents du chariot (290); ensuite multiplier ce premier produit par $\frac{1}{8}$, rapport du rayon de l'essieu à celui des roulettes (696); ce second produit par $\frac{1}{4}$, rapport du rayon de la lanterne à celui de la roue dentée (695,696); et ce troisième produit par $\frac{1}{26}$, rapport des bras du levier du tourniquet (695): on aura $\frac{1}{3}p \times \frac{19}{18} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{26} = \frac{19p}{44928}$, qui, étant réduit, donne $\frac{p}{2891}$ (*ei*).

Pour avoir la valeur de p, nous supposerons que le chariot a 50 pieds

---

telle qu'en la multipliant par l'espace p que parcourra son point d'application pendant que la manivelle fera un tour, on ait $Pp = Fh$, d'où $P = \frac{Fh}{p}$.

On voit donc que l'effort P du moteur est absolument indépendant du poids de la scie. La relation que l'auteur veut établir entre ce poids, et l'effort du courant sur les aubes de la roue, n'est donc en général fondée sur rien, et de plus cette relation est déduite de principes dont l'inexactitude a été remarquée dans la note (*da*).

Indication des recherches d'Euler sur l'action des scies.

Euler a donné (*Mémoires de l'académie de Berlin*, 1756) des recherches ingénieuses sur l'action des scies. Il ne m'a pas paru qu'on pût en déduire aucune modification utile à apporter aux scies qui sont en usage. Mais il faut retenir ce résultat : qu'il n'y aurait aucun avantage à faire en sorte que les scies parcourussent librement une portion de leur descente, afin de commencer à agir sur le bois avec une vîtesse finie. La longueur de la partie dentée de la lame doit toujours être au moins égale à l'espace parcouru verticalement, augmenté de l'épaisseur du bois à couper.

Rectification du calcul de l'art. 700.

(*ei*) Ce calcul n'est point fait avec exactitude. La pression qui a lieu sur les axes des roulettes se compose du poids du chariot, et de l'effort horizontal qui s'exerce pour le faire avancer. Par conséquent, en appelant q cet effort, et f le rapport du frottement à la pression, la résistance provenant du frottement sera $f\sqrt{p^2+q^2}$. On

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de longueur, pour porter un arbre aussi de 50 pieds, et dont le diamètre serait de 36 pouces, afin de prendre les choses à l'extrême. Alors le chariot sera composé de 8 solives, et l'arbre en contiendra 113, ce qui fait ensemble 378 pieds cubes, qui étant multipliés par 70 liv., pesanteur d'un pied cube de bois lorsqu'il n'est pas sec, il vient $p = 26460$ liv.; lesquelles étant divisées par 2891, donnent environ 9 liv. pour la plus grande force qu'il faudra jamais au-delà du poids de la scie pour faire avancer le chariot, et qui peut être réduite à 2 liv. dans l'usage ordinaire, où il est rare d'avoir des bois à débiter qui aient plus de 30 pieds de long sur 18 pouces en quarré. Je ne m'arrête point au frottement de l'essieu de la roue Z ni à celui du tourniquet, qui se réduisent à si peu de chose, que la puissance qui fait avancer le chariot n'en serait augmentée que d'environ 2 onces.

Pour faire voir qu'un même mouvement peut être exécuté de différentes façons, en voici une de disposer la manivelle qui fait agir la scie, qui nous donnera lieu à exprimer d'une manière plus sensible l'action de la châsse, et le frottement du châssis de la scie contre les coulisses; car que le jeu de cette châsse se fasse dans le plan de la scie ou dans le plan de son châssis, le frottement contre les coulisses sera toujours le même.

Si l'on considère la fig. 6^{e} de la planche 3, on verra que la lanterne A s'engrène avec les dents du rouet O, posées sur son plan. Ainsi la manivelle B tournera de C en D, et pour cela il faut que la châsse soit unie à ce châssis, comme on l'a marqué dans la 4^{e} fig. de la même planche. Pl. 3, Fig. 6.

701. Voici une occasion d'appliquer ce qui a été enseigné dans l'article 109 au sujet de la manivelle simple. Si l'on suppose que la ligne AB représente l'entretoise inférieure du châssis de la scie, et la verticale IG la châsse; lorsque le coude FG de la manivelle est au plus bas d'une de ses révolutions, la pesanteur du châssis de la scie tiendra lieu du poids suspendu à la poignée de cette manivelle. Ainsi la puissance qui fera monter la scie à la hauteur GQ ou IN ira alors en croissant, et elle ira en décroissant quand le point G décrira le demi-cercle GHQ. Or le plus grand effort de cette puissance sera lorsque le coude de la manivelle se trouvera dans la situation horizontale FH (108), et la châsse dans la direction oblique HE. D'où il suit qu'il faudra prendre pour bras de levier moyen du poids la ligne FM égale aux deux tiers du rayon FH, selon ce qui a été remarqué dans l'article 105: et comme ce rayon est de 15 pouces, le bras de levier moyen du poids sera donc de 10. Examen de l'action de la manivelle qui communique le mouvement à la scie. Pl. 3, Fig. 1.

702. Comme la châsse qui communique le mouvement à la scie n'agit Le poids de la

---

aura donc, puisque le rayon de l'axe est le $\frac{1}{5}$ de celui de la roulette, l'équation $q = \frac{1}{5} f \sqrt{p^2 + q^2}$, d'où l'on déduirait la véritable valeur de q. Il ne faudrait point faire $f = \frac{1}{4}$, mais employer les valeurs indiquées dans le tableau de la p. 132.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

scie doit être moindre que la force de la puissance qui serait appliquée aux deux tiers du coude de la manivelle.

pas selon une direction verticale dans le temps que la manivelle décrit le demi-cercle GHQ, s'il y avait une puissanee qui se servît de cette châsse, comme d'un rayon solide, pour faire monter le poids en parcourant le même chemin que la manivelle, cette puissance aurait besoin d'une force d'autant plus grande que sa direction serait plus oblique au châssis, et quand elle serait arrivée au point H, l'angle d'incidence HER étant alors le moindre de tous, sa force absolue serait à sa force relative, comme le sinus total HE est au sinus HR (23). Mais comme cet angle croîtra à mesure que la scie montera, on voit qu'il doit y avoir un certain angle d'incidence PST, où le sinus PT tiendra un milieu entre le plus grand et le plus petit; ce qui arrivera lorsque celui de son complément ST tiendra aussi un milieu entre tous ceux que comprend le quart de cercle FHQ. Or comme ce dernier n'a cette propriété que quand il est égal à FM, bras de levier moyen du poids, il suit que lorsque ST ou OP sera les deux tiers du rayon FH (105), en prenant PS pour exprimer la puissance uniforme appliquée au bras de levier, la verticale OS exprimera le poids de la scie.

Examen du frottement du châssis de la scie contre les coulisses.

703. La puissance ne pouvant agir selon une direction oblique sans pousser de côté le châssis de la scie selon une direction TS perpendiculaire à la coulisse VX, avec une force exprimée par le sinus ER ou ST du complément de l'angle d'incidence; et cette pression étant variable, celle qui tiendra un milieu entre la plus grande et la plus petite sera exprimée par le sinus ST ou OP. Le frottement que cette pression fait naître le sera par le tiers du même sinus, lorsque la puissance qui doit le surmonter agira selon une direction verticale (228). Ainsi faisant OC égal au tiers de OP, et achevant le triangle rectangle CSD, le côté CS exprimera le poids et le frottement du châssis de la scie, et le côté DS la puissance qui surmonte l'un et l'autre, lorsqu'on la considérera comme agissant uniformément, et appliquée aux deux tiers du coude de la manivelle (105).

Le poids de la scie doit être à la puissance qui serait appliquée aux deux tiers du coude de la manivelle, dans le rapport de 30 à 31.

Remarquez que la ligne OP sera de 10 pouces puisqu'elle est égale à FM, et que la ligne PS sera de 8 pieds ou de 96 pouces, puisqu'elle est égale à la longueur de la châsse. Prenant donc OP pour le sinus total, PS pour la sécante de l'angle OPS, la ligne OS en sera la tangente. Ainsi on pourra dire: Comme OP, de 10 pouces, est à 100000, sinus total; ainsi PS, de 96 pouces, est à la sécante, qu'on trouvera de 960000, laquelle répond dans les tables des sinus à une tangente de 954106. Ajoutant à ce nombre le tiers du sinus total, c'est-à-dire 33333, on aura 987439 pour l'expression de la ligne SC, qu'on peut regarder comme la tangente de l'angle SDC, laquelle répond dans les tables à une sécante DS de 992389. Ainsi le rapport de SO à SD sera le même que celui de 954106 à 992389. C'est pourquoi nommant SO r, et SD t, on aura $\frac{r}{t} = \frac{954106}{992389}$, ou à-peu-près

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{r}{t} = \frac{30}{31}$, dont le numérateur exprimera le poids de la scie, et le dénominateur la puissance capable de surmonter ce poids et le frottement contre les coulisses.

Comme la manivelle décrira le demi-cercle Q N G quand la scie descendra, et que la puissance aura les mêmes variations que celles que nous venons d'observer (109), je ne m'y arrête point, pour ne rien dire d'inutile. On observera seulement que quand la scie descend, le plus grand frottement du châssis se fait contre la coulisse Y Z, au lieu que nous venons de voir qu'en montant, ce frottement se faisait contre l'autre.

Manière de découvrir quel doit être le poids de la scie et de son équipage dans le cas du plus grand effet.

704. Il nous reste à déterminer quel doit être le poids de la scie et de son équipage pris ensemble, ce que nous allons faire d'abord par le calcul littéral, afin d'avoir une formule générale qu'on puisse appliquer à tous les moulins à scier. Mais avant que d'en venir là, il faut être prévenu que la hauteur moyenne de l'eau qui doit faire aller la roue est de 6 pieds 6 pouces 6 lignes, ce qui répond dans la première table à une vîtesse de 19 pieds 9 pouces 8 lignes par seconde, et dans la troisième, à un choc de 458 liv. par pied quarré. Et comme on suppose les aubes de 2 pieds de superficie, la force absolue du courant sera de 916 liv., dont prenant les $\frac{4}{9}$ pour le plus grand effet, la puissance motrice sera de 407 liv. (589, 590, 595). Cela posé, voici le nom et la valeur de toutes les grandeurs qui doivent entrer dans le calcul.

$a =$ 5 pieds $\frac{1}{4}$, rayon de la roue.

$b =$ 2 pieds $\frac{1}{2}$, rayon du rouet.

$d =$ 10 pouces, coude de la manivelle réduit.

$f =$ 8 pouces, rayon de la lanterne.

$c =$ 9 lignes, rayon des tourillons de la roue et de l'essieu de la lanterne.

$g =$ 2500 livres, poids de la roue, du rouet et de l'arbre qui leur est commun.

$h =$ 240 livres, poids de la lanterne, y compris celui de l'essieu et de la manivelle.

$p =$ 407 livres, valeur de la puissance motrice.

$q =$ 9 livres, expression de la force qui fait avancer le chariot.

$\frac{m}{n} = \frac{19}{18}$, frottement du rouet et de la lanterne.

$\frac{r}{t} = \frac{30}{31}$, rapport du poids de la scie, à la force absolue de la puissance qui répond à la manivelle.

$x =$ poids de la scie.

$y =$ force absolue de la puissance qui répond à la manivelle, laquelle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

étant multipliée par $\frac{30}{31}$, donnera un produit égal au poids de la scie, joint à la force qu'il faut pour faire avancer le chariot; par conséquent $x+q=\frac{30}{31}y$.

Pl. 1, Fig. 4. On doit regarder le rayon de la lanterne P et le coude de la manivelle Q, lorsqu'il est horizontal, comme un levier droit. Ainsi y exprimant la puissance appliquée aux deux tiers du coude de la manivelle (105), multipliant cette puissance par son bras de levier et divisant le produit par le rayon de la lanterne, il vient $\frac{dy}{f}$ pour l'action des dents du rouet sur les fuseaux de la lanterne. Et comme h exprime le poids de la lanterne et de son essieu, ajoutant ces trois termes ensemble, on aura $y+\frac{yd}{f}+h$ pour la pression que cause l'essieu de la lanterne, dont il faut prendre la moitié pour le frottement (250); laquelle étant multipliée par le rayon de l'essieu et le produit divisé par le rayon de la lanterne, donne $\frac{cdy}{2ff}+\frac{cy}{2f}+\frac{ch}{2f}$ pour ce frottement réduit aux fuseaux de la lanterne ou aux dents du rouet. A quoi ajoutant la force $\frac{d}{f}y$, multipliant le tout par le rayon du rouet, et ensuite le produit par $\frac{m}{n}=\frac{19}{18}$ à cause du frottement des dents et des fuseaux (290), il vient $\frac{m}{n}\left\{\frac{b}{f}\left(d+\frac{cd}{2f}+\frac{1}{2}c\right)y+\frac{bch}{2f}\right\}$; à quoi il faut ajouter le frottement des tourillons de la roue, c'est-à-dire la moitié de la force précédente, plus la moitié de la puissance motrice (251), plus le tiers du poids de la roue (650), le tout multiplié par le rayon des tourillons pour avoir une quantité égale au produit de la puissance motrice par son bras de levier. Par conséquent on aura $\frac{m}{n}\left\{\frac{b}{f}\left(d+\frac{cd}{2f}+\frac{1}{2}c\right)y+\frac{bch}{2f}+\frac{c}{2f}\left(d+\frac{cd}{2f}+\frac{1}{2}c\right)y+\frac{c^2h}{4f}\right\}+\frac{1}{2}cp+\frac{1}{3}cg=ap$, et en multipliant par $2f$ et divisant par c, on a $\frac{m}{n}\left\{\frac{2b}{c}\left(d+\frac{cd}{2f}+\frac{1}{2}c\right)y+bh+\left(d+\frac{cd}{2f}+\frac{1}{2}c\right)y+\frac{1}{2}ch\right\}+f\left(p+\frac{2}{3}g\right)=\frac{2fap}{c}$. Faisant passer $f\left(p+\frac{2}{3}g\right)$ du premier membre dans le second, et divisant toute l'équation par $\frac{m}{n}$, on aura

$\left(\frac{2bd}{c}+\frac{bd}{f}+b+d+\frac{cd}{2f}+\frac{1}{2}c\right)y+bh+\frac{1}{2}ch=\frac{nf}{m}\left(\frac{2ap}{c}-p-\frac{2}{3}g\right)$, d'où dégageant l'inconnue, il vient enfin $y=\frac{\frac{nf}{m}\left(\frac{2ap}{c}-p-\frac{2}{3}g\right)-bh-\frac{1}{2}ch}{\frac{2bd}{c}+\frac{bd}{f}+b+d+\frac{cd}{2f}+\frac{1}{2}c}$ $=\frac{495216}{878}$. Divisant donc 495216 par 878, on trouvera à-peu-près 564 liv.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pour la valeur de y, laquelle étant multipliée par $\frac{30}{31}$, donne 546 livres, d'où retranchant 9 livres, valeur de q, reste 537 livres pour x, poids de la scie y compris celui de son équipage, dont toutes les parties doivent avoir leurs dimensions proportionnées, de façon que le poids du bois et des ferrures soit à-peu-près de 537 livres.

Manière de calculer le chemin que le chariot fera dans un temps déterminé, par conséquent le progrès de la scie.

705. Ayant dit que la vîtesse du courant était de 19 pieds 9 pouces 8 lignes par seconde, (704), elle sera par conséquent de 1188 pieds 9 pouces par minute, dont le tiers est 396 (595): pour savoir le nombre de tours que la roue fera dans le même temps, je considère que cette roue ayant 10 pieds $\frac{1}{2}$ de diamètre (697) décrira à chaque tour une circonférence de 33 pieds. Divisant donc 396 pieds par le nombre précédent, il viendra 12 au quotient, ce qui fait voir que la roue fera 12 tours par minute dans le cas du plus grand effet.

Le rouet ayant 32 dents et la lanterne de la manivelle 8 fuseaux (697), une révolution du rouet en fera faire quatre à la lanterne; et comme il fait 12 tours par minute, la lanterne en fera 48. Ainsi la scie montera et descendra 48 fois dans le même temps, et à chaque fois qu'elle montera, le pied de biche fera avancer la roue Z de la valeur de deux crans. Cette roue en ayant 384 (695), il faudra que la scie monte 192 fois, ou qu'elle agisse pendant 4 minutes, pour lui faire faire un tour, aussi-bien qu'aux lanternes qui sont à son essieu. Ces lanternes ayant chacune 8 fuseaux, elles accrocheront 8 dents du chariot à chaque révolution pour le faire avancer de 2 pieds, parce qu'il y a 24 dents à la toise (696). Par conséquent la vîtesse du chariot sera de 6 pouces par minute, et la pièce qui est dessus sera sciée sur cette longueur; et comme elle reçoit 48 traits de scie dans le même temps, chacun sera d'une ligne et demie de profondeur.

Quel est le résultat du plus grand effet de ce moulin.

706. Ayant estimé par plusieurs expériences faites avec soin quel doit être le résultat du plus grand effet de ce moulin, j'ai trouvé qu'en le faisant aller avec trois scies, elles pouvaient en une heure de temps partager une poutre de 12 pouces d'épaisseur et de 30 pieds de longueur en quatre parties, c'est-à-dire en faire quatre plates-formes, chacune d'environ 3 pouces d'épaisseur sur 30 pieds de long. Que si au lieu de trois scies on n'en met que deux, elles iront bien plus vîte, et plus encore quand il n'y en aura qu'une, en supposant l'épaisseur du bois toujours la même; ce qui est bien naturel selon la loi générale des mécaniques, car ici l'effort que fait la scie est proportionné à la quantité des parties qu'elle accroche en descendant. Sur quoi il est à remarquer que deux scies qui agiraient ensemble sur une pièce de bois, par exemple de 10 pouces d'épaisseur, mettent autant de temps pour la débiter d'un bout à l'autre, qu'il en faut lorsque, n'ayant qu'une scie, elle agit sur une pièce de même

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

longueur mais qui aurait 20 pouces d'épaisseur. Par conséquent si au lieu de trois scies le moulin n'en faisait agir qu'une, on pourrait en une heure de temps, dans le cas du plus grand effet, partager en deux parties une pièce qui aurait 36 pouces d'épaisseur sur 30 pieds de longueur.

Quoique la vîtesse de la scie augmente à mesure que la pièce qu'elle débite a moins d'épaisseur, sa plus grande vîtesse doit pourtant être limitée, sans se prévaloir de la force du courant, de crainte que le frottement ne mette le feu à la machine, principalement au châssis et aux coulisses de la scie, comme cela est arrivé à celui de notre arsenal. Il m'a paru que la plus grande vîtesse que pouvait avoir la scie, était de monter et descendre 80 fois par minute; alors le chariot avance de 10 pouces dans le même temps (705).

Examen de la force que la puissance emploie à scier le bois, indépendamment des frottements et des autres accidents.

707. La force qui fait mouvoir le chariot n'ayant lieu que quand la scie monte, la puissance appliquée à la manivelle agira donc de haut en bas avec une force de 546 liv. (704), à quoi ajoutant 537 liv. pour le poids de la scie, il vient 1083 liv. pour la force équivalente à celle de la scie, lorsqu'elle descend. Or, comme dans le cas du plus grand effet, elle met à-peu-près autant de temps à monter qu'à descendre, il suit que les 48 traits qu'elle donne par minute se font en 30 secondes; et son chemin en descendant étant de 30 pouces, sa vîtesse par seconde sera de 4 pieds, lesquels étant multipliés par le nombre précédent, donnent 4332 pour la quantité de mouvement de la scie, ou son action sur le bois (85).

Comme entre la puissance motrice et le poids, il y a 4 bras de levier, multipliant le premier par le troisième, et le second par le quatrième, les produits seront comme 42 est à 25; raison réciproque du poids réel de la scie à la puissance motrice (74). Ainsi multipliant 537 par $\frac{25}{42}$, on a à-peu-près 320 liv. pour la force qu'il faudrait seulement à la puissance motrice, afin d'être en équilibre avec le poids de la scie. Soustrayant donc ce nombre de 407 (704), il reste 87 livres pour la force que cette puissance emploie à surmonter les obstacles et le frottement de toutes les parties de la machine. On peut donc dire que des 407 livres qui expriment le choc de l'eau, il n'y en a que 320 qui sont employées effectivement à scier le bois.

La vîtesse de la roue étant de 6 pieds 7 pouces $\frac{5}{3}$ de lignes par seconde (705), si on la multiplie par 320 livres, il viendra à-peu-près 2108 pour la quantité du mouvement de la puissance réduite; et comme nous venons de trouver 4332 pour celle du poids, on voit que l'action de la puissance est à son effet comme 2108 est à 4332, ou à-peu-près comme 1 est à 2. Cette machine a cela de singulier que son effet se trouve beaucoup au-dessus de l'action du moteur, au lieu qu'il arrive ordinairement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que c'est l'action du moteur qui est au-dessus de l'effet de la machine : mais aussi l'on perd le temps que la scie emploie à monter (*ek*).

(*ek*) D'après les observations faites dans la note (*eh*), on voit facilement que la marche suivie par l'auteur pour trouver les conditions de l'établissement de cette machine, indépendamment des défauts qu'on peut remarquer dans les détails du calcul, est entièrement erronée dans son principe. En effet, s'étant donné l'effort de l'eau sur les aubes de la roue, il cherche uniquement à faire en sorte que cet effort, lors de l'élévation de la scie, soit en équilibre avec le poids de cette scie. Il ne fait pas attention que quand la scie descend, l'action de son poids favorise le mouvement de la machine, et exerce alors, abstraction faite des frottements, une action égale à celle qui a été nécessaire pour le faire monter; en sorte que l'action du moteur n'est véritablement employée qu'à vaincre la résistance du bois que la scie coupe. C'est uniquement de la relation à établir entre cette résistance et l'action du courant d'eau, que doivent être déduites les conditions de l'établissement d'un moulin à scier.

Remarques sur le calcul de l'établissement du moulin à scier, commençant art. 704.

§. 1. Pour trouver ces conditions, il faut connaître la quantité d'action que le sciage du bois consomme. On n'a malheureusement sur ce sujet qu'un très-petit nombre d'observations, dont il n'est pas possible de déduire des résultats bien certains. Des données qu'on trouvera plus bas (art. 710), on conclut qu'un homme peut produire en une minute, dans du chêne vert, un trait de scie dont la surface est $0^{mq},00586$. D'après celles consignées dans le *Traité de l'art de la charpente* de M. Hassenfratz, tome 1, page 140, cette surface est $0^{mq},006$, ce qui n'en diffère pas sensiblement. Il s'agirait maintenant de savoir quelle quantité d'action les ouvriers développent dans ce genre de travail. Bélidor n'offre aucun renseignement qui puisse conduire à l'apprécier; mais M. Hassenfratz assure que les hommes exercent un effort de 13^{k}, parcourent à chaque coup un espace de $0^{m},8$, et donnent 50 coups par minute. La durée de leur travail journalier étant d'ailleurs de 12 heures, il résulte de ces données une quantité d'action journalière équivalente à $376000^{k\times m}$. Cette quantité d'action, si on la compare à celles indiquées dans le tableau de la page 396, paraîtra fort exagérée. Je me suis effectivement assuré que les scies employées par les scieurs de long ne pesaient moyennement qu'environ $6^{k},5$, et il paraît que l'effort ordinaire de ces ouvriers doit être à-peu-près égal à cette quantité. Car celui qui est placé sur la pièce soulève presque seul la scie, qui alors ne mord pas sur le bois : elle ne mord qu'en descendant, et c'est alors que l'ouvrier placé dessous la pièce exerce à son tour un effort qui doit être à-peu-près égal à celui du premier. En modifiant d'après cette donnée le calcul de M. Hassenfratz, la quantité d'action journalière se trouve réduite à moitié, c'est-à-dire à $187200^{k\times m}$. Ce nombre surpasse celui qui, dans le tableau de la page 396, représente la quantité d'action journalière produite par les hommes agissant sur une manivelle : cependant le sciage du bois est probablement un genre de travail plus pénible que l'action de tourner une manivelle. Mais comme les scieurs de long sont en général des hommes forts et très-exercés, et qu'il vaut mieux estimer la quantité d'action consommée par le sciage du bois au-dessus qu'au-dessous de sa véritable valeur, je m'en tiendrai au résultat ci-dessus. Les $187200^{k\times m}$ dépensées en 12 heures donnent pour une minute $260^{k\times m}$: et par conséquent, puisque la surface de sciage

Évaluation de la quantité d'action consommée par le sciage du bois.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

En faisant construire ce moulin, j'ai fait une réflexion essentielle qui m'avait échappé dans le projet. La vanne ayant 2 pieds 4 pouces de lar-

---

qu'un homme exécute dans une minute est $0^{mq},006$, il s'ensuit que l'exécution d'un trait de scie d'un mètre quarré de surface, dans du bois de chêne vert, consomme $\frac{260^{k\times m}}{0^{mq},006} = 43333^{k\times m}$ de quantité d'action. On déterminerait les quantités d'action consommées par le sciage d'autres bois, d'après les rapports indiqués art. 710.

Comparaison entre la quantité d'action consommée par le sciage du bois, et celle dépensée au moulin à scier de La Fère.

§ 2. On peut maintenant rapprocher ce résultat des observations faites par l'auteur sur le moulin de La Fère. D'après l'art. 706, le plus grand effet de ce moulin était en une heure une surface de sciage de 90 pi. qu. $= 9^{mq},497$, ce qui revient par seconde à $0^{mq},002638$. Quant à la quantité d'action qui lui était alors transmise par le courant d'eau, on peut, comme on l'a fait pour un cas semblable dans la note (*ds*), la calculer au moyen des formules données dans le § 3 de la note (*dn*), d'après lesquelles cette quantité d'action est exprimée pour une seconde, dans le cas du maximum d'effet, par $PV = \frac{1}{6}.1000\,\Omega H\sqrt{2gH}$ kil. × mèt. D'après les données du texte, la hauteur de la chute est $6^{pi.}\ 6^{po.}\ 6^{lig.} = 2^{m},13$. La vîtesse due à cette hauteur est $6^{m},46$; mais pour tenir compte des effets de la contraction, je prendrai seulement les 0,89 de cette quantité, c'est-à-dire que je supposerai $\sqrt{2gH} = 5^{m},75$, et par conséquent $H = 1^{m},69$. La surface des aubes $\Omega = 2$ pi. q. $= 0^{mq},211$. Mettant ces valeurs dans la formule précédente, on trouve pour la quantité d'action transmise en une seconde $342^{k\times m}$. Mais la surface de sciage exécutée dans une seconde étant $0^{mq},002638$, ce travail devait consommer, d'après ce qu'on a vu dans le § précédent, une quantité d'action $= 0^{mq},002638 \times 43333^{k\times m} = 114^{k\times m}$. D'où l'on conclut que l'effet utile était dans ce moulin le $\frac{1}{3}$ de la quantité d'action transmise à l'axe de la roue à aubes.

Il y a ici deux causes qui produisent une consommation inutile de la quantité d'action fournie par le moteur: 1° le mouvement à imprimer au chariot, et les frottements; 2° les secousses qui peuvent avoir lieu à chaque oscillation de la scie. Sans refaire en détail le calcul des frottements, on peut admettre qu'ils absorbent à-peu-près le $\frac{1}{8}$ de la quantité d'action transmise. Quant aux pertes résultant des secousses, elles ne peuvent être soumises au calcul d'une manière générale, car elles dépendent entièrement du degré de précision avec lequel la machine est exécutée, ou du jeu plus ou moins grand qu'on aura laissé dans les articulations, ainsi que de la régularité du mouvement. Si l'on observait la machine pendant qu'elle travaille, on pourrait s'en rendre compte avec une certaine précision, en déterminant la différence entre les vîtesses des pièces de la machine avant et après chaque secousse. La quantité d'action que cette secousse aurait fait perdre serait toujours numériquement égale à la moitié de la force vive due aux différences de vîtesse qu'on aurait observées (voyez la note (*ai*), § 8); c'est-à-dire à la moitié de la somme des produits des masses de chaque pièce par le quarré de la vîtesse qu'elle aurait perdue ou gagnée par la secousse. Mais comme ces changements brusques de vîtesse n'auraient pas lieu si la machine était bien faite, et le mouvement des roues bien uniforme, il est impossible de les apprécier d'avance. On voit seulement, en admettant les résultats précédents, et supposant la vîtesse de l'eau bien estimée, que la quantité d'action consommée par les secousses était dans le moulin de La Fère

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

geur, et devant soutenir quand elle est baissée environ 7 pieds de hauteur d'eau, sa poussée contre les coulisses sera d'environ 4000 liv., qui

---

presque double de celle employée à l'effet utile, et ce résultat pourra ne point étonner les mécaniciens qui savent combien les mouvements alternatifs font perdre de quantité d'action, toutes les fois que les pièces des machines ne sont pas exécutées avec une grande précision, et que le mouvement n'est pas régularisé par de puissants volants.

Observation sur l'art. 707.

J'ajouterai quelques mots sur la comparaison que l'auteur fait dans l'art. 707 entre *l'action de la puissance* et son *effet*. Il estime l'action de la puissance par le produit de l'effort exercé sur les aubes et de leur vîtesse, ce qui est exact. Mais il se trompe en estimant l'effet par le produit de la force qui tire la scie quand elle descend et de sa vîtesse. Pour estimer ici l'effet convenablement, il faut distinguer le temps de la montée de la scie de celui de sa descente. Pendant le premier intervalle, l'effet est le produit du poids de la scie par sa vîtesse. Pendant le second, il est le produit de la force qui tire la scie, moins le poids de cette scie, par sa vîtesse. En prenant la moyenne entre ces deux quantités, on aura le véritable résultat, et on ne trouvera point que l'effet soit au-dessus de l'action du moteur, ce qui n'a lieu dans aucune machine.

Établissement des moulins à scier mus par une roue à eau.

§ 3. En admettant le résultat établi dans le § 1, pour la quantité d'action que consomme le sciage du bois, il ne peut y avoir de difficulté pour l'établissement d'un moulin à scier, où il ne s'agit que de proportionner convenablement la quantité de travail à faire avec la hauteur et le volume de la chûte d'eau dont on dispose. D'après l'art. 705, une lame de scie doit faire moyennement 48 oscillations dans une minute, et le chariot avance de $6^{po.} = 0^{m},162$ dans le même espace de temps. Si l'on suppose une pièce de $0^{m},32$ d'épaisseur, chaque lame de scie devra faire moyennement dans une seconde une surface de sciage $= 0^{mq},000864$. Elle dépense donc par seconde une quantité d'action $= 0^{mq},000864 \times 43333^{k \times m} = 37^{k \times m},4$. Pour avoir la quantité d'action correspondante à transmettre par le moteur, on peut d'abord ajouter $\frac{1}{7}$ pour le frottement et le transport du chariot. Quant à l'effet des secousses résultant du mouvement alternatif de la scie, son estimation est très-incertaine; mais s'il s'agit d'un moulin ordinaire, on peut, pour ne point s'exposer à en exagérer le produit, adopter l'évaluation qui résulte des observations faites sur le moulin de La Fère. Alors la quantité d'action à transmettre en une seconde à la roue à aubes pour chaque lame de scie, se trouverait portée à environ $120^{kil. \times mèt.}$.

Le reste du calcul dépend de l'espèce de roue qu'on veut employer. Si la chute surpasse 5^{m}, il conviendra probablement d'adopter une roue en dessus, (voyez les § 1 et 2 de la note (dm)), et l'on aura par conséquent la relation $120^{kil. \times mèt.} = \frac{4}{3}.1000\,E\left(H - \frac{1}{2}h\right)$, E étant la dépense d'eau à faire par seconde pour chaque lame de scie qu'on voudra mettre en mouvement, H la hauteur de la chûte, h la charge d'eau sur le point où l'eau entre dans les augets.

Si la chûte est moindre que 4 ou 5^{m}, on pourra trouver convenable d'employer une roue de côté (voyez le § 3 de la note (dm)). On aura alors $120^{k \times m} = 1000\,E\left(H - \frac{1}{2}h\right) - p\frac{z}{g}V$. Il faudra d'ailleurs suivre les indications données dans cette note pour la manière de disposer les roues et d'en régler la vîtesse.

Les scies faisant moyennement 48 oscillations dans une minute, l'axe de la ma-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

causent un frottement de 1333 liv. (375); à quoi ajoutant au moins 250 liv., pesanteur propre de la vanne, on aura 1583 liv. pour la résistance qu'il faudra que la puissance surmonte. Or, comme cette puissance n'est autre chose que la force que peut avoir un homme qui tire de haut en bas, et qui ne peut excéder la pesanteur de son corps, estimé 140 ou 150 liv. (118), on voit qu'étant appliqué à l'extrémité 6 du levier 5, 6 dont le point d'appui est dans le milieu, il est impossible qu'il puisse jamais élever un poids de 1583 liv. Cependant il doit gouverner toute la machine sans aucun secours étranger, et quand même il en recevrait, il arriverait encore un inconvénient: le frottement de la vanne contre les coulisses étant bien supérieur au poids de la même vanne, elle ne pourrait descendre d'elle-même lorsque le déclit 7 aurait lâché l'anneau de la corde (376).

Pl. 2, Fig. 8.

---

nivelle qui les fait mouvoir doit faire à-peu-près $\frac{4}{5}$ de tour dans une seconde. En appelant D le diamètre de la roue à aubes, et V la vîtesse de sa circonférence, le nombre de tours qu'elle fera dans une seconde sera $\frac{V}{\pi D}$. Par conséquent si D′ est le diamètre du rouet monté sur l'axe de la roue à aubes, et d' celui de la lanterne montée sur l'axe de la manivelle, on aura pour régler la grandeur respective de ces diamètres, la relation $\frac{D'}{d'} = \frac{4\pi D}{5V}$.

Il vaut mieux d'ailleurs, pour transmettre le mouvement de l'axe de la roue à eau à celui de la manivelle, employer les bandes de cuir dont il est question dans le § 1 de l'addition au chapitre précédent; et ce procédé convient spécialement aux moulins à scier, à raison des obstacles que les scies peuvent rencontrer dans le bois. Il serait à desirer aussi que, outre la roue à aubes, qui fait fonction de volant, il y eût d'autres volants montés sur les axes des manivelles.

Détermination du poids qu'il convient de donner au châssis des scies.

Quant à la manière de régler le poids du châssis qui porte les scies, on observera d'une part qu'en nommant S la surface de sciage exécutée en une seconde, la quantité d'action consommée dans le même temps est 43333. S kil. × mèt. et de l'autre que le nombre d'oscillations fait par les scies dans une seconde étant $\frac{4}{5}$, et l'espace parcouru à chaque oscillation pour monter et descendre environ $1^m,6$, l'espace que les scies parcourent dans une seconde est moyennement $1^m,28$. L'effort moyen qui s'exerce sur les scies est donc $\frac{43333^{k.} \times m.}{1^m,28} S = 33850. S$ kil.; d'où il suit, d'après ce qu'on a vu dans la note (*eh*), que le poids des scies, pour que le mouvement de la machine soit le mieux réglé qu'il est possible, doit être la moitié de cette quantité, ou 15920. S kil. environ.

Par exemple, dans le moulin de La Fère, où la surface de bois scié en 1″ était $0^{mq},002638 = S$, le poids du châssis aurait dû être environ 60^k, ce qui est bien différent des 537 liv. indiquées par Bélidor. La détermination précédente est d'ailleurs subordonnée à la nécessité de procurer à ce châssis la solidité convenable.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Pour obvier à toutes ces difficultés, j'ai considéré qu'il était inutile de faire une vanne mobile de toute la hauteur de l'eau, et qu'il suffisait de pratiquer un pertuis de la grandeur des aubes, c'est-à-dire de deux pieds de largeur sur un de hauteur, qu'on fermerait par une vanne de même grandeur, et d'arrêter à demeure les planches qui doivent soutenir le reste de l'eau. Alors la hauteur moyenne de l'eau qui répond à cette vanne sera de 6 pieds $\frac{20}{39}$ (415), ou à-peu-près de 6 pieds $\frac{1}{2}$, qui étant multipliés par 2 pieds 4 pouces, superficie de la vanne, donnent 15 $\frac{1}{6}$ pieds cubes, ou 1061 liv. pour la poussée, dont le tiers est environ 354 liv., lesquelles ajoutées avec 150 liv., pesanteur qu'aura la petite vanne jointe au poids qui en facilitera la descente, donnent 504 liv. pour la résistance que la puissance aura à surmonter. Pour lui en donner le moyen, j'ai supprimé le poteau 4, j'ai placé le point d'appui à l'endroit 29, afin de raccourcir le bras de levier du poids, et j'ai allongé celui de la puissance en le prolongeant encore de toute la partie 6, 28; et pour qu'il n'embarrassât pas la manœuvre, je l'ai fait passer derrière la scie, comme on le voit dans la 2^{e} fig. de la 1re planche, où le levier est marqué par l'intervalle 4, 28, ayant pratiqué un déclit contre les coulisses du chariot à l'endroit 28, dont le chariot occasionne l'échappement; ce qui est aisé à imaginer. Alors il arrive que le bras de levier 30, 2 $^{\infty}$de la puissance se trouvant quadruple de l'autre 5, 30, la puissance n'est plus que la quatrième partie du poids, c'est-à-dire, environ 126 livres (*el*).

Pl. 1, Fig. 2. Pl. 2, Fig. 8.

Voilà, ce me semble, comment il faut examiner toutes les parties d'une machine, pour en déterminer au juste les dimensions et les effets, eu égard à ses différents mouvements. Autrement, si l'on n'y apporte toute la précision à laquelle on voit que je me suis attaché ici, on n'agit qu'à tâtons, on recommence plusieurs fois les mêmes pièces avant qu'elles puissent servir, et ce n'est qu'en multipliant la dépense mal-à-propos

---

(*el*) Les remarques faites par l'auteur sur la difficulté qu'un seul homme eût éprouvée à manœuvrer la vanne, veulent être examinées. Les expériences de Coulomb apprennent qu'il faut distinguer l'effort à faire dans le premier moment pour détacher une vanne, de celui qui est ensuite nécessaire pour la soulever. Ce premier effort surpasserait beaucoup l'estimation de Bélidor, car, d'après le tableau de la page 130, le rapport du frottement à la pression est 0,44 pour le chêne, 0,56 pour le sapin, et 0,67 pour le chêne en contact avec le sapin. Mais ce premier effort une fois exercé, et la vanne mise en mouvement, le rapport du frottement à la pression se trouve réduit, d'après le tableau de la p. 131, de 0,11 à 0,17; et alors l'effort n'est plus que le tiers ou la moitié de l'estimation du texte. Un homme qui serait seulement capable d'exercer ce dernier effort d'une manière continue, peut néanmoins surmonter la résistance qui a lieu au premier instant, en donnant une secousse au levier. J'observerai d'ailleurs qu'il est préférable, pour cette manœuvre, d'employer un cric dont la crémaillère est assujettie à la queue de la vanne.

De l'effort nécessaire pour lever la vanne qui donne l'eau à la roue.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qu'on parvient à les faire jouer, au lieu qu'en voyant clair à ce qu'on fait on est en état de répondre du succès, même avant l'exécution.

Sujétions principales qui doivent diriger la construction d'un moulin à scier, et qui peuvent servir d'exemple pour l'emplacement des machines en général.

708. N'ayant rien dit jusqu'ici de ce qu'il faut suivre pour la construction du canal où coule l'eau qui fait tourner le moulin précédent: voici quelques articles tirés du devis que j'en ai fait.

1° Il faut que le plancher du radier, pris au pied de la vanne, soit au niveau avec celui du moulin à poudre qui est sur la rivière d'Oise, à côté de celui qu'on veut construire. Pour cela, il doit être établi à 12 pieds au-dessous du repère marqué au pignon du même moulin.

Cet article montre que lorsqu'on veut établir une machine, il faut avoir un point fixe pris sur les lieux, pour y rapporter les mesures qui marquent de combien il faudra s'enfoncer ou s'élever au-dessus de ce point.

2° Le rez-de-chaussée de la cave doit être de 3 pieds au-dessus de la naissance du radier, ou de 9 pieds au-dessus du repère.

3° La partie inférieure du canal aura 6 toises de longueur, depuis l'angle du gros mur de l'ancienne fortification jusqu'au pied de la vanne.

La tranchée de cette partie sera creusée de 14 pieds 10 pouces au-dessous du repère, en commençant à l'endroit du seuil de la vanne, et à mesure que l'on descendra, on observera de donner au fond de cette tranchée 2 pouces 6 lignes de pente par toise.

Cette tranchée sera creusée sur la largeur de 9 pieds dans le fond.

4° On asseoira sur le fond de la tranchée précédente une plate-forme de maçonnerie de 9 pieds 6 pouces de largeur sur 2 pieds 6 pouces d'épaisseur, qui régnera sur toute l'étendue de la partie inférieure du canal : cette maçonnerie sera faite à bain de ciment.

5° Pour la partie supérieure du canal, on fera une tranchée dont le fond sera d'un demi-pied au-dessous de la précédente, c'est-à-dire de 15 pieds 4 pouces au-dessous du repère. On lui donnera 3 toises de longueur depuis l'écluse en remontant vers la prise d'eau, sur 10 pieds de largeur.

6° On établira sur l'étendue de cette tranchée une plate-forme de maçonnerie de 3 pieds d'épaisseur, faite en mortier de ciment comme la précédente.

Pour le reste de la tranchée jusqu'à la prise d'eau, il faut la creuser en remontant d'un pied par toise, en sorte que le fond du canal à sa jonction avec la rivière ne soit plus qu'à 9 pieds 10 pouces au-dessous du repère, observant que cette partie, qui aura 12 toises de longueur, ne doit pas être maçonnée dans le fond.

7° Le long du bord de la plate-forme de maçonnerie de la partie supérieure du canal, du côté de la prise d'eau, on battra à refus de mouton, à travers le canal, une file de palplanches. Ces palplanches auront 7 pieds de longueur sur 4 pouces d'épaisseur, taillées à rainure et à grain d'orge, pour s'emboîter. Elles auront au moins 12 pouces de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

largeur, et seront assemblées par une lierne ou ventrière de 6 pouces d'équarrissage, que l'on encastrera dans la maçonnerie.

8° Sur la plate-forme de maçonnerie de la partie supérieure du canal, on encastrera des traversines de 5 pouces d'équarrissage, auxquelles on donnera 5 pieds de longueur, posées dans le milieu de la même plate-forme, en sorte qu'elles soient à la distance de 3 pieds les unes des autres prise de milieu en milieu, observant de faire la même chose pour la partie inférieure du canal, où les traversines n'auront que 4 pieds de longueur. Elles serviront de part et d'autre pour clouer le plancher du radier, lequel doit être double, et fait de deux planches de deux pouces d'épaisseur, posées plein sur joint, bien calfatées, comme au radier des écluses.

9° La partie inférieure du canal doit avoir dans le fond 3 pieds 6 pouces de largeur, depuis la vanne jusqu'à la rencontre du mur de l'ancienne fortification, et le reste ira en s'élargissant à queue d'hironde vers la rivière, les angles des retours formant 110 degrés.

Le revêtement de cette partie du canal, du côté de la rivière, aura 2 pieds 6 pouces d'épaisseur, avec une retraite de 3 pouces sur la fondation du côté des terres; on donnera à ce revêtement 8 pieds 6 pouces de hauteur au-dessus de la fondation, réduit à 2 pieds 6 pouces au sommet.

A l'égard de l'autre revêtement, du côté du moulin à scier, il faudra lui donner la même épaisseur qu'au précédent, sur la hauteur de 14 pieds 10 pouces, pris à l'entrée du moulin, et le sommet conduit de niveau sur toute la longueur du moulin et du belvédère.

10° La partie supérieure du canal aura 4 pieds 4 pouces de largeur, depuis la vanne jusqu'à la prise d'eau.

Son revêtement aura, des deux côtés, 8 pieds 6 pouces de hauteur au-dessus de la fondation, avec une retraite de 4 pouces du côté des terres, et 3 pieds d'épaisseur, réduit à 2 pieds 6 pouces au sommet.

11° Dans la partie inférieure du canal, le coursier sera formé par des planches de bordage, de deux pouces d'épaisseur, clouées sur des poteaux de 3 pieds de hauteur et 5 pouces d'équarrissage, lesquels seront posés à 4 pieds 6 pouces de milieu en milieu, appliqués contre le revêtement du canal, retenus en haut et en bas par des chevilles de fer enclavées dans la maçonnerie, dans le temps de sa construction, et ces boulons, traversant les poteaux, les retiendront avec des clavettes, afin qu'on puisse les renouveler au besoin.

12° Selon les mesures précédentes, le coursier aura 2 pieds 4 pouces de largeur, et l'on aura deux appuis de maçonnerie, de 6 pouces de largeur, pour soutenir les poteaux des coulisses de la vanne. Puisque le canal supérieur a un pied de largeur de plus que celui d'en bas, ces poteaux auront 14 pouces de largeur sur 10 d'épaisseur, et 12 pieds de

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

hauteur. Ils doivent être assemblés dans une semelle de 4 pieds 6 pouces de longueur, sur 14 de largeur et 10 d'épaisseur.

13° L'intervalle des poteaux des coulisses se trouvera de 2 pieds, qui sera la largeur du pertuis, ou du passage de l'eau sur la roue, lequel ne devant avoir qu'un pied de hauteur au-dessus du radier, il faudra, sur cette hauteur, pratiquer une feuillure de 2 pouces de profondeur sur 4 de largeur, pour recevoir la vanne qui doit fermer le pertuis, qui n'aura par conséquent qu'un pied de hauteur.

Au-dessus de la feuillure précédente, on en pratiquera une seconde de 4 pouces de profondeur sur autant de largeur, et de 7 pieds de hauteur, pour recevoir des planches de 2 pouces d'épaisseur, clouées à demeure, qui doivent soutenir l'eau qui est au-dessus du pertuis.

Le chapeau à travers lequel passera l'aiguille de la vanne doit avoir 5 pieds 6 pouces de longueur sur 12 pouces de largeur et 10 d'épaisseur.

Je supprime les articles qui regardent la main-d'œuvre du canal et la construction de la cage du moulin, pour ne point anticiper sur la seconde partie de cet ouvrage.

Je dirai pourtant qu'il faut que le revêtement du canal supérieur, du côté du moulin, soit composé d'une bonne maçonnerie de mortier de ciment, pour empêcher que les eaux du canal ne transpirent et ne viennent inonder la cave. C'est pourquoi il faudra en user de même pour le mur de cette cave, qui répond à l'entrée du moulin, et avoir soin d'appliquer derrière ces murs un bon corroi de terre-glaise.

Description d'un autre moulin à scier le bois, plus simple que le précédent.

Planche 3. Figures 2 et 3.

709. Dans les pays de montagnes où l'on a des chûtes d'eau qui tombent d'une grande hauteur, on trouve des moulins à scier un peu plus simples que celui que je viens de décrire, parce que l'on ne se sert point de rouets ni de lanternes, le mouvement de la scie dépendant immédiatement de celui de la grande roue, comme on en peut juger par la 2e et la 3e fig. de la pl. 3e, où l'on voit que le canal A, dont je ne détermine point la hauteur, conduit l'eau qui fait tourner une roue B, dont l'essieu est coudé comme une manivelle pour recevoir l'extrémité C de la scie, qui agit librement par le haut dans les coulisses DD. Quand elle monte, elle fait faire un mouvement au levier E qui en communique un autre à la hampe F, pour faire tourner la roue dentée I qui fait avancer le chariot N, à l'aide du déclit K, et du pignon L qui s'engrène dans les dents M, à-peu-près comme on l'a vu sur les planches précédentes.

Pl. 3, Fig. 7.

Au lieu de la manivelle, il y a de ces sortes de moulins qui ont à l'arbre de la roue deux morceaux de bois RR qui le traversent diamétralement, au bout desquels il y en a deux autres SS formant des levées, attachés l'un dessus, l'autre dessous. On charge la scie d'un poids capable de la faire descendre, en surmontant la résistance du bois que l'on veut scier. Au bas du châssis de la scie il y a un mentonnet T, qui étant rencontré par les levées S, S à chaque tour de roue, force la scie à

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

monter et descendre deux fois, au lieu que la manivelle ordinaire ne la fait descendre qu'une fois à chaque tour de roue (*em*).

Je ne m'arrêterai pas davantage à détailler les figures de cette planche, puisqu'au premier coup-d'œil on peut juger de ce qu'elles signifient. C'est à ceux qui auront à faire construire de pareils moulins, à voir lequel des deux que je donne ici peut convenir le mieux à la situation des lieux, et à tirer de l'un et de l'autre les parties qu'on estimera le plus nécessaires.

Expériences sur le travail des scieurs de long.

710. Le bois sec est plus difficile à scier que le tendre ou le vert, à-peu-près dans le rapport de 4 à 3; ayant éprouvé sur deux pièces de chêne de 12 pouces d'équarrissage que la première, qui était de vieux bois, mais sain et dur, a été sciée sur la longueur de 12 pieds en 25 minutes, et que celle qui était de bois verd a été sciée sur la même longueur en 18 minutes.

J'ai reconnu par expérience que trois hommes appliqués à une scie, deux en-bas et un en-haut, peuvent scier une pièce de bois de chêne vert de 12 pouces d'épaisseur sur la longueur de 10 pieds, par heure, et continuer ce travail 6 heures le matin et 6 heures l'après-midi, par conséquent scier 120 pieds par jour.

Les mêmes ne peuvent scier que 5 pieds par heure de bois de chêne sec de 12 pouces d'épaisseur, et qu'environ 60 pieds par jour, c'est-à-dire la moitié moins que si le bois était vert.

Ils peuvent scier 14 pieds par heure de bois blanc et vert, qui aurait 12 pouces d'épaisseur, et seulement 6 pieds $\frac{1}{2}$, ou 7 pieds tout au plus, quand il est sec.

Ils ne peuvent scier que 17 à 18 pieds par heure de bois de chêne dur de 7 ou 8 pouces d'épaisseur, et quand il est vert, environ 25 ou 26 pieds. Si c'est du bois blanc dur, ils en peuvent débiter jusqu'à 31 ou 32 pieds; et ainsi des autres pièces, dont ils scieront plus ou moins à-peu-près dans la proportion inverse de leur épaisseur.

Description d'un moulin pour scier le marbre.

711. Pour ne rien négliger de ce qui peut appartenir à ce chapitre, j'ajouterai ici la description d'une machine pour scier le marbre, dont le dessin, qu'on voit sur la pl. 4^{e}, vient de M. Morel.

Peu de gens ignorent la manière dont on scie d'ordinaire les blocs de

---

(*em*) Le lecteur remarquera sans doute qu'il ne s'agit ici que de ces machines grossières, où ayant de l'eau en abondance, on s'occupe moins d'en tirer le meilleur parti possible, que d'épargner les frais de construction. La disposition indiquée dans cet article aurait effectivement l'inconvénient de comporter pour la roue à eau une vîtesse beaucoup trop grande; et le procédé représenté fig. 7, pour communiquer le mouvement à la scie, a de plus le défaut de causer des chocs continuels, sans qu'il en résulte une simplification notable dans le mécanisme.

Remarque sur les moulins décrits art. 709.

Pl. 3, Fig. 7.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

marbre. On se sert d'une scie unie et sans dents où deux hommes sont employés, un de chaque côté, lesquels de temps en temps jettent du grès pilé dans la voie de la scie pour user le marbre, et y font tomber de l'eau pour empêcher la scie de s'échauffer. La monture de la scie est désignée par la lettre A au plan et à l'élévation, aussi-bien qu'au profil exprimé par la 3e fig. Cette dernière montre que les bras de la scie sont creux en forme de coulisses sur la hauteur de 5 pieds, pour répondre aux plus gros blocs qu'on a coutume de débiter; et comme la scie ne peut agir sur le marbre que par l'effort qu'elle fait pour s'y enfoncer, on suppose que chacune de ses extrémités est chargée d'un cube de plomb dont on déterminera la pesanteur dans l'exécution, pour la faire descendre à mesure que le travail avance. Cette monture, outre les pièces de son assemblage, est encore munie de deux oreilles CC pour la soutenir et la faire glisser sur les chevalets DD posés en droite ligne, et espacés de manière que la monture de la scie puisse facilement couler entre deux.

PLANCHE 4. FIGURES 1, 2 et 3.

Comme on peut faire agir plusieurs scies à-la-fois, je ne parlerai d'abord que d'une des deux qui est au plan. On voit que la puissance doit être appliquée à une manivelle E de 12 pouces de coude, qui répond à une lanterne F de 8 pouces de diamètre, s'engrenant avec une roue dentée G, dont le diamètre est de 16 pouces. A l'essieu de la roue G est une autre roue H, qu'on ne peut voir que dans la 1ere fig., étant cachée au plan sous la pièce I. Cette roue, qui a 20 pouces de rayon jusqu'aux extrémités de ses dents, n'est dentée que sur la moitié de sa circonférence. Ces dents s'engrènent avec les coches de la crémaillère I, attachée par une de ses extrémités à la monture de la scie, et à l'autre est une corde qui après avoir passé sur un poulie va aboutir à un poids K.

Quand la puissance fait tourner la manivelle, les dents de la roue H rencontrant celles de la crémaillère I l'obligent, malgré la pesanteur du poids K, de faire un chemin de 30 pouces, de la gauche à la droite. Alors la scie est poussée du même côté, et quand la roue H a fait une demi-révolution, ne présentant plus de dents qui accrochent la crémaillère, la scie est ramenée de la droite à la gauche par l'action du poids K. Ainsi il faut que la manivelle fasse deux tours pour que la scie aille et revienne une fois; et de ces deux tours qu'est obligée de faire la puissance à chaque révolution de la roue H, on voit qu'il y en a toujours un où elle n'a d'autre résistance à surmonter que celle qui peut provenir du frottement.

Le diamètre de la lanterne F n'étant que moitié de celui de la roue G, et la scie faisant 30 pouces de chemin à chaque demi-révolution de la roue H, pour laquelle la manivelle est obligée de faire un tour, la vîtesse de la puissance agissante sera donc à celle de la scie en montant, à-peu-près comme 75 est à 30, ou comme 5 est à 2. Ainsi l'on voit que la résis-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tance de la scie sera à la puissance appliquée à la manivelle comme 5 est à 2 (89).

Comme il faut ordinairement deux hommes pour mouvoir la scie, que je suppose faire ensemble un effort de 50 liv. (120), on peut dire, en faisant abstraction du poids K, que la puissance appliquée à la manivelle doit être de 20 livres. Mais comme il faut autant d'effort pour ramener la scie que pour la pousser en avant, puisque les deux cubes de plomb dont elle est chargée exercent toujours également leur pesanteur, il suit que le poids K doit être au moins de 50 livres. Mais ce poids qui rend la puissance agissante nulle dans un des deux tours de la manivelle, lui devient contraire dans l'autre, puisqu'il se réunit à la résistance de la scie, laquelle sera, en montant, de 100 liv.; dont prenant les $\frac{2}{5}$ pour la puissance appliquée à la manivelle, elle sera donc de 40 livres, pour laquelle il faudra deux hommes; ce qui fait voir que jusques-là cette machine n'est d'aucun avantage, puisque les deux hommes qu'il faut y employer, ne faisant guère plus de besogne que s'ils agissaient tout uniment, il est plus à propos de leur laisser suivre l'usage ordinaire que de les assujettir à gouverner une machine qui ne les soulage aucunement, ne regardant point comme un avantage les intervalles où le poids K agit seul.

Cependant le défaut qu'on vient d'apercevoir peut être corrigé en faisant agir ensemble deux scies au lieu d'une, comme on le voit dans la 2^{e} fig., ayant deux manivelles qui auront un essieu commun, et seront coudées d'un sens opposé. On pourra faire que l'une des scies recule pendant que l'autre avance, et employant un homme à chaque manivelle, ils partageront ensemble l'effort qu'il faudra pour faire monter une des scies, tandis que le poids K ramenera l'autre; leur effort ne sera tout au plus que de 20 liv. chacun, et toujours égal, parce que les deux roues H ayant leurs dents disposées d'un sens opposé, au moment que l'une abandonnera sa crémaillère, l'autre accrochera la sienne. Alors deux hommes feront aisément la besogne de quatre qui n'auraient pas le soulagement que donne une machine : mais il faut être assujetti à scier deux blocs à-la-fois.

Pour juger du progrès de la puissance qui fera mouvoir cette machine, il faut se rappeler que selon l'article 122 l'effet de la force d'un homme est de lever 25 livres, ayant 1000 to. de vîtesse par heure. Ainsi divisant 1000 toises ou 6000 pieds par la circonférence que décrira la manivelle à chaque tour, on trouvera que la puissance pourra faire faire à la manivelle 954 tours $\frac{1}{2}$ par heure, et à-peu-près 16 tours par minute, ce qui est le nombre de traits que le marbre recevra de chaque scie dans le même temps; car ici, comme les scies ne sont pas dentées, elles font autant d'effet en montant qu'en descendant. J'ajouterai que l'homme ap-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pliqué à chaque manivelle n'ayant besoin, selon notre calcul, que de 20 liv. de force pour mouvoir la machine, il est à propos que le poids K soit de 60 liv., afin qu'il descende au moins avec autant de vîtesse que la puissance le fait monter. Alors supposant que chaque homme emploie sa force naturelle, c'est-à-dire 25 livres, ils en auront ensemble plus qu'il n'en faut pour agir avec aisance, surmonter le frottement, et l'effort des 10 livres que nous avons ajoutées au poids K. M. Morel veut que chaque manivelle soit accompagnée d'une volée L, dans la pensée que la puissance en tirera beaucoup de soulagement; mais comme elles ne font tout au plus qu'entretenir l'uniformité du mouvement, sans augmenter en rien la puissance, malgré le préjugé de la plupart des machinistes et des ouvriers, je ne m'y arrêterai point.

Quoique je ne fasse pas grand cas de cette machine, je n'ai pas laissé de la rapporter, moins pour en proposer l'exécution, que pour avoir occasion d'appliquer les principes à des exemples différents (*en*).

Remarques sur le moulin à scier le marbre.

(*en*) La machine décrite dans cet article paraît effectivement très-défectueuse, eu égard sur-tout aux chocs et changements brusques de vîtesse, qui auraient lieu à l'instant où les dents du pignon s'engageraient dans celles de la crémaillère, ou les quitteraient. La correction proposée par Bélidor ne fait pas disparaître ces chocs: elle remédie seulement au défaut de rendre alternativement l'effort de la résistance nul, et double de celui que comporte l'ouvrage à exécuter, défaut qu'il faut éviter avec soin, en tâchant toujours de disposer les machines de manière que les efforts de la résistance et du moteur soient constants. Quant aux calculs dont Bélidor conclut que les ouvriers, au moyen du changement qu'il propose, feraient le double d'ouvrage, on ne doit pas leur accorder entièrement foi. L'auteur ne remarque pas effectivement que dans le retour de la scie, les hommes n'ont aucun effort à exercer, et il ne considère que celui qu'ils exercent quand la scie est poussée. Cette manière de calculer ne peut être admise, puisque les volants, bien plus utiles ici que Bélidor ne paraît le croire, régularisant le mouvement de la manivelle, la quantité d'action qui doit être transmise à la résistance pendant l'allée de la scie seulement, se trouve répartie à-peu-près également pour le moteur sur la durée de l'allée et du retour. Si les volants étaient assez puissants pour que cette répartition fût sensiblement égale, la disposition proposée par Bélidor n'aurait aucun avantage sur la première. On trouvera dans l'addition placée à la fin de ce chapitre l'indication d'une machine pour le sciage de la pierre, mieux disposée que les précédentes.

De la quantité d'action dépensée pour le sciage de la pierre.

Quant à la quantité d'action qui se dépense dans ce genre d'opération, on ne peut présenter à cet égard que des notions peu certaines. Il est vraisemblable que les ouvriers employés au sciage des pierres déploient une quantité d'action au moins égale à celle fournie par les scieurs de bois. On a remarqué que les scieurs de pierre faisaient faire ordinairement à la scie cinquante oscillations par minute, et que l'étendue des oscillations était de $0^{m},4$ (Morisot, *Tableaux détaillés des prix des ouvrages de bâtiment*, t. 4, p. 62). Le nombre des oscillations est le même, et leur étendue moitié moindre que pour les scieurs de bois; mais ici l'ouvrier agit en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

712. Voici la description d'un moulin pour percer des tuyaux de bois propres à la conduite des eaux, que je tiens encore de M. Morel.

Description d'un moulin pour percer des tuyaux de bois.

Comme on suppose que ce moulin doit être mis en mouvement par un courant ou par une chûte d'eau, il s'agit d'abord d'une roue A, à l'arbre de laquelle il y a un rouet B qui fait tourner horizontalement les lanternes C et D, dont l'axe commun doit par conséquent être vertical. La lanterne D fait tourner en même temps deux rouets E et F. Le premier E qui est vertical fait agir la tarière qui perce le bois, et le second F qui est horizontal fait avancer le chariot qui porte la pièce qu'on veut percer, par le moyen de la roue dentée G, mise en mouvement à l'aide des hampes H et I, dont la première accroche les dents de la roue G pour la tirer de H en F, et la seconde pousse au contraire cette roue d'un sens opposé.

PLANCHE 5. FIGURES 1, 2 et 3.

---

poussant comme en ramenant la scie; et par conséquent, en supposant que la quantité d'action est la même, il faut admettre que l'effort exercé est aussi le même, c'est-à-dire environ $6^{k},5$, d'après ce qu'on a vu dans le § 1 de la note (*ek*). Ainsi Bélidor évaluait cet effort beaucoup trop haut, en le portant à 25 livres.

D'après M. Morisot (*ibid.*, t. 1, p. 155), un trait de scie d'une toise quarrée, fait dans de la *pierre de roche* (pierre calcaire assez dure et un peu coquilleuse, dont la pesanteur spécifique est 2,3) emploie 72 heures du travail d'un ouvrier. Cela revient à $0^{mq},000879\frac{5}{8}$ par minute, et puisque l'ouvrier fournit par minute une quantité d'action de $260^{k\times m}$, on voit que l'exécution d'un trait de scie d'un mètre quarré dans cette pierre exige une quantité d'action de $\frac{260^{k\times m}}{0^{mq},000879} = 295660$ kil. × mèt.

On pourra d'après cela faire l'établissement d'une machine qu'on destinerait à la scier.

J'ajouterai ici la note du nombre d'heures de travail consommées pour un trait de scie d'une toise quarrée fait dans diverses espèces de pierres et de marbres, tels qu'ils sont donnés par M. Morisot (*ibid.* t. 1, p. 155; et t. 4, p. 88). On pourra, par un calcul semblable au précédent, en déduire les quantités d'action que leur sciage doit exiger.

	heures.
Lambourde (pierre calcaire des environs de Paris, fort tendre, d'un grain grossier, pesanteur spécifique 1,6)	4,5
Pierre franche (pierre calcaire moyennement dure, d'un grain égal, pesanteur spécifique 2,2)	45
Pierre de roche (désignée ci-dessus)	72
Liais (pierre calcaire d'un grain plus égal et plus fin que la roche, pesanteur spécifique 2,4)	67
Albâtre des Pyrénées (le plus tendre des marbres)	56
Marbre blanc statuaire	72
Granit gris de Normandie	504
Granit gris des Vosges	700
Porphire rouge et vert	1177

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Comme cette dernière manœuvre est à-peu-près la même que celle qu'on a vue dans la description que j'ai faite du premier moulin pour scier le bois (691), on concevra aisément que l'axe K de cette roue qui ne bouge point de sa place, ayant deux lanternes qui s'engrènent avec les dents du chariot, la pièce à percer doit nécessairement avancer toujours avec la même force à la rencontre de la tarière, et d'une manière si simple et si naturelle, que cette machine ne peut pas manquer de réussir, lorsqu'elle sera bien exécutée.

La tarière pouvant avoir depuis 9 jusqu'à 12 pieds de longueur, il a fallu en soutenir le poids, afin qu'elle ne plie point, et qu'elle perce toujours d'une manière uniforme; la difficulté a été de faire en sorte que les supports ou *lunettes* L ne fassent point obstacle au chemin du chariot: voici l'expédient qui a paru le plus commode.

PLANCHE 5. FIG. 4, 5, 6 et 7. Si l'on considère la 5e et la 6e fig. on verra deux règles à coulisses *c,c*, qu'on suppose arrêtées à quelque pièce de la charpente du moulin. Ces coulisses embrassent une petite planche suspendue à une corde, au bas de laquelle on a attaché des lunettes *b, b*, avec des charnières aux endroits *e,e*. Et afin qu'elles ne s'écartent pas hors du plan vertical, elles sont accompagnées d'un tenon *f* fait en quart de cercle, encastré dans l'épaisseur de la planche *a* où il peut jouer librement. Sur l'épaisseur d'une des lunettes est attaché un ressort *g*, qui fait qu'elles ne peuvent se joindre qu'en les contraignant d'entrer par le bas dans une entaille ou mortaise *d* pratiquée dans l'épaisseur d'un bout de règle: alors ces deux pièces n'en composent plus qu'une, percée d'un trou dans lequel doit passer la tarière (fig. 5).

On voit par la 4e fig. que la corde à laquelle est attachée la planche *a* passe sur deux poulies *h, h;* qu'à l'autre bout de cette corde est suspendu un poids *i* qui repose sur une trappe N, laquelle est appuyée d'une part à l'endroit *o*, et attachée de l'autre par une charnière à un levier K qui a son centre de mouvement uni à une pièce de charpente H; de sorte qu'en appuyant contre l'extrémité M du levier, la trappe N abandonne l'appui *o*, le poids descend, et fait monter la pièce *a*. Alors les lunettes *b, b* sortent de la mortaise *d*, et le ressort *g* les écarte.

Quand on voudra percer une pièce, on soutiendra la tarière en disposant les lunettes de la façon que je viens de l'exposer, et le chariot venant à rencontrer l'extrémité M du levier K, fera tomber le poids: les lunettes s'ouvriront à l'instant, seront enlevées, et dégageront le passage (*eo*).

Sur le procédé décrit pour le forage des tuyaux en bois.

(*eo*) Le procédé décrit dans cet article pour le forage du bois, quoique généralement employé, ne peut être considéré que comme une invention assez grossière. On trouvera dans l'art. 4e de l'addition à ce chapitre l'indication de dispositions

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On voit sur cette planche des tuyaux de différente espèce dont il ne convient point de parler présentement : c'est pourquoi nous nous réservons d'en faire mention lorsqu'il s'agira de la conduite des eaux, ne les ayant rapportés ici que pour profiter des endroits qui n'étaient point occupés.

---

qui paraissent plus avantageuses. Je ne connais point d'observations d'après esquelles on puisse juger avec certitude de la quantité d'action que ce genre de travail doit consommer.

ADDITION.

ART. 1^er^. *Sur la manière de débiter le bois au moyen de la scie.*

Indication des diverses manières de débiter un tronc d'arbre en planches.

QUOIQUE les détails de l'exploitation des bois soient étrangers à cet ouvrage, il est impossible de parler des moulins à scier, sans appeler l'attention du lecteur sur les différences que présentent les diverses manières de partager un tronc d'arbre avec la scie, tant dans la valeur vénale des produits qui en résultent, que dans leur qualité.

PL. F, FIG. 13.

La manière la plus ordinaire de refendre le bois est indiquée en A. D'après ce procédé, les planches voisines du centre sont seules dans la direction des *mailles*, c'est-à-dire des traces qu'on observe dans le tissu du bois, et qui sont dirigées du centre à la circonférence. Les autres planches coupent ces mailles, et par cette circonstance offrent une surface plus inégale et moins susceptible de poli, en même temps qu'elles sont beaucoup plus sujettes à se tourmenter, à se retirer, et même à se fendre, par l'effet des variations hygrométriques de l'air.

On voit en B, C, les dispositions adoptées par les Hollandais, qui sont depuis long-temps célèbres pour ce genre d'industrie, suivant que les arbres sont plus ou moins gros. Elles tendent à faire obtenir des planches plus égales et d'une meilleure qualité que la précédente.

Quoique cette méthode soit bien préférable à la méthode ordinaire, elle paraît inférieure au procédé inventé par Moreau, marchand de bois de Paris, et qui est indiquée en D. Cette disposition, suivant M. Hassenfratz (*Art du charpentier*, t. 1, p. 135), donne un produit qui surpasse de moitié en sus celui de la méthode ordinaire, et de $\frac{1}{7}$ la méthode hollandaise. Il serait donc à desirer qu'elle fût généralement adoptée, bien qu'elle exige un peu plus de sujétion dans la préparation du travail.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ART. 2. *Sur les moulins à scier le bois à mouvement alternatif.*

Le lecteur trouvera des renseignements utiles dans les détails suivants, extraits de la *New Cyclopedia* du docteur Rees, art. *Sawing*.

Moulin à scies verticales, à mouvement alternatif, construit à Woolwich.

« M. Brunel a fait un grand perfectionnement dans les machines à scier, au moyen duquel elles sont devenues capables de couper plus de bois dans un temps donné, avec une puissance donnée, et aussi de couper plus exactement, et de manière que les surfaces divisées par la scie demeurent parfaitement planes. Un grand moulin a été construit sur ce plan par M. Maudslay, pour l'arsenal de Woolwich. Il est conduit par une machine à vapeur qui est en même temps un modèle d'élégance dans sa forme extérieure, et de perfection dans sa disposition. Le mouvement est communiqué de cette machine aux manivelles des quatre châssis des scies par des bandes de cuir, qui sont ici très-judicieusement substituées aux roues dentées, parce qu'elles peuvent glisser et céder, si quelque obstacle venait à interrompre les mouvements, tandis que dans un tel cas, des roues dentées mettraient toute la machine en pièces. Chaque manivelle a un volant indépendant pour régulariser son mouvement, en outre du grand volant de la machine à vapeur. Les châssis verticaux et mobiles portant les scies sont faits en fer, mais les côtés sont creux et remplis en bois, en sorte qu'ils sont très-forts, sans être plus pesants qu'il n'est nécessaire. La plus ingénieuse partie de l'invention consiste dans la manière de fixer toutes les scies dans le châssis, de manière qu'elles soient exactement parallèles entre elles, et qu'elles aient toutes le même degré de tension. Les lames de scies sont tellement assujéties dans le châssis qu'elles peuvent être démontées dans quelques minutes, et remplacées par d'autres nouvellement aiguisées. Chaque lame à une pièce de fer rivée à chaque extrémité, en forme de crochet. Le crochet de l'extrémité inférieure de la lame s'adapte à un piton fixé à la traverse inférieure du châssis, et le crochet supérieur se suspend à une boucle qui pend sur la traverse supérieure. On passe des coins au travers de cette boucle, au moyen desquels elle peut être soutenue plus ou moins haut, de manière à tenir la scie tendue. Comme il n'y a rien pour déterminer les endroits de la traverse où les crochets des lames de scies devront pendre, elles peuvent être placées à une distance arbitraire les unes des autres. Mais pour les fixer dans la situation qu'on leur a donnée, on place des morceaux de bois dur entre les lames, à leurs extrémités supérieures et inférieures, et leurs intervalles étant ainsi remplis, elles sont serrées par des vis qui entrent dans les côtés du châssis. Comme la tension des différentes lames serait très-incertaine, si elle était uniquement produite en enfonçant les coins de leurs boucles avec un marteau, l'inventeur a employé une espèce de balance romaine très-ingénieuse, pour tendre chacune des scies à son tour. Elle consiste dans les parties suivantes : un fort axe horizontal est établi au travers du châssis fixe, dans lequel le châssis des scies glisse, et au-dessus de l'extrémité supérieure de ce châssis. D'un côté de cet axe est adapté un levier qui a un poids fixé à son extrémité, et du côté opposé, deux leviers courts, qui sont assemblés par des chaînes avec une forte barre transversale située précisément au-dessus de la traverse supérieure du châssis des scies, quand il est à son plus haut point d'élévation. Cette balance romaine, ou système

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de verges croisées, porte une boucle ou une portion de chaîne qui peut être unie par une clef avec l'une quelconque des boucles qui sont sur la traverse supérieure du châssis des scies, et auxquelles, comme on l'a mentionné plus haut, sont accrochées les extrémités supérieures des diverses lames. Pour se servir de cet appareil, la bande de la manivelle est mise de côté, pour arrêter le mouvement du châssis des scies. On tourne la manivelle, de manière à élever ce châssis à sa plus grande hauteur. Deux coins sont introduits entre le dessus du châssis des scies et une pièce du châssis fixe, afin de retenir le premier, pendant que la romaine agit : autrement elle tendrait à l'élever, et à courber le bras de la manivelle. Les lames aiguisées sont alors placées dans le châssis, en les accrochant à la traverse inférieure, et adaptant leurs crochets supérieurs aux boucles de la traverse supérieure. Les morceaux de bois sont alors placés entre les scies, conformément à la jauge du bois qui doit être scié, et serrés fortement par les vis, comme on l'a dit plus haut. L'extrémité chargée de la romaine est ensuite élevée par le moyen d'une corde passant sur une poulie, et la chaîne de la traverse de la romaine est unie avec la boucle d'une des lames par le moyen de ses clefs. Alors, en laissant le fléau descendre, il tend cette lame. Le coin de sa boucle est poussé avec la main aussi loin qu'il peut aller, et de cette manière conserve à la scie la tension que le fléau de la romaine lui a donnée. La chaîne de la romaine est alors désengagée de la lame, et placée à la lame suivante. Par ce moyen toutes les lames sont également tendues, circonstance très-importante, parce qu'une lame qui est plus lâche qu'une autre, est susceptible de se courber et de couper obliquement, quand le fil du bois tend à l'écarter de sa vraie direction.

« Les chariots de ce moulin sont admirablement disposés pour tenir les arbres fermement assujétis, et pour les fixer en peu de temps. Ils avancent à mesure que la scie coupe, au moyen d'une crémaillère et d'un pignon, avec une roue à rochet. Le cliquet de la roue à rochet est mu par une roue excentrique ou came, placée sur l'axe de la manivelle. Il y a aussi une disposition au moyen de laquelle le châssis de la scie peut se retirer un peu quand il monte, de manière que les dents de la scie se trouvent alors entièrement dégagées du bois, et ne coupent point. M. Brunel a dirigé l'exécution de plusieurs autres moulins à scier sur le même principe, particulièrement un très-grand dans le *dock-yard* de Chatam. »

Moulin à scie horizontale, à mouvement alternatif, exécuté à Portsmouth.

Voici maintenant la description d'une machine dont l'objet est de faire mouvoir une scie horizontale qui coupe le bois en travers. Elle est également extraite de la *New Cyclopœdia* du docteur Rees, art. *Machinery for manufacturing ships'blocks.*

« L'arbre qui doit être débité par le moyen de cette machine est placé sur un long châssis ou banc, un peu élevé au-dessus du plancher. A son extrémité est érigé un châssis vertical, composé de deux poteaux unis par des traverses. L'arbre est tiré sur son châssis au moyen d'un cabestan, et on fait saillir son extrémité au-delà de celle du châssis, précisément de la longueur qui doit être coupée. Cet arbre est maintenu dans sa situation par le moyen d'un levier qui presse fortement sur lui. La lame de la scie est droite, assujétie à chaque extrémité dans une poignée ou barreau de bois, au moyen desquels elle est tendue. L'une de ces poignées est assemblée par une articulation avec l'extrémité supérieure du bras vertical d'un levier coudé dans la forme d'un L, ayant son centre au-dessous du plancher. Le bras ho-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rizontal de ce levier est assemblé à son extrémité par le moyen d'une verge, avec une manivelle fixée au bout d'un axe horizontal situé près du plafond, et dont le mouvement de rotation est régularisé par un volant. Par ce moyen, on procure à la scie un mouvement réciproque de droite à gauche, presque dans une direction horizontale, et exactement en travers de la pièce à couper, à l'imitation du mouvement de la scie à main des charpentiers, le bras de l'ouvrier étant remplacé par celui du levier coudé. Les dents de la scie sont évidemment sur son arête inférieure, et taillées de manière à couper en tirant vers le levier. Elle descend et monte librement dans son articulation à l'extrémité du levier, et peut être soulevée au moyen de la poignée qui est à l'extrémité opposée de la lame, quand on veut interrompre son travail, qu'elle continue en descendant par son propre poids. La machine étant en repos, on la dispose pour travailler, en fixant l'arbre sur son châssis, comme on l'a dit plus haut, de manière que la surface du châssis coupe la pièce dans le plan du trait de scie à faire. La lame qui avait été soulevée par la poignée afin de l'écarter du bois, est posée dessus, et pour la guider quand elle commence à couper le dos de cette lame est introduit dans une fente pratiquée dans l'extrémité d'une pièce de bois, laquelle est fixée au châssis vertical, mais peut monter et descendre dans une rainure, de manière à être assujétie à la hauteur convenable, suivant l'épaisseur des arbres que l'on débite. La machine ayant été ainsi disposée, on la met en mouvement au moyen d'une corde ou bande qui fait tourner le volant et la manivelle, et imprime au levier coudé et à la scie un mouvement alternatif en travers de l'arbre, qui continue jusqu'à ce qu'il soit coupé. La scie suit son trait par son propre poids, mais l'ouvrier peut, quand il le veut, interrompre le travail, quoique le mouvement de la scie continue, au moyen d'une corde qui en soulève la poignée. La lame, en pénétrant dans le bois, abandonne le guide mentionné ci-dessus, lequel devient d'autant moins nécessaire que cette lame a pénétré plus avant, parce qu'une scie qui coupe le bois en travers n'a aucune tendance à dévier de sa première direction. On admire la simplicité de cette machine, qui néanmoins travaille avec beaucoup de vîtesse et d'exactitude. Elle peut être très-utilement employée dans beaucoup de cas où l'on consomme une main-d'œuvre considérable à couper en travers de grosses pièces de bois. »

On trouve dans les recueils de machines, et particulièrement dans la *Mécanique appliquée aux arts*, de Berthelot, un grand nombre de dispositions imaginées pour imprimer le mouvement aux lames de scie. On voit aussi beaucoup de modèles de machines de ce genre dans les collections du Conservatoire des arts et métiers. Ces inventions semblent en général peu dignes de fixer l'attention, et on n'en a présenté aucune, pour les scies à mouvement alternatif, qui paraisse préférable aux dispositions indiquées ci-dessus.

ART. 3. *Sur les moulins à scier le bois à mouvement continu.*

Scie à lame flexible et sans fin.

Les inconvénients inhérents aux machines à mouvement alternatif, ont depuis long-temps engagé à proposer des scies dont les lames eussent un mouvement continu. J'indiquerai en premier lieu l'emploi d'une bande d'acier très-flexible, et tournant comme une corde sans fin sur deux plateaux circulaires situés l'un au-dessus de l'autre. Cette bande est dentée sur un côté, et coupe le bois qui lui est présenté

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dans l'intervalle des deux plateaux, où sa tension la maintient plane. Cette invention a été proposée en Angleterre, mais il paraît qu'on y doutait de son succès. Elle a été employée avec avantage en France par M. Touroude, pour refendre les liteaux qui composent les tuyaux des vis d'Archimède (*Bulletin de la société d'encouragement*, juillet 1815). Le modèle de sa machine est déposé au Conservatoire des arts et métiers, grande galerie, n° 493.

Il est vraisemblable toutefois que l'emploi des scies de cette espèce ne recevra jamais une grande extension. Les scies à lames circulaires, qui sont employées depuis longtemps en Hollande pour le débit du bois de placage, qu'on a introduites depuis quelques années en Angleterre et en France, et dont on se sert maintenant pour le recepage sous l'eau des pieux de fondation du pont de Bordeaux, paraissent offrir le veritable principe du perfectionnement de ce genre de machines. Outre l'épargne qu'elles procurent, en supprimant les secousses, sur la quantité d'action fournie par les moteurs, chaque lame peut exécuter pendant le même temps beaucoup plus de travail, parce qu'elle agit continuellement tandis que les scies ordinaires ne coupent que pendant la moitié du temps, et parce qu'on lui imprime une vîtesse bien plus grande qu'il n'est possible de faire à ces dernières.

Moulin à scie circulaire pour le débit des bois en planches, par M. Brunel.

Pour mettre le lecteur à même d'apprécier le mérite de ce genre de machines, et lui faciliter les moyens d'en établir, je vais extraire du *Repertory of arts and manufactures*, t. 8, 2e série, la description du moulin pour lequel M. Brunel a pris à Londres une patente en 1805.

Pl. F, Fig. 1-12.

« ...Les lames doivent être d'une forme circulaire, et pour obtenir un grand diamètre, faites de deux ou d'un plus grand nombre de morceaux de feuilles d'acier, convenablement ajustées et fixées ensemble (voyez fig. 1, 2, 3, 4 et 7). La scie, fig. 1, est faite de huit pièces. Les morceaux A, A, A, ayant été taillés suivant la forme convenable, et ajustés ensemble sur leurs bords, comme on le voit en B, fig. 4, sont vissés (voyez 1, 1, 1, fig. 1) contre un plateau A, fig. 2, qui a été préalablement tourné très-plat; les trous au travers desquels les vis passent sont coupés dans une forme oblongue, de manière à permettre l'ajustement. Quand les plaques ont été ainsi ajustées au plateau A, un autre plateau C, fig. 1 et 2, est mis sur les plaques; et pour qu'il s'ajuste exactement, et se trouve également serré contre chaque plaque, on place entre eux plusieurs doubles de papier ou de cuir. Le plateau C est assujéti à l'autre par les vis 2, 2, 2, etc. Avant qu'elles soient serrées, les plateaux sont tirés en dedans concentriquement au moyen des coins 3, 3, 3, etc., afin de serrer les joints. Il faut observer que les joints faits dans la forme B, fig. 4, doivent être tournés convenablement par rapport à la direction du mouvement circulaire de la scie. Les scies composées de trois ou d'un plus grand nombre de pièces doivent être assemblées et assujéties de la manière qui vient d'être décrite. Si elles sont composées de deux pièces (voyez fig. 3), l'arête de jonction doit être creuse à la partie A, et aiguë à celle B (voyez *o*A et *o*B).

« *Spécification du mécanisme.* Les perfectionnements dans la machine pour scier le bois d'une manière facile et expéditive, consistent dans la manière de placer et d'assujétir la pièce de bois sur le chariot, dans la facilité de faire glisser la scie d'un trait à l'autre, et dans la possibilité de scier des deux manières, soit en s'approchant, soit en s'éloignant de la scie ou des scies (*either towards or from the saw or saws*).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

« Les fig. 5, 6, 7 et 8 (la fig. 5 est nne section transversale, la fig. 6 un plan, la fig. 7 une section latérale, et la fig. 8 une élévation) représentent le mécanisme disposé avec une scie circulaire seulement. La scie circulaire A est ajustée sur un axe de forme circulaire qui tourne dans des boîtes CC. Elle doit tourner au moyen d'une bande sans fin, mue par un moteur quelconque (le vent, l'eau, la vapeur, les chevaux ou les hommes). Le plateau circulaire D, fig. 5 et 6, est destiné à recevoir la bande. La pièce de bois à scier (voy. E, fig. 5, 6, 7, 8) est placée sur un chariot F, et arrêtée au moyen de crampons G. Le chariot est mu dans un sens ou dans l'autre par la manivelle H, fig. 5, 6 et 7, communiquant au moyen de roues dentées à un pignon J, fig. 5 et 7, qui engrène dans une crémaillère K, fig. 7. Le chariot est garni de galets, pour faciliter son mouvement longitudinal, et doit être mu avec la main, afin que ce mouvement puisse être accéléré ou retardé à volonté. La longueur de ce chariot est proportionnée à celle des pièces de bois qui doivent être débitées par la machine.

« Quand la scie a fait un trait, elle est transportée dans la direction du trait voisin de la manière suivante. Supposons, par exemple, que cette scie ait exécuté le premier trait 1 (voy. la pièce E, fig. 5) : elle est alors mue latéralement au trait suivant 2, et ainsi de suite, et arrêtée à sa place au moyen de la vis N, fig. 5 et 6. Cette vis N est fixée à une extrémité de l'axe cylindrique, et passe dans une direction parallèle à cet axe au travers des boîtes C*, fig. 5, 6 et 8. Cette manière de scièr le bois n'oblige pas d'arrêter la pièce quand elle doit être débitée (*slabbed*), excepté seulement quand la pièce est courbe, cas auquel elle doit être redressée de force au moyen des crampons G, G, fig. 5, 6, 7, 8. M, M, fig. 8, représentent des coins circulaires, destinés à suivre le trait ouvert par la scie, et par ce moyen à diminuer le frottement, et à assujétir la pièce de bois. Les coins circulaires se meuvent latéralement quand on les fait glisser, de manière à se rencontrer avec le trait suivant de la scie. Le chariot peut être mu (si on le trouve plus avantageux) par le mécanisme qui imprime le mouvement à la scie.

« Les fig. 9 et 10 représentent la manière d'ajuster plusieurs scies sur un axe, en sorte qu'une pièce de bois puisse être entièrement débitée dans une seule opération. Dans ce cas les plateaux des scies sont fixés sur un tambour de fer A (fig. 9 et 10), et tenus fermes et serrés les uns contre les autres par quatre boulons 1, 2, 3, 4, fig. 10. Pour abaisser la scie ou les scies, quand elles s'usent, les traverses latérales P, P, fig. 9 et 10 peuvent être abaissées au moyen des coins Q, Q. On doit observer que la pièce de bois ne porte pas immédiatement sur le chariot : elle est élevée au moyen des petites pièces placées en travers, voyez O, O, O, fig. 5, 6, 7, et 8 : les coins circulaires indiqués en M, fig. 8, sont aussi représentés en M, fig. 11 : ils tournent par le mouvement de la pièce, et tiennent fermes chaque planche, et conséquemment la pièce entière.

« A, fig. 12, représente un instrument composé d'une ou de plusieurs plaques de métal, qui peuvent être employées à la place des coins circulaires. La distance entre les plaques est réglée d'après celle qui est entre les scies.

« B, fig. 12, représente la largeur des plaques dont on vient de parler. »

Établissement du moulin à scie circulaire.

J'essaierai d'indiquer la manière dont on pourrait faire l'établissement de cette machine. D'après les art. 706 et 707, les scies à mouvement alternatif, quand elles

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ont leur plus grande vîtesse, parcourent 80 fois dans une minute un espa ce 60 pouces, ce qui revient à $2^m,16$ par seconde. Quand la vîtesse moyenne du coude d'une manivelle est $2^m,16$, on peut juger, d'après la note (*p*), que sa plus grande vîtesse est $\frac{2^m,16}{0,64} = 3^m,35$. Il paraît d'après cela qu'on peut imprimer au moins 3^m de vîtesse par seconde à la circonférence des scies circulaires. Lorsque les scies à mouvement alternatif ont la vîtesse dont on vient de parler, le chariot avance de 10 po. par minute, ou de $0^m,0045$ par seconde. Lorsqu'elles seront remplacées par des scies circulaires, la quantité de bois sciée dans un temps donné doublera d'abord, en raison de ce que les scies couperont continuellement, tandis qu'auparavant la moitié du temps était perdue; puis augmentera, à raison de leur plus grande vîtesse, dans le rapport $\frac{3}{2,16}$. La quantité dont on pourra faire avancer le chariot dans une seconde sera donc $0^m,0045\frac{2\times 3}{2,16} = 0^m,0125$. Par conséquent, en supposant une pièce de bois de $0^m,4$ d'épaisseur, la surface de sciage exécutée en une seconde sera $0^m,4\times 0^m,0125 = 0^{mq},005$. D'après le § 1 de la note (*ek*), ce travail exigera une quantité d'action $= 0^{mq},005\times 43333^{k\times m} = 217^{k\times m}$. Comme ici il n'y a plus de chocs, et que les frottements et le mouvement imprimé au chariot peuvent seuls faire perdre une partie de la quantité d'action fournie par le moteur, j'augmenterai seulement le résultat précédent de $\frac{1}{7}$, ce qui portera à $250^{k\times m}$ environ la quantité d'action que le moteur devrait fournir en une seconde pour faire marcher chaque lame de scie. Ces calculs s'appliquent spécialement au chêne vert, sur lequel Bélidor a fait ses observations. Des bois plus durs comporteraient sans doute une vîtesse moindre, et une quantité d'action plus grande.

Si le moulin doit tourner au moyen d'un courant d'eau, on égalera, comme dans le § 3 de la note (*ek*), la quantité d'action précédente à celle transmise par le courant à l'espèce de roue qu'on voudra employer; ce qui fera connaître le volume d'eau à dépenser pour faire marcher chaque lame de scie. En supposant 3^m de vîtesse par seconde à la circonférence d'une lame dont *d* est le diamètre, on aura $\frac{3}{\pi d}$ pour le nombre de tours qu'elle devra faire en une seconde. En conservant les dénominations des notes précédentes, le nombre de tours que devra faire la roue à eau en une seconde est $\frac{V}{\pi D}$. D'après cela on pourra régler les diamètres respectifs des roues ou plateaux circulaires sur lesquels passeront les bandes qui transmettront le mouvement à l'axe de la scie. Il ne faudra point oublier que ces bandes, par l'effet de leur élasticité, laissent toujours perdre une partie de la vîtesse, comme on l'a déja observé dans l'art. 1^er^ de l'addition au chapitre précédent. M. Brunel donne aux lames des scies circulaires jusqu'à près de 6^m de diamètre (Ch. Dupin, *Mémoires sur la marine et les ponts et chaussées de France et d'Angleterre*, p. 15), et débite par leur moyen en feuillets très-minces, et avec une extrême précision, des pièces d'acajou qui ont plus de $0^m,6$ de grosseur.

Machine à scie circulaire pour couper les bois en travers, construite à Portsmouth par M. Brunel.
Pl. F, Fig. 14-17.

Le même mécanicien a également employé les scies circulaires au sciage des bois en travers, dans une machine établie dans le *dock-yard* de Portsmouth pour le débit des bois employés à la fabrication des poulies, et qui est très-digne d'être connue. La description suivante est extraite de la *New cyclopædia* du docteur Rees, art. *Machinery for manufacturing ships' blocks*.

« L'axe de la lame est monté de manière à se mouvoir parallèlement à lui-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

même dans une direction quelconque. La lame restant constamment dans un même plan, et tournant rapidement sur son axe, coupe le bois qui lui est présenté; et comme cette disposition permet de l'appliquer successivement sur les différents côtés de l'arbre, une scie d'une dimension médiocre peut suffire pour couper de plus grands arbres qu'elle n'aurait fait sans cela. »

« Les fig. 14, 15, 16 et 17 de la planche F offrent deux plans et deux élévations de cette machine. La fig. 14 est une élévation qui montre l'arbre AA (qui doit être coupé) dans le sens de sa longueur. La fig. 15 est prise dans l'autre direction, et on n'y voit que l'extrémité de l'arbre. La fig. 16 est un plan dont la situation correspond à la fig. 14, et qui montre la totalité du mécanisme; mais le plan, fig. 17, offre seulement les parties inférieures. Les mêmes lettres de renvoi servent pour toutes les figures. AA, comme on l'a déja dit, est l'arbre qui doit être scié en travers : il est couché sur un châssis de charpente B, qui peut être considéré comme son banc ou support. Au travers de l'extrémité de ce châssis est placée une forte pièce de bois ou seuil C, et sur cette dernière deux autres pièces verticales R, S, sont assemblées, et forment avec une pièce transversale placée à leur sommet un châssis, au moyen duquel l'arbre peut être fixé sur le banc B, pendant qu'il est coupé. Cela se fait par le moyen d'un levier D, dont une extrémité est engagée sous une cheville enfoncée dans le poteau S du châssis pour servir de point d'appui, et dont l'autre extrémité passe entre la face du poteau R, et une pièce de bois *a* qui lui est fixée. Ce levier étant pressé de haut en bas contre l'arbre, est retenu par une cheville mise dans un trou pratiqué au travers de la pièce *a* et du poteau. L'autre extrémité du levier est retenue par une pièce semblable à *a* (voy. fig. 1), fixée au poteau S. Par ce moyen, l'arbre est maintenu immobile pendant qu'il est scié. T est un rouleau ou treuil pour faire avancer l'arbre sur son banc. On le fait mouvoir par le moyen du levier E qui peut tourner sur l'axe du rouleau, mais qui a un petit cliquet qui s'engage dans les dents d'une roue à rochet *b*, laquelle est fixée invariablement sur cet axe. Le levier étant mu comme celui d'une pompe, fait à chaque coup tourner le rouleau de quelques dents de la roue à rochet, et au moyen d'une corde qui s'enroule sur ce rouleau, fait avancer l'arbre. *d* est un cliquet qui retient les dents de la roue à rochet, et empêche le rouleau de retourner en arrière après qu'il a été mu par le levier. Uu châssis de bois est placé au-dessous de l'arbre en F, pour former une continuation du banc B, mais en laissant un espace entre l'extrémité de ce dernier et la traverse C, afin que la lame puisse descendre dedans quand elle partage l'arbre, tandis que le châssis F soutient le morceau qui est coupé. Une pièce de bois est fixée sur le châssis F en *f* : par le moyen d'une vis, elle agit comme un arrêt à l'extrémité de l'arbre, et sert à fixer la longueur de la portion qui doit en être coupée. Elle est par conséquent mobile, et peut être fixée à une distance plus ou moins grande de l'extrémité du banc B, suivant la longueur de la portion de l'arbre qui doit être coupée. Nous allons maintenant décrire le mécanisme qui porte la lame, laquelle est vue en G, et est fixée sur l'extrémité d'un axe *g* monté dans un châssis consistant en deux montants latéraux H, H, assemblés par des pièces transversales I, I, K, L, et renforcé par des tirants diagonaux ou liens *e*, *e*. La pièce transversale supérieure est en fer fondu, comme on le voit fig. 16, et ses extrémités sont fixées à celles d'un châssis MM, suspendu comme le balancier d'un pont-levis sur deux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

points d'appui supportés par la charpente de la machine, laquelle consiste en deux poteaux N s'élevant du plancher au plafond, et assemblés par une pièce transversale OO. Par ce moyen l'axe de la lame peut être mu dans quelque direction que ce soit, mais en conservant toujours son parallélisme, montant et descendant par l'inclinaison du châssis MM sur ses points d'appui, et se mouvant de droite à gauche au moyen du châssis H, qui tourne sur les charnières par lesquelles il est assemblé et suspendu. Du premier châssis la lame reçoit son mouvement du moulin par le moyen d'une bande *h*, laquelle passe sur une poulie *i*, fig. 14 et 15, contenue dans une ouverture de la traverse supérieure L du châssis H. Cette poulie est fixée sur un axe court, lequel est exactement dans la même ligne que l'axe des charnières qui assemblent les deux châssis MM et H. Sur le même axe est une autre poulie *k*, qui, au moyen de la bande PP, fait tourner une poulie *l*, fixée sur l'axe de la lame. *mm*, fig. 14 et 15, sont deux petites roues pour guider la bande, et la serrer, si cela est nécessaire, quand elle se détend. La principale bande *hh* est guidée sur les poulies *n*, lesquelles étant près du centre de mouvement du châssis M, ne sont pas sensiblement déplacées par le mouvement de ce châssis, lequel ne tend ni ne détend point la bande, qui passe autour d'un grand tambour tourné par le moulin. L'ouvrier qui fait le service de la machine fait mouvoir la scie dans diverses directions au moyen de deux manivelles V et W. La dernière est placée à l'extrémité d'un axe *w*, sur lequel sont fixés deux pignons qui engrènent dans deux crémaillères situées à l'extrémité des barres de bois Q, Q, fig. 14 et 15, lesquelles sont assemblées aux extrémités du grand châssis MM, par les mêmes charnières qui assujettissent les deux châssis l'un à l'autre; de manière qu'en tournant cette manivelle W dans une direction, on élève la scie, et qu'en la tournant dans une direction contraire, on l'abaisse, en inclinant le châssis M sur son centre de mouvement. D'une manière semblable, la manivelle V donne le mouvement, au moyen d'une roue dentée et d'un pignon, à un axe semblable *v*, lequel fait marcher au moyen de ses deux pignons les barres XX, assemblées au châssis suspendu H, et par ce moyen éloigne ou rapproche la scie de l'ouvrier qui se tient près du châssis NN. Les deux châssis H et M sont considérablement renforcés par les barres QQ et XX qui leur sont assemblées. Car les deux pignons agissant également sur les deux barres, et faisant mouvoir les deux côtés du châssis en même temps, ces barres s'opposent à ce que le châssis se torde, ce qui empêcherait l'axe de la lame de conserver son parallélisme. Mais pour obtenir ce résultat il était nécessaire que les pignons demeurassent exactement en contact avec les crémaillères. A cet effet, les barreaux Q et X auxquels les crémaillères sont assujetties sont appuyés sur deux rouleaux *y*, *y*, appliqués contre leur face opposée. Ces rouleaux sont maintenus par un châssis triangulaire en fer, dont le troisième angle est fixé sur l'axe des pignons; et par ce moyen, les dents des crémaillères et des pignons sont toujours maintenues exactement en contact, quoique l'inclinaison des crémaillères varie nécessairement avec la position des châssis auxquels elles sont assujetties. »

« La manière dont cette machine ingénieuse agit est presque évidente d'après la description. L'arbre étant assujetti, l'ouvrier prend les manivelles V et W, une dans chaque main, et en tournant l'une ou l'autre, dirige à volonté la scie contre l'une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou l'autre face de l'arbre. Il l'applique d'abord comme l'indique la fig. 15, et coupe la moitié de l'arbre de ce côté avec une très-grande rapidité. Alors il l'élève au moyen de la manivelle W, et coupe le sommet de la pièce. Enfin il porte la scie du côté opposé, et en le coupant le morceau est séparé, quand même son diamètre serait presque égal à celui de la scie. La scie est ensuite mue au moyen de ses manivelles, de manière à l'éloigner de l'arbre, le morceau coupé enlevé, et l'arbre avancé pour qu'on en coupe un autre. Cette machine est tellement expéditive, et exécute l'opération avec tant d'exactitude, qu'on lui donne la préférence sur une scie à mouvement alternatif. Depuis son premier établissement, on a ajouté une crémaillère et un pignon au châssis RS, pour tenir l'arbre, au lieu du levier; elle le presse de haut en bas, à la manière d'une vis. Par ce moyen, la scie peut maintenant servir pour scier les pièces en quarré, après qu'elles sont coupées de l'arbre, et pour les couper de manière à former différents morceaux d'une forme donnée, ou pour débiter quelque morceau de bois que ce soit. »

Emploi des scies curvilignes dans l'intérieur des ateliers de charpente, menuiserie, etc.

Les machines précédentes conviennent à l'exploitation des bois faite en grand, et sont propres à remplacer avantageusement les moulins décrits par Bélidor dans ce chapitre. On peut, avec non moins d'avantage, employer les scies circulaires pour abréger et faciliter divers travaux qui s'exécutent dans l'intérieur des ateliers, et particulièrement dans ceux de charpente, de menuiserie, de tonnellerie et de charronnage. Les établissements de M. Smart, à Londres, où l'on fabrique des mâts creux pour les bâtiments de mer, et d'autres objets, en offrent plusieurs exemples. Je me bornerai à donner une idée des dispositions qui y sont adoptées. Elles consistent en général dans un banc ou établi, en-dessous et en travers duquel passe l'axe de la scie, qui est horizontal. Cet axe porte une poulie ou plateau circulaire, sur lequel passe la bande sans fin qui lui transmet le mouvement. Un segment du cercle de la scie, ayant une flèche égale à l'épaisseur des bois à couper, s'élève au-dessus de la surface de l'établi, soit à côté et très-près d'un de ses bords, soit en passant au travers d'une fente longitudinale pratiquée à cet effet. On fixe sur l'établi une tringle rectiligne, le long de laquelle on applique et on fait glisser la pièce de bois qui doit être sciée, en la présentant à la lame. Cette tringle peut recevoir diverses situations par rapport au plan de la scie, au moyen de ce que ses extrémités portent deux boulons qui passent au travers de l'établi dans des rainures transversales. Le mouvement peut être donné à la lame, soit au moyen d'un manège, soit de la manière indiquée ci-dessus, art. 1[er], pour la scie qui coupe les bois en travers.

On peut voir dans le *Traité de Mécanique* de M. Gregory, tom. 2, p. 350, l'indication d'une application ingénieuse des scies circulaires, faite par M. Smart, à la fabrication des tenons de ses mâts creux. On trouvera aussi dans le t. 24 des *Transactions of the society for the encouragement of arts and manuf.*, et dans le t. 10, 1[re] série, du *Repertory of arts*, etc. la description d'une scie curviligne de M. W. Trotter, dont la lame a la forme d'un segment de sphère, et peut couper des segments de cercle, ou d'autres courbes de peu d'amplitude, au lieu de lignes droites.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ART. 4. *Sur les machines à forer le bois pour la formation des tuyaux de conduite.*

Forets cylindriques, pour la formation des tuyaux en bois.

Le procédé ordinaire pour le forage du bois, tel qu'il est indiqué art. 712, consiste dans l'emploi de tarières qui détruisent et mettent en poussière la totalité du bois compris dans le vide qui doit être formé. M. Howell (*Repertory of arts and manufactures*, 1798, t. 9, 1.re série), a substitué avec avantage à ces tarières des instruments formés par un tube de fer, dont l'extrémité est armée d'un tranchant d'acier denté. Ils creusent le tuyau en enlevant un noyau cylindrique, qui peut ensuite être foré à son tour, pour former un tuyau de moindre diamètre. Ce nouveau procédé offre économie de matière, et sur-tout économie de temps et de quantité d'action, puisqu'il y a moins de bois détruit, et que la quantité d'action dépensée doit en général être à-peu-près proportionnelle à la quantité de bois dont les fibres sont tranchées, et qui est réduit en poussière.

Machine proposée pour la formation des tuyaux en bois au moyen des forets cylindriques. PL. G, FIG. 1 et 2.

M. Howel n'ayant point décrit le mécanisme au moyen duquel ces nouveaux forets sont mis en action, j'ai essayé d'y suppléer en composant la machine représentée Pl. G, fig. 1 et 2. La pièce A qui doit être forée, au lieu d'être placée horizontalement comme dans les moulins décrits par Bélidor, l'est ici verticalement. On y trouve principalement l'avantage de se débarrasser avec facilité de la sciure du bois, à mesure qu'elle se forme, et d'empêcher que cette sciure, en s'amassant en plus grande quantité d'un côté que de l'autre, ne nuise à la régularité du travail. La pièce A est assujettie dans les deux colliers en fer fondu BB et CC, au moyen des vis de pression 111 et 222, de manière que l'axe du tuyau à former se confonde avec l'axe des colliers. Chacun d'eux porte à ses extrémités les galets D,D et E,E, et ils sont entretenus à une distance fixe (et qu'on peut varier suivant la longueur des pièces à forer) au moyen des tringles F, F. Ces galets roulent sur des guides saillants en fer *e*, *e*, fixés sur les faces opposées des montants S,S. Par ce moyen les deux colliers, et la pièce de bois qu'ils soutiennent, peuvent être mus avec facilité dans le sens vertical, mais ne sont susceptibles d'aucun autre mouvement. Pour les mouvoir verticalement, on fait tourner l'axe de rotation LL portant les deux pignons H, H, qui engrènent avec les crémaillères G, G, assujetties aux galets E, E du collier supérieur. Cet axe LL porte aussi la roue I, sur laquelle s'enroule une corde qui soutient le contrepoids Q. Ce contrepoids doit faire équilibre autour de l'axe au poids du système suspendu aux crémaillères G, G, et il résulte de son emploi que ce poids est entièrement reporté sur les points d'appui de l'axe LL, et que le moteur qui fera tourner cet axe n'en soutiendra aucune partie. Ce moteur n'aura d'autre effort à exercer que celui qui est nécessaire pour rompre l'équilibre, et déterminer l'abaissement progressif de la pièce AA, à mesure qu'elle se fore, ou son élévation quand le forage est terminé et qu'il faut la remplacer par une autre. Le mouvement est imprimé à l'axe LL au moyen d'une bande sans fin passant sur la roue K, et il peut être produit, soit par le même moteur qui

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fait tourner le foret ; soit par la descente d'un poids, ou de toute autre manière qui paraîtra plus convenable.

Le foret cylindrique P est assujetti à son extrémité inférieure dans la boîte O, avec laquelle il est forcé de tourner. Cette boîte reçoit le mouvement de la roue M, sur laquelle passe la bande sans fin NN qui transmet l'action du moteur. Le foret P passe au travers du collier B, sous lequel est une autre boîte cylindrique *b*, dans laquelle le foret tourne à frottement doux, et qui le maintient dans une direction exactement verticale, sans empêcher son mouvement de rotation. Cette dernière boîte, qui est assujettie au collier, doit être changée, suivant qu'on emploie des forets de différents diamètres.

La poulie mobile U sert, au moyen de la corde VVV, à soulever et mettre facilement en place les pièces qui doivent être forées. On peut, pour plus de commodité, faire passer cette corde sur un treuil mu par une manivelle, et portant une roue à cliquet.

Établissement de la machine à forer les tuyaux en bois.

On ne pourrait faire d'une manière assurée l'établissement de cette machine, qu'autant qu'on aurait reconnu, par des observations spéciales, la quantité d'action que doit consommer le genre de travail qu'elle est destinée à effectuer. Si, faute de semblables observations, on veut se contenter d'un simple aperçu, je remarquerai que l'action du foret sur le bois étant ici tout-à-fait semblable à celle des scies ordinaires, la quantité d'action qu'il consommera doit pouvoir s'estimer à-peu-près de la même manière. Supposons donc que d représente le diamètre du tuyau à percer. On pourra faire faire au foret à-peu-près deux tours par seconde, en sorte que sa surface aura une vîtesse $=2\pi.d$. En faisant ici le même raisonnement que dans l'art. précédent, pour l'établissement du moulin à scie circulaire, on verra que la quantité dont on pourra faire avancer la pièce à forer dans une seconde sera $0^{m},0045\frac{4\pi.d}{2^{m},16}=0,026.d$ mét. Par conséquent la surface de sciage exécutée dans le même temps sera $0,026.d\times\pi d$, et la quantité d'action qui sera consommée $0,026.d\times\pi d\times 43333^{k\times m}=3564.d^{2}$ kil. × mèt. Il faudra ensuite augmenter ce résultat en raison des frottements de la machine, et peut-être aussi trouvera-t-on dans la pratique qu'il faut pour le forage du bois ouvrir un trait plus large que le trait des scies ordinaires, et par conséquent dépenser, à surface de sciage égale, une quantité d'action plus grande.

ART. 5. *Sur les machines à scier et à forer la pierre et le marbre.*

Indication de diverses dispositions pour le sciage de la pierre par un mouvement alternatif.

La machine décrite art. 711 est très-défectueuse. On en trouve une dans le t. 1 du *Recueil des machines approuvées par l'Académie des Sciences*, où le mouvement alternatif de la scie est produit d'une manière moins imparfaite, mais qui laisse encore beaucoup à desirer. On trouve aussi dans ce recueil l'indication de diverses inventions dont l'objet est de faciliter le sciage des tronçons de colonnes, et autres surfaces courbes. M. G. Wright a pris à Londres en 1805 une patente pour ces mêmes inventions, auxquelles il n'a presque rien ajouté (*Repertory of arts and manufactures*, t. 8, 2.e série ; *Bulletin de la société d'encouragement*, mai 1813).

Machine à scier et à polir le mar-

MM. Brown et Marve, célèbres pour l'exécution en grand de ce genre de travail,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

emploient à Derby et à Londres des machines à scier le marbre très-bien disposées, et où le mouvement alternatif des scies est produit de manière à éviter autant qu'il est possible les inconvénients inhérents à ce genre de mouvement. Ces machines servent aussi à polir les dalles de marbre qu'elles débitent. J'en ai extrait la description suivante de l'*Encyclopédie* du Dr Rees, art. *marble* (*polishing of*). bre employée en Angleterre.

« La fig. 3 est une vue de côté du moulin pour scier et polir des dalles de marbre. La fig. 4 est un plan du même, marqué avec des lettres correspondantes. ABC est un châssis en bois suspendu par les châssis verticaux également en bois DE, FG, aux traverses H, H, H, H, de manière à être susceptible d'un mouvement d'oscillation. Le mouvement est donné à ce châssis par la verge I communiquant avec la manivelle OK, qui est tournée par l'eau ou la vapeur. » Pl. G, Fig. 3 et 4.

« Ce châssis étant mis en mouvement fait marcher les châssis des scies L, L, M, M, et les bras polissants N, Q, lesquels s'appuient sur le pivot P, et sont poussés en arrière et en avant par le système des barres *n n*. Les lames sont des plaques d'acier taillées comme des lames ordinaires, et fixées dans des boucles oblongues par des goupilles. Ces boucles sont placées sur les traverses E, E, *b*, *b*, et les scies sont tendues par les vis *s*, *s*, *s*, et *c*. RR, SS sont quatre poteaux verticaux, formant un châssis dans lequel sont placés les blocs de marbre qui doivent être débités, et qui doivent en même temps guider le châssis de la scie. A chaque extrémité de ce châssis sont un nombre de barreaux quarrés verticaux de fer, *i*, *i*, entre lesquels passent les scies, et qui servent comme conducteurs. Les poteaux R, R, peuvent être éloignés à une plus grande distance, de manière à rendre le châssis plus long, et propre à recevoir des blocs de diverses grandeurs. La douille T à laquelle la scie est attachée sur le châssis mobile glisse sur les poteaux verticaux AC. Elle est suspendue par une corde qui passe sur une poulie *c*, et à laquelle est attaché le poids W. De cette manière, on peut faire presser la scie contre le marbre avec un degré de force donné. Il est évident que le châssis mobile, à cause de son mouvement de pendule, ne se meut pas suivant une ligne droite, mais suivant une courbe : au moyen du glissement de la douille T, la scie prend un mouvement rectiligne. Les barreaux verticaux de fer *i*, *i* sont d'une épaisseur égale ou moindre que celle des tables les plus minces, de manière que les scies puissent être placées à diverses distances, suivant l'épaisseur des tables. Pour espacer les scies convenablement, il suffit de relâcher les vis *s*, *s*, et de faire glisser les boucles oblongues qui retiennent les scies.

« Les tables de marbre à polir sont mises sur le chariot *h h*, dans une situation correspondante au frotteur Q, qui passe dessus dans la direction de sa longueur. Pour faire correspondre le frotteur aux diverses parties de la table de marbre, le chariot *h* a un mouvement latéral, au moyen de quatre roues avec gorge courant sur les guides de fer mis sur les traverses *g*, *g*. La vis sans fin *c* taillée dans l'axe principal, tourne la roue *r*. Celle-ci donne le mouvement au levier *w*, fig. 1, par le moyen de la manivelle *q*. Le levier communique avec la manivelle *k*, et tourne la roue *l*, plus ou moins d'une révolution, suivant la longueur de la manivelle, laquelle peut être changée à volonté, en faisant glisser l'axe temporaire *e*. Par ce dernier mouvement, la roue *k* agit sur la crémaillère *v*, et donne un mouvement latéral au chariot, au moyen duquel la surface entière de la dalle est exposée à l'action du frotteur. »

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Il paraît difficile d'imaginer pour le débit du marbre ou de la pierre par des scies à mouvement alternatif, des dispositions préférables aux précédentes; mais on peut présumer qu'il y aurait de l'avantage à effectuer ce genre de travail au moyen de scies circulaires, disposées d'une manière analogue à ce qu'on a vu dans l'art. 3, pour le sciage des bois.

Machine employée à Paris pour scier les tronçons de colonne par un mouvement continu.

Pl. G, Fig. 9 et 10.

A l'égard du sciage des tronçons de colonnes, les dispositions reproduites par M. G. Wrigt ne comportent encore que des scies à mouvement alternatif. On a employé dernièrement pour ce genre d'opération, dans les travaux de la nouvelle bourse de Paris, une scie à mouvement continu dont je vais donner l'idée. Un manège imprimait le mouvement à une grande roue dentée horizontale d'environ 6^m de diamètre, qui engrenait dans six pignons, également horizontaux, de $0^m,9$ de diamètre, distribués sur sa circonférence. La roue et les pignons ne sont point représentés dans les figures, où l'on voit seulement en AB (fig. 9) l'extrémité inférieure de l'axe d'un des pignons qui est vertical, et qui repose sur le bloc de pierre MM qu'il s'agit de découper. Au bas de cet axe, et à peu de distance au-dessus du bloc, sont fixées l'une au-dessus de l'autre deux roues égales, composées chacune de deux cercles concentriques CC, DD, assemblés par des traverses, et qui, au moyen de renforts pratiqués dans les points $a, b, c,...$ offrent des trous rectangulaires dans lesquels on introduit les rayons EF, qui peuvent y glisser, de manière à s'écarter plus ou moins de l'axe, et à être arrêtés à la distance convenable par des vis de pression. A l'extrémité F de ces rayons se trouve une traverse dans laquelle est pratiquée une fente où l'on introduit les lames de scie verticales *ll*... Ces lames, lorsque l'axe AB vient à tourner, coupent cylindriquement la pierre sur laquelle elles reposent, et descendent dans le trait par leur propre poids. Les appendices *f* placés vers le milieu des rayons EF, servent à placer les lames, quand on veut scier des tronçons d'un diamètre plus petit.

Machine employée par M. W. Murdock pour la formation des tuyaux de conduite en pierre.

Planche G. Figures 6, 7 et 8.

Cette manière de débiter les tronçons de colonne a de l'analogie avec le procédé appliqué par M. W. Murdock au forage des tuyaux de conduite en pierre, et pour lequel il a pris une patente (*Repertory of arts and manufactures*, 1801, t. 18, 2e série) dont je vais donner l'extrait.

« On met le support Z dans la pierre à forer, dont l'axe est placé verticalement. Dans ce support tourne l'axe AA, dont l'extrémité supérieure passe dans une boîte BB, dans laquelle il peut glisser verticalement, mais avec laquelle il doit tourner. Les extrémités inférieure et supérieure de cette boîte font fonction de tourillons, et sont maintenues dans le châssis DD. A l'extrémité inférieure de l'axe est fixée sur lui une roue ou cerceau JJ, représentée en grand fig. 7, dont le diamètre est un peu moindre que celui du tuyau à former, en sorte que le tube LL glisse facilement sur elle. La partie supérieure de l'axe est percée longitudinalement en O, à peu de distance au-dessous de la boîte, où la perforation vient en dehors obliquement.

« Sur l'axe est placé un cylindre LL qui lui est concentrique, dont le diamètre est presque égal à celui du tuyau à former, et dont la longueur est plus grande de $0^m,6$. Il porte dans le bas un anneau MM, assez large pour user la pierre de manière à ouvrir le passage au cylindre, et qui peut être lisse ou denté suivant la nature de la pierre. Le cylindre LL est fixé à l'axe par la roue KK qui doit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tourner avec cet axe, mais dans laquelle il peut glisser verticalement. La corde PP passant sur la poulie Q sert à élever le tube le long de l'axe au moyen de la manivelle R, et peut même l'élever ainsi pendant que l'axe est en mouvement. On place à la partie supérieure du tube des poids N N, proportionnés à la dureté de la pierre. »

« La poulie CC est fixée sur l'axe, et sert à le mettre en mouvement. On lui donne ordinairement un diamètre double de celui du tuyau à former. Les cordes EE et les poignées GG servent quand la machine est mue par des hommes. »

« Le tonneau S contient de l'eau qui tombe par le robinet T dans la bâche Y, où l'on met de temps en temps du sable qui est entraîné par l'eau dans le tube, où cette eau s'élève, et forme une colonne dont la charge est capable de chasser la boue à mesure qu'elle se forme. Autrement le tube devrait être fréquemment retiré, comme il faut le faire quand le travail a été interrompu. Quand la hauteur du tuyau passe 2^m, il est avantageux, pour faire écouler plus facilement la boue, de pratiquer un petit trou latéral dans la pierre, d'environ 2 centimètres, que l'on bouche après. »

« On donne à la poulie un mouvement circulaire alternatif; dans quelques cas, il peut être avantageux de lui donner un mouvement continu, mais le travail va moins vîte. Il faut alors placer au bout de la corde P la virole W (fig. 8), pour qu'elle ne se torde point. »

M. W. Murdock remarque qu'on avait déja employé des scies cylindriques pour le forage des tuyaux en bois: il réclame seulement comme son invention la manière d'expulser la boue, et le mouvement alternatif imprimé aux scies.

Dispositions adoptées à Manchester pour le forage des tuyaux de conduite en pierre.

Les procédés qui viennent d'être décrits sont employés en grand par la compagnie des travaux hydrauliques de la ville de Manchester, pour le forage des tuyaux en pierre qui servent aux conduites d'eau. La pierre ressemble beaucoup à celle de Portland, et par conséquent est une pierre calcaire. Le travail s'exécute de la manière suivante: « le premier moteur est une machine à vapeur, proportionnée au travail à exécuter, imprimant un mouvement de rotation à un axe horizontal, qui s'étend d'une extrémité à l'autre de l'espace consacré au travail. Ce travail offre plusieurs divisions, dans chacune desquelles on fore quatre tuyaux à-la-fois. Le mouvement de l'axe principal est communiqué par des roues coniques à un arbre vertical, au sommet duquel est une roue. Cette roue, au moyen d'une manivelle, imprime en tournant un mouvement de rotation alternatif à une autre roue dentée plus grande, qui engrène avec quatre pignons placés vis-à-vis les uns des autres. Ces derniers exécutent par ce moyen, alternativement dans un sens et en sens contraire, un peu plus d'une rotation entière. Au-dessous de ces pignons sont fixés sur leurs axes verticaux, des tubes de fer qu'on laisse agir par leur poids sur les pierres qui doivent être percées, et qui les forent par l'effet du frottement résultant du mouvement de rotation alternatif qui leur est imprimé. Les pierres sont coupées en morceaux d'environ 2^m, et forées en tuyaux de divers diamètres. Quand le diamètre des tuyaux est de $0^m,35$, l'épaisseur laissée à la pierre est d'environ $0^m,13$. Les tubes au moyen desquels le forage s'effectue ont par conséquent $0^m,35$ de diamètre, et pèsent environ 75^k. Ils sont faits en fer mince, à l'exception du bord à l'extrémité inférieure qui est en fer d'environ 13 millimètres d'épaisseur. A mesure

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que le frottement détruit la pierre sur laquelle porte cette extrémité, les tubes descendent de plus en plus. On y introduit une sorte de demi-fluide formé d'un mélange d'eau et de sable, qui descend des pignons au sommet des tubes, et étant parvenu au fond, délaie les particules de pierre détachées par le forage. » (*The circle of the mechanical arts*, p. 480.)

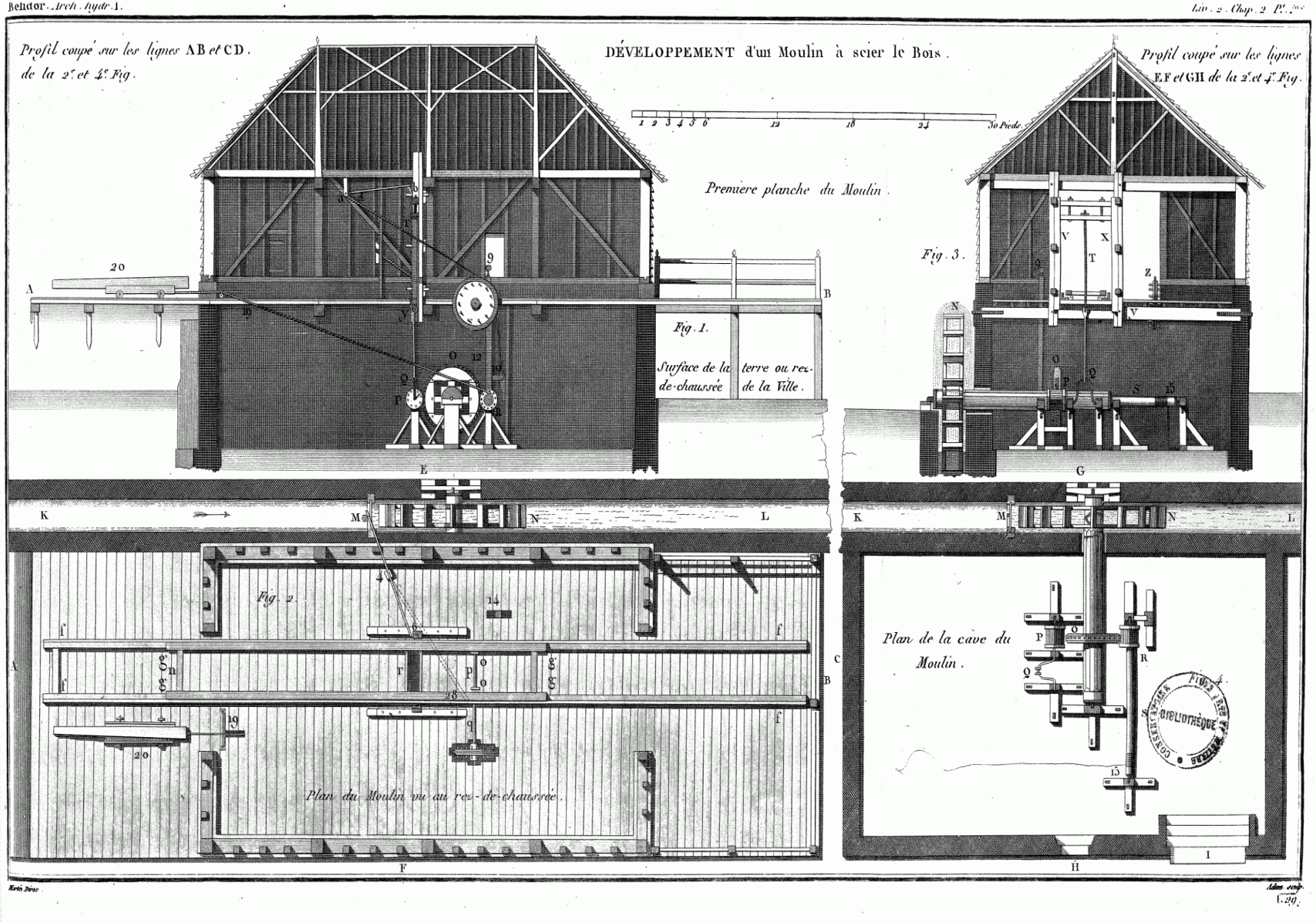
Comment on peut faire l'établissement des machines à forer la pierre.

Il resterait à indiquer ici la manière de faire l'établissement des machines de ce genre. On n'a malheureusement aucune observation qui fasse connaître avec exactitude la quantité d'action consommée dans ce travail. Elle doit d'ailleurs varier considérablement avec la nature de la pierre, et si l'on veut se contenter de simples aperçus, on pourra les obtenir au moyen des résultats donnés dans la note (*en*), en faisant un calcul semblable à celui qui a été indiqué à la fin de l'art. précédent pour le forage des tuyaux en bois.

Machine employée par M. Perronet, pour percer des trous dans la pierre.

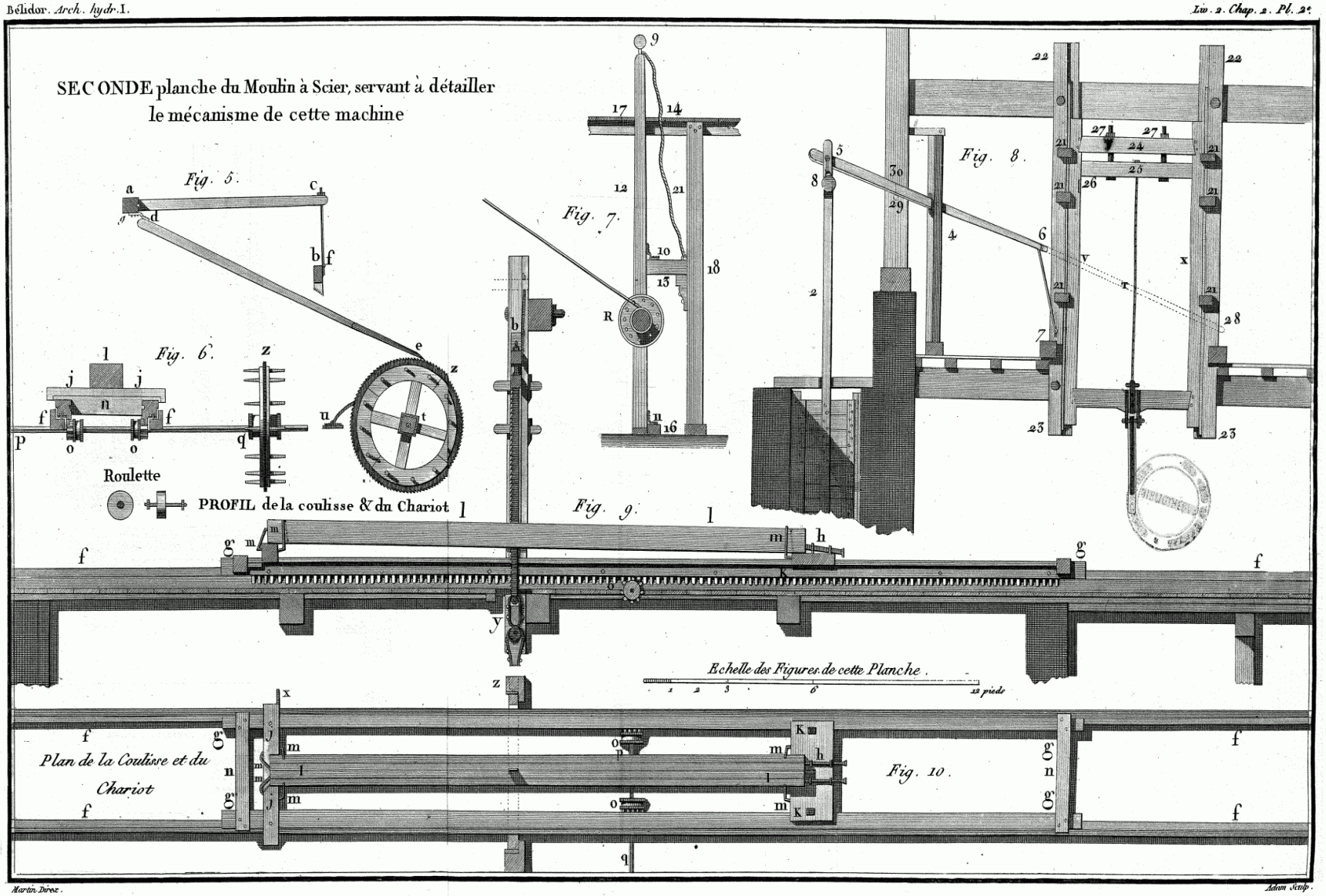
On trouve dans la *Description des projets et de la construction des ponts de Neuilly, etc.* par M. Perronet, t. 1, p. 58, la description d'une autre machine pour percer des trous dans la pierre, en la battant avec une barre verticale, dont l'extrémité est garnie d'un burin. Les deux hommes qui imprimaient le mouvement au foret employaient $2\frac{1}{2}$ jours à percer un trou de $1^m,62$ de longueur, sur $0^m,22$ de diamètre. Il y avait un troisième ouvrier pour guider et tourner le foret. La pierre était de la pierre calcaire peu dure, dont la pesanteur spécifique est environ 2,2. Une telle machine ne peut convenir que pour percer des trous d'un petit diamètre; autrement le forage par des scies cylindriques est préférable.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

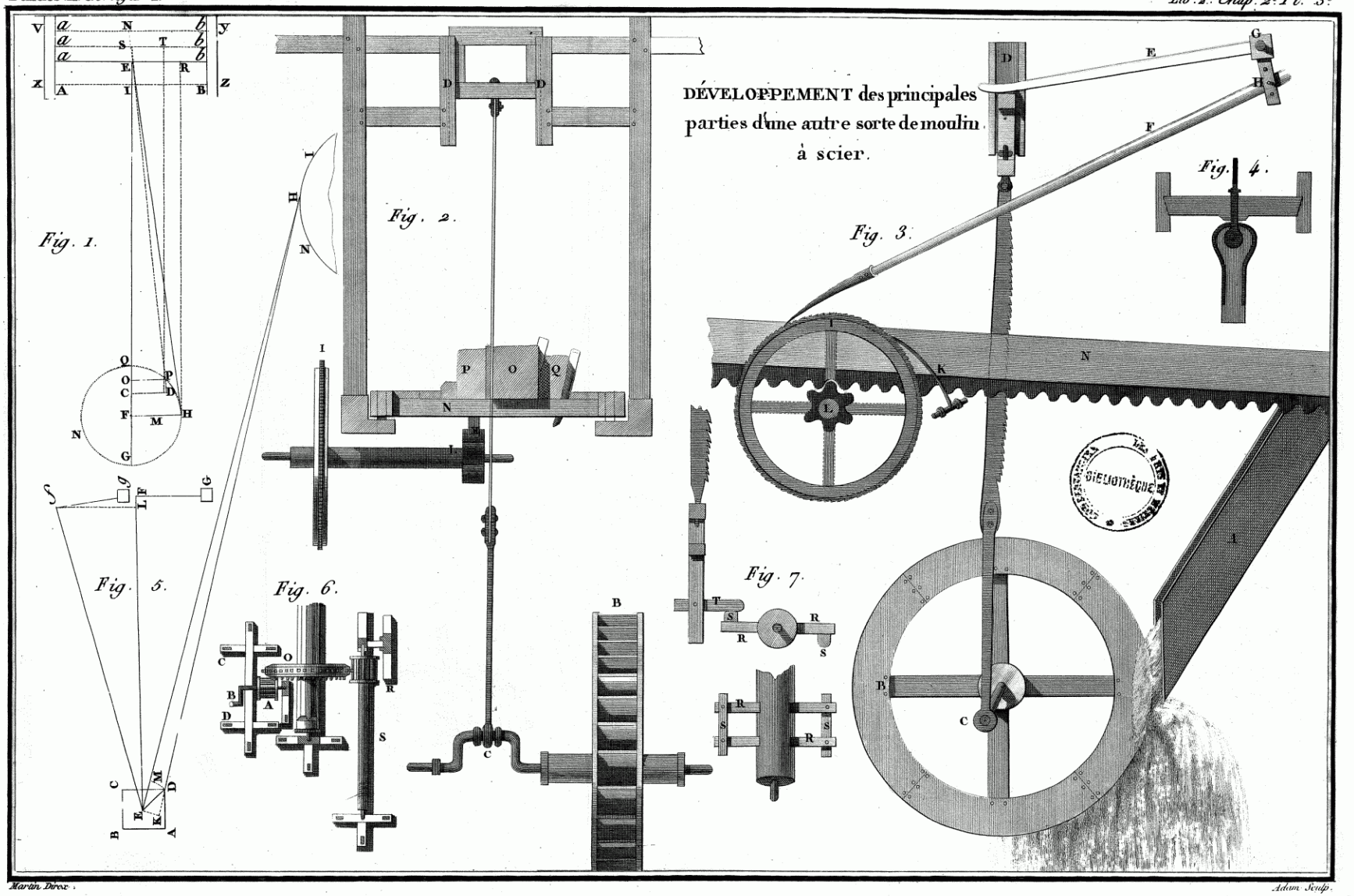


Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

SECONDE planche du Moulin à Scier, servant à détailler le mécanisme de cette machine



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

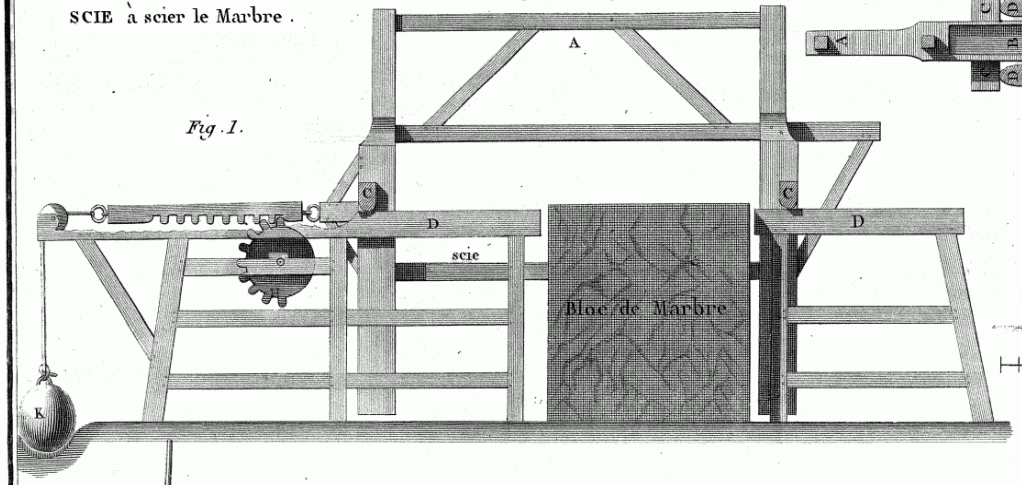


Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

SCIE à scier le Marbre.

Fig. 1.

Elévation



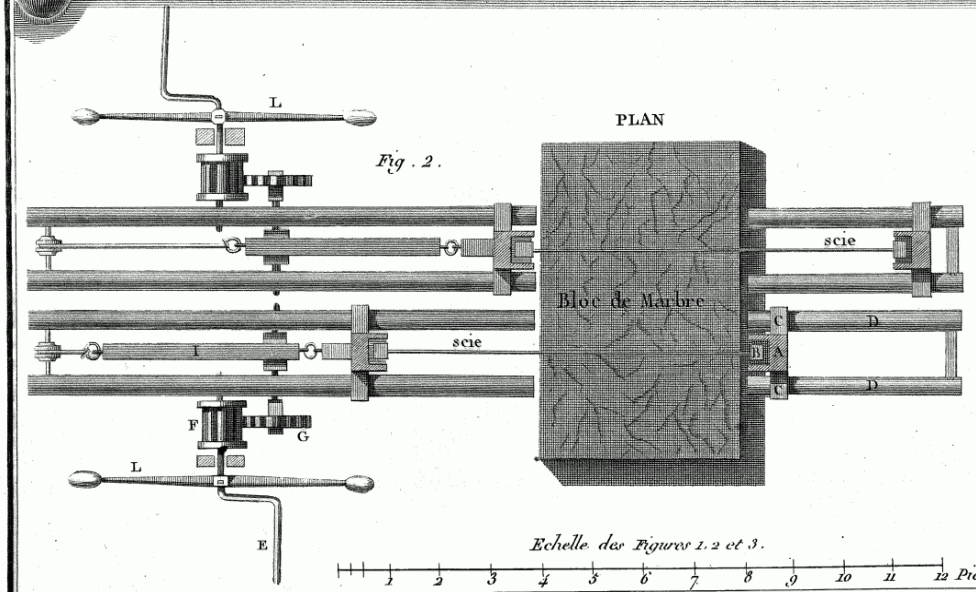


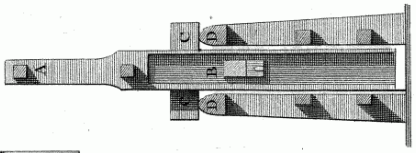
Fig. 2.

PLAN

Echelle des Figures 1. 2 et 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 *Pieds.*

Fig. 3.



MACHINE pour piler du Ciment.

Fig. 4.

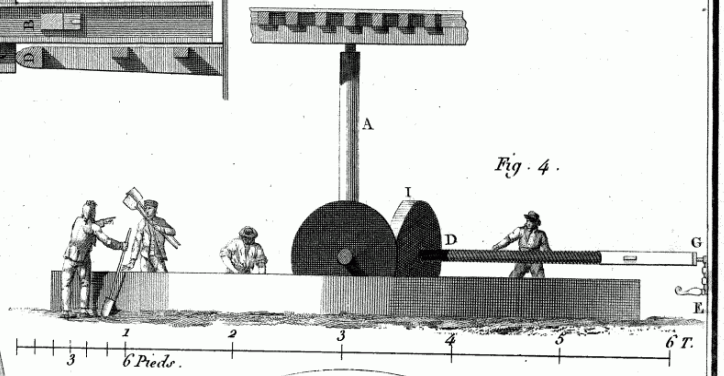
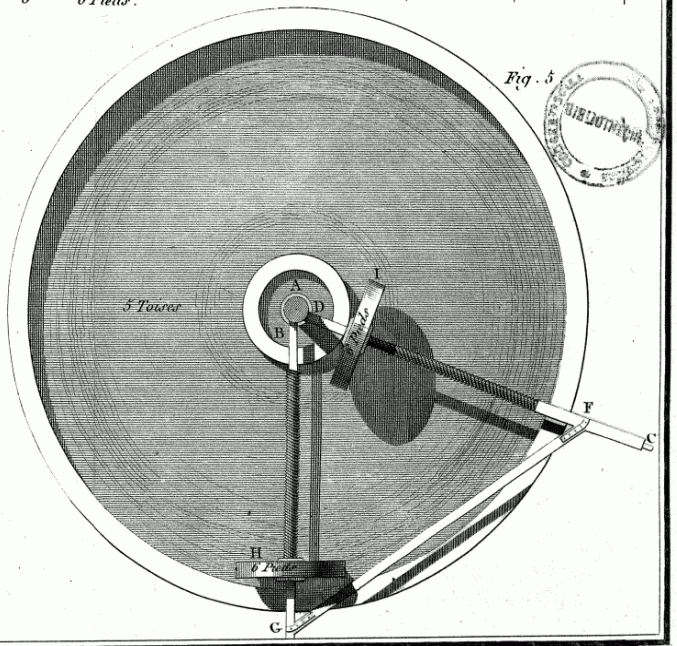


Fig. 5.

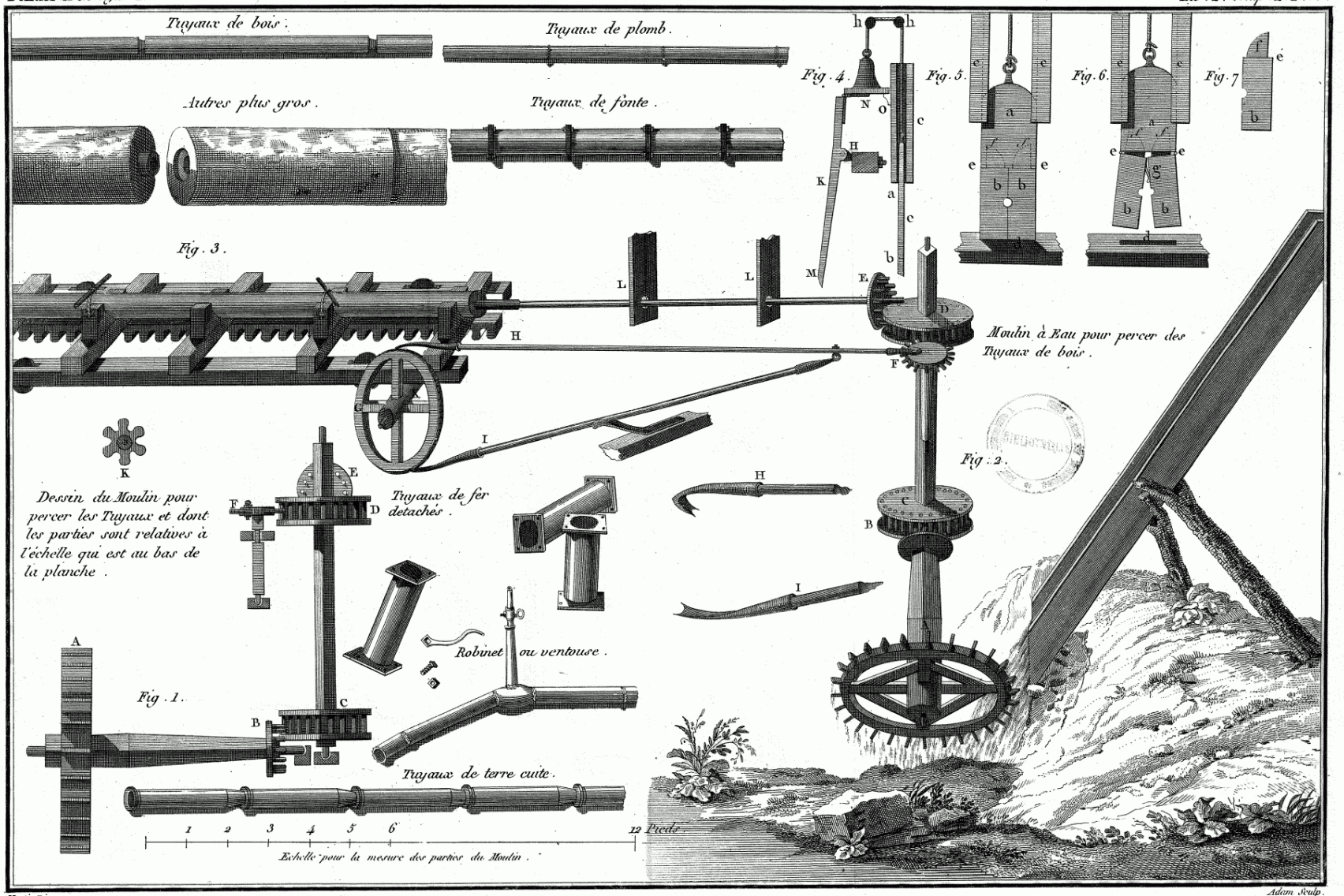


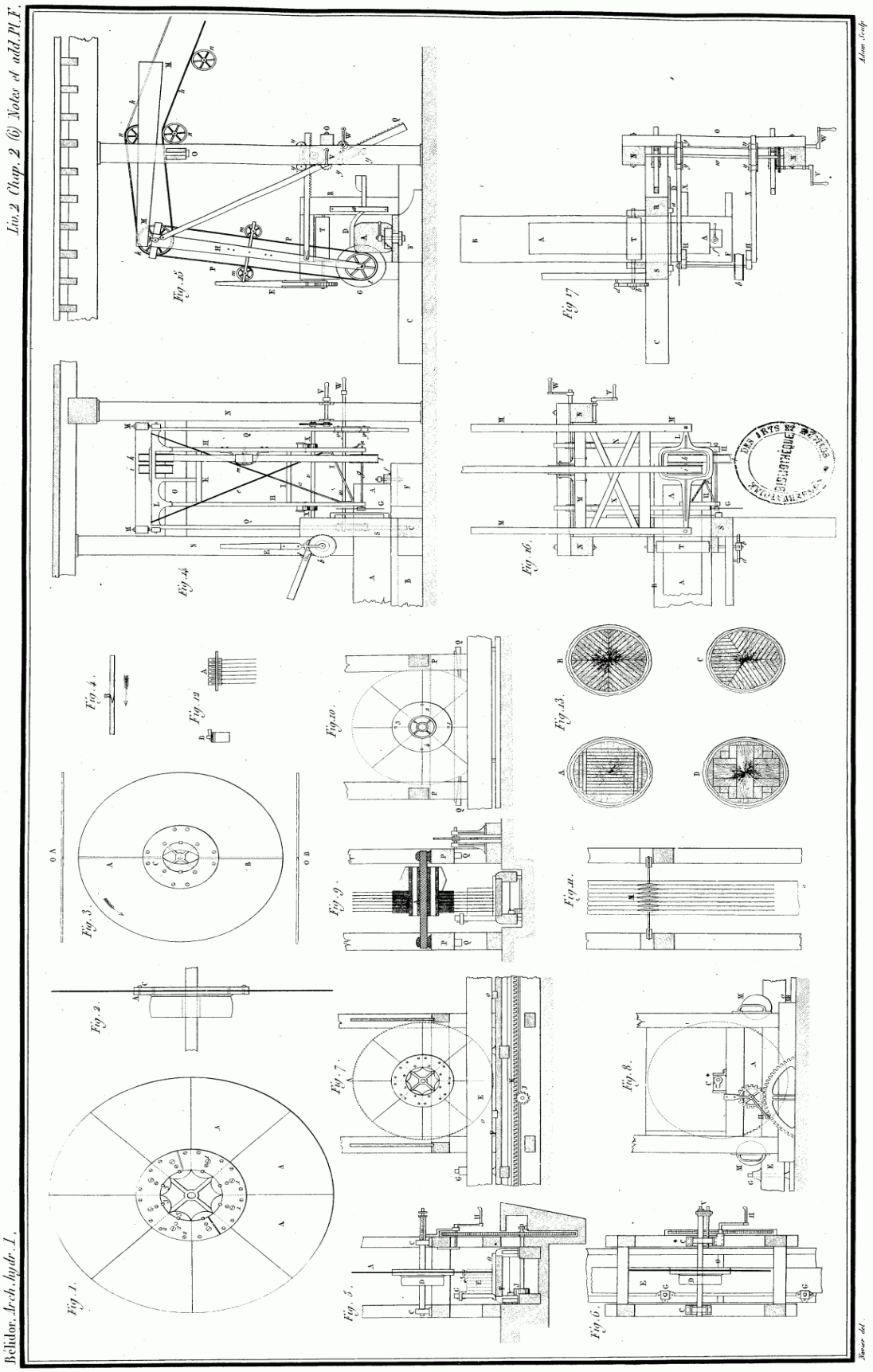
BIBLIOTHEQUE

Martin Direx. *Adam Sculp.*

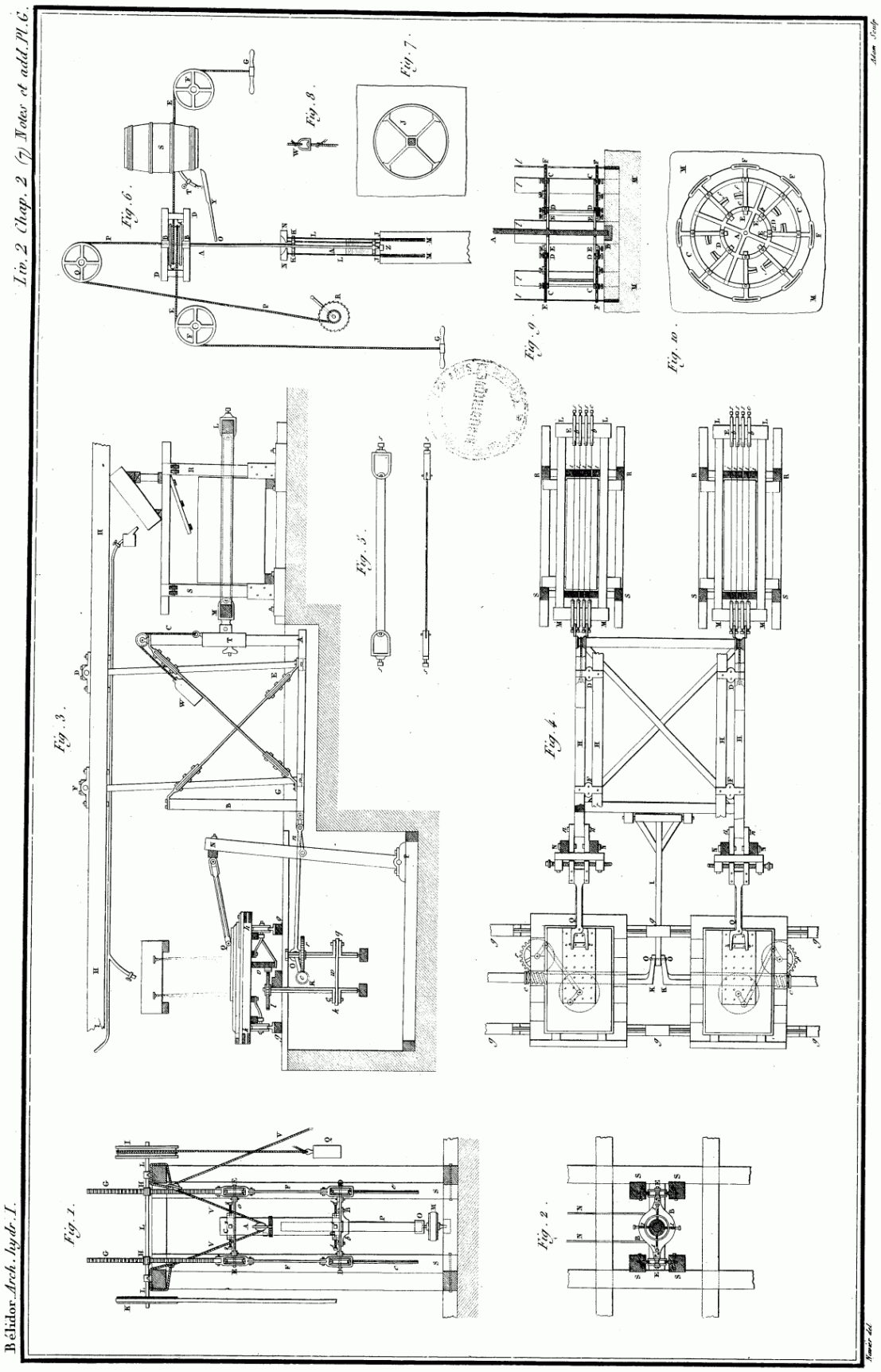
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires





Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE III.

Des moulins pour fabriquer la poudre à canon, et d'une machine pour pulvériser le ciment.

Depuis qu'on a abandonné les machines dont les anciens se servaient à la guerre, pour ne faire usage que des armes à feu, la consommation de la poudre à canon est devenue si grande, qu'il a fallu chercher un moyen de la fabriquer plus promptement qu'on ne faisait au commencement qu'elle fut découverte. Pour pulvériser les matières dont elle est composée, on a imaginé des moulins que l'on met en mouvement par l'action de l'eau; ce sont ces espèces de moulins que je me propose de décrire présentement, à cause du rapport qu'ils ont avec l'artillerie, à la perfection de laquelle mon devoir m'engage à travailler, et par la ressemblance qu'ils ont avec tous les autres moulins à pilons; ce que je vais dire d'intéressant pouvant leur être appliqué.

713. Il y a en France 36 moulins, qui peuvent fournir environ 500 milliers de poudre par mois : ces moulins sont répandus en différentes villes du royaume, entre autres à La Fère où il y en a un, qui est celui que je donne ici, exécuté à côté de l'écluse dont j'ai fait mention dans l'art. 690. Les planches 1re et 2e en expriment si naturellement toutes les parties, qu'il ne faut qu'une médiocre attention pour en juger. Produit des moulins à poudre qui sont en France.

L'arbre AE sert d'essieu à un rouet FG qui s'engrène dans les deux lanternes H et I, pour faire tourner deux arbres QR, nommés *hérissons*, parce qu'ils sont traversés par des bouts de solives K nommés *levées*, servant à lever les pilons L qui battent les matières qu'on met dans les mortiers P. Planches 1 et 2. Figures 1 et 2.

Ces hérissons sont portés par deux chevalets qui posent sur deux semelles ST, d'une seule pièce, qui n'excède que tant soit peu le rez-de-chaussée du moulin. Les bouts de solives qui traversent diamétralement les hérissons ont 40 pouces de longueur, et sont au nombre de 12 à chaque batterie, ce qui fait 24 levées, disposées comme sont les points angulaires d'un polygone régulier de 24 côtés. Ainsi à chaque tour que font les lanternes H et I, il n'y a point de pilon qui ne soit levé deux fois.

Les mortiers P, qui sont au nombre de 12 à chaque batterie, sont

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pratiqués dans une pièce de bois de 24 pouces d'épaisseur sur 20 de largeur. Ces mortiers sont percés dans le fond d'un trou de 6 pouces de diamètre, en forme de cône tronqué renversé, qu'on bouche ensuite par un tampon fait de bois de pommier, afin de recevoir l'effort des pilons et ménager la pièce NO, qui se fendrait sans cette précaution, et si elle n'était embrassée par des bandes de fer pour la fortifier.

Dimensions et pesanteur des pilons.

714. Les pilons pesent environ 65 livres. Ils ont 10 pieds de hauteur sur 3 pouces $\frac{1}{2}$ de largeur et 3 d'épaisseur. Ils sont armés par le bas d'une boîte de fonte, et sont entretenus perpendiculairement par deux prisons VX et YZ. L'une YZ est d'une seule pièce, et l'autre V X est composée de moises accolées et entretenues par deux clefs de bois marquées 2 qui les traversent, et que l'on retient avec des clavettes ; ce que l'on fait exprès pour les séparer quand on veut retirer les pilons : alors la prison qu'on détache se place sur les supports 4 (fig. 3).

PLANCHES 1 et 2. FIGURE 3.

Les mentonnets M ont 13 pouces de longueur, traversent chaque pilon, et sont retenus, du côté de la queue, par deux chevilles et une clef 5, faite en forme de coin pour les serrer.

Dimensions de la roue, du ronet, et des lanternes.

Le rayon de la roue est de 8 pieds $\frac{1}{2}$ depuis son centre jusqu'à celui d'impression des aubes. Le rayon du rouet est de 4 pieds, et sa circonférence est accompagnée de 48 dents. Le rayon de chaque lanterne est de 20 pouces, et sa circonférence est accompagnée de 20 fuseaux. Ainsi, à chaque révolution de la roue, le rouet fait faire deux tours et $\frac{1}{5}$ de tour à chaque lanterne : par conséquent, lorsque la roue aura fait 5 tours, les lanternes ou les hérissons en auront fait 12, et chaque pilon aura donné 24 coups.

Les pilons sont enlevés alternativement.

715. Il faut faire attention qu'il n'y a jamais à chaque hérisson que quatre levées qui agissent à-la-fois sur les pilons; c'est-à-dire qu'une lanterne commençant à tourner, la première levée soulève son pilon, peu après la seconde levée soulève le sien, et la troisième et la quatrième en font de même; alors le hérisson a fait la sixième partie d'une révolution, parce que la première levée a décrit un arc de 60 degrés. La lanterne continuant à tourner, cette levée abandonne son pilon au moment où la cinquième accroche le sien; ensuite le second pilon tombe, la sixième levée en accroche un; le troisième et le quatrième tombent aussi, et successivement la septième et la huitième levée accrochent le septième et le huitième pilon. Ainsi ces levées soutiennent toujours quatre pilons à-la-fois, ou un poids de 260 livres ; d'où il suit qu'en faisant abstraction des frottements, l'effet de la force motrice, dans cette machine, se réduit à élever un poids de 520 livres (*ep*).

Remarques sur la nécessité de tenir compte, dans

(*ep*) En disant que l'effet du moulin à pilon se réduit, abstraction faite des frottements, à élever un poids de 520 livres, l'auteur omet la considération des chocs

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Quand la levée cd vient rencontrer le mentonnet ab, ils sont appliqués horizontalement l'un sur l'autre, et au moment où ils sont prêts à s'échapper, ils se trouvent dans la situation fgh. Pour savoir la valeur de

---

qui ont lieu à l'instant où les levées viennent rencontrer les mentonnets des pilons, lesquels consomment, comme on le verra plus bas, une partie notable de la quantité d'action transmise à la machine. L'effet des chocs, à l'époque où Bélidor écrivait, n'était pas effectivement pris en considération dans le calcul des machines. Il ne l'a été que long-temps après, et il s'en faut même beaucoup que des notions exactes à ce sujet soient aussi répandues qu'il serait à desirer.

La théorie des machines est essentiellement fondée sur le principe de la conservation des forces vives, comme on a pu le voir dans l'addition placée à la fin du 1er livre. Il paraît qu'Huyghens, qui a présenté le premier ce principe, sous une forme un peu différente de celle adoptée dans le § 7 de la note (ai), pensait qu'il avait lieu dans un système de corps libres, quelles que fussent les actions mutuelles de ces corps, et dans le cas même où il y aurait des chocs entre des corps durs. Daniel Bernouilly reconnut que le principe de la conservation des forces vives devait être employé avec circonspection, et que, dans le cas d'un choc entre des corps non élastiques, il y aurait une certaine quantité de force vive employée à faire des enfoncements ou impressions dans ces corps, et qui serait perdue pour le mouvement du système (*Hydrodynamica*, p. 12). Il eut égard à cette circonstance dans la solution de divers problêmes où elle se présente; mais, ce qui est très-remarquable, il estima d'une manière inexacte cette perte de force vive. Il donne effectivement (*ibid.*, p. 144) une règle qui, en appelant m la masse d'un corps, v sa vîtesse avant le choc, v' sa vîtesse après le choc, revient à faire sa perte de force vive résultant du choc $= m(v^2 - v'^2)$; tandis que la force vive perdue est véritablement $= m(v - v')^2$.

Borda releva cette erreur dans son *Mémoire sur l'écoulement des fluides* (*Académie des sciences*, 1766, p. 591). Ayant déterminé exactement la perte de force vive qui avait lieu dans la question particulière dont il s'occupait, il rectifia ainsi la solution fautive qu'en avait donnée Daniel Bernouilly.

Borda appliqua ensuite ces considérations au calcul des machines dans ses mémoires sur les roues hydrauliques et sur les pompes (*Académie des sciences*, 1767 et 1768). Elles ont également été employées par Coulomb, dans ses observations sur l'effet des moulins à vent (*Académie des sciences*, 1781): il y tient compte de la force consommée par les chocs contre les mentonnets des pilons, d'une manière à-peu-près semblable à ce qu'on verra dans la note (ex). Mais c'est M. Carnot qui, en donnant en 1783, dans son *Essai sur les machines en général*, le beau théorême démontré § 8 de la note (ai), a jeté la lumière sur ces considérations importantes, et en a rendu l'application facile. Depuis cette époque, elles paraissent néanmoins avoir été trop négligées par la plupart des auteurs, sur-tout en Angleterre, où, malgré les travaux estimables de plusieurs savants, la théorie des machines ne paraît pas aussi avancée qu'on devrait le présumer, d'après le grand usage qu'on en fait dans ce pays, et la perfection qu'elles y ont atteinte sous le rapport de l'exécution.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la ligne *gb* qui exprime l'élévation du pilon, ou sa chûte, considérez que l'on a le triangle rectangle *gje*, dont on connaît l'hypoténuse *ge* de 20 pouces, et l'angle *gej* de 60 degrés, à l'aide desquels on trouvera la perpendiculaire *gj* de 17 pouces 3 lignes; d'où retranchant 15 lignes, pour la moitié de l'épaisseur de la levée, reste 16 pouces pour la hauteur *gb*.

La puissance qui fait tourner chaque hérisson n'agit pas avec une force uniforme.

716. On remarquera que la puissance qui élève chaque pilon n'agit pas avec une force uniforme: car supposons que la ligne *co* exprime le rayon de la lanterne, elle sera le bras de levier de la puissance qui fait tourner le hérisson; et comme ce rayon est égal à la ligne *ce* ou *eg*, la composée des deux *co* fera un levier dont le point d'appui sera dans le milieu, quand la levée *ed* sera horizontale. Mais aussitôt que le mentonnet commencera à s'élever, le bras *ec* se raccourcira, et ne sera plus exprimé que par la ligne *em* quand le point *c* sera parvenu en *l*; et ensuite par la ligne *ej*, quand le même point *c* sera parvenu en *g*. Ainsi d'abord la puissance sera égale au poids, et elle ira toujours en diminuant jusqu'au moment où elle échappera le pilon pour le laisser retomber; ses efforts dans ces deux extrémités seront comme *ec* est à *ej*, ou comme 2 est à 1; car l'angle *gej* étant de 60 degrés, la ligne *ej* sera moitié de *eg*, ou de *ec*. Il est vrai que quand la même puissance élève plusieurs pilons à-la-fois il se fait une espèce de compensation de leur pesanteur, et la puissance approche d'autant plus d'être uniforme, qu'elle en élève un plus grand nombre; mais voici comme on pourra faire que la force qu'elle emploie pour élever chaque pilon soit toujours la même.

Chaque pilon peut être élevé avec une force toujours uniforme, en donnant aux levées une certaine courbure.

Pl. 2, Fig. 4.

717. Supposant que dans la figure quatrième le cercle STY représente le profil de l'arbre du hérisson, et que la ligne BA marque la distance d'un des mentonnets PB au centre A. Il faut décrire de ce centre et de l'intervalle AB une circonférence BVX, sur laquelle on prendra les parties égales BC, CD, DE, EF, FG, les plus petites que l'on pourra; tirer les rayons AC, AD etc. sur l'extrémité desquelles on élevera les perpendiculaires CH, DI, EK, FL, GM, qu'on fera égales aux arcs correspondants CB, DB, EB, FB, en sorte que la dernière GM soit égale à la hauteur où l'on veut que le pilon soit élevé. Cela posé, si l'on fait passer une courbe par les points B, H, I, K, L, M, elle formera une développée du cercle, qui est la figure qu'il faut donner à la surface supérieure des levées, pour qu'elles agissent toujours avec la même force sur les pilons. Car comme tous les rayons de cette courbe sont des tangentes à la circonférence du cercle générateur BVX, le mentonnet ne touchera jamais la levée qu'en un seul point. Quand ce sera au point K, par exemple, le rayon AE qui répond à la tangente EK sera horizontal, par conséquent EK sera perpendiculaire à l'horizon, et déterminera la hauteur dont le pilon sera monté. Comme il arrivera la même chose à tous les points où le mentonnet touchera la levée, le bras de levier qui répond au mentonnet sera toujours

Pl. 2, fig. 4.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

égal, étant exprimé par les rayons du cercle BVX, et le bras de levier de la puissance agissante qui répond à la lanterne demeurant aussi le même, il suit que les pilons seront toujours levés avec une même force et selon une direction perpendiculaire à l'horizon, et que cette force sera la moindre de toutes, puisque le bras de levier qui répond au poids est le plus petit de tous ceux qui peuvent aboutir au mentonnet. Il est vrai que le frottement du pilon contre les prisons en deviendra un peu plus grand, selon l'art. 237, mais la force qu'il faudra de plus à la puissance pour le surmonter, sera bien au-dessous de celle que l'on gagnera.

Pour déterminer la position du point G, et par conséquent la grandeur de l'arc BG, il faut connaître le rayon AB, qui est ici de 11 pouces, en chercher la circonférence qu'on trouvera d'environ 69 pouces; ensuite faire la ligne QZ égale à la hauteur dont le pilon doit être élevé, c'est-à-dire de 16 pouces (715). Et comme l'arc BG doit être égal à cette ligne pour que la tangente GM réponde à l'élévation du pilon, il faut dire: comme la circonférence VX de 69 pouces est à 360 degrés, ainsi l'arc BG de 16 pouces est à la mesure de l'angle BAG, qu'on trouvera d'environ 79 degrés. Présentement il faut diviser l'arc BG et la ligne QZ en un nombre de parties égales *pairement-paires* pour plus de facilité, faire les tangentes en progression arithmétique et égales aux parties de la ligne QZ, moyennant quoi on tracera la courbe avec beaucoup de facilité.

Comme les levées n'auraient peut-être pas assez de force si, étant de bois, on leur donnait la figure MBON, je crois qu'il vaut mieux les faire comme le marque le profil exprimé par la fig. 6. J'entends que la surface ABC étant une développée du cercle, le dessous des levées, au lieu d'être évidé, soit en ligne droite comme CD (*eq*). Pl. 2, fig. 6.

(*eq*) La manière de former les levées ou cames qui soulèvent les pilons, indiquée dans cet art., est une application de ce qu'on a vu dans le § 5 de la note (*bf*). Il y a d'ailleurs un autre perfectionnement à ajouter à celui proposé par Bélidor, qui consiste en ce que la came doit soulever le pilon, non point en agissant sur la queue d'un mentonnet, mais en s'introduisant dans une entaille longitudinale pratiquée dans la tige du pilon. De cette manière la direction de la force qui lève le pilon passant par son centre de gravité, il ne s'exerce plus d'effort contre les pilons, et par conséquent il n'y a point de frottement sensible. On trouvera la description d'un pilon ainsi disposé dans le *Traité élémentaire des machines* de M. Hachette, p. 199. On ne donne plus actuellement à l'extrémité inférieure des pilons la forme d'un cylindre terminé par une demi-sphère, indiquée sur la pl. 2, mais elle est garnie d'un sabot ou boîte en cuivre qui a la forme d'une poire. Le poids des pilons, que Bélidor indique (art. 714) de 65 livres, est actuellement de 40^{k}: ils sont élevés de $0^{m},36$. L'usage a appris que pour ne point fatiguer les axes, il ne fallait pas leur faire soulever plus de 10 pilons. (Voyez le *Traité de l'art de fabriquer la poudre à canon*, par MM. Bottée et Riffault, p. 418 et suiv.). Indication de la meilleure disposition à donner aux pilons et aux cames.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Composition de la poudre à canon.

718. La poudre à canon est composée de *salpêtre*, de *soufre* et de *charbon*. Le salpêtre ne s'emploie qu'après avoir été raffiné par trois cuites. La meilleure manière de faire le mélange de ces trois matières est d'employer $\frac{1}{4}$ de salpêtre avec $\frac{1}{8}$ de soufre, et $\frac{1}{8}$ de charbon. Selon cette proportion, lorsque l'on fait de la poudre de guerre, on met dans chaque mortier 15 livres de salpêtre, 2 livres $\frac{1}{2}$ de soufre, et autant de charbon, ce qui fait ensemble 20 livres; ainsi les 24 mortiers de ce moulin fabriquent à-la-fois 480 livres de poudre.

En mettant la composition, on verse dans chaque mortier 2 liv. d'eau, ou la valeur d'une pinte de Paris (341). Ces matières sont battues trois heures de suite, après quoi on les change de mortier, c'est-à-dire que l'on met dans le second mortier d'une des batteries ce qui était dans le premier, dans le troisième ce qui était dans le second, et ainsi de suite jusqu'au dernier mortier, dont la composition est rapportée dans le premier. Cette manœuvre dure un quart-d'heure, ensuite les pilons agissent encore trois heures sans interruption, après quoi on recommence tout de nouveau à remanier les matières, et cela de trois heures en trois heures; ce qui donne environ 22 heures. Ensuite les matières sont portées au grenoir, où on les fait passer par un crible, et celle qui reste pour n'avoir pu être grenée, est rapportée au moulin pour être battue encore pendant deux heures. Ainsi on emploie 24 heures pour fabriquer entièrement 480 liv. de composition, sur lesquelles il peut y avoir environ une livre et demie ou deux livres de déchet, avant que la poudre soit mise en baril (*er*).

Manière de lisser la poudre à giboyer. Pl. 1, Fig. 1.

719 La poudre à giboyer se fait de la même composition que la poudre de guerre, mais on n'en met que 16 livres dans chaque mortier, afin que les matières soient mieux incorporées, et après l'avoir grainée on la met dans les tonneaux 10 et 12 que l'on voit marqués sur la fig. 1^{ere}, pour la *lisser*. Ces tonneaux sont traversés d'un essieu, dont l'un des bouts s'ajuste avec un des tourillons des hérissons, et l'autre est porté par un

---

Remarques sur la fabrication de la poudre.

(*er*) La composition considérée aujourd'hui comme la meilleure pour la fabrication de la poudre est 0,76 de salpêtre, 0,09 de charbon et 0,15 de soufre. La durée de la fabrication est moindre que ne l'indique Bélidor. On met d'abord le charbon seul dans les mortiers, et on l'y laisse environ une heure, pendant laquelle les pilons doivent battre 40 coups par minute. On ajoute alors le soufre et le salpêtre, et on les fait battre pendant 13 heures, en changeant les matières de mortier d'heure en heure. Les pilons doivent battre alors 55 à 60 coups par minute, ou moyennement 3500 coups par heure (*Art de fabriquer la poudre à canon*, p. 211). M. Carny a proposé dans ces dernières années un procédé très-simple pour fabriquer la poudre sans moulins, dont M. Carnot fait valoir toute l'importance (*De la défense des places fortes*, p. 517).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

chevalet. A chacun de ces tonneaux il y a quatre barres de bois qui traversent d'un fond à l'autre. La poudre qu'on y met tournant avec les tonneaux, frotte contre leur surface intérieure et contre les barres, les grains s'affermissent, et deviennent lisses comme ils paraissent ordinairement; c'est pourquoi ces tonneaux sont nommés *lissoirs*. Ils ont chacun quatre bondes, pour en faire sortir plus commodément la poudre.

La vîtesse de la roue d'un moulin à poudre doit être modérée, et d'environ 10 à 11 tours par minute.

720. Quoique ce soit une commodité de se servir du mouvement des hérissons pour lisser la poudre, on aime mieux faire cette manœuvre ailleurs que dans les moulins, à cause des accidents qui en peuvent résulter. Car, quelque précaution que l'on prenne, ces moulins sautent de temps en temps, par des causes qu'il n'est presque pas possible de prévoir, et c'est ce qui est arrivé à celui-ci en 1734. Dans le temps que les poudriers étaient occupés à remanier la composition, un d'eux eut l'imprudence de vouloir enfoncer un clou qui devait retenir une planche qui s'était détachée d'une des batteries, le pulverin qui se trouva dans le trou prit feu, et à l'instant le moulin sauta et tous ceux qui étaient dedans, sans qu'il en soit échappé un seul. J'ai rapporté ce trait pour faire voir la conséquence de n'employer dans ces sortes de moulins que le moins de ferrure qu'il est possible, et de ne jamais se prévaloir de la force du courant pour donner à la roue une trop grande vîtesse qui occasionnerait des frottements précipités qui peuvent avoir de fâcheuses suites; il faut que la roue ne fasse jamais plus de 10 à 11 tours par minute.

Examen de l'effet de ce moulin dans son état actuel.

Il nous reste à examiner quel est l'effet de cette machine dans son état actuel, afin de voir si elle remplit ce qu'on est en droit d'en exiger.

721. La hauteur moyenne de l'eau qui sort par le pertuis est de 6 pieds 8 pouces 9 lignes, qui répond, dans la table première, à une vîtesse de 20 pieds un pouce une ligne par seconde, ou de 1205 pieds par minute.

La roue a 17 pieds de diamètre, et fait 10 tours $\frac{1}{2}$ par minute : ainsi sa vîtesse, dans le même temps, sera de 561 pieds. Le rapport de la vîtesse du courant à la vîtesse de la roue est donc comme 1205 est à 561, ou à-peu-près comme 15 est à 7. Ainsi nous pouvons prendre 15 pour la vîtesse du courant, et 7 pour la vîtesse de la roue : alors la différence de ces deux nombres, qui est 8, exprimera la vîtesse respective du courant qui frappe les aubes dans l'état actuel de la machine (585), au lieu que, pour le plus grand effet, cette vîtesse devrait être exprimée par 10, et celle de la roue par 5 (*es*).

Rectification de l'art. 721.

(*es*) L'auteur suppose ici la vîtesse de l'eau plus grande qu'elle ne devait être. Cette vîtesse, d'après les remarques faites dans le § 3 de la note (*dn*) était très-probablement les 0,89 environ de celle due à la chûte, c'est-à-dire de 1072 pi. par minute. D'après les règles du § 2 de cette note, la vîtesse de la roue en de-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

D'où il suit que la force de l'eau, dans ces deux cas, sera comme 64 est à 100, ou à-peu-près comme 2 est à 3 (568). Les bras de levier restant les mêmes dans ces deux cas, et la résistance causée par les frottements suivant à-peu-près la proportion des poids que la machine aura à enlever, on voit que si dans le premier cas le poids est exprimé par 2, il le sera par 3 dans le second, c'est-à-dire que chaque hérisson, au lieu de n'élever que 4 pilons à-la-fois, pourrait en élever 6. C'est ce que nous allons démontrer, en faisant l'analyse de tout ce qui mérite d'être considéré dans le jeu de cette machine.

Manière de considérer la résistance des pilons. Pl. 1, Fig. 7.

722. J'ai dit, art. 715, qu'à chaque batterie il y avait toujours quatre pilons en l'air, et qu'au moment où le quatrième était prêt à retomber, la levée qui le soutenait faisait avec l'horizon un angle AFE de 60 degrés. J'ajouterai que si les lignes NA, GH, IK, LM représentent les mentonnets de ces pilons, les levées FD, FC, FB, FA qui leur répondent, formeront avec la ligne horizontale EF quatre angles qui se surpasseront en progression arithmétique. Car le premier ED sera de 15 degrés, le second EC de 30, le troisième EB de 45, et le quatrième EA de 60. Si l'on abaisse sur EF les perpendiculaires DO, CP, BQ, AR, elles seront les sinus des angles précédents, et par conséquent les lignes FO, FP, FQ, FR seront les sinus de leurs compléments, et en même temps les bras de levier qui répondent aux quatre mentonnets, selon l'article 716. D'autre part la ligne FX égale à FA exprimera le sinus total, et le bras de levier de la puissance qui agit à l'extrémité X sur un des fuseaux de la lanterne.

Il faut, pour calculer la résistance des pilons, chercher un bras de levier moyen.

723. Si l'on conçoit les quatre pilons réunis en un seul, il faudra que les quatre bras de levier qui leur répondent n'en fassent qu'un. Pour cela il n'y a qu'à prendre dans la table les sinus des angles de 75, 60, 45, 30 degrés, les ajouter ensemble pour avoir 303904, dont il faudra prendre le quart, qui est 75976, pour le bras de levier moyen, dont on aura la valeur en disant: comme le sinus total est au nombre précédent, ainsi 20 pouces, valeur du rayon FX, est au bras de levier moyen, qu'on trouvera d'environ 15 pouces, que nous supposerons appartenir à un seul pilon NO.

Pl. 1, Fig. 8.

Manière de calculer la pesanteur qu'il faut donner aux pilons dans le cas du plus grand effet.

724. Il s'agit de découvrir quelle pesanteur il faudrait donner à ce pilon dans le cas du plus grand effet, eu égard à la force du moteur et à tous les frottements qui se rencontrent dans le jeu de ce moulin. Pour cela, il faut être prévenu que l'intervalle DF, de la verticale NO qui passe par le milieu du pilon, à l'axe du hérisson, doit être de 24 pouces; d'où retranchant 15 pouces pour le bras de levier moyen FG, il

---

vait être les $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire de 429 pi. par minute; ainsi, comme le dit l'auteur, il paraît que la roue marchait trop vîte.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

en reste 9 pour la valeur de la ligne DG ou BC, c'est-à-dire pour la partie du mentonnet qui marque la distance de l'axe du pilon, au point où l'on suppose constamment appliquée la puissance qui doit élever le pilon. Nous supposerons aussi, pour rendre le calcul moins composé, que lorsque le mentonnet est élevé à la moitié de la hauteur où doit monter le pilon, il se rencontre au milieu de l'intervalle des prisons R et S, parce qu'alors le frottement qui se fera en ces deux endroits sera le même (236).

Nommant l'intervalle de B en R, ou de B en S, f; la longueur BC du mentonnet, g; et x la pesanteur du pilon réunie dans le poids L: on aura $\frac{2gx}{3f}$, selon l'art. 238, pour le frottement du pilon contre les prisons R et S; à quoi ajoutant le poids x, il vient $x+\frac{2gx}{3f}$ pour la perpendiculaire CI, qui exprime le poids que la puissance aura à surmonter. Or comme cette puissance sera appliquée à l'extrémité X du levier coudé CFX, tandis que l'autre extrémité C glissera de B en A sous le mentonnet pour l'élever, il faut, pour avoir égard au frottement qui en résultera, faire le rectangle IH, en sorte que le côté IL soit le tiers de IC. Alors la diagonale CL exprimant ensemble le poids et le frottement, ou aura $CL=\frac{19}{18}\left(1+\frac{2g}{3f}\right)x$ (280, 281). Mais comme CL agit obliquement sur le bras de levier FC, il faut élever la perpendiculaire CM et former le rectangle QM: alors la force CL sera divisée en deux autres MC et LM, dont il n'y aura que la première qui répondra à l'action de la puissance X, puisque la seconde LM ou QC se trouvera directement opposée au point d'appui F.

Pour avoir l'expression de la ligne CM, considérez que si l'on prolonge LC, on aura les angles égaux MLC et FCE, à cause des parallèles ML et CF, et que l'angle ICL étant égal à ECG, ce dernier sera de 18 degrés 26 minutes (269). Remarquez aussi qne la ligne FG est le sinus de l'angle GCF, que nous avons trouvé (723) de 75976, qui répond dans la table à 49 degrés 22 minutes, lesquels étant ajoutés avec 18 degrés 26 minutes, donnent 67 degrés 48 minutes pour la valeur des angles ECG et CLM. On aura donc CL est à CM, comme 100000 est à 92587, ou à-peu-près comme 14 est à 13, d'où l'on tire $CM=\frac{13}{14}\times\frac{19}{18}\left(1+\frac{2g}{3f}\right)x$, ou $CM=\frac{247}{252}\left(1+\frac{2g}{3f}\right)x$.

Comme l'intervalle RS des deux prisons est de 6 pieds, RB ou BS sera de 36 pouces; et ayant dit (724) que BC était de 9 pouces, on aura $\frac{9}{36}$ ou $\frac{1}{4}=\frac{g}{f}$. Substituant donc cette valeur dans l'équation précédente, on

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

aura $\frac{2}{2}\frac{4}{5}\frac{7}{2}(1+\frac{1}{6})x$, ou $\frac{7}{6}\times\frac{2}{2}\frac{4}{5}\frac{7}{2}x=$CM; et nommant y la résistance CM, on aura $\frac{1}{1}\frac{7}{5}\frac{2}{1}\frac{9}{2}x=y$ (*et*).

725. Il nous reste à former une équation qui facilite la connaissance du poids x, en y faisant entrer les frottements. Il faut se rappeller que la hauteur moyenne de l'eau est de 6 pieds 8 pouces 9 lignes (721), laquelle répond dans la table troisième à un choc de 471 liv. par pied quarré; et comme les aubes en ont 2 $\frac{1}{2}$ de superficie, la force absolue du courant sera de 1177 liv. $\frac{1}{2}$, dont prenant les $\frac{4}{9}$ (589), il vient 523 liv. $\frac{1}{3}$ pour la force respective du courant contre les aubes, dans le cas du plus grand effet (*eu*). Cela posé, voici les noms et les valeurs des grandeurs qui doivent entrer dans le calcul.

$a =$ 8 pieds $\frac{1}{2}$, rayon de la roue.

$b =$ 4 pieds, rayon du rouet.

$c =$ 20 pouces, rayon de la lanterne.

$d =$ 9 lignes, rayon des tourillons.

$p =$ 523 livres $\frac{1}{3}$, force de la puissance motrice.

$q =$ 3000 livres, pesanteur d'un des hérissons.

$t =$ 3600 livres, pesanteur de la roue, du rouet et de l'arbre pris ensemble.

$\frac{m}{n} = \frac{1}{1}\frac{9}{8}$, expression du frottement du rouet et de la lanterne (290).

Pl. 1, fig. 8. Comme la ligne FC, qui marque la longueur des levées prise depuis l'axe du hérisson, est égale au rayon FX de la lanterne (716), il suit que la puissance appliquée en X, c'est-à-dire aux fuseaux de la lanterne, sera égale au poids exprimé par y. Pour avoir égard au frottement des tourillons qui sont à l'extrémité d'un des hérissons, il faut, selon l'art. 251, prendre la moitié de la somme des poids ou puissances qui agissent aux extrémités C et X (*ev*), c'est-à-dire la moité de $2y$ (295), et l'ajouter à la moitié du poids du hérisson; multiplier ces deux termes par le rayon des tourillons, diviser le produit par le rayon de la lanterne, ajouter le quotient

---

Inexactitude du calcul du frottement des pilons.

(*et*) Ce calcul, fondé sur une théorie dont l'inexactitude a été remarquée dans la note (*ao*), est entièrement fautif.

Inexactitude de l'évaluation de l'effort exercé sur les aubes.

(*eu*) Cette évaluation est doublement inexacte, tant par la manière dont la force absolue du courant est estimée, que par la partie de cette force que prend l'auteur pour le cas du plus grand effet. L'action du courant sur les aubes d'une roue à eau tournant dans un coursier, ne peut s'estimer exactement que d'après les règles de la note (*dn*).

Inexactitude du calcul du frottement sur l'axe du hérisson.

(*ev*) Il y a également ici une double faute, car la règle de l'art. 251 suppose que les puissances agissant autour de l'axe fixe sont parallèles, et que leur résultante est égale à leur somme, ce qui n'a point lieu ici; et de plus, cette règle même est inexacte, conformément à la remarque faite dans la note (*ap*).

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à y, et multiplier le tout par $\frac{m}{n}$. On aura $\frac{m}{n}\left(y+\frac{d}{c}y+\frac{dq}{2c}\right)$ pour l'expression de la résistance que les dents du rouet rencontreront à faire tourner une des lanternes, qu'il faudra doubler à cause que l'on a deux batteries, et multiplier le produit par le rayon du rouet, ce qui donnera $\frac{2bm}{n}\left(y+\frac{d}{c}y+\frac{dq}{2c}\right)$.

Pour tenir compte aussi du frottement des tourillons de la roue, il faut prendre la moitié de la somme de la pression que cause la résistance que les deux lanternes opposent au mouvement du rouet, y ajouter le tiers du poids de la roue (650), multiplier le tout par le rayon des tourillons. Il vient $\frac{m}{n}\left(dy+\frac{d^2}{c}y+\frac{d^2q}{2c}\right)+\frac{1}{3}dt$, qui étant ajouté à la grandeur précédente, donnera une quantité égale au produit de la puissance motrice par le rayon de la roue, c'est-à-dire,

$\frac{m}{n}\left(2by+\frac{2bd}{c}y+dy+\frac{d^2}{c}y+\frac{d^2q}{2c}+\frac{2bdq}{3c}\right)+\frac{1}{3}dt=ap$, d'où dégageant l'inconnue, il vient $y=\frac{\frac{n}{m}\left(ap-\frac{1}{3}dt\right)-\frac{dq}{c}\left(\frac{1}{2}d+\frac{2}{3}b\right)}{2b+\frac{2bd}{c}+d+\frac{dd}{c}}=\frac{3840}{8\frac{1}{3}}$. Divisant 3840 par $8\frac{1}{3}$, on aura 461 livres pour la valeur de y, qui étant substituée dans l'équation $\frac{1729}{1512}x=y$, il viendra après avoir dégagé l'autre inconnue, $x=\frac{6970329}{1729}=403\frac{1}{7}$. Or si l'on divise $403\frac{1}{7}$ par 4, on trouvera que chacun des quatre pilons, que le hérisson élève en même temps, pourrait peser environ 101 liv. au lieu de 65 (714). Cependant, comme il suffit qu'ils soient du poids de 65 livres pour pulvériser les matières, il vaut mieux augmenter le nombre des pilons que leur pesanteur; c'est pourquoi divisant 403 par 65, on trouvera que chaque hérisson peut élever en même temps six pilons, et plus encore un poids de 13 livres, ce qui se rencontre assez bien avec ce que nous avons insinué dans l'art. 721.

726. Comme les six levées occuperont encore la sixième partie de la circonférence d'un cercle, et qu'elles formeront des angles avec l'horizon qui se surpasseront de 10 degrés, si l'on ajoute ensemble les sinus de leurs compléments, et qu'on prenne la sixième partie de la somme, il viendra 78322 pour le bras de levier moyen, qui est un nombre plus grand que 75976 que nous avons trouvé dans l'article 723. D'où il suit que lorsqu'il y aura six pilons, les points G et C seront plus près de l'axe du pilon NO que lorsqu'il n'y en aura que 4. Alors la longueur BC du mentonnet étant moindre que dans l'état actuel de la machine, les frottements des pilons contre les prisons seront un peu moindres (237). Ainsi, tout bien considéré, la force motrice ne fera pas plus d'effort pour élever six pilons, chacun du poids de 65 livres, que si elle n'en élevait que quatre, dont chacun peserait 101 livres. On observera seulement que comme il faudra

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

augmenter la longueur du hérisson de la moitié de celle qu'il a, il en résultera une plus grande pression, par conséquent un peu plus de frottement de la part des tourillons; mais c'est un trop petit objet pour s'y arrêter, puisqu'il reste à la puissance qui serait appliquée à chaque lanterne 13 livres de force de plus qu'il ne lui en faudrait pour élever six pilons à-la-fois (*ex*).

(*ex*) Après avoir indiqué dans les notes précédentes les inexactitudes du calcul de l'auteur, je vais tâcher de le refaire sur de meilleurs principes. Je considérerai d'abord le moulin tel qu'il est décrit dont le texte, et je supposerai ensuite qu'on ait fait à la disposition des cames et des pilons les perfectionnements indiqués dans la note (*eq*).

Calcul du moulin à poudre, tel qu'il est décrit dans le texte.

La machine étant censée établie telle que l'auteur l'a décrite, je vais chercher l'effort qu'il faudrait exercer sur les aubes de la roue à eau pour la faire marcher.

Le poids de chaque pilon est de 65 liv. $=32^{k},8$. Ce poids n'agit pas toujours sur l'axe du hérisson au bout du même bras de levier. A l'instant où la levée commence à le soulever, le bras de levier est 20 po. $=0,^{m}54$, et elle décrit avant de le quitter un angle du $\frac{1}{6}$ de la circonférence, ou de $66^{\circ},67$. Le bras de levier moyen est donc la distance horizontale à l'axe du centre de gravité de cet arc, laquelle, d'après la note (*k*), est exprimée par $0^{m},54\,\frac{\text{sin. } 66^{\circ},67}{\frac{1}{3}\,\pi} = 0^{m},45$. C'est par ce calcul qu'il faut remplacer celui de l'art. 723. Il en résulte que, comme il y a toujours quatre pilons soulevés en même temps, un poids de $131^{k},2$ agit constamment sur l'axe du hérisson, au bout d'un bras de levier de $0^{m},45$.

A l'action de ce poids se joint d'abord le frottement du pilon contre ses prisons. L'intervalle des prisons est de 6 pi. ou 72 po., et la longueur moyenne du mentonnet de 9 po. Ainsi, d'après la note (*ao*), l'effort contre chaque prison sera pour les quatre pilons $131^{k},2 \times \frac{9}{72} = 16^{k},4$, et pour les deux prisons $32^{k},8$. On voit dans le 2^{e} tableau de la note (*al*), que le rapport du frottement à la pression qui convient à ce cas est 0,1. Ce frottement ajoutera donc au poids des pilons $3^{k},3$, ce qui le portera à $134^{k},5$.

Il faut ensuite tenir compte de l'effet des chocs des levées contre les mentonnets des pilons. On remarquera d'abord qu'à l'instant où ce choc a lieu, le pilon était resté quelque temps en contact avec les prisons, en sorte qu'à cet instant le frottement doit être évalué d'après le 1er tableau de la note (*al*), c'est-à-dire qu'il doit être porté aux 0,3 environ de la pression. Le poids d'un pilon est de $32^{k},8$, et à l'instant où la levée choque le mentonnet, la longueur de ce mentonnet est d'environ 6 po. La pression contre chaque prison est donc $32^{k},8 \times \frac{6}{72} = 2^{k},7$, et pour les deux prisons, $5^{k},4$. Ainsi le frottement dont on vient de parler produira à l'instant du choc le même effet que si le poids du pilon était augmenté de $0,3 \times 5^{k},4$, c'est-à-dire porté à $34_{k},4$. On observera ensuite que l'effet d'un choc entre deux corps est généralement de faire varier les vîtesses de tous deux, conformément à ce qu'on a vu dans la note (*x*). Mais dans le cas particulier dont il s'agit ici, il arrive que la masse du

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

727. Chaque batterie pourra donc être composée de 18 mortiers, au lieu de 12, dans le cas du plus grand effet. Il est vrai que la roue allant

Le résultat des calculs précédents est qu'un moulin

---

pilon est très-petite par rapport à celle du hérisson, et qu'à l'instant du choc la vîtesse de ce pilon est nulle. Dans ces circonstances, la formule $v = \frac{mV - m'V'}{m+m'}$ donnée dans le § 2 de cette note pour la vîtesse commune de deux corps non élastiques après le choc, montre qu'ici la vîtesse du hérisson ne peut pas varier sensiblement par suite de son choc contre le pilon, et que l'effet de ce choc se réduit par conséquent à imprimer instantanément au pilon la vîtesse du point de la levée qui agit sur lui. On conclut de l'art. 714 que le hérisson fait 0,42 tour en une seconde, et comme le rayon de la levée est $0^m,54$, on a pour la vîtesse de son point extrême, laquelle est imprimée instantanément au pilon, $2\pi . 0^m,54 \times 0^m,42 = 1^m,42$, La hauteur due à cette vîtesse est $0^m,103$, et le poids à soulever $34^k,4$: ainsi, conformément à la remarque faite vers la fin du § 3 de l'addition au 1er livre, la quantité d'action perdue à raison du choc contre chaque pilon est $34^k,4 \times 0^m,103 = 3^{k\times m},54$. Mais chaque fois que le hérisson fait un tour, il y a 24 pilons soulevés: donc pendant une seconde il y a $0,42 \times 24 = 10,08$ chocs; et par conséquent ces chocs consomment en une seconde une quantité d'action $= 10,08 \times 3^{k\times m},54 = 35^{k\times m},7$.

Il est à remarquer que cette quantité d'action se consomme au bout d'un bras de levier de $0^m,54$, et en un point dont la vîtesse est $1^m,42$. Elle équivaut donc à l'action continue d'un poids $= \frac{35,7}{1,42} = 25^k$, qui serait suspendu au bout de ce même bras de levier.

Les pilons occasionnent encore une autre résistance au mouvement du hérisson par le frottement de la levée contre le mentonnet. La pression qui s'exerce en ce point est pour les quatre pilons qui sont continuellement en charge de $134^k,5$, et le frottement qui en résulte est environ $13^k,5$. Il agit dans une direction horizontale, au bout d'un bras de levier moyen à-peu-près égal à la moitié de la hauteur dont les pilons sont soulevés, c'est-à-dire de 8 po. $= 0^m,22$.

Nommons q l'effort qui s'exerce sur les fuseaux de la lanterne, dont le rayon est 20 po. $= 0^m,54$, pour faire tourner le hérisson. Il résulte de ce qui précède que le hérisson peut être censé soumis à l'action 1° de la force verticale q, dont le bras de levier est $0^m,54$; 2° de la force horizontale $13^k,5$ dont le bras de levier est $0^m,22$; 3° de la force verticale 25^k, dont le bras de levier est $0^m,54$; 4° de la force verticale $134^k,5$, dont le bras de levier est $0^m,45$. De plus, le poids de ce hérisson est de 3000 liv. $= 1470^k$. La résultante de toutes ces forces donnera la pression qui s'exerce sur les tourillons du hérisson: mais il faut remarquer que pour l'un des hérissons l'effort q s'exerce de haut en bas, et pour l'autre de bas en haut, en sorte que dans un cas il s'ajoute aux autres forces verticales, et que dans l'autre il s'en retranche. Ainsi, en négligeant cet effort, on aura la pression moyenne entre celles qui ont lieu pour les deux hérissons, laquelle sera donc simplement $\sqrt{(13,5)^2 + (35+134,5+1470)^2} = 1630^k$. D'après cela, en adoptant 0,2 pour le rapport du frottement à la pression, ce frottement sera $0,2 \times 1630 = 326^k$; et observant que le rayon des tourillons

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

peut avoir 36 mortiers, au lieu de 24.

moins vîte que dans l'état actuel du moulin, les pilons ne seront élevés que cinq fois au lieu de sept dans un certain temps, d'où il paraît d'abord

---

est 9 lig. $=0^m,02$, on aura d'après la note (*aq*) pour exprimer l'équilibre autour de ce hérisson $q.0^m,54 - 13^k5 \times 0^m,22 - 25^k \times 0^m,54 - 134^k,5 \times 0^m,45 - 326^k \times 0^m,02 = 0$, d'où $q = 154^k6$. Comme il y a deux hérissons, l'effort à exercer sur les dents du rouet sera le double de ce nombre, ou $309^k,2$.

Il reste maintenant à déterminer l'effort P, qui doit avoir lieu sur les aubes de la roue à eau. Les tourillons de son axe ne sont chargés que du poids de cette roue, de son axe et du rouet, qui est de 3600 liv. $= 1760^k$, et de l'effort horizontal P. Car les deux efforts q qui s'exercent sur les dents du rouet étant dirigés en sens contraire, et à très-peu-près égaux, on peut en faire abstraction. La pression sur les tourillons sera donc simplement $\sqrt{P^2+(1760)^2}$ kil., et le frottement qu'elle occasionnera $0,2\sqrt{P^2+(1760)^2}$ kil. D'après cela, observant que le rayon de la roue au centre des aubes est 8 pi. $\frac{1}{2} = 2^m,76$, le rayon du rouet 4 pi. $= 1^m,3$, et celui des tourillons 9 lig. $= 0^m,02$, l'équation d'équilibre autour de l'axe de la roue sera $P.2^m,76 - 309^k,2 \times 1^m,3 - 0,2\sqrt{P^2+(1760)^2} \times 0^m,02 = 0$; d'où l'on déduit, en négligeant d'abord P^2 sous le radical, $P = 147^k,9$. Mettant ensuite sous le radical à la place de P cette première valeur, il vient pour seconde valeur suffisamment approchée $P = 149^k,3$.

Je vais comparer cet effort, ainsi calculé, à celui qui devait effectivement avoir lieu sur les aubes de la roue. Ce dernier, d'après la formule donnée dans le § 3 de la note (*dn*), est représenté par $P = \frac{2}{3}.\frac{1000}{g}\Omega(\sqrt{2gH} - V)V$ kil. La surface Ω des aubes est ici $2\frac{1}{2}$ pi. qu. $= 0^{mq},2638$. La hauteur de la chûte H $=$ 6 pi. 8 po. 9 li. $=$ $2^m,19$, et la vîtesse qui lui est due $= 6^m,55$, dont on ne doit prendre que les 0,89, pour tenir compte des effets de la contraction, conformément à ce qui a été dit dans l'endroit qui vient d'être cité; en sorte que $\sqrt{2gH} = 5^m,83$. La roue faisant 10,5 tours par minute, et le rayon au centre des aubes étant $2^m,76$, la vîtesse de ce centre $V = \frac{1}{60}.10,5 \times 2\pi.2^m,76 = 3^m,03$. Mettant ces nombres dans la formule, elle donnera $P = 152^k,2$, valeur qui s'accorde presque exactement avec celle qu'on a trouvée par le calcul de la machine. Un tel accord semble montrer qu'on peut employer avec confiance dans la pratique, les règles données dans les notes du chap. 1er pour le calcul des effets des roues hydrauliques; d'autant mieux que la machine qui fait l'objet de cette note, plus que toutes celles dont je me suis occupé jusqu'ici, est susceptible d'une évaluation assez exacte de la quantité d'action qu'elle consomme, puisque cette quantité d'action n'est employée qu'à élever des poids, et à produire des frottements ou des chocs, effets dans le calcul desquels il n'entre aucun élément arbitraire.

L'effort exercé sur les aubes de la roue étant donc environ 150^k, et leur vîtesse $3^m,03$, on voit que la quantité d'action transmise par le moteur dans une seconde était $150^k \times 3^m,03 = 455^{k \times m}$. D'un autre côté, les deux hérissons tenant continuellement soulevés 8 pilons pesant ensemble $262^k,4$, et la vîtesse moyenne du point qui les soulève étant $2\pi.0^m,45 \times 0,42 = 1^m,19$, l'effet utile était en une seconde $262^k,4 \times 1^m,19 = 312^{k \times m}$. D'où l'on conclut qu'il y avait ici $143^{k \times m}$, ou environ le $\frac{1}{3}$ de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que leur effet, dans ces deux cas, doit être dans la raison composée de leur nombre et de la quantité de coups qu'ils donneront dans le même temps, c'est-à-dire comme le produit de 6 par 5 est à celui de 4 par 7,

---

quantité d'action fournie par le moteur qui se trouve perdue pour l'effet utile. Sur les $143^{k\times m}$ perdus, il y en a 36 consommés par les chocs; le reste l'est par les frottements.

Calcul du moulin à poudre en supposant la disposition des cames et pilons améliorée.

Je vais maintenant examiner quel avantage on pourrait obtenir en améliorant la disposition des cames et pilons. En soulevant les pilons suivant une direction passant par leur centre de gravité, il n'y aurait plus de frottement contre les levées: ainsi, l'effort à exercer par la came se réduirait au poids $131^{k},2$ des quatre pilons soulevés à-la-fois. Le bras de levier de ce poids deviendrait constant, et pour ne rien changer à l'effet utile qui avait lieu dans le calcul précédent, il faut le supposer égal au bras de levier moyen $0^{m},45$ trouvé ci-dessus. Il y aurait toujours un choc des cames contre les pilons, mais la vîtesse communiquée instantanément par l'effet de ce choc ne serait plus que de $1^{m},19$, due à une hauteur de $0^{m},072$. Par conséquent la quantité d'action perdue par le choc de chaque pilon se réduirait à $32^{k},8\times 0^{m},072 = 2^{k\times m},36$; et celle perdue en une seconde à $10,08\times 2^{k\times m},36 = 23^{k\times m},8$. Consommée en un point dont la vîtesse est $1^{m},19$, cette quantité d'action équivaudrait à l'effort continu d'un poids de $\frac{23,8}{1,19} = 20^{k}$. Le frottement de la came contre le point du pilon qui porte sur elle se réduirait ici à $13^{k},1$.

En faisant d'après ces données le même calcul que ci-dessus, on trouve pour l'effort à exercer sur les aubes de la roue $P = 127^{k}$, nombre inférieur de $\frac{1}{7}$ environ à celui trouvé précédemment. Ainsi, l'effet utile demeurant le même, les changements dont il s'agit causeraient une économie de $\frac{1}{7}$ sur la quantité d'action fournie par le moteur.

On aurait pu tirer un meilleur parti de la même chute d'eau.

L'emploi de la formule précédente suppose que le volume d'eau agissant sur la roue était en une seconde $\Omega V = 0^{mq},2638\times 3^{m},03 = 0^{mc},7993$. Cette eau tombait d'une hauteur $= 2^{m},19$. Ainsi la quantité d'action représentée par la chute était $1000^{k}\times 0^{mc},7993\times 2^{m},19 = 1750^{k\times m}$. En évasant l'entrée de l'orifice d'écoulement, pour que l'eau pût prendre dans le coursier toute la vîtesse due à la chute, et disposant la roue en dessous conformément au § 2 de la note (*dn*), le $\frac{1}{3}$ de cette quantité d'action, ou $583^{k\times m}$, aurait pu être transmis en une seconde à cette roue. Dans la réalité il lui en était transmis environ $455^{k\times m}$. Ainsi le défaut d'évasement de l'orifice, et la vîtesse un peu trop grande des aubes, faisaient éprouver une perte de près de $\frac{1}{5}$ sur la quantité d'action qu'on aurait pu obtenir d'une roue en dessous. Avec une roue en dessus, ou une roue de côté bien disposée, on aurait d'ailleurs fait produire à la même chute un effet à-peu-près triple de celui qui avait lieu.

Remarque sur le résultat des calculs du texte.

Le résultat des calculs du texte est qu'on aurait pu augmenter dans ce moulin le nombre des pilons de moitié en sus, en rendant seulement la vîtesse de la roue à eau un peu moins grande. Ce résultat est évidemment fautif, et l'auteur ne lui aurait pas accordé autant de confiance, s'il avait fait réflexion que dans des machines de ce genre, les tâtonnements successifs ont fait ordinairement arriver les constructeurs assez près du point de perfection, pour qu'on ne puisse pas espérer d'augmenter le produit de moitié en sus par l'effet d'un aussi léger changement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ou comme 15 est à 14. Mais il est bon que l'on sache que ce n'est pas tout-à-fait le plus grand nombre de coups de pilons qui contribue seul à pulvériser les matières, que cela dépend aussi du nombre de fois dont elles sont remaniées dans un certain temps, comme l'expérience le prouve; car si on voulait n'employer que 16 heures pour battre les matières au lieu de 24, il suffirait de les changer de mortier de deux heures en deux heures; elles seront aussi-bien pulvérisées, et même mieux que si l'on avait suivi la méthode ordinaire décrite dans l'article 718, parce que la composition qui se trouve au fond des mortiers formant au bout de quelque temps une croûte, il n'y a que celle qui est au-dessus qui reçoit totalement l'impression du pilon. Je conclus donc que quoique la vîtesse de la roue ne soit exprimée que par le nombre 5, dans le cas du plus grand effet, lorsqu'elle l'est par le nombre 7 dans l'état actuel, on ne laissera pas de faire en 24 heures 720 livres de poudre au lieu de 480, pourvu qu'on remanie les matières toutes les deux heures (*ey*).

De l'établissement d'un moulin à poudre, tel qu'on les construit présentement.

(*ey*) La note précédente n'étant destinée qu'à rectifier les calculs de l'auteur sur le moulin de La Fère, je vais ici poser les bases de l'établissement d'un moulin à poudre tel qu'on les construit présentement.

On donne aux pilons un poids de 80^k; ils sont élevés de $0^m,36$, et doivent battre environ un coup par seconde: on ne met que 20 pilons sur les deux hérissons dont se compose chaque moulin. D'après ces données, l'effet utile est en une seconde de $20\times 80^k\times 0^m,36=576^{k\times m}$. En supposant les cames et pilons bien disposés, on peut admettre, d'après les calculs de la note précédente, que la quantité d'action à transmettre à la roue à eau devrait être en une seconde d'environ $700^{k\times m}$, nombre qu'il faudra égaler, suivant les circonstances dans lesquelles on se trouvera, aux expressions des quantités d'action transmises par les diverses espèces de roues à eau, qui ont été données dans les notes du 1^er^ chapitre. On observera toutefois qu'un moulin à poudre ne travaillant pas continuellement, ni toujours avec la même vîtesse, (voy. la note (*er*)), la dépense d'eau nécessaire pour le faire marcher ne doit pas être considérée comme permanente.

A chaque tour des hérissons, chaque pilon doit battre deux coups: les hérissons doivent donc faire $\frac{1}{2}$ tour en une seconde. Par conséquent si l'on nomme d' le diamètre de la lanterne montée sur l'axe des hérissons, D' le diamètre du rouet monté sur l'axe de la roue à eau, D' le diamètre de cette roue, et V la vîtesse des aubes, ce qui donne $\frac{V}{\pi D}$ pour le nombre de tours qu'elle doit faire en une seconde, on aura la relation $\frac{D'}{d}=2\pi\frac{D}{V}$.

Telle est la quantité d'action qu'il faut dépenser, et les rapports qu'il faut établir entre les diamètres des roues, pour faire marcher convenablement un moulin à poudre. Quant à la quantité de poudre qui sera fabriquée, elle dépend, comme le remarque l'auteur, de diverses circonstances étrangères, et particulièrement de l'état de division dans lequel les matières sont portées au moulin et de la fréquence des rechanges.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Je suis entré exprès dans ce petit détail, pour montrer que l'effet d'une machine ne dépend pas toujours de la plus ou moins grande quantité de mouvement du moteur : cette règle n'a lieu sans exception que toutes les fois qu'il s'agit d'élever de l'eau, parce que si la machine est mise en mouvement par un courant, on ne doit pas supposer de cause étrangère qui en augmente l'effet.

On trouvera peut-être que je m'arrête trop long-temps sur un même sujet, mais comment le traiter exactement sans l'examiner dans toutes ses circonstances? C'est sans doute pour n'en avoir pas usé de la sorte qu'on découvre tant d'imperfection dans les machines. Comme je n'écris que pour les rectifier, on ne peut me savoir mauvais gré de m'étendre autant que je le crois nécessaire. Au reste voilà ce que je m'étais proposé de dire sur les moulins, et je m'en tiens aux trois chapitres précédents : un plus grand nombre d'exemples de l'application des principes de la mécanique à d'autres moulins à eau, ne ferait qu'enfler cet ouvrage assez mal-à-propos. Cependant, avant de finir ce chapitre, il me reste à décrire en peu de mots une machine pour pulvériser le ciment; cette matière est d'un trop grand usage dans l'architecture hydraulique, pour ne point faciliter les moyens de la préparer.

Description d'une machine pour pulvériser le ciment.

728. La quatrième et la cinquième figure de la planche quatrième du chapitre second expriment l'élévation et le plan de cette machine : on y voit un bassin de 5 toises de diamètre. Au centre est un arbre A, auquel sont attachés deux essieux B G et D C entretenus ensemble par un lien G F. Une partie de chacun de ces essieux est taillée en vis, mais les pas de l'un le sont dans un sens opposé à ceux de l'autre : l'écrou de ces vis passe au milieu des meules H et I où il est bien arrêté. Si l'on suppose un cheval attelé au palonnier E, et qu'on le fasse tourner autour du bassin, la meule H s'approchera du centre, tandis que l'autre I s'en éloignera; après que le cheval aura fait un certain nombre de tours, le faisant agir d'un sens opposé, la meule qui était près du centre s'approchera de la circonférence, l'autre s'en éloignera, et elles auront toujours un mouvement contraire; ainsi le ciment, ou toute autre matière, s'écrasera sur toute l'étendue du bassin sans avoir les sujétions ordinaires. Il paraîtra peut-être que c'en est une grande que d'être obligé de détourner le cheval toutes les fois que les deux meules auront parcouru la longueur de la vis; mais l'on peut habituer un cheval à faire cela de lui-même, dès qu'il entendra le son d'une sonnette attachée à l'arbre A, et qu'on ajustera de façon qu'elle sonne toutes les fois qu'une des meules s'approchera du centre du bassin. J'ai vu des chevaux attelés à une machine servant à tirer du charbon de terre d'un puits fort profond, qui étaient dressés de la sorte (*ez*).

Planche 4 du chapitre second.

Figures 4 et 5.

(*ez*) On trouve dans la *Description des projets et de la construction des ponts de*

Indication d'une

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

autre machine à broyer le ciment.

Neuilly, etc. de M. Perronet, t. 1, p. 59, le dessin d'une machine semblable; et on y apprend qu'un cheval broyait par son moyen $0^{mc},51$ de ciment par jour. Cette donnée, combinée avec les résultats du tableau de la page 396, pourra servir à évaluer la quantité d'action consommée par cette opération.

Remarque sur les machines à broyer.

Je saisirai ici l'occasion de faire une remarque qui peut offrir quelque intérêt. On emploie dans les arts, dans beaucoup de cas où l'on a diverses matières à broyer, des meules en forme de roues cylindriques tournant autour d'un axe horizontal, qui lui-même tourne sur un axe vertical. Quelques personnes observant qu'une roue cylindrique tend à se mouvoir naturellement en ligne droite, pensent qu'il faut ici, pour faire prendre à cette roue un mouvement circulaire, vaincre un frottement, et consommer une force qui pourrait être épargnée, en la remplaçant par une roue conique formée d'une portion de cône droit dont le sommet serait dans l'axe vertical de rotation. On trouve même dans le *Traité de l'art de fabriquer la poudre* de MM. Bottée et Riffault, p. 325, l'indication d'une disposition ingénieuse pour obliger une roue conique à exercer une égale pression sur tous les points de son arête de contact avec le plan sur lequel elle roule, le peu de succès des roues de cette espèce étant attribué au défaut de cette égalité de pression. Il paraît toutefois que l'avantage des roues cylindriques tient à une autre cause, et que leur propriété d'écraser les matières sur lesquelles elles roulent est véritablement due à ce qu'en raison de la nature de leur mouvement, elles glissent sur ces matières en les pressant, comme font les meules des moulins à blé, qui sont les véritables machines à écraser. M. Lovel Edgeworth rapporte à ce sujet l'histoire d'un chef-ouvrier, qui, se fiant à quelques légères connaissances en mécanique, substitua, en l'absence de son maître, une roue conique à une roue cylindrique employée à écraser du silex. Le maître, de retour, le laissa continuer son essai. La roue conique tourna avec beaucoup de facilité, mais aucune particule de silex ne fut écrasée (*An essay on the construction of roads and carriages*, p. 91).

ADDITION.

Sur la machine employée en Angleterre pour battre le blé (THRASING MACHINE).

L'OBJET principal que Bélidor paraît s'être proposé dans cette première partie de l'Architecture hydraulique, est, après avoir exposé les principes de la mécanique, d'enseigner, au moyen d'un grand nombre d'exemples, la manière de se servir de ces principes, pour faire le calcul et l'établissement des machines de toute espèce. Il a d'ailleurs choisi ces exemples parmi les machines le plus généralement répandues et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le plus utiles, et tel est en effet le moulin a blé, qui à le premier fixé son attention. Ce sera donc entrer dans l'esprit de l'ouvrage, que de placer ici la description et le calcul d'une machine déja très-répandue en Angleterre, et sur-tout en Ecosse, et probablement destinée à devenir un jour, dans beaucoup de pays, aussi commune, et à paraître aussi nécessaire à l'existence de la société, que le moulin à blé l'est aujourd'hui.

Toutes les fois qu'on voit des hommes occupés d'un travail pénible, et où leurs forces semblent plus employées que leur intelligence, on est porté à chercher les moyens d'effectuer le même travail avec le secours des agents materiels que la nature a mis à notre disposition. Cette recherche est dans les intérêts du spéculateur, qui sait que la force de l'homme est en général la plus chère de toutes. Elle est aussi dans ceux de l'administrateur qui, embrassant les objets d'un point de vue plus élevé, reconnaît qu'en faisant exécuter par l'eau ou le vent les mêmes travaux pour lesquels les hommes étaient indispensables, on accroît les moyens productifs de la société; on laisse disponibles, pour fabriquer des objets utiles ou agréables, les mains employées à des objets nécessaires : on augmente en quelque sorte la population de l'état, sans augmenter sa consommation.

La première idée qui se présente ordinairement pour parvenir à ce but, est de tâcher de reproduire le plus exactement possible, par le moyen d'une machine, les opérations que les ouvriers exécutent. Ainsi le battage du blé se faisant généralement à main d'homme au moyen de fléaux, au moins dans les pays où l'épi ne peut acquérir un degré de sécheresse et de maturité tel que l'action d'un rouleau suffise pour détacher le grain, on a cherché d'abord à faire mouvoir des fléaux artificiellement. Mais par les changements et perfectionnements successifs que les machines ont subis, le blé est maintenant battu par une action tout-à-fait différente de celle que le fléau exerce. Avant de décrire la machine employée à cet effet, je donnerai un aperçu historique succinct des modifications qu'elle a éprouvées. Il est extrait de l'*Encyclopédie* du docteur Rees, art. *Thrasing-machine*, et de la *Mécanique* de M. Gregory, t. 2, p. 496.

Notions historiques sur la machine à battre employée en Angleterre.

Il paraît que la première notion des machines à battre a été apportée de la Hollande, ou des Pays-Bas, dans les parties septentrionales de la Grande-Bretagne, où les différentes parties de leur mécanisme ont éprouvé graduellement plusieurs modifications et perfectionnements, pour les rendre plus convenables à leur destination; en sorte qu'elles ont atteint maintenant un grand degré de perfection dans beaucoup de portions de ce royaume. La première de ces machines perfectionnées fut construite en 1732 par M. Menzies, d'Edimbourg: elle était conduite par une roue à eau, qui mettait en mouvement un certain nombre de fléaux semblables à ceux dont on se sert en battant le blé à la main. Les essais faits avec ces machines furent très-satisfaisants, et on faisait une grande quantité de travail dans un temps donné; mais à raison de la grande vîtesse nécessaire pour que ce travail fût bien exécuté, elles furent bientôt brisées, et l'invention fut abandonnée.

Machine de M. Sterling, 1753.

Dans le cours de l'année 1758, une autre tentative fut faite par M. Sterling, fermier de la paroisse de Dumblane, en Perthshire. Sa machine était construite sur des principes semblables à ceux du moulin pour le lin, ayant un axe vertical avec quatre bras horizontaux dont les extrémités étaient garnies de plaques de fer, en-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fermés dans un cylindre, de $1^m,07$ de haut et $2^m,44$ de diamètre, en dedans duquel l'axe et ses bras étaient tournés avec une vîtesse considérable par une roue à eau. A la surface supérieure du cylindre était une ouverture de $0^m,2$ de largeur, et $0^m,45$ de longueur dans le sens du rayon, par laquelle le blé, dont les gerbes avaient été préalablement étalées sur une planche garnie de deux rebords qui se dirigeaient vers cette ouverture, était introduit avec la main, et exposé au choc des bras qui détachait le grain. Ce grain descendait avec la paille à travers une ouverture pratiquée au fond du cylindre, et ils étaient ensuite séparés par des cribles et des vans, également mus par la roue à eau.

Machine de MM. Elderton et Smart.

Vers 1772, une autre machine à battre fut inventée presque en même temps, par M. Elderton près d'Alnwick, et par M. Smart à Warck. Elle était construite de manière à agir en frottant, et non en frappant l'épi. Les gerbes étaient placées entre un tambour cannelé, d'environ $1^m,8$ de diamètre, et un certain nombre de rouleaux également cannelés, distribués autour de ce tambour, contre lequel ils étaient pressés par des ressorts, de manière à détacher le grain par leur frottement quand le tambour était tourné. Cette disposition fut aussi trouvée vicieuse à l'essai, en ce que, outre qu'elle faisait très-peu de travail dans un temps donné, elle brisait le grain, et altérait tellement son apparence, qu'elle en diminuait considérablement la valeur dans les marchés.

Modification à cette machine par sir Francis Kinloch.

Cette machine, dans l'état d'imperfection où elle était alors, fut vue par sir Francis Kinloch, baronnet de Glimerton, personne très-familière avec les machines, et qui s'était beaucoup occupé d'agriculture. Il lui parut qu'elle pourrait être rendue plus parfaite, en enfermant un tambour dans une enveloppe cannelée, et fixant sur la surface extérieure de ce tambour quatre pièces également cannelées. susceptibles d'en être écartées un peu par des ressorts, de manière à presser contre l'enveloppe, et à détacher le grain par leur frottement lorsque les gerbes passeraient entre eux. Mais après des essais répétés, on trouva que cette machine brisait le grain presque autant que celle qu'on avait voulu corriger. Elle demeura quelque temps dans cet état, et fut ensuite envoyée par sir Francis à M. Meikle de Know-mill, constructeur de moulins, qui s'occupa pendant long-temps de cet objet. Après beaucoup de réflexions et d'essais, il parut à M. Meikle que l'opération de séparer le grain de la paille pourrait être effectuée d'après un principe différent de tout ce qui avait été essayé jusques-là, et particulièrement par le moyen d'un tambour garni de batteurs (*scutchers*) agissant sur les gerbes par leur vîtesse, et chassant le grain en dehors, au lieu de presser ou de frotter. D'après cela on construisit un modèle à Know-mill, dans lequel le grain était détaché par le tambour, auquel il était présenté entre deux rouleaux nourriciers (*feeding rollers*) à surface lisse, qui, après cela, furent remplacés par des rouleaux cannelés. La première machine en grand exécutée sur ce principe fut faite, dit-on, en 1786, par un fils de M. Meikle, pour M. Stein de Kilbagie, et travailla à la satisfaction générale. On sollicita et obtint une patente en 1788 (*Repertory of arts and manufactures*, t. 10, 1re série; *Annales des arts et manufactures*, t. 28). Depuis cette époque, ainsi que depuis la première introduction de ces machines, beaucoup d'autres perfectionnements leur ont été faits. Un crible a été ajouté pour faire passer le grain à travers dans une machine à vanner, et un rateau tournant pour éloigner

Machine de M. Meikle, dont le principe est généralement adopté.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la paille. Avant cette addition, la paille était forcée hors du tambour à battre sur le plancher supérieur du moulin, et il fallait pour la secouer et l'éloigner de la machine, beaucoup de temps et de travail que cette invention a épargnés. Outre qu'il faut un certain degré de vîtesse, qui ne soit pas toutes fois assez grand pour nuire à la machine, on a trouvé qu'une chose dont dépend essentiellement la bonne exécution du battage de toutes sortes de grains, est le ménagement de l'enveloppe en fer, sous laquelle le tambour garni de six batteurs, ou même davantage, se meut. Dans quelques machines elle est fixe, tandis que le tambour est susceptible d'être élevé ou abaissé à volonté: mais un perfectionnement plus récent consiste à rendre l'enveloppe de fer mobile et le tambour fixe, le fer étant placé si près des batteurs, que le grain est frotté (*rubbed*) aussi-bien que secoué (*shaken*) hors de l'épi. Quelquefois les batteurs sont un peu arrondis, mais la forme quarrée est préférable.

Description de la machine à battre simplifiée par M. Lee.

PLANCHE H. FIGURES 1 et 2.

Les détails qui ont pu présenter quelque obscurité dans les notions historiques précédentes, s'éclairciront au moyen des descriptions détaillées qui vont suivre. Je commencerai par celle d'une machine à battre dans laquelle l'appareil qu'elle comporte est réduit à la plus grande simplicité possible, et qui a été proposée par M. Lee pour le service des exploitations rurales d'une médiocre importance (*Transactions of the society for the l'encouragement of the arts and manufactures*, 1810, t. 28).

La fig. 1, pl. H, est une élévation latérale, et la fig. 2, une élévation prise en face de la machine. A A est sa charpente. B l'axe de la roue dentée C, qui reçoit, par le moyen d'autres roues, le mouvement qui est imprimé par un manège à cheval. La roue C fait tourner rapidement le pignon D. Sur l'axe de ce pignon sont fixés les quatre bras E E, aux extrémités desquels sont assemblées les quatre traverses *b b b b* nommées *batteurs*. Cet axe fait 120 tours pendant que les chevaux, dont le manège a $6^{m},7$ de diamètre, en font un. Les batteurs tournent dans un segment de cylindre creux, formé par des plaques de fer cannelées parallèlement à l'axe, et assemblées par des courbes en bois F F, auxquelles elles sont assujetties par des boulons. Ces courbes sont en plusieurs parties, et ne sont posées qu'avec des vis, afin qu'on puisse les approcher plus ou moins des batteurs, suivant que l'exige la nature du grain. Le système des batteurs a environ $0^{m},91$ de diamètre, et $0^{m},76$ de longueur. *a a* est la table nourrice sur laquelle on étale les gerbes. L'extrémité inférieure de cette table est très-près de la circonférence décrite par les batteurs *b b b b*, et en tournant rapidement ils frappent les têtes des épis qui leur sont présentés. Le grain qui n'est point détaché par ce choc, l'est en passant dans le cylindre. H est une grille sur laquelle le grain, la balle et la paille sont poussés ensemble. Les deux premiers tombent en X, et la dernière glisse au bas de la grille. L est un des montants de la charpente supportant les tourillons de l'axe B. N est un faux plancher, sur lequel se tient l'homme qui nourrit la machine.

On voit que cette machine n'a pas besoin de l'emploi des rouleaux nourriciers, pour faire entrer le blé qui doit être battu: le mouvement des batteurs suffit pour l'entraîner. Deux chevaux suffisent pour la faire travailler, et depuis 7 heures $\frac{1}{2}$ jusqu'à 2 heures, ils battront 80 *bushels* $= 3^{mc},0812$ de blé.

Description d'une machine à

Je passe maintenant à la description d'une machine à battre complète, mue par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

battre complette, donnée par M. Gray.

une roue à eau. Elle est traduite littéralement de l'*Experienced millwright* de M. Gray, ouvrage utile, où l'on trouve les détails de plusieurs machines du même genre; construites toutes sur les mêmes principes, mais disposées pour recevoir l'action de divers moteurs, tels que des roues à eau, des moulins à vent, ou un manège. Quelques-unes sont même arrangées de manière que l'action des chevaux puisse aider celle de l'eau ou du vent, ou la remplacer au besoin.

Explication du plan d'une machine à battre le blé, mue par un courant d'eau (Pl. H, Fig. 3).

Pl. H, Fig. 3.

« AB la roue à eau fixée sur son axe CC; sur lequel est aussi arrêtée une roue dentée DE contenant 150 dents, laquelle fait tourner le pignon n° 2 ayant 25 dents, qui est placé sur l'axe F. Sur cet axe est aussi fixée la roue n° 3 ayant 72 dents, qui conduit le pignon n° 4 dans lequel sont 15 dents, et qui est fixé sur une partie quarrée à l'extrémité du tourillon de l'axe K du tambour à battre. Quand les batteurs frappent ou battent de bas en haut, l'axe qui les porte doit être enveloppé par des planches clouées sur deux roues arrêtées sur les bras ou rayons de l'axe K, et en dedans des batteurs, lesquels sont fixés par des boulons à vis et écrous sur les extrémités de ces rayons. Mais si les batteurs frappent de haut en bas, ce qu'on croit préférable, cette enveloppe est inutile, et les batteurs seulement sont fixés sur les rayons. Le long de la face antérieure des batteurs est fixée une plaque de fer pour les empêcher de s'user, et l'arête est un peu arrondie pour qu'ils ne coupent point la paille en détachant le grain. N° 5 est une roue arrêtée sur le tourillon de l'axe F, contenant 22 dents, qui fait tourner les roues R, S, et P, O. N° 6 est une roue fixée sur un axe de fer conduit par n° 5, et ayant 18 dents. Sur le même axe est placé le pignon n° 7, contenant 17 dents, qui tourne la roue n° 8, laquelle est fixée sur un axe de fer ayant à son extrémité en H un trou quarré ou douille, dans lequel s'introduit l'extrémité quarrée des tourillons de l'un des rouleaux nourriciers M, au moyen de quoi ces rouleaux reçoivent un mouvement de rotation. Ces rouleaux sont ordinairement faits en fer fondu, et sont cannelés, ou ont de petites dents dans toute leur longueur, qui saisissent le blé qui va être battu, et le font avancer régulièrement pour recevoir les coups des batteurs. Dans n° 8 sont trois rangées de dents qui en contiennent 13, 17 et 21; et le pignon n° 7 est disposé de manière à pouvoir glisser le long de son axe, et se placer de manière à agir sur l'une quelconque de ces rangées, et à faire tourner les rouleaux plus ou moins rapidement, suivant que le blé doit être fourni en quantité plus ou moins grande lors du battage. N° 9 est une roue contenant 17 dents, conduite par le pignon n° 5, et fixée sur un axe de fer, à l'autre extrémité duquel est arrêtée la roue n° 10, ayant 24 dents. Cette dernière fait tourner la roue n° 11 où il y a 34 dents, et qui est fixée sur un axe de fer assemblé avec l'axe L, qui porte des rayons ou bras aux extrémités desquels sont arrêtés des rateaux ayant de petites dents qui entraînent la paille hors du crible, pendant que le grain passe à travers et tombe dans les vans qui sont dessous. N est une plate-forme appelée la table nourrice, sur laquelle le blé doit être étalé également, et introduit entre les rouleaux nourriciers M. QQ sont la machine et la manivelle par le moyen desquelles la vanne est levée pour laisser l'eau agir sur la roue

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

A. Les tourillons et pivots des axes doivent tourner dans des boîtes ou supports de bronze, comme étant moins sujets à s'user, et produisant moins de frottement. GH est la charpente qui soutient l'axe qui porte les roues. TT est celle dans laquelle les rouleaux nourriciers, l'axe qui porte les batteurs, et celui qui porte les rateaux, sont mus. V est une porte dans le mur du pignon ou de l'extrémité du moulin, par laquelle le blé non battu est introduit dans l'étage supérieur du bâtiment, où la partie de la machine qui opère le battage est placée. W W sont des portes pratiquées dans l'étage du rez-de-chaussée du moulin. XY est une place sur le plancher de cet étage entourée de cloisons, et destinée à contenir ce qui est rejeté par les vans, qui ne peuvent être vus ici, parce qu'ils sont placés au-dessous des batteurs et des rateaux. ZZ est un escalier conduisant à l'étage inférieur. UU des fenêtres dans le mur latéral pour éclairer le bâtiment. »

Explication de la section de la machine à battre le blé. (PL. I.)

« AA la roue à eau fixée sur l'axe CC. Sur cet axe est aussi fixée la roue BB contenant 150 dents, qui conduit le pignon n° 2 ayant 25 dents, placé sur l'axe D. On a aussi placé sur le même axe une roue n° 3, contenant 72 dents, conduisant le pignon n° 4 ayant 15 dents, lequel est fixé sur le tourillon de l'axe des batteurs RR, et les fait tourner. N° 5 est une roue placée sur le tourillon de l'axe D, contenant 22 dents. KK est un châssis qui porte les roues qui font tourner les rouleaux nourriciers. N° 6 est une roue fixée sur un axe en fer, ayant 18 dents, et conduite par le pignon n° 5. Sur le même axe est aussi arrêté le pignon n° 7, contenant 17 dents, et faisant tourner la roue n° 8 fixée sur un axe en fer, lequel a une boîte en F qui s'adapte dans une partie quarrée sur le tourillon d'un des rouleaux nourriciers pour le faire tourner. Sur l'axe en fer est fixé de la même manière un petit pignon, agissant sur un autre pignon placé sur l'axe du second rouleau, et de cette manière le mouvement est imprimé aux deux rouleaux. Dans n° 8 il y a trois rangées de dents séparées, l'une étant de 13 et les autres de 17 et 21 dents; et le pignon n° 7 est fait de manière à être aisément glissé sur son axe, afin qu'il puisse engrener dans l'une quelconque de ces rangées de dents, suivant que les rouleaux nourriciers doivent être mus avec une plus ou moins grande vîtesse. Les roues qui meuvent le chasse-paille ne se voient pas ici, parce qu'elles se seraient confondues avec les roues des rouleaux nourriciers; mais elles se voient facilement sur la pl. H. SS sont les rateaux ou pièces de bois dans lesquels sont fixées les dents qui chassent la paille hors du crible placé au-dessus de la trémie H, afin d'empêcher cette paille de tomber avec le blé dans les vans II; lesquels vans sont conduits au moyen d'une corde ou d'une bande de cuir passant sur un tambour fixé sur le tourillon à n° 4. E, G, G, sont la charpente qui supporte les rouleaux nourriciers, les batteurs et le chasse-paille. LL une porte dans le pignon ou mur extrême du bâtiment du moulin, par laquelle le blé en gerbe est apporté sur le plancher OO; sur lequel plancher les parties de la machine qui servent à battre sont placées. M, M, deux portes sur le plancher inférieur du moulin. P, P, les pièces de charpente du toit. N, N, fenêtres dans les murs latéraux pour éclairer le bâtiment. »

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Explication de l'élévation latérale de la machine à battre le blé. (Pl. K.)

Planche K.

« A l'axe portant la roue de côté B B, ayant 36 augets, qui reçoivent l'eau qui la fait tourner. Sa circonférence parcourt environ $2^m,59$ par seconde, ou la roue fait environ 11 tours $\frac{1}{2}$ dans une minute. La chute de l'eau R R est de $3^m,05$. U U la vanne, et la machine pour l'élever et donner l'eau à la roue. C C un rouet fixé sur l'axe A, contenant 150 dents, et faisant tourner le pignon n° 2 ayant 25 dents. Sur le même axe que ce pignon, est aussi placée la roue dentée n° 3, contenant 72 dents, qui conduit le pignon n° 4 ayant 15 dents, fixé sur le tourillon de l'axe F des batteurs. H, H les batteurs qui sont arrêtés avec boulons à vis et écrous sur les bras fixés dans l'axe F. I sont deux rouleaux de fer fondu, ayant de petites dents qui dans toute leur longueur entrent les unes dans les autres, destinés à nourrir régulièrement de blé en gerbe le tambour à battre. Les tourillons de ces rouleaux tournent dans de longues mortaises pratiquées dans leur châssis, le rouleau supérieur ayant la liberté de s'élever dans sa mortaise, et l'inférieur de s'écarter du tambour à battre, suivant l'épaisseur ou la quantité de blé qui passe entre eux. Les roues qui font mouvoir les rouleaux nourriciers ne se voient pas ici, mais elles se voient clairement dans les pl. H et I. D V est un axe de fer ayant une roue fixée sur lui à chaque extrémité: l'une desquelles ayant 17 dents est tournée par une roue placée sur l'axe du pignon n° 2 (voyez la planche I); et l'autre contenant 24 dents, engrène avec la roue n° 5 qui a 34 dents, et qui est fixée sur l'axe G. Dans cet axe sont aussi assemblés des bras, sur les extrémités desquels sont fixés des rateaux, comme X,X,X, qui en tournant chassent la paille hors du crible H W, pendant que le grain tombe au travers de ce crible dans la trémie représentée ici par les lignes K W, laquelle le conduit dans les vans représentés par les lignes ponctuées Q Q. La trémie et les vans sont clairement représentés dans la pl. I. L L la charpente qui supporte les rouleaux nourriciers, le tambour à battre, et le chasse-paille. Y Y une forte charpente pour supporter la traverse sur laquelle porte le tourillon de l'axe A. Les tourillons et supports des axes doivent tourner dans des supports de bronze. N porte dans le mur du pignon ou extrémité du moulin, par où le blé en gerbe est apporté sur le plancher où la machine à battre est placée. M porte sur le plancher inférieur, à l'autre extrémité du bâtiment, par laquelle on sort la paille, à mesure qu'elle tombe de la machine. O O fenêtres pour éclairer l'étage supérieur. P P fenêtres pour éclairer l'étage inférieur. S S escalier faisant communiquer les deux étages. T T charpente du toit du bâtiment. »

Manière dont s'effectue l'opération de la machine à battre le blé.

Pl. K, Fig. 1.

Les descriptions précédentes, où l'on a conservé à dessein plusieurs répétitions, en sacrifiant ici la précision à la clarté, paraissent devoir donner une idée complète de la nature et du jeu de la machine. Il est presque inutile d'ajouter que le blé en gerbe ayant été étalé sur la table nourrice M N (pl. H, fig. 3) ou I K (pl. K, fig. 1), de manière à présenter les épis aux rouleaux nourriciers I (pl. K, fig. 1), ces épis sont saisis par ces rouleaux. Qu'après avoir passé entre eux, ils reçoivent immédiatement le choc des batteurs H, H, qui détache la plus grande partie du blé. Que la paille poussée par les rouleaux nourriciers, et entraînée par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

le mouvement des batteurs, est forcée de passer entre eux et le crible cylindrique dans lequel ils tournent, et que l'action que les batteurs exercent alors sur elle achève de détacher tout le grain. Qu'elle est enfin saisie par les rateaux tournants formant le chasse-paille XX, et qu'après avoir parcouru une autre portion de crible cylindrique, au travers duquel la balle et le grain achèvent de tomber dans une trémie, la machine s'en trouve entièrement débarrassée. Il faut cinq hommes pour en faire le service : le premier pour apporter les gerbes de blé ; le second pour les délier et les passer au troisième qui les présente aux rouleaux nourriciers ; le quatrième pour retirer le blé qui tombe des vans, et le dernier pour retirer la paille.

Moyen pour effectuer le transport du blé en gerbe.

M. Gray indique pour le transport du blé en gerbe ou en sacs l'emploi de la la brouette représentée pl. K, fig. 2 et 3, instrument très-utile suivant lui dans l'intérieur des fermes, parce qu'il donne le moyen à un homme de transporter un sac de blé sans le secours de personne. Pour épargner la peine d'apporter les gerbes à la machine à battre, on emploie quelquefois une longue bande sans fin en étoffe, tournant sur des rouleaux, dont une extrémité aboutit à la place de la table nourrice, et dont l'autre part de l'endroit où le blé est emmagasiné. Le mouvement est imprimé à cette bande par la machine.

Principaux avantages résultant de l'emploi de la machine à battre le blé.

Le fait de l'extension que prend journellement l'emploi de cette machine en Angleterre, et sur-tout en Écosse, suffit pour prouver qu'il présente des avantages marqués sur la méthode ordinaire de battre le blé au fléau. En effet les dépenses d'établissement, qui peuvent paraître considérables, le sembleront moins en remarquant que la machine épargne la construction des aires pour le battage. En substituant l'action de l'eau, du vent ou des chevaux, à celle des hommes, elle diminue considérablement la dépense de cette opération, et apporte une économie qu'on évalue à moitié ou aux deux tiers. Par son moyen le blé ne reste plus pendant plusieurs semaines sur les aires, circonstance qui nuit beaucoup à sa qualité, sur-tout dans les pays où l'atmosphère est humide. L'expérience a fait reconnaître que le battage fait par la machine expose beaucoup moins le grain à être écrasé, et qu'elle procure à ce grain une apparence qui lui donne la supériorité dans tous les marchés. Enfin, la paille n'est pas plus détériorée que par le battage ordinaire, et elle est également propre à la construction des toits en chaume, ou à tout autre usage.

L'emploi de la machine à battre offre encore d'autres avantages relatifs à l'économie des exploitations rurales, sur lesquels je ne m'appesantirai point. Un des plus importants consiste d'ailleurs en ce qu'elle laisse dans la paille moins de grain que le battage ordinaire, ainsi qu'on s'en est assuré par des expériences spéciales. On estime qu'elle donne moyennement $\frac{1}{20}$ de grain de plus, et on a calculé que si elle était généralement adoptée, il en résulterait pour l'Angleterre une économie annuelle de plus de 2900 mille livres sterling (*Encyclopédie* du docteur Rees, art. *thresing*).

Quantité d'action consommée par le battage du blé.

Il reste maintenant à exposer les considérations d'après lesquelles on pourrait faire l'établissement d'une machine de cette espèce. Les descriptions précédentes et les dessins font suffisamment connaître la forme et la disposition de ses parties. La pièce principale est le tambour garni de batteurs : on lui donne ordinairement de $0^m,6$ à 1^m de diamètre, sur 1^m environ de longueur. Le nombre des batteurs varie de quatre à six. La vîtesse qu'il faut imprimer à ces batteurs est très-considérable. D'après la description de M. Gray, la roue à eau fait 11 tours $\frac{1}{2}$ par minute; les roues

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

PLANCHE K.

CC et n° 3 ont 150 et 72 dents, et les pignons n° 2 et n° 4 en ont 25 et 15; d'où il suit que l'axe auquel sont fixés les batteurs fait $11{,}5 \cdot \frac{150}{25} \cdot \frac{72}{15} = 331$ tours par minute. Toutes les indications contenues dans les ouvrages que j'ai été à portée de consulter, s'accordent en ce point, que l'axe des batteurs doit faire un peu plus de 300 tours par minute, ou de 5 tours par seconde. Telle est donc la première condition qui doit être remplie, et à laquelle on satisfera en réglant convenablement les diamètres respectifs des roues et pignons.

Quant à la quantité d'action nécessaire pour faire marcher la machine, il paraît que les résultats qui méritent le plus de confiance sont ceux donnés par M. Fenwick, qui d'ailleurs s'accordent avec les autres observations dont j'ai eu connaissance, et tiennent le milieu entre elles. Il a trouvé, par de nombreuses expériences, qu'une quantité d'action capable d'élever 1000 liv. avoir-du-poids avec une vîtesse de 15 pi. par minute, pouvait battre 2 *bolls* de blé en une heure; et qu'une quantité d'action capable d'élever le même poids avec une vîtesse de 22 pi. par minute, pouvait battre 3 *bolls* de blé en une heure. Cela revient moyennement à $2555^{k \times m}$ de quantité d'action dépensée pour $0^{mc},00642$, ou (en évaluant comme dans la note (*di*) le poids du mètre cube de blé en mesure à 850^k) pour $5^k,46$ de blé battu; en sorte que le battage et vannage d'un kilogramme de blé exige une quantité d'action $= \frac{2555^{k \times m}}{5,46} = 468^{k \times m}$. Cette quantité d'action comprend celle qui doit être consommée par les frottements et autres résistances analogues, dans la transmission de l'effort du moteur à celui de la résistance.

Le quantité de travail que la machine peut faire dans un temps donné dépend d'ailleurs de la longueur du tambour à battre, du nombre des batteurs, et de la vîtesse avec laquelle on nourrit de blé la machine. Il paraît que cette quantité varie de 12 *bushels* ou 393^k de blé environ par heure, ce qui est le produit d'une machine mue par deux chevaux, à 40 *bushels* ou 1300^k, ce qui est le produit d'une machine qui serait mue par six chevaux. Il ne faut point oublier en effet que le résultat précédent sur la quantité d'action consommée par le battage du blé n'offre qu'une moyenne, et que l'effet utile obtenu sera toujours un peu moindre dans les petites machines, et un peu plus considérable dans les grandes. Le battage des diverses espèces des grains peut s'effectuer par la même machine. Son produit en orge est à-peu-près double de ce qu'il est en blé, et en avoine il est à-peu-près triple, à quantité d'action égale.

Établissement de la machine à battre le blé.

D'après les renseignements précédents, on fera facilement l'établissement d'une machine à battre. En représentant par B le nombre de kilogrammes de blé qu'on voudra battre en une seconde, la quantité d'action à dépenser dans le même temps sera moyennement 468.B kil. × mèt. On égalera donc cette quantité à l'expression de la quantité d'action fournie par le moteur dont on peut disposer; laquelle, si ce sont des chevaux, sera donnée par le tableau de la page 396, et si c'est une roue à eau, par les notes du ch. 1^er^ de ce livre. On obtiendra ainsi une relation entre la quantité d'ouvrage à faire, et le nombre des chevaux ou la dépense d'eau qui seront nécessaires. En nommant D le diamètre de la roue à eau, et V la vîtesse de sa circonférence, le nombre de tours qu'elle fera dans une seconde sera $\frac{V}{\pi D}$: le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

nombre de tours que le tambour à battre doit faire dans le même temps étant d'un peu plus de 5, il faudra régler les diamètres des roues d'engrenage de manière que pendant que la roue à eau fait un tour, le tambour à battre fasse un nombre de tours qui surpasse un peu $5\frac{\pi D}{V}$.

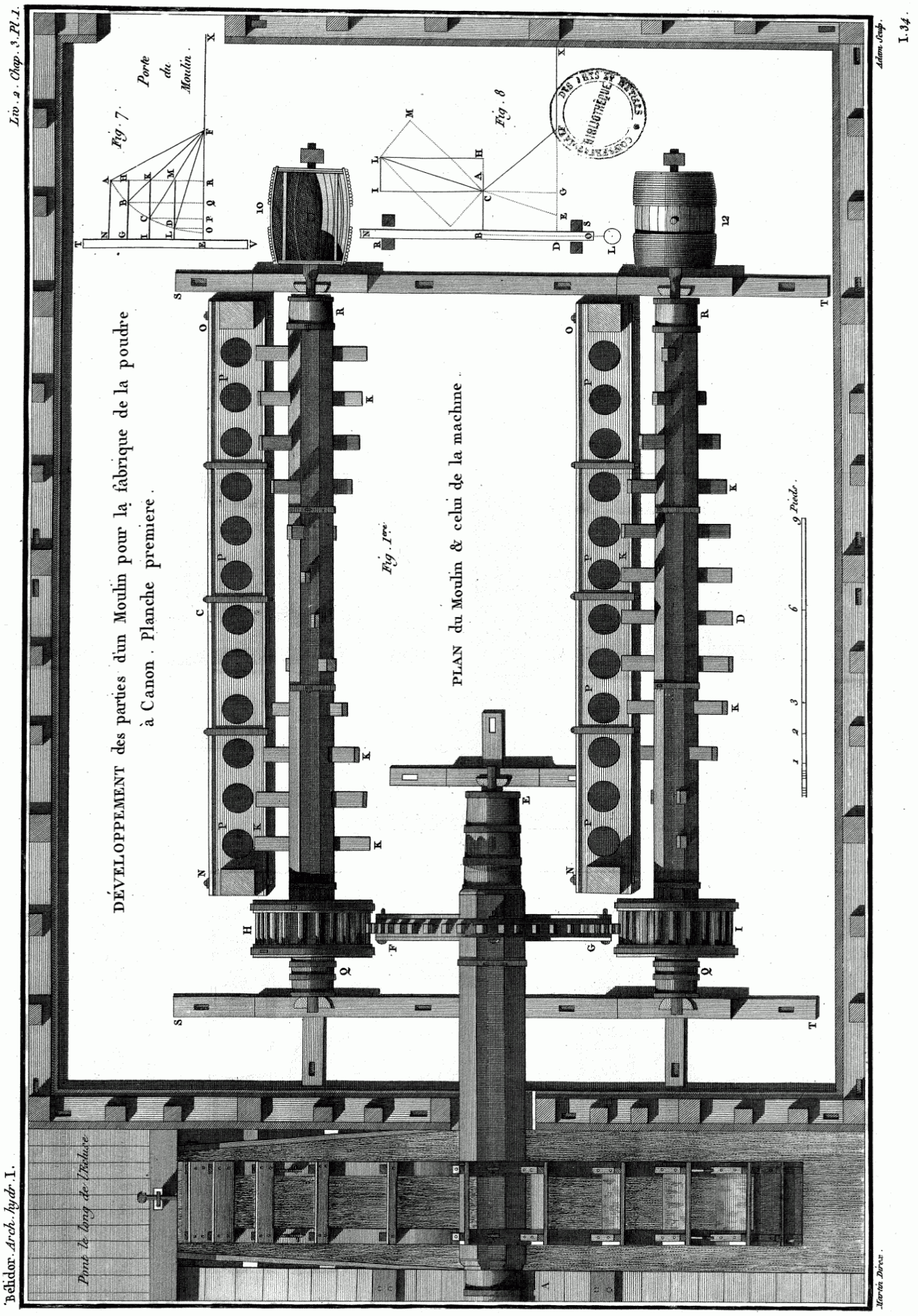
Les machines à battre, pour travailler convenablement, et ne pas donner lieu à de fréquentes réparations, doivent être construites avec beaucoup de solidité, et leurs diverses parties doivent être plutôt massives que légères. C'est par cette raison que les petites machines composées de manière à être faciles à transporter et peu coûteuses, telles que celles de M. Lee décrites ci-dessus, ont en général moins bien réussi que les machines plus puissantes.

Rapprochement entre le travail exécuté par la machine à battre, et celui d'un ouvrier.

Il est intéressant de comparer le battage exécuté par cette machine, avec celui fait à main d'hommes au fléau. On admet ordinairement qu'un ouvrier robuste, dont le fléau frappe 40 coups par minute, bat et vanne dans sa journée au plus un septier de blé, c'est-à-dire 12^k environ par heure. D'après ce qui précède, un cheval, au moyen de la machine, battra et vannera par heure environ 250^k de blé. D'où il suit qu'un cheval fait ici plus de vingt fois le travail d'un homme. D'un autre côté, la journée d'un homme, d'après le tableau de la p. 396, peut être considérée comme représentant au moins $180000^{k\times m}$ de quantité d'action. Ainsi, puisqu'un homme bat un septier ou 117^k de blé en un jour, chaque kilogramme de blé battu consomme $\frac{180000^{k\times m}}{117} = 1538^{k\times m}$ de quantité d'action. Mais on a vu plus haut que le battage d'un kilogramme de blé exécuté par la machine ne consommait qu'une quantité d'action $= 468^{k\times m}$, nombre qui n'est pas le $\frac{1}{3}$ du précédent : d'où il résulte que la machine offre le double avantage d'employer une force moins chère, et d'en consommer beaucoup moins.

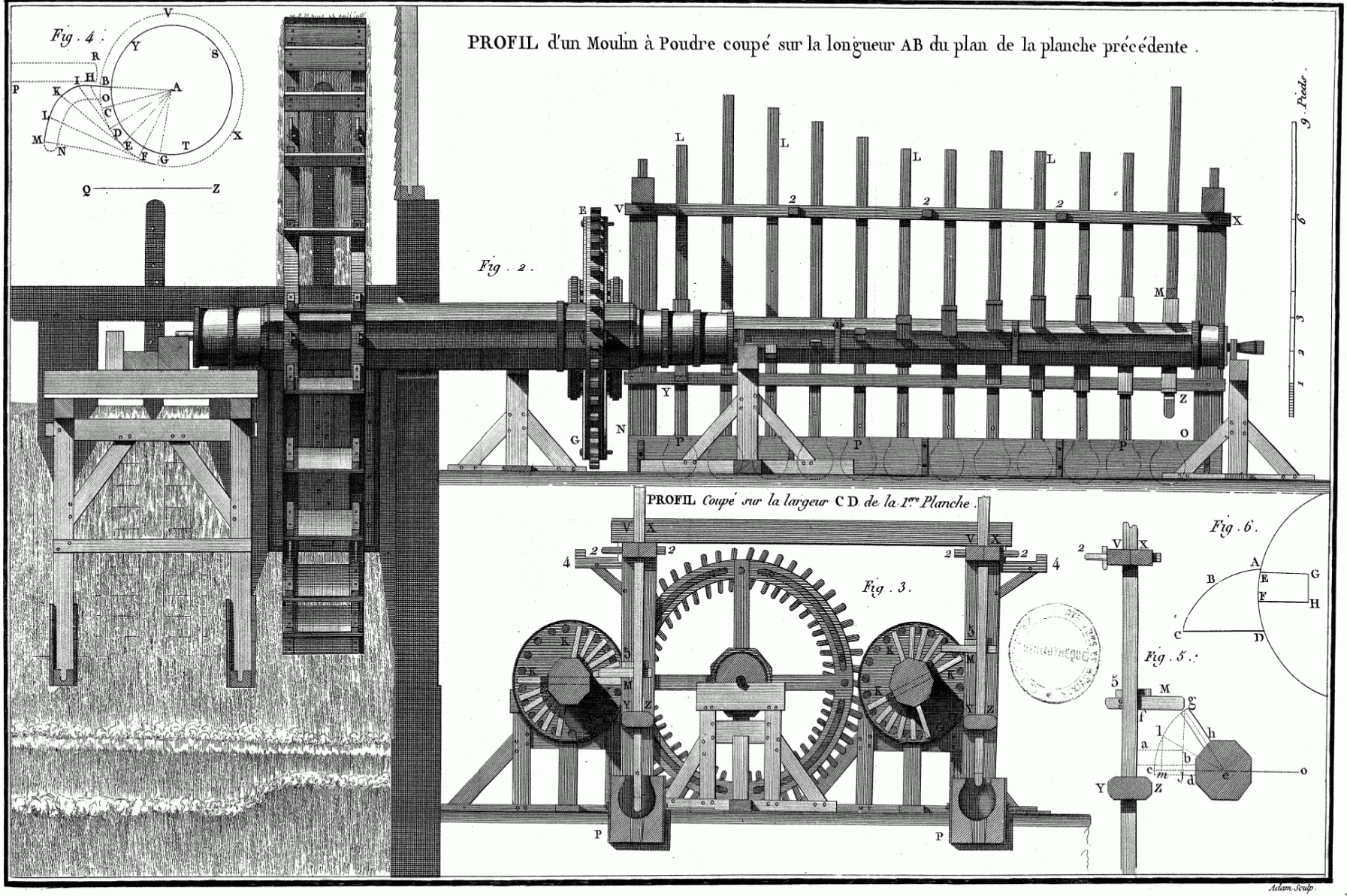
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

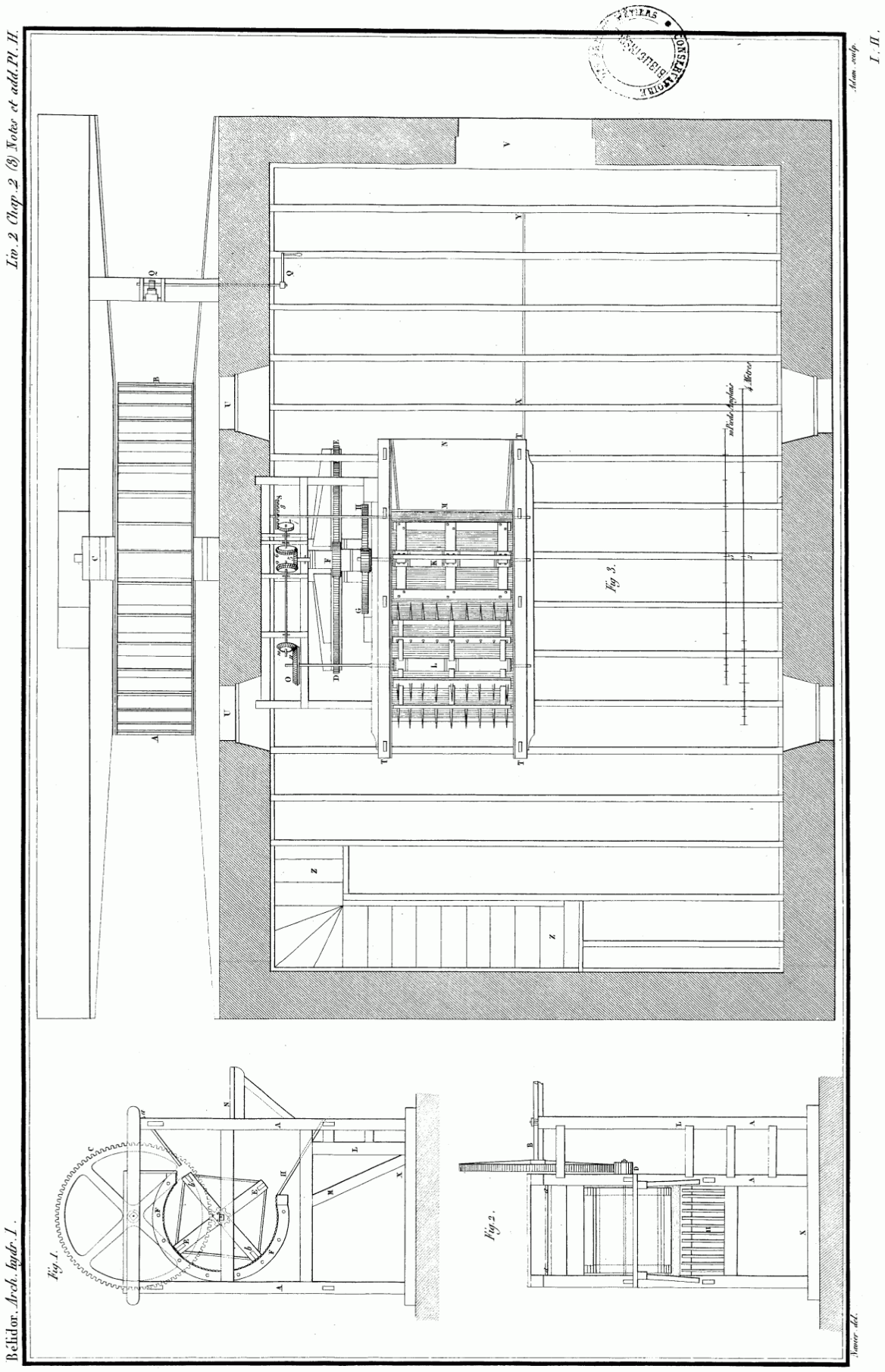
PROFIL d'un Moulin à Poudre coupé sur la longueur AB du plan de la planche précédente.



Adam. Sculp.

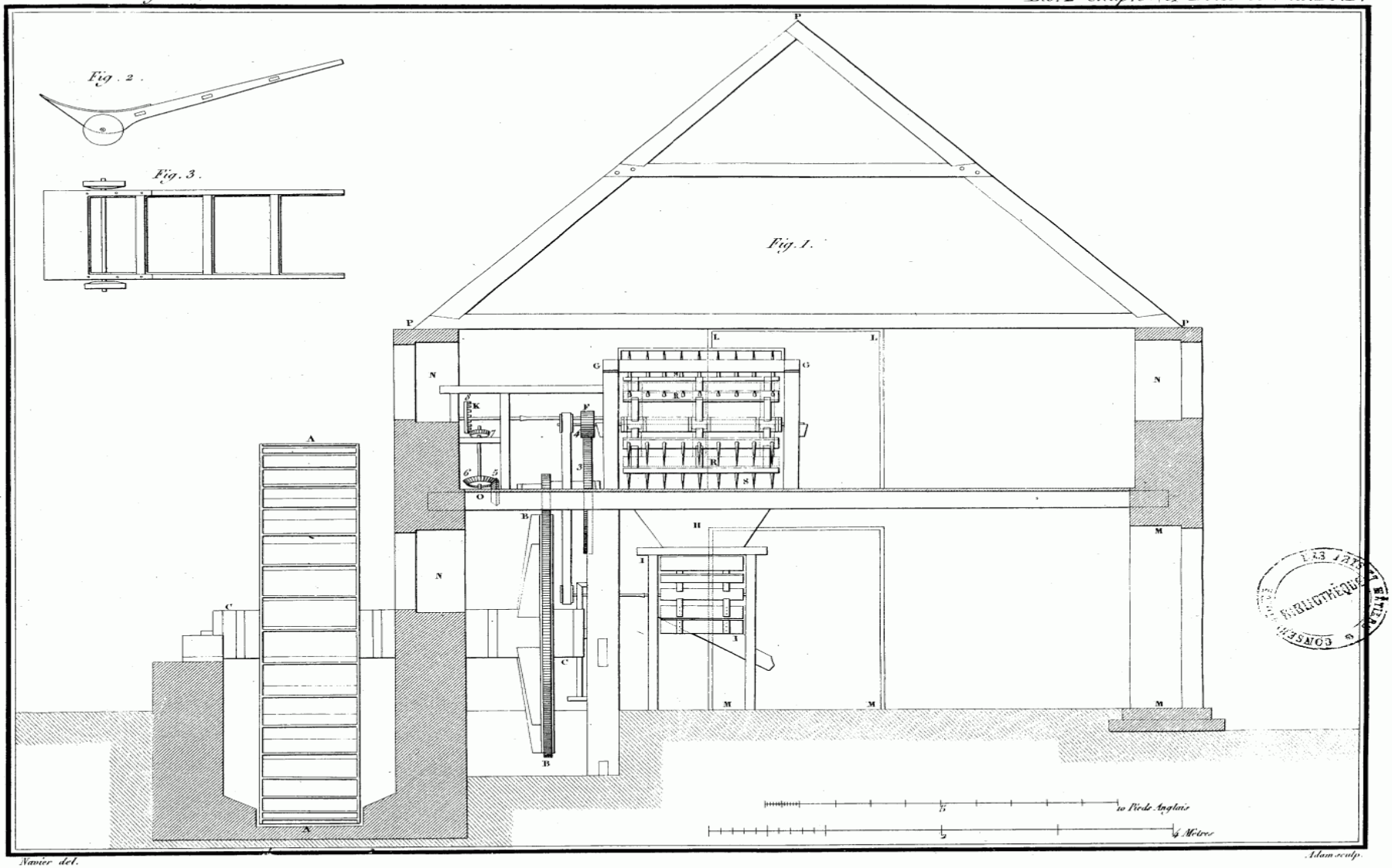
I. 35.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

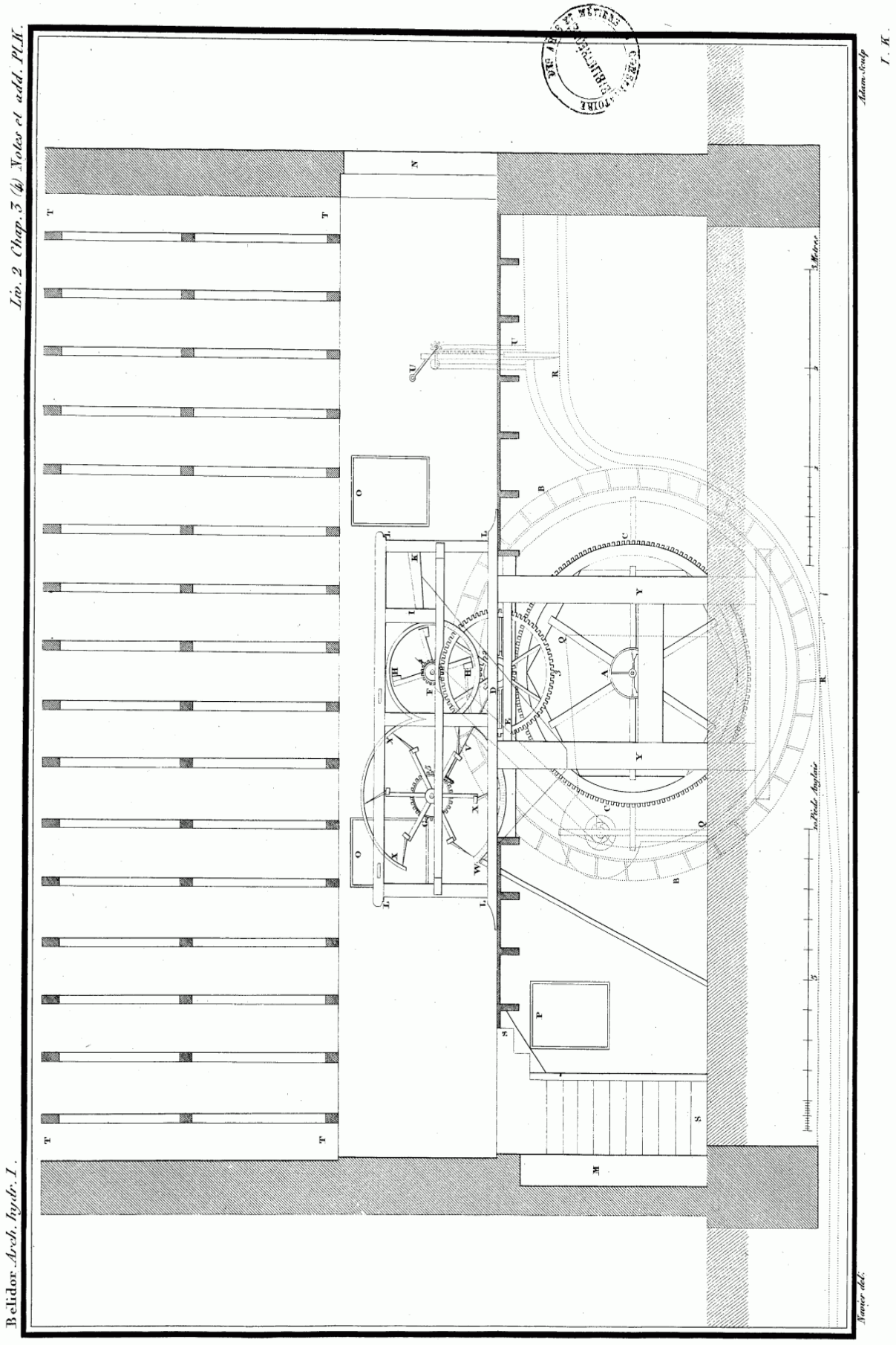
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Navier del. *Adam sculp.*

I. I.

BIBLIOTHÈQUE CONSERV



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE IV.

Des moulins à chapelet, roues à eau, et autres machines pour les épuisements (*fa*).

PARMI le grand nombre de machines qu'on a imaginées pour épuiser les eaux d'un terrain aquatique, afin de faciliter l'exécution de quelques travaux, il n'en est point de meilleur usage que les *moulins à chapelet*. On en distingue de deux sortes. La première, ceux que l'on nomme chapelets *inclinés*, qui font monter l'eau le long d'un plan incliné; la seconde, les chapelets *verticaux*, parce que l'eau monte verticalement.

Pour commencer par la description des premiers, on saura qu'il y en a de grands et de petits. Les uns et les autres sont assez semblables dans leur construction : toute la différence, c'est que les grands sont mus par des chevaux, et les petits à force de bras. Ce que nous dirons des uns pouvant s'appliquer aux autres, on jugera du premier coup-d'œil de la manœuvre de ces sortes de chapelets, en considérant le plan et le profil de celui qui est représenté sur la planche première, et dont voici la description.

Description d'un chapelet incliné, mu par un cheval.

PLANCHE 1.

729. Le plan incliné AB sert de fond à une buse dont une des extrémités A trempe dans l'eau qu'on veut épuiser, et l'autre B répond à une auge BC, placée au sommet du bâtardeau au-dessus duquel les eaux sont

(*fa*) Les machines à élever l'eau, considérées dans toute leur généralité, se divisent naturellement en deux classes : 1° les machines où l'eau est élevée au moyen d'un mécanisme auquel peut être appliqué un moteur quelconque, tel que l'action des animaux, celle d'un courant d'eau, du vent, de la vapeur; 2° les machines dans lesquelles la chute de l'eau fournie par une source est employée à élever une portion de cette eau, en sorte que l'eau même est le seul moteur que comporte la nature de la machine. Autant qu'il est possible de juger du plan adopté par Bélidor, dans la première partie de l'Architecture hydraulique, il paraît qu'il a eu l'intention de traiter dans ce chapitre des machines de la première classe, à l'exception cependant des pompes, et des machines mues par le vent et la vapeur, dont il s'occupe d'une manière spéciale dans le deuxième volume, où il traite également des machines à élever l'eau comprises dans la seconde classe. Je dois aussi renvoyer à ce volume les observations que j'aurai à faire sur ces divers sujets. Mais je ferai mention dans les notes de ce chapitre de diverses machines intéressantes appartenant à la première classe, dont l'auteur n'a point parlé, soit par omission, soit parce qu'elles n'étaient point encore inventées de son temps.

Division générale des machines à élever l'eau en deux classes. — Objet de ce chapitre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

élevées. Cette buse est couverte par un autre plan DE, accompagné de deux rebords formant une espèce de coulisse.

Le chapelet est composé d'un nombre de petites planches que l'on nomme *palettes*, unies par des chaînons, faisant ensemble une chaîne sans fin, ou si l'on veut, un chapelet dont les palettes tiennent lieu de grains.

Ce chapelet passe sur les lanternes F,G. une partie est enfermée dans la buse, et fait monter l'eau lorsque les lanternes sont mues du sens convenable; l'autre qui est à découvert descend le long de la coulisse pour aller puiser l'eau à son tour.

Quand cette machine est mue par des chevaux, on emploie un arbre IK, servant d'essieu à deux lanternes. La première G sur laquelle passe le chapelet répond à l'auge qui reçoit les eaux, et l'autre H qu'on ne peut voir dans l'élévation, parce qu'elle est cachée par la précédente, s'engrène avec un rouet LM que des chevaux attelés au palonnier N font tourner; au lieu que quand on fait agir les chapelets à force de bras, on se sert seulement de la première lanterne G que l'on accompagne de manivelles.

Je n'entre point dans le détail des parties de ce chapelet, parce que je vais en expliquer deux autres à bras, exécutés à Strasbourg, et développés sur la seconde planche. Le premier, représenté par la première et la seconde figure, est employé, de la part du magistrat, pour les ouvrages de la ville; et l'autre, exprimé par la troisième et la quatrième, sert pour les travaux des fortifications.

PLANCHE 2.

Description du chapelet incliné, mu à force de bras, exécuté à Strasbourg pour les ouvrages de la ville.

730. Le premier de ces moulins est à-peu-près construit comme le précédent, avec cette différence que la buse est découverte, parce que la coulisse qui est au-dessus est élevée à une certaine hauteur, pour donner plus de facilité au chapelet de se plier sur les lanternes, et permettre de remplacer les chaînons qui se cassent. Ces chaînons sont de bois et d'un fort bon usage, beaucoup plus commodes que s'ils étaient de fer. Quant ils viennent à manquer, en ayant de tout prêts, un homme assemble les deux bouts séparés et un autre y met un grain, par le moyen d'une petite cheville de fer qu'il arrête avec un nœud de ficelle au lieu de clavette. La chaîne étant de bois, par conséquent beaucoup plus légère que si elle était de fer, le jeu en est bien plus doux. La lanterne A qui trempe dans l'eau a 16 pouces de diamètre et 8 rayons; l'autre B qui répond au sommet du bâtardeau a 20 pouces de diamètre, et 10 rayons: de sorte que les diamètres de ces lanternes sont dans la raison du nombre de leurs rayons, afin que les palettes se rencontrent toujours en haut et en bas entre deux rayons, quoique la petite lanterne aille plus vîte que la grande. Il y a apparence que si l'on a fait une des lanternes plus petite que l'autre, c'est afin que le chapelet en descendant trouve plus d'aisance à s'ajuster avec les rayons.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

731. Les palettes ont un pouce d'épaisseur, 9 et demi de largeur sur 6 de hauteur, et 3 lignes de jeu de chaque côté. Leur distance de l'une à l'autre est de 6 pouces : elle est par conséquent égale à leur hauteur. Quant aux chaînons, ils ont deux pouces d'épaisseur sur autant de largeur. Je ne parle point des dimensions des autres parties, parce qu'on pourra en juger par les nombres qui les accompagnent.

732. Ce chapelet étant mis en mouvement à force de bras, les manivelles sont accompagnées de crossettes pour rendre la manœuvre plus facile. Un homme est appliqué à l'endroit C, tire et pousse par un mouvement horizontal, et un autre qui lui est opposé en D agit de même. Il suffit qu'ils fassent chacun un chemin de 18 pouces en arrière et autant en avant, ce qui est la grandeur du coude de la manivelle, pour agir avec aisance; au lieu que s'ils étaient appliqués immédiatement aux poignées, la grandeur du bras de levier ne ferait que leur causer plus de fatigue, puisqu'ils seraient assujettis à décrire un cercle de plus de 9 pieds de circonférence à chaque révolution.

Autre chapelet dans le goût du précédent, exécuté aussi à Strasbourg pour les ouvrages de la fortification.

PLANCHE 2. FIGURES 3 et 4.

733. Le second chapelet, quoique semblable en apparence au précédent, en est fort différent dans la composition et dans l'effet. Les palettes ont 11 pouces de largeur sur 4 de hauteur, placées à 8 pouces de distance l'une de l'autre, ayant 6 lignes de jeu de chaque côté : ainsi la buse et la coulisse ont par conséquent 12 pouces de largeur intérieurement. Les palettes sont entretenues ensemble par deux chaînes de fer, assemblées de manière à pouvoir se plier aisément sur les lanternes. Ces lanternes sont hexagones: celle d'en haut est accompagnée de manivelles, auxquelles quatre hommes sont appliqués. La partie supérieure G du chapelet répond au bâtardeau, comme on en peut juger par le bout de buse FH, qui aboutit à l'auge qui reçoit les eaux. J'ajouterai que le corps du chapelet, aussi-bien que celui des précédents, est porté par des chevalets EF, posés de distance en distance, et que dans l'usage ordinaire on observe que la pente du chapelet suive la diagonale d'un quarré, ou que l'angle, formé par l'horizon et le plan incliné, soit de 45 degrés, parce qu'on ignorait celui qui convenait au plus grand effet.

Des deux chapelets précédents, le premier épuise le double du second.

734. Des ingénieurs qui ont vu manœuvrer ces deux chapelets m'ont assuré que celui qui est employé aux ouvrages de la ville, épuisait dans le même temps plus du double de l'eau que ne faisait celui dont ils se servaient pour les fortifications ; quoique mus avec la même force, et posés sous un même angle d'inclinaison.

Il ne paraît pas qu'on ait suivi jusqu'ici aucune règle exacte pour la construction des moulins à chapelets, si on en juge par la variété des proportions qu'on a données à leurs parties, ne s'étant peut-être jamais rencontré deux machines de cette espèce parfaitement semblables. On ne peut pourtant douter qu'il n'y ait une construction la plus parfaite: l'exemple

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des deux chapelets dont je viens de parler en est une preuve bien convaincante, puisque celui qui épuise le double de l'autre dans le même temps, et qui tient peut-être cet avantage du hasard plutôt que du raisonnement, doit plus approcher de cette perfection. Cherchons donc à découvrir d'où cela vient, afin d'en tirer une règle générale qui ne laisse rien à desirer sur ce sujet.

La perfection des chapelets inclinés se réduit à placer les palettes à une distance égale à leur hauteur, et à incliner le plan sous un angle de 24 degrés 21 minutes.

PL. 1, FIG. 1.

735. Pour cela je considère qu'il faut savoir à quelle distance les *palettes* doivent être les unes des autres, en égard à leur hauteur, et quel est l'angle que doit former le plan incliné avec l'horizon, afin que la puissance qui met le chapelet en mouvement épuise le plus d'eau qu'il est possible dans un certain temps; n'y ayant point de machine qui ne soit susceptible d'un plus grand effet, comme on a dû en juger par les exemples précédents.

Pour savoir l'intervalle qui doit être entre deux palettes, nous supposerons que sur le plan incliné AC, il y a un bout de chapelet tiré de bas en haut par la puissance P, agissant selon une direction SP parallèle au plan. S'il n'y avait que la seule palette ED pour soutenir l'eau qu'on veut attirer, on en aurait alors une quantité exprimée par un prisme qui aurait pour base le triangle DEF, et pour hauteur la longueur de la palette; et comme cette dernière dimension demeure constante, qu'il y ait une ou plusieurs palettes, nous n'aurons égard qu'à la superficie du triangle DEF, dont le côté EF parallèle à l'horizon marque le niveau de l'eau. Si l'intervalle des deux palettes immédiatement de suite, comme ED et OQ, était exprimé par la ligne DQ, on aurait un espace vuide FQ, qui se trouvant répété dans chaque cellule DEOQ ne ferait qu'en diminuer le nombre fort mal-à-propos. Ainsi prenant la palette NF à la place de OQ, la cellule DENF sera préférable à la précédente, parce qu'on pourra en avoir un plus grand nombre, dans la longueur du plan AC, qui feront monter une plus grande quantité d'eau à-la-fois.

Si l'on divise la base DF en plusieurs parties égales, comme en trois, pour avoir autant de cellules DL, GM, HN, il est constant qu'elles contiendront plus d'eau toutes ensemble, que la seule DENF; car si l'on prend la superficie du trapèze DEIG pour exprimer la quantité qui sera dans chacune, on pourra dire que l'eau que contiendra la cellule DN sera à celle que contiendront les trois autres prises ensemble, comme le quarré du côté DF est au triple de la différence du même quarré au quarré GF, le trapèze DEIG étant la différence des triangles semblables DEF et GIF. Or le côté DF étant de trois parties, et GF de deux, leurs quarrés seront 9 et 4, dont la différence est 5: par conséquent le contenu de la cellule DENF sera à celui des trois autres DL, GM, HN, comme 9 est à 15; d'où il suit que plus les palettes seront près les unes des autres, et plus le chapelet épuisera d'eau dans le même temps. Cependant comme

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

elles doivent être à une distance convenable pour que la chaîne qui les lie ensemble puisse aisément se plier sur les lanternes, je ne crois pas qu'on puisse mieux en régler l'intervalle qu'en le faisant égal à la hauteur des palettes mêmes.

C'est ainsi qu'on a construit le chapelet dont j'ai dit qu'on se servait à Strasbourg pour les ouvrages de la ville. Il n'est donc pas étonnant qu'il élève sous un même angle d'inclinaison plus du double d'eau que celui qui est en usage pour les fortifications, les palettes de ce dernier étant éloignées d'une distance double de leur hauteur; ce qui fait voir qu'avant d'en venir à l'exécution, on ne saurait examiner de trop près les parties qui doivent composer une machine, afin de leur donner les proportions les plus parfaites qu'il est possible.

Manière de calculer la résistance qu'oppose l'eau élevée par un chapelet incliné. Pl. 1, Fig. 2.

736. Pour faire le calcul de cette machine, nous supposerons que le vaisseau AF représente une cellule avec autant d'eau qu'elle peut en contenir lorsque le plan incliné fait avec l'horizon un angle de 24 degrés 21 minutes, ou lorsque la hauteur de ce plan est les $\frac{2}{5}$ de sa longueur (392). Cela posé, si l'on prolonge AD de la longueur AT égale à la perpendiculaire AM, que l'on tire BT, que l'on prenne BV égal à ND, menant VS parallèle à AT, on verra en se rappelant ce qui a été enseigné dans l'article 390 que la puissance P sera en équilibre avec la poussée de l'eau contenue dans le vaisseau, si cette puissance est exprimée par le poids d'un prisme d'eau qui aurait pour base le trapèze AVST, et pour hauteur la ligne BE ou AH.

Nommant XY a, XZ b, YZ c, AB ou BC d, et BE ou CF f: on aura (à cause des triangles semblables XYZ, ABM, BCN) $XZ=b:ZY=c::BC=d:CN=\frac{cd}{b}$, par conséquent $CD-CN=ND=\frac{d}{b}(b-c)=BV$. Ainsi VA sera $\frac{cd}{b}$. D'autre part $XY=a:XZ=b::AB=d:AM$ ou $AT=\frac{bd}{a}$, et les triangles SBV et TBA donnent encore $BA=d:AT=\frac{bd}{a}::BV=\frac{d}{b}(b-c):VS=\frac{d}{a}(b-c)$.

Présentement, pour avoir la superficie du trapèze, il faut ajouter ensemble les valeurs de SV et de TA qui donnent $\frac{d}{a}(2b-c)$, qu'il faut multiplier par la moitié de AV, c'est-à-dire par $\frac{cd}{2b}$. On aura $\frac{cd^2}{2ab}(2b-c)$, qu'il faut encore multiplier par $f=BE$. Il viendra $\frac{cd^2f}{2ab}(2b-c)$ pour l'expression de solide d'eau équivalent à la puissance P, qu'on peut réduire en supposant $2b-c=n$: il vient $\frac{ncd^2f}{2ab}$, dont on aura le poids en disant: comme

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

1728 pouces cubes est à 70 liv, ainsi $\frac{ncd^2f}{2ab}$ est à $\frac{35.ncd^2f}{1728.ab}$, dont il sera aisé d'avoir la valeur, comme on le va voir.

Estimation de la puissance qui fait agir le chapelet du Magistrat de Strasbourg. Pl. 1, Fig. 2.

737. Si l'hypoténuse du triangle XYZ est divisée en 10 parties égales, on aura XY$=a=5$, YZ$=c=2(393)$, XZ$=b=\frac{23}{5}$; et si, pour nous conformer aux dimensions du premier chapelet (730), on suppose BA ou BC$=d=$ 6 pouces, et BE$=f=$ 9 pouces $\frac{1}{2}$, on trouvera que $\frac{35.ncd^2f}{1728.ab}$ donnent à-peu-près 4 liv. $\frac{1}{3}$ pour la force que doit avoir la puissance pour être en équilibre avec la poussée de l'eau d'une cellule. Ainsi il ne reste plus qu'à savoir la quantité de cellules qui porteront sur le plan incliné, pour juger de combien cette puissance doit être augmentée.

Supposant le plan incliné de 8 pieds de hauteur, sa longueur sera de 20 pieds ou 240 pouces, qui étant divisés par 7 pouces, intervalle d'une palette à l'autre, compris l'épaisseur d'une de ces palettes, donneront 34 cellules, qui opposeront ensemble une résistance de 147 liv. agissant aux extrémités des rayons de la lanterne supérieure, qui ont chacun 10 pouces. Ainsi, multipliant le nombre précédent par 10, et divisant le produit par le coude de la manivelle de 18 pouces, il viendra environ 82 liv. pour la puissance appliquée à la manivelle, en faisant abstraction du frottement, qui sera peu de chose : car le chapelet étant de bois, sa pesanteur spécifique sera à-peu-près égale à celle de l'eau qu'il contient. Le frottement n'aura guère lieu non plus sur la partie supérieure, parce que glissant sur un plan incliné, elle est naturellement emportée en bas. Ainsi l'on voit que quatre hommes pourront aisément faire manœuvrer ce chapelet avec une vîtesse plus grande que celle de 1000 toises par heure. Examinons présentement la quantité d'eau qu'ils pourront épuiser dans le même temps.

Calcul de la quantité d'eau que le même chapelet peut épuiser par heure.

738. Chaque cellule, selon les dimensions que nous leur avons données doit contenir une quantité d'eau ABEHOGDN de 329 pouces cubes, d'où retranchant 24 pouces pour la place occupée par la chaîne, reste 305 pouces. Comme il y a 10 rayons à la lanterne, ils attireront 10 cellules à chaque tour de manivelle, par conséquent 3050 pouces cubes d'eau; et comme les manœuvres peuvent lui faire faire au moins 1500 tours par heure, parce qu'étant appliqués aux crosses ils n'auront guère que 4 pieds de vîtesse par chaque tour, ce chapelet épuisera donc 2647 pieds cubes dans le même temps à une hauteur de 8 pieds.

739. Je suis persuadé que l'estimation que nous venons de faire du produit de cette machine est beaucoup au-dessous de ce qu'elle peut produire en effet : car nous avons supposé que la manivelle ne ferait que 1500 tours par heure, au lieu que si on en juge par l'expérience, elle en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

peut faire beaucoup plus, ayant remarqué dans les épuisements que l'on a faits pour la construction de quelques écluses du canal de Picardie, que les manivelles des chapelets verticaux qu'on y a employés faisaient jusqu'à 3000 tours dans le même temps. Il est vrai que ceux qui les faisaient agir étaient rélevés d'heure en heure, et que les manivelles n'avaient que 15 pouces.

Ayant calculé aussi la quantité d'eau que pouvait fournir l'autre chapelet, dont j'ai dit que les ingénieurs se servaient à Strasbourg, j'ai trouvé qu'en faisant abstraction comme au précédent de ce qu'il s'en pouvait perdre, il n'en pouvait épuiser qu'environ 1238 pieds, toutes choses d'ailleurs égales, ce qui est au-dessous de la moitié de 2647 que nous venons de voir que devait donner le précédent, et ce qui s'accorde avec l'expérience qui en a été faite (734) (*fb*).

(*fb*) Il y a diverses observations à faire sur le contenu des articles précédents. La première est que la solution de l'art. 392, sur laquelle l'auteur s'appuie art. 736 pour fixer l'inclinaison sous laquelle le plan incliné montera la plus grande quantité d'eau possible, étant inexacte, comme on l'a remarqué dans la note (*ca*), l'inclinaison qu'il lui donne ici n'est véritablement pas la plus avantageuse. Il faudrait pour cela, conformément à cette note, et en supposant comme Bélidor l'intervalle des palettes égal à leur hauteur, que la hauteur du plan incliné fût les 0,77 de sa base, ou les $\frac{3}{5}$ environ de sa longueur, au lieu des $\frac{2}{5}$. Je remarquerai ensuite qu'admettre que 4 hommes feront faire 1500 tours par heure à une manivelle de 18 pouces ou $0^m,49$ de rayon, en exerçant une pression de 82 liv. $= 40^k$, c'est supposer que chaque homme développera dans une heure une quantité d'action $= 1500 \times 0^m,98.\pi \times 10^k = 46180^{k \times m}$. D'après le tableau de la page 396, un homme appliqué à une manivelle ne produit dans la journée qu'une quantité d'action $= 172800^{k \times m}$. A la vérité il est vraisemblable que les hommes agissant sur des crosses, comme le suppose l'auteur, peuvent fournir une quantité d'action un peu plus considérable, s'il y a un volant sur l'axe de la manivelle; mais il est évident néanmoins que ces hommes, en dépensant la quantité d'action indiquée par l'auteur, ne pourraient guère travailler que 4 heures par jour. Si on voulait les faire travailler plus longtemps, il faudrait en augmenter le nombre.

Rectification des résultats admis dans le texte sur la meilleure inclinaison du chapelet incliné, et la force qu'il lui faut appliquer.

Enfin j'observerai qu'il est sans doute très-convenable de disposer un chapelet de manière qu'il monte dans un temps donné le plus grand volume d'eau possible, puisque c'est tirer le meilleur parti de la dépense qu'on a faite pour établir cette machine. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'en montant plus d'eau, on doit nécessairement employer plus de force (malgré l'assertion faite par l'auteur au commencement de l'art. 734), en sorte qu'il y a un autre point de perfection, beaucoup plus important en général que le précédent, qu'il faut tâcher d'atteindre, et qui consiste à faire en sorte que l'effet de la machine soit le plus grand possible, par rapport à la quantité d'action qui est dépensée pour la faire mouvoir (voyez le § 3 de l'addition à la du fin 1^er^ livre).

Théorie du chapelet incliné.

Nommons H la hauteur du plan incliné, ou la hauteur à laquelle l'eau est éle-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Description d'un chapelet vertical pour les épuisements.

740. Il me reste à parler des chapelets verticaux, sur lesquels il y a peu de chose d'intéressant à dire, leur maximum se réduisant à celui

---

vée; M la masse de l'eau que les palettes retiennent constamment sur ce plan, en sorte que le poids de cette eau sera Mg; α l'angle du plan avec l'horizon, ce qui donne $\frac{H}{sin.\,\alpha}$ pour sa longueur; V la vîtesse imprimée aux palettes et aux fuseaux de la lanterne; P l'effort qu'il faudra appliquer à ces fuseaux. Je ferai abstraction des frottements et des pertes d'eau résultant du jeu qu'il faut laisser au pourtour des palettes, et j'emploierai le principe établi dans les § 7 et 8 de la note (*ai*), d'après lequel il faut que dans toute machine, la somme des quantités d'action imprimées dans un sens, moins celle des quantités d'action imprimées en sens contraire, pendant un temps donné, soit égale à la moitié de la somme des forces vives qui ont été acquises ou perdues pendant ce même temps. Supposant le mouvement du chapelet parvenu à l'uniformité, je remarquerai donc que pendant l'intervalle de temps qu'une palette emploie à parcourir la longueur du plan incliné, 1° il se dépense aux fuseaux de la lanterne une quantité d'action $P.\frac{H}{sin.\,\alpha}$; 2° qu'une masse d'eau M, dont le poids est Mg, s'élève verticalement de la hauteu H, en sorte que son élévation représente une quantité d'action $mg.H$; 3° qu'une masse d'eau M quitte la machine à l'extrémité supérieure du plan incliné après avoir acquis la vîtesse V et la force vive MV^2; 4° qu'il est impossible d'évaluer rigoureusement la force vive que fait perdre le choc des palettes contre l'eau, quand elles tournent autour de la lanterne inférieure, mais qu'on en tiendra compte d'une manière suffisamment approchée, en supposant que l'effet de ce choc est de faire entrer l'eau dans le chapelet en lui imprimant brusquement la vîtesse V, ce qui occasionnerait pendant l'intervalle de temps indiqué ci-dessus une nouvelle perte de force vive$=MV^2$. D'après cela, l'équation du mouvement de la machine sera $P.\frac{H}{sin.\,\alpha}-Mg.H=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}MV^2$.

On en déduit, pour l'expression de la quantité d'action dépensée pendant l'intervalle de temps que l'on considère, $P.\frac{H}{sin.\,\alpha}=MV^2+Mg.H$; et comme l'effet utile produit pendant le même intervalle est $Mg.H$, il s'ensuit que le rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée est $\frac{Mg.H}{P.\frac{H}{sin.\,\alpha}}=\frac{gH}{gH+V^2}$. La meilleure disposition de la machine est celle qui rendra la valeur de ce rapport la plus grande possible. Comme elle est indépendante de l'angle α, on voit d'abord que l'inclinaison du plan incliné est indifférente à la proportion de l'effet utile à la quantité d'action dépensée, et par conséquent qu'il est convenable d'adopter l'inclinaison sous laquelle la quantité d'eau élevée est le plus considérable. On voit ensuite que pour que l'effet utile soit le plus grand possible, la vîtesse V doit être infiniment petite. Si cette dernière condition était remplie, l'effet utile serait égal à la quantité d'action dépensée. Toutes choses égales d'ailleurs, le rapport augmente un peu avec la hauteur à laquelle on élève l'eau.

Condition à remplir pour obtenir le plus grand effet possible.

Effet utile du

Dans la pratique la vîtesse V ne peut pas être infiniment petite, et un mouve-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la quantité de mouvement des hommes qui les font agir. Celui que j'ai développé sur la planche troisième est pareil à ceux qui ont été em-

---

ment trop lent tendrait même à augmenter beaucoup les pertes d'eau. Mais cette circonstance n'occasionne en général qu'une perte de quantité d'action peu sensible. En effet supposons le cas où l'on éleverait l'eau à 2^m de hauteur, et où l'on imprimerait aux palettes une vîtesse de $1^m,5$ par seconde. En faisant dans la formule $\frac{gH}{gH+V^2}$, $H=2^m$, $V=1^m,5$ et $g=9^m,809$, on aura pour le rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée 0,897. On ne perdrait donc, par l'effet de la vîtesse imprimée à l'eau, qu'un peu plus du $\frac{1}{10}$ de la quantité d'action fournie par le moteur; et la perte serait beaucoup moindre, si la hauteur à laquelle on élève l'eau était plus considérable. chapelet incliné dans la pratique.

Il y a dans le chapelet incliné d'autres causes qui occasionnent une plus grande perte de force, et que la théorie précédente ne prend point en considération: ce sont principalement les frottements, et les pertes d'eau au pourtour des palettes. L'expérience seule peut faire apprécier leur influence sur le produit de la machine. D'après une observation faite lors de la fondation du pont de la Charité-sur-Loire (Gauthey, *Traité de la construction des ponts*, t. 2, p. 234) un chapelet incliné ayant $6^m,82$ de longueur entre les centres des deux lanternes, manœuvré par six hommes relayés de manière à ne travailler que 6 heures sur 24, élevait par heure $123^{mc},4$ d'eau à $3^m,25$ de hauteur. Ainsi, comme le mètre cube d'eau pèse 1000^k, l'effet utile produit par chaque homme dans ses six heures de travail, était environ $68000^{k\times m}$. Ces hommes agissaient sur des manivelles auxquelles ils faisaient faire 30 tours par minute. En évaluant la quantité d'action qu'ils dépensaient d'après le tableau de la p. 396 à $172800^{k\times m}$ on voit que le rapport de l'effet utile produit par la machine à la quantité d'action dépensée était ici $\frac{68000}{172800}=0,39$.

Dans les travaux de la fondation du pont d'Orléans (Perronet, *Description des projets et de la construction des ponts de Neuilly, etc.*, t. 2, p. 21), deux chapelets inclinés étaient mus par un seul manège, auquel étaient attelés 12 chevaux travaillant 8 heures sur 24. Ils élevaient par heure $134^{mc},71$ d'eau à 5^m de hauteur, ce qui donne pour l'effet utile obtenu en 8 heures pour chaque cheval $449000^{k\times m}$. La quantité d'action qu'il dépensait pendant ce même intervalle était, suivant le tableau de la p. 396, $1166400^{k\times m}$: ainsi on a d'après cela pour le rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée $\frac{449000}{1166400}=0,38$.

Perronet (*idem*, p. 18) donne le produit d'un chapelet incliné mu par une roue à aubes. Mais comme la vîtesse du courant n'a point été observée, on ne peut déduire aucun résultat assuré de cette expérience. Il paraît toutefois, d'après les deux précédentes, que l'effet utile dans le chapelet incliné est au-dessous des $\frac{2}{5}$ de la quantité d'action dépensée, en sorte que cette machine offre à cet égard une grande infériorité sur d'autres appareils employés aux épuisements des fondations, comme on le verra dans les notes suivantes.

Quelques constructeurs observant que la force vive possédée par l'eau, à l'instant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ployés au canal de Picardie, en ayant moi-même pris les dimensions. Comme la manœuvre en est fort aisée, et toutes les parties bien proportionnées, il m'a paru, après l'avoir examiné sérieusement, que je ne devais point hésiter de le donner pour modèle : en voici le détail.

PLANCHE 3. FIGURES 4 et 5.

Le tuyau montant ABCD a extérieurement 13 pouces en quarré sur 9 pieds 6 pouces de hauteur de C en E ; mais on peut le faire plus haut si la nécessité y oblige. Ce tuyau a intérieurement 5 pouces de diamètre, et doit être percé bien droit. La face de derrière est plus haute que les autres de la partie DE de 16 pouces, afin de pouvoir y attacher le sabot AFGE, qui n'est autre chose qu'une espèce de caisse percée de trous, placée dans l'eau qu'on veut élever. A travers cette caisse passe un boulon, sur lequel tourne un rouleau P pour faciliter l'entrée des grains Q dans le tuyau.

---

où elle arrive à l'extrémité supérieure du chapelet, est entièrement perdue pour l'effet utile, ont imaginé d'en tirer parti en faisant choquer cette eau contre les aubes d'une roue qui fait tourner un second chapelet. Le choc de l'eau élevée par ce second chapelet serait ensuite employé de la même manière à en faire tourner un troisième. Le calcul fait ci-dessus, montre que cette idée ne peut conduire à des résultats bien utiles. En effet, d'une part la force vive possédée par l'eau, à l'instant où elle arrive à l'extrémité supérieure du chapelet, ne constitue dans les cas ordinaires qu'une faible partie des pertes de force que la machine fait éprouver. D'autre part, le choc de cette eau contre les aubes d'une roue ne peut, d'après la note (*dn*), transmettre à cette roue que le $\frac{1}{3}$ au plus de la force vive possédée par l'eau, en sorte que le second chapelet n'utilisera qu'environ le $\frac{1}{9}$ de cette force vive. Il paraît donc que l'emploi de ce second chapelet est tout-à-fait superflu, à moins que l'on n'imprime exprès à l'eau élevée par le premier, une vîtesse beaucoup plus grande qu'il n'est nécessaire et d'usage de le faire.

Quelles doivent être les dimensions des palettes pour qu'il y ait la moindre perte d'eau possible.

J'observerai en finissant cette note, pour les personnes qui aiment à raisonner tous les détails des machines, que les pertes d'eau qui se font au pourtour des palettes étant une des principales causes du peu d'avantage du chapelet incliné, il faut tâcher de les diminuer autant qu'il est possible, ce qu'on peut faire en réglant convenablement le rapport entre la hauteur et la longueur des palettes. Soit b la hauteur, l la longueur des palettes, et δ la distance qui se trouve entre elles et les parois de la buse. L'aire des palettes sera bl, l'aire de la section de la buse $bl+(2b+l)\delta+2\delta^2$, et leur différence $(2b+l)\delta+2\delta^2$. Or, toutes choses égales d'ailleurs, les pertes d'eau sont proportionnelles à cette différence, dont l'expression, en posant $bl=\Omega$, prend la forme $\left(\frac{2\Omega}{l}+l\right)\delta+2\delta^2$. En différenciant par rapport à l, et égalant à zéro, on trouve pour la valeur correspondante au minimum $l^2=2\Omega$, d'où $l=2b$. On en conclut que les pertes d'eau seront les moindres possibles, lorsque la longueur des palettes sera double de leur hauteur. Cette remarque peut s'appliquer à la disposition des aubes, pour les roues contenues dans un coursier.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Contre les faces extérieures du tuyau sont attachés à droite et à gauche les supports HK de l'essieu RS du *hérisson* TV accompagnés d'ais, pour former le canal BKLM, qui conduit l'eau de l'autre côté du bâtardeau.

Le *hérisson* est composé d'un moyeu de 16 pouces de diamètre dans le milieu, réduit à 15 par ses extrémités, fortifié de deux frettes de 12 lignes de largeur sur 5 d'épaisseur. Ce moyeu est hérissé de six *griffes* de fer, ayant 7 pouces de largeur par le haut réduites à 3 pouces 4 lignes à la racine, et 7 lignes d'épaisseur, échancrées dans le milieu sur la hauteur de 5 pouces pour faciliter le jeu de la chaîne. L'essieu a 18 lignes en quarré, et est arrondi à la sortie du moyeu. Les manivelles ont 15 pouces de coude et les poignées 40 pouces, pour que deux hommes puissent y être appliqués de front.

Les *grains* out 5 pouces de hauteur, y compris la *tige* et la *queue*: leur diamètre est de 4 pouces 10 lignes. Sur leur plan on pose une ou deux rondelles de cuir, dont le diamètre est de 5 pouces, c'est-à-dire égal à celui du tuyau montant. Sur ces rondelles est posée une plaque de fer servant à serrer les cuirs, par le moyen d'une *clavette* qui traverse la tige.

741. L'intervalle XY qui se trouve entre l'extrémité de la queue des deux grains est de 30 pouces. Cette partie pèse 10 liv. : l'ayant aussi pesée dans l'eau, j'ai trouvé que son poids était diminué d'une livre quatre onces (624), ce qui est le poids du volume d'eau dont elle occupe la place.

Calcul de la quantité d'eau qu'un chapelet vertical peut épuiser par heure.

742. Pour calculer le produit de ce chapelet, on saura que quatre hommes agissant sans interruption pendant une heure, après laquelle ils étaient relevés par quatre autres, faisaient faire au moins 55 révolutions aux manivelles dans une minute (739). Or, comme l'intervalle d'une griffe à l'autre pris à l'endroit où pose la chaîne est de 13 pouces à chaque tour du hérisson, le chapelet fera un chemin de 6 pieds et demi, ce qui répond à une vîtesse de 357 pieds $\frac{1}{2}$ par minute. Cette vîtesse étant la même que celle de l'eau qui monte dans le tuyau, il suit que le chapelet en épuiserait par minute une colonne de 5 pouces de diamètre sur 357 pieds $\frac{1}{2}$ de hauteur, qui pèse 3422 liv., s'il n'occupait pas une partie de cette colonne.

Prévenu que 2 pieds $\frac{1}{2}$ du chapelet occupent la place d'une livre et 4 onces d'eau (741), divisant 357 pieds $\frac{1}{2}$ par 2 pieds $\frac{1}{2}$, on aura 143, qui étant multipliés par une liv. 4 onces, donnent environ 179 liv. pour le poids de l'eau déplacée par le chapelet pendant une minute, lesquelles étant soustraites de 3422 liv., reste 3243 liv. d'eau qu'il épuisera dans le même temps, ce qui revient à-peu-près à 2780 pieds cubes d'eau par heure élevée à 8 pieds.

A quoi se réduit la puissance qui

743. Quant à la puissance qui doit faire jouer ce chapelet, on voit

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fait agir le chapelet précédent.

qu'elle dépend de la hauteur du tuyau montant, c'est-à-dire de la hauteur où l'on élèvera l'eau, puisque, sans avoir égard au frottement, elle sera égale au poids de la colonne comprise dans le tuyau, qui est ici d'environ 72 liv., déduction faite du volume qu'occupe le chapelet.

744. L'intervalle du centre de l'essieu à la ligne de direction que parcourt la chaîne étant 10 pouces, et la manivelle en ayant 15 de coude, le poids sera à la puissance dans le rapport de 3 à 2; ce qui montre que les quatre hommes ne soutenaient qu'environ 48 liv. d'eau, au lieu que selon la règle ordinaire, ils auraient pu aisément en soutenir cent. Mais en récompense ils avaient une vîtesse bien plus grande que celle de 1000 toises par heure, ou de 100 pieds par minute; car la manivelle ayant 15 pouces de coude, ils décrivaient à chaque tour une circonférence de 7 $\frac{6}{7}$ pieds, ce qui répond à une vîtesse de 432 pieds par minute.

745. Si l'on veut que ce chapelet épuise l'eau à une hauteur au-dessus de 8 pieds, et conserver la même quantité de mouvement à la puissance, il faut diminuer la superficie du cercle du tuyau à proportion qu'on augmentera sa hauteur. Par exemple, pour élever l'eau à 24 pieds, il faut multiplier le quarré du diamètre qui est 25 par 8 pieds, diviser le produit par 24, on trouvera 8 pouces $\frac{1}{3}$ pour le quarré du diamètre réduit: et comme la quantité d'eau que les quatre manœuvres épuiseront par heure sera aussi réduite dans la même proportion, on voit qu'ils n'en éleveront plus que 929 pieds. Ce n'est pas qu'à la rigueur les mêmes ne puissent en élever 2780 à cette hauteur : ayant fait mention dans l'article 680 d'un autre chapelet où chaque manœuvre employait une force de 35 liv., quoiqu'ils eussent la même vîtesse que les précédents. Mais comme le travail en était forcé, il ne conviendrait pas de se régler là-dessus.

Quant au frottement qui peut se rencontrer dans cette machine, il n'y en a d'autre que celui de son essieu, qui sera peu de chose à cause de la grande différence des bras de leviers (250), car je compte pour rien celui que peut causer contre l'intérieur du tuyau le renflement des cuirs qui accompagnent les grains, parce que, agissant sur une surface verticale, il ne mérite pas qu'on en tienne compte (227) (*fc*).

Rectification des assertions et calculs de l'auteur sur le chapelet vertical.

(*fc*) L'auteur est ici dans l'erreur, et il est étonnant qu'il renvoie à l'art. 127 avec lequel son assertion actuelle est en contradiction, puisqu'il reconnaît dans cet article qu'il y a un frottement de la part des pistons contre les parois du corps de pompe, circonstance analogue à ce qui a lieu dans les chapelets verticaux. Le frottement y est toutefois beaucoup moins considérable que dans les pompes, les patenôtres ou pistons devant glisser presque librement le long des parois de la buse. Quant au résultat établi art. 742 pour l'évaluation du produit d'un chapelet, si quatre hommes élèvent 2780 pi. cub. = 95^{mc}, 29 d'eau à 8 pi. = 2^{m}, 6 de hauteur

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

J'ai ouï-dire aux entrepreneurs du canal de Picardie, qu'un chapelet tout équipé, tel que le précédent, leur coûtait 150 liv.

---

en une heure, chacun aura produit pendant ce temps un effet utile $= \frac{1}{4}.2^m, 6 \times 95290^k = 61940^{k \times m}$; et, eu égard à la force consommée inutilement par l'effet des frottements et pertes d'eau, cet effet utile pourra correspondre à une quantité d'action équivalente à environ $90000^{k \times m}$. Mais d'après le tableau de la page 396, un homme travaillant 8 heures par jour sur une manivelle ne fournit dans sa journée qu'une quantité d'action $= 172800^{k \times m}$, et par heure $21600^{k \times m}$. En supposant même qu'il ne travaillât que 6 heures par jour, la quantité d'action produite en une heure ne serait que de $28800^{k \times m}$, quantité qui n'est pas le tiers de celle indiquée par l'auteur. Ainsi, comme il n'est pas d'usage de faire travailler les manœuvres moins de 6 heures par jour, il est évident que lors de l'observation rapportée par Bélidor, leur travail était forcé, et le produit de la machine considérablement exagéré. Rien n'est plus propre que cette observation pour montrer à quelles erreurs on s'expose en évaluant le produit des machines, ou l'action des moteurs animés, d'après des expériences isolées qui n'ont duré que peu de temps. Cette évaluation ne peut être obtenue avec exactitude, qu'au moyen d'une longue suite d'observations faites à l'insu des ouvriers.

Théorie mécanique du chapelet vertical.

La théorie mécanique du chapelet vertical s'établit d'ailleurs par les mêmes considérations que celle du chapelet incliné (voyez la note précédente), et le résultat est le même, c'est-à-dire que le maximum d'effet a lieu théoriquement quand la vîtesse est infiniment petite, et est égal alors à la quantité d'action dépensée.

Effet utile du chapelet vertical dans la pratique.

A l'égard de l'effet qu'on obtient de cette machine dans la pratique, je crois que parmi les diverses expériences dont elle a été l'objet (Gauthey, *Construction des ponts*, t. 2, p. 237), celles de M. Soyer méritent le plus de confiance, et en conséquence qu'on doit admettre qu'un homme peut élever dans un jour au moyen d'un chapelet vertical 110 à 120 mèt. cubes d'eau à un mètre de hauteur, ou produire un effet utile moyennement égal à $115000^{k \times m}$. Ce résultat me paraît être le véritable produit moyen, quoique il soit aisé d'en obtenir pour quelque temps un plus grand, en excitant les ouvriers. La quantité d'action journalière d'un homme appliqué à une manivelle étant supposée de $172800^{k \times m}$, le rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée serait ici 0,66. D'après une expérience de M. Soyer, il paraît que dans un chapelet dont la manivelle fait 20 à 25 tours par minute, le volume d'eau élevé est à celui qui le serait s'il n'y avait point de pertes entre les patenôtres et la buse, à-peu-près dans le rapport 0,64: quand la manivelle fait 47 tours par minute, la perte est presque réduite à rien.

On voit que dans la pratique le chapelet vertical est fort supérieur au chapelet incliné. Cette différence doit provenir en grande partie des pertes beaucoup plus considérables auxquelles le chapelet incliné donne lieu, eu égard à ce que les palettes y flottent dans l'eau sans être serrées contre les parois du tuyau où elles se meuvent, et à ce qu'elles parcourent un plus long espace.

Perfectionnements dont le chapelet vertical dé-

La construction indiquée dans les fig. 4 et 5 de la pl. 3, qui a été généralement adoptée, n'est pas la plus convenable pour le chapelet vertical, les anneaux de la chaîne et les patenôtres qui pendent dans le bas étant sujets à s'accrocher, et ne

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Description d'un autre chapelet vertical, exécuté à Marseille.

Planche 4. Figures 3 et 5.

746. Pour faciliter la manœuvre des chapelets verticaux, on les appuie contre un échafaud, sur lequel sont placés ceux qui les font agir, comme on en peut juger par la cinquième figure de la planche quatrième, qui exprime l'élévation d'un moulin à chapelet, dont on se sert à Marseille pour épuiser les eaux de la forme. Deux forçats le font aller pendant une heure, après quoi ils sont relevés par deux autres.

La troisième figure représente le profil du même chapelet, qui diffère un peu du précédent, en ce que les grains qu'on voit situés différemment aux endroits C, D, E, sont faits en forme de godets garnis de cuirs, pour empêcher que l'eau ne tombe à mesure qu'on l'élève. Cette machine ne comprenant rien dont on ne puisse juger du premier coup-d'œil, je ne m'y arrêterai pas davantage.

Comme on a été plus attentif à mettre dans un certain arrangement les figures relatives à ce chapitre, afin d'occuper la capacité de chaque planche, qu'a réunir celles qui appartenaient à un même sujet, il est arrivé que différentes sortes de chapelets se trouvent accompagnées d'autres machines propres aux épuisements: mais pour ne point interrompre l'ordre naturel, je continuerai ce qui me reste à dire sur les chapelets, après quoi je reprendrai ce que j'aurai laissé en arrière.

Autre chapelet mis en mouvement par un courant.

Pl. 4, Fig. 1.

747. Les moulins à chapelet ne sont pas seulement en usage pour épuiser les eaux d'un terrain sur lequel on veut bâtir, on peut aussi s'en servir pour élever l'eau d'une source dans un réservoir supérieur à un jardin, afin d'y faire naître des eaux jaillissantes, ou pour la tirer du

---

crit par l'auteur est susceptible.

Planche 3. Figures 4 et 5.

se trouvant pas bien dirigés à leur entrée dans le tuyau, en sorte que les manœuvres sont souvent obligés de tourner en sens contraire pour dégager la chaîne, qui d'ailleurs casse assez souvent.

On remédie à ces défauts en plaçant au bas du chapelet, au lieu du rouleau P, un hérisson pareil à celui qui est à l'extrémité supérieure, de manière que la chaîne étant constamment tendue sur ces deux hérissons est obligée à se mouvoir d'une manière parfaitement régulière; et en employant au lieu de la chaîne ordinaire composée d'anneaux courbés et soudés, la chaîne connue sous le nom de *chaîne de montre*, qui se prête encore mieux à passer sur les hérissons, et qui est beaucoup moins sujette à casser. On peut aussi, pour mettre la chaîne à l'abri de tout accident et assurer davantage la régularité de son mouvement, enfermer la partie qui descend dans une seconde buse semblable à la première, mais un peu plus large, afin qu'il n'y ait pas de frottement. C'est un chapelet ainsi perfectionné qui est désigné sous le nom de *chapelet anglais* dans les *Expériences sur la main-d'œuvre de différents travaux*, etc. par M. Boistard, p. 63, où l'on assure que cette machine marche sans interruption, et peut servir une campagne entière sans exiger des réparations. Le dessin du chapelet vertical donné par Gray dans l'*Experienced millwright*, pl. 44, sous le nom de *chain pump*, est aussi conforme à ces indications.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

fond d'un puits pour l'arrosement. Alors ils diffèrent des précédents en ce que, au lieu de grains, on se sert de pots de grais ou de petits barillets, qui agissent librement sans être enfermés dans un tuyau. En voici un exemple, exprimé par la figure première de la planche quatrième.

On suppose que l'eau d'une source ou d'un ruisseau vient choquer une roue à cuillère B D, qui tourne horizontalement, et qui peut avoir 6 pieds de diamètre; que cette roue a pour essieu un arbre vertical A B, tournant dans une crapaudine C, ayant au sommet une lanterne G de 18 pouces de diamètre, accompagnée de 12 fuseaux; que cette lanterne s'engrène avec 36 dents d'un rouet H de 4 pieds $\frac{1}{2}$ de diamètre : ainsi il faudra que la roue fasse trois tours pour en faire faire un au rouet. L'essieu horizontal E F est commun à une roue I de même diamètre accompagnée de chevilles K, tant soit peu inclinées, pour que le chapelet M ne s'écarte pas du chemin qu'il doit suivre. Ce chapelet est composé de deux cordes, auxquelles sont attachés des pots de terre, ou si l'on veut des petits barillets qui versent l'eau dans une auge L, qui de là va se rendre au réservoir.

Je ne parle point de la charpente qu'il faudra construire pour soutenir cette machine, laissant au gré de ceux qui voudront l'exécuter de disposer les pièces suivant le lieu où elles devront être placées. J'en userai de même pour les autres machines dont je ne donnerai pas des développements particuliers, pour mieux laisser voir leur composition. Je ne ferai pas non plus mention présentement des calculs pour estimer la force qui doit mettre en mouvement ces sortes de chapelets, relativement à la grandeur des barillets, et à leur nombre qui dépend de la hauteur où on veut élever l'eau, parce que j'ai traité tout ce qu'on peut dire de théorie sur ce sujet au commencement du second volume, à l'occasion des machines mues par le vent; ainsi, pour éviter les répétitions, je m'en tiendrai à cette simple description (*fd*).

(*fd*) Les machines dont il est question dans cet article sont désignées communément sous le nom de *noria*. Leur invention est très-ancienne : elles sont indiquées par Vitruve comme susceptibles d'être employées à la place de la roue à tympan, dans le cas où l'on aurait à élever l'eau à une plus grande hauteur que celle où cette roue peut atteindre. Leur théorie mécanique est encore absolument la même que celle du chapelet incliné (voyez la note (*fb*).

Des *norias*, ou chapelets composés d'une chaîne de seaux.

§ 1. L'avantage de la noria consiste dans la simplicité de son mécanisme et l'uniformité du mouvement, qui se fait toujours dans la même direction. Son principal inconvénient est dans la manière dont le versement de l'eau contenue dans les seaux doit s'opérer. En effet, il arrive presque toujours, pour que l'eau puisse tomber du seau dans la bâche où on la reçoit, qu'on l'élève plus haut qu'il n'est nécessaire, et il est difficile, quand elle verse dans cette bâche, qu'il ne s'en perde pas une partie. M. Gateau a cherché à remédier à ce défaut dans une machine de

Noria de M. Gateau.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Description de la machine à chapelet, exécutée à

748. On a construit à Rochefort en 1722 une machine pour épuiser les eaux des nouvelles formes, composée de trois chapelets dans le goût

---

cette espèce, pour laquelle il a pris un brevet d'invention, et qu'on a employée récemment avec succès aux épuisements des fondations de diverses constructions.

Pl. H, Fig. 1 et 2. Les chaînes qui portent les seaux sont formées par des chaînons en bois, moins susceptibles de casser que ceux de fer. Chaque seau est traversé par deux axes en fer, qui assemblent ces chaînons. Pour éviter que l'eau ne se perde par les trous nécessaires pour le passage des axes au travers des faces latérales des seaux, ces axes sont enveloppés par des cylindres en bois, fixés à ces faces, et dans lesquels les axes tournent. Le mouvement de la chaîne et des seaux dont elle est chargée est dirigé par plusieurs roues, savoir 1° les *roues de support* en fer B B de $0^m,60$ de diamètre, montées sur l'axe A A, dans la circonférence desquelles sont pratiquées six entailles où se placent les axes des chaînons; 2° la *roue de renvoi* C C en bois, composée de deux plateaux circulaires entre lesquels passent les seaux, et sur le contour desquels portent les axes, de manière que la chaîne se trouve dans sa descente renvoyée en-deça de la verticale, disposition qui permet d'avancer la bâche à l'aplomb du seau d'où l'eau verse; 3° *la roue d'écartement* D D, formée également de deux plateaux circulaires en bois. L'axe de cette dernière roue n'est point fixé dans des tourillons: elle est entièrement supportée par la chaîne, et on lui donne le poids nécessaire pour lui procurer de la stabilité. Sur l'axe A A des roues de support, est aussi fixée la roue dentée E de $0^m,58$ de diamètre au milieu des dents, laquelle engrène avec le pignon F, ayant $0^m,09$ de diamètre au milieu des dents. L'axe de ce pignon porte la manivelle G, dont le rayon est de $0^m,4$, et sur laquelle les manœuvres agissent. Au pignon tient une roue dentée en crémaillère, dans laquelle s'engage un crochet qui ne lui permet point de tourner en sens contraire, ni aux seaux chargés d'eau de redescendre, quand les manœuvres cessent d'agir sur la manivelle. Le fond de chaque seau est garni d'une petite soupape qui s'ouvre quand ce seau plonge dans le réservoir inférieur, ce qui permet à l'air d'en sortir et à l'eau d'y entrer librement. La longueur des chaînons en bois, mesurée entre les axes des boulons, est de $0^m,3$. Le poids d'un seau vide, avec ses deux chaînons et ses deux boulons est de $24^k,9$. Le poids de la roue de support est de 92^k, y compris la roue d'engrenage; celui de la roue d'écartement plongée dans l'eau est de 34^k.

La machine de M. Gateau se distingue principalement des autres espèces de norias, par la manière dont le versement s'opère. On s'est attaché à faire en sorte qu'il n'y eût point d'eau perdue. Mais d'une part on n'a point atteint complétement ce but, comme on le verra tout-à-l'heure, et de l'autre il résulte de la manière dont la portion descendante de la chaîne est rejetée en-deçà de la verticale, que le poids de cette portion ne fait plus équilibre à celui de la portion montante, en sorte que l'effort à exercer à la circonférence de la roue de support doit surpasser, indépendamment des frottements, le poids de l'eau contenue dans les seaux. Ces frottements sont d'ailleurs assez considérables, d'autant mieux qu'on s'apercevra facilement, en appliquant ici les principes du § 1 de la note (*be*), que le pignon F n'est pas bien placé. En le mettant à l'extrémité du diamètre horizontal de la roue dentée, la pression

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du précédent, mus par des chevaux à l'aide de plusieurs roues et lanternes. Le dessin en ayant été remis au bureau des fortifications, M. Marchand,

Rochefort pour épuiser les eaux de la forme.

mutuelle des dents du pignon et de la roue aurait déchargé l'axe AA de tout le poids de l'eau contenue dans les seaux de la portion montante de la chaîne, tandis que, par la disposition indiquée dans la figure, ce poids se compose avec la pression mutuelle des dents pour exercer un grand effort sur cet axe. La machine a aussi l'inconvénient, qui lui est commun avec la plupart des norias, d'élever l'eau plus haut que la bâche supérieure, inconvénient d'autant plus sensible que la hauteur à laquelle l'eau est élevée est plus petite.

Expériences faites pour l'évaluation du produit de la noria de M. Gateau.

Malgré ces défauts, l'emploi de cette machine, qui a l'avantage de marcher régulièrement et de ne point exiger de réparations fréquentes, commençant à s'introduire dans les travaux des fondations, il était utile d'avoir des notions exactes sur l'effet utile qu'on pouvait en obtenir. M. Emmery, ingénieur des ponts-et-chaussées, chargé de la surveillance des travaux du canal de St-Maur, a fait pour y parvenir des expériences dont les résultats sont contenus dans le tableau suivant.

N°s des expériences.	Hauteur à laquelle l'eau est élevée.	Effort moyen exercé sur la manivelle.	Nombre d'homm. appliqués à la manivelle.	Effort moyen exercé par chaque homme.	Nombre de tours faits par minute.	Quantité d'action produite par chaque homme en une minute.	Volume d'eau élevé par minute.	Effet utile produit par chaque homme en une minute.	Rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée.
	mètres.	kilogramm.		kilogramm.		kil. × mètres.	mètre cube.	kil. × mètres.	
1.	1,71	30,35	2.	15,18	22.	839	0,4675	400	0,48
			3.	10,12	30.	763	0,6375	363	0,47
2.	2,57	35,93	3.	11,98	18.	594	0,3825	328	0,55
			4.	8,98	30.	677	0,6375	410	0,59
3.	3,11	41,71	3.	13,90	14.	489	0,2955	306	0,63
			4.	10,43	22.	577	0,4675	364	0,63
			5.	8,34	24.	503	0,5100	317	0,63
4.	3,60	46,38	4.	11,59	14.	408	0,2955	266	0,65
			5.	9,28	20.	466	0,4250	306	0,66
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

Il est nécessaire d'entrer dans quelques détails sur la manière dont ces résultats ont été obtenus.

On remarquera d'abord que dans la machine l'effort du moteur n'est point constant : il varie suivant la manière dont la chaîne est supportée. Lorsque la chaîne a la position indiquée sur les figures, il est le plus grand possible. Si la roue fait $\frac{1}{12}$ de tour, le seau dont elle est chargée exerce moins d'effort, et le bras de levier de la partie montante de la chaîne, n'est plus le rayon de la roue de support, mais la distance au centre du côté de l'hexagone inscrit dans la circonférence de cette roue. Quand la roue a fait $\frac{1}{6}$ de tour, le bras de levier est de nouveau le rayon

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

qui en est le premier commis, me l'a communiqué sans autre explication que celle qu'on pouvait tirer d'une légende relative aux plans et profils

---

de la roue de support, mais le seau dont cette roue est chargée n'exerce plus aucun effort. Enfin si la roue a fait $\frac{3}{12}$ de tour, le bras de levier a diminué de nouveau, et le seau dont elle est chargée ayant passé de l'autre côté de l'axe, favorise l'action du moteur, qui alors est la moindre possible. Les efforts à exercer sur la manivelle dont le rayon est de $0^m,4$, pour tenir la machine en équilibre dans ces quatre situations en surmontant les frottements, ont été observés successivement, en suspendant des poids à une corde fixée sur un rouleau monté sur l'axe du pignon, et ayant, comme la manivelle, $0^m,4$ de rayon. Le résultat moyen, dont les extrêmes différaient de $\frac{1}{10}$ environ, est celui inscrit dans la 3e colonne du tableau, et on en a conclu, d'après le nombre d'hommes appliqués à la manivelle, l'effort moyen que chacun d'eux devait exercer, lequel est inscrit dans la cinquième colonne.

Dans chaque expérience, et chaque fois que l'on faisait varier le nombre d'hommes appliqué à la machine, on observait pendant une heure le mouvement qu'ils lui imprimaient. Le nombre moyen des tours qu'ils ont fait faire à la manivelle en une minute est inscrit dans la sixième colonne du tableau. En multipliant ce nombre de tours par la circonférence décrite et par la pression exercée, on en a conclu les quantités d'action dépensées par chaque homme en une minute, qui forment la septième colonne.

Pour évaluer le volume d'eau élevé, on a jaugé l'eau que les seaux pouvaient contenir, laquelle s'est toujours trouvée, à de légères différences près, de $0^{mc},0475$. On a ensuite jaugé au sortir de la bâche le produit du versement des seaux, et on n'a plus trouvé moyennement pour chaque seau que $0^{mc},0425$, ce qui a fait voir qu'il se perdait dans le versement entre le $\frac{1}{9}$ et le $\frac{1}{10}$ de l'eau élevée. La manivelle faisant 6 tours pendant que la roue de support en fait un, le nombre des seaux élevés est la moitié du nombre des tours de manivelle. En multipliant donc les moitiés des nombres contenus dans la sixième colonne par $0^{mc},0425$, on a eu les volumes d'eau élevés par minute, inscrits dans la huitième colonne. Le poids de l'eau élevée multiplié par la hauteur à laquelle elle était élevée, hauteur comptée depuis le niveau du réservoir inférieur jusqu'au fond de la bâche, a donné l'effet utile produit par chaque homme, indiqué dans la neuvième colonne. Enfin la comparaison de cette colonne avec la septième a donné les rapports inscrits dans la dernière. On remarquera que l'effet utile est ici évalué plutôt au-dessus qu'au-dessous de la réalité, parce qu'il arrive souvent que des corps étrangers s'introduisent dans les soupapes adaptées au fond des seaux, les empêchent de se fermer complétement, et occasionnent des pertes d'eau plus ou moins considérables, auxquelles on n'a point égard ici.

La recherche du rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée sur la machine, était le principal objet de ces observations. On voit dans la dixième colonne du tableau que ce rapport, qui offre des valeurs sensiblement constantes pour chacune des hauteurs auxquelles l'eau est élevée, augmente très-sensiblement avec ces mêmes hauteurs; et cette circonstance tient évidemment à ce que la dis-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

que l'on trouve exprimés sur la planche cinquième, qui comprend seulement les parties essentielles de la machine, ayant supprimé toutes celles

---

position de la machine oblige à monter l'eau à $0^m,75$ plus haut que le niveau de la bâche supérieure, à partir duquel sont comptées les hauteurs portées dans la deuxième colonne. Représentons ces hauteurs par H : on ne pourrait trouver des valeurs constantes pour le rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée, qu'autant que l'on calculerait cet effet utile en supposant l'eau élevée, non plus aux hauteurs H, mais aux hauteurs $H + 0^m,75$. Pour modifier d'après cette hypothèse les nombres de la dixième colonne, il faut évidemment les multiplier par le rapport $\frac{H+0^m,75}{H}$, et alors ils prennent pour les quatre expériences les valeurs moyennes, 0,68, 0,74, 0,782, 0,785. Ces nouvelles valeurs, quoique différant beaucoup moins entre elles que les précédentes, augmentent néanmoins encore avec la hauteur à laquelle l'eau est élevée ; ce qui s'explique en remarquant qu'une partie de la charge produisant le frottement est constante, et n'augmente point avec cette hauteur. Les expériences ne sont pas en assez grand nombre pour démêler avec exactitude les effets de ces diverses causes, mais cela est inutile pour l'objet d'utilité pratique que l'on a ici en vue. Les nombres de la dixième colonne du tableau donneront toujours le véritable rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée pour les hauteurs comprises dans les limites des expériences, et pour une hauteur plus grande H, on ne pourra se tromper dangereusement en supposant le rapport $= 0,8\,\frac{H}{H+0^m,75}$, puisque les causes de variation dont on vient de parler deviennent d'autant moins sensibles que H augmente davantage.

Rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée, dans la noria de M. Gateau.

Il paraît, par les résultats précédents, que cette machine ne peut être employée avantageusement pour de petites hauteurs telles que 2^m, puisqu'elle rend alors à peine la moitié de la quantité d'action qu'elle consomme. Pour des hauteurs plus grandes, telles que 3 à 4^m, son effet utile est environ les $\frac{2}{3}$ de cette quantité d'action, et à-peu-près le même que celui du chapelet vertical (voyez la note précédente). La machine est à la vérité plus chère à établir, mais elle marche plus régulièrement, ne comporte point de réparations fréquentes, et sur-tout permet de faire varier avec facilité la hauteur à laquelle on élève l'eau. Elle travaille aussi-bien dans l'eau chargée de vase ou de sable que dans l'eau claire.

Action journalière produite par les manœuvres employés au service de cette machine.

Les expériences précédentes, en même temps qu'elles font apprécier le degré d'avantage de la noria de M. Gateau, peuvent servir aussi à évaluer les quantités d'action journalière fournies par les ouvriers dans le travail de cette machine : mais les conclusions qu'on pourrait en tirer à cet égard doivent être prises avec beaucoup de précaution. En effet chacune de ces expériences a été faite pendant la durée d'une heure seulement, en partie avec des ouvriers choisis, et ces ouvriers sachant qu'ils étaient observés : elles demeurent donc dans la classe de ces résultats isolés qu'il n'est point permis de généraliser. Il faut distinguer toutefois le cas de la quatrième expérience, où il y avait 5 hommes appliqués à la manivelle. Ce cas, d'après les renseignements qui m'ont été donnés par M. Emmery, représentait exactement, quant à la hauteur à laquelle l'eau était élevée, et au nombre des ma-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

du bâtiment qui n'avaient rien d'intéressant, afin de pouvoir réunir sur une seule planche tout ce qui devait être apperçu d'un même coup-d'œil.

---

nœuvres, les circonstances dans lesquelles la machine travaillait jour et nuit depuis plusieurs semaines; et l'on avait constamment observé que les manœuvres faisaient faire moyennement 18 à 20 tours par minute à la manivelle.

En ne prenant que 18 tours par minute, et ne portant l'effort de chaque homme, qu'à 9^k (au lieu de $9^k,28$ inscrit dans le tableau), la quantité d'action transmise sera pendant une minute $9^k \times 18 \times \pi.0^m,8 = 407^{k\times m}$, et par conséquent en une heure $24420^{k\times m}$. Il faut savoir maintenant 1° que la machine était servie par deux relais; 2° que le travail avait été partagé en travail de jour, depuis 5 heures du matin jusqu'à 7 heures du soir, et travail de nuit, depuis 7 heures du soir jusqu'à 5 heures du matin du jour suivant; 3° que l'on a remarqué que la plupart des ouvriers travaillaient de suite pendant un jour, une nuit et un jour, et se reposaient la nuit suivante. Donc en 48^h, ils fournissaient 19^h de travail effectif, ce qui revient à $9^h \frac{1}{2}$ en 24 heures ou un jour. La quantité d'action journalière était donc $9,5 \times 24420^{k\times m} = 231990^{k\times m}$.

Ce nombre surpasse de $\frac{1}{3}$ environ celui $172800^{k\times m}$, qui est inscrit dans le tableau de la p. 396. Il surpasse encore davantage le résultat adopté par Coulomb (*Mémoires de l'institut, sciences physiques et mathématiques*, t. 2, p. 415) qui n'attribue à l'homme agissant sur une manivelle qu'une quantité d'action journalière $= 116000^{k\times m}$ ainsi que le résultat adopté par M. Guenyveau (*Essai sur la science des machines*, p. 279), qui porte cette quantité d'action à $155000^{k\times m}$. Les observations dont on vient de donner le détail offrent d'ailleurs tous les caractères de la vérité. Je crois le nombre du tableau de la p. 396 plus près du résultat moyen que ceux adoptés par Coulomb et par M. Guenyveau, et il me paraît que si les observations de M. Emmery indiquent un résultat encore plus fort, cela tient à ce que, dans les travaux d'épuisement des fondations qui ne durent que quelques semaines, et où les ouvriers sont tentés par la facilité qu'on leur offre de travailler la nuit, ils outrepassent toujours plus ou moins leur force moyenne.

Observations sur une noria de M. Gateau mue par des chevaux.

On a fait aussi dans les travaux du canal de St-Maur des observations sur une machine absolument semblable à la précédente, mais plus puissante, les seaux ayant une capacité double, et qui était mue par des chevaux. Les dispositions à faire pour cet objet se sont réduites à prolonger l'axe de la manivelle, et à remplacer cette dernière par une lanterne dans laquelle engrenait une roue horizontale de 3^m de diamètre. La flèche à laquelle les chevaux, au nombre de deux, étaient attelés, était fixée sur l'axe de cette roue. Le diamètre de la circonférence qu'ils décrivaient était de 6^m, la localité n'ayant pas permis de le faire plus grand. Ils travaillaient 8 heures par jour. On a observé pendant toute la durée du travail que les chevaux faisaient au moins deux, au plus trois, et moyennement $2 \frac{1}{2}$ tours du manège en une minute. Chaque tour de manège produisait le versement de $5 \frac{1}{2}$ seaux. La capacité de chaque seau était double de celle des seaux de la machine précédente, c'est-à-dire de $0^{mc},095$; mais, comme on l'a vu plus haut, le produit du versement devait être seulement $0^{mc},085$ environ. Le volume d'eau élevé en une minute, était donc $1^{mc},16875$. La hauteur à laquelle cette eau était élevée était $3^m,6$, comme

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

La première figure représente un profil de la machine, coupé sur la longueur A B du plan exprimé par la seconde. La troisième est un second PLANCHE FIG. 1, 2

---

dans la quatrième expérience du tableau précédent. Ainsi l'effet utile produit en une minute était $4207^{k \times m}$; ce qui donne pour chaque cheval $2104^{k \times m}$; et pour chaque cheval dans ses 8 heures de travail journalier, $1009920^{k \times m}$. Comme on n'a point observé ici directement les efforts exercés par les chevaux, on ne connaît point exactement la quantité d'action qui était dépensée pour produire cet effet utile. Si on voulait l'estimer d'après l'évaluation admise dans le tableau de la p. 396, on trouverait un rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée beaucoup plus grand que celui qui a été trouvé ci-dessus d'après les expériences faites sur la petite machine. L'emploi des chevaux, indépendamment de ce qu'il donnait lieu à beaucoup moins d'embarras et de surveillance, offrait une très-grande économie sur celui des manœuvres : il épargnait environ les $\frac{3}{4}$ de la dépense.

Indication des dispositions de la noria qui paraissent le plus convenables.

§ 2. Je reviens maintenant à considérer en général les machines de ce genre, et les modifications dont elles sont susceptibles. On a vu ci-dessus les inconvénients résultant de la disposition particulière imaginée par M. Gateau, pour opérer le versement des seaux sans perte d'eau. Ces inconvénients sont tels qu'il me paraît douteux qu'il y ait de l'avantage à employer cette disposition. On peut distinguer, parmi les diverses méthodes adoptées pour le versement 1° celles où les seaux sont tout-à-fait fixés sur la chaîne, comme dans les machines représentées fig. 1, pl. 4, et pl. 5, et dans les machines de M. Gateau ; 2° celles où les seaux ne tiennent à la chaîne que par un seul axe, sur lequel ils sont suspendus, et peuvent tourner librement.

Dans la noria représentée fig. 1, pl. 4, il ne peut pas se perdre beaucoup d'eau, puisque, pendant le versement, le bord du seau répond verticalement à la bâche où l'eau est reçue ; mais la manière dont la chaîne de seaux est supportée par la lanterne offre peu de solidité. On conserve l'avantage en remédiant à l'inconvénient, en faisant porter la chaîne sur un tambour dont l'enveloppe cylindrique est supprimée, et dont les deux plateaux circulaires formant ses extrémités sont réunis par des cloisons dirigées du centre à la circonférence. Quand les seaux passent sur le tambour, ils laissent tomber leur eau dans les intervalles de ces cloisons, d'où elle s'échappe par une des extrémités du tambour. On peut aussi, quoique avec moins d'avantage, employer la disposition adoptée dans une noria décrite dans le *Bulletin de la société d'encouragement*, octobre 1815, à laquelle le mouvement est imprimé par un cheval au moyen d'un appareil simple et ingénieux. L'excédent de hauteur à laquelle l'eau se trouve élevée par ces procédés n'est pas plus grand que dans l'appareil de M. Gateau, et ils lui sont probablement préférables pour la simplicité et l'économie de la force. Cet excédent de hauteur mérite peu de considération quand la noria est employée à élever l'eau à une hauteur considérable, mais il n'en est pas de même dans les épuisements pour les fondations, et il paraît qu'on pourrait alors faire verser le seau avant qu'il n'arrivât à la roue sur laquelle il doit passer, à-peu-près de la manière indiquée fig. 3, pl. H. Les seaux sont censés portés par une chaîne en bois, semblable à celle de la machine précédente ; mais chacun n'est soutenu que par un seul axe. La forme des seaux et de l'arrêt dont la rencontre les PL. H, FIG. 3.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

profil sur l'alignement CD, et la quatrième un troisième sur l'alignement EF. Des lettres semblables accompagnent les mêmes parties de la machine, représentée dans des sens différents; en voici l'explication.

G, Grand arbre vertical.

---

fait basculer peut être telle que, pendant que l'eau tombe du seau, l'arête par-dessus laquelle elle verse, dépasse l'aplomb du devant de la bâche. Cette arête doit être maintenue vive et tranchante, afin que la veine d'eau s'en détache complétement. Il ne doit pas y avoir une perte sensiblement plus grande dans cette disposition que dans celle de M. Gateau.

De la machine de Vera, où l'eau est élevée au moyen d'une corde sans fin. Pl. H, Fig. 4.

§ 3. Le principe de la noria est susceptible d'une très-grande simplification. On peut supprimer les seaux, et n'employer qu'une seule corde sans fin roulant sur deux poulies, auxquelles le mouvement est donné par une manivelle. L'eau monte avec la corde, par le seul effet de son adhésion à la surface de cette corde, et peut être élevée ainsi à une très-grande hauteur, pourvu qu'on imprime une vîtesse suffisante. Ce moyen d'élever l'eau, qui n'était pas connu à l'époque de la rédaction de l'Architecture hydraulique, a paru si extraordinaire, que sa première annonce a rencontré beaucoup d'incrédules : mais la réalité en est bien constatée. On trouve dans le t. 23 de la *Bibliothèque britannique, sciences et arts*, des observations sur une machine de cette espèce construite en 1782 au château de Windsor, qui élevait l'eau d'un puits de 29^{m} de profondeur. La poulie inférieure, de 0^{m},3 de diamètre, était en gaïac, avec un axe d'acier tournant dans des boîtes de bronze. La poulie supérieure avait 0^{m},91 de diamètre : elle était en fer, avec sa gorge garnie en plomb. Son axe portait un volant, et tournait par le moyen d'une manivelle de 0^{m}, 36 de rayon. La corde était en crin, et avait 0^{m}, 013 de diamètre. Elle passait au travers du fond de la bâche par des trous de 0^{m},05 de diamètre. Lorsque la manivelle faisait 30 tours par minute, la corde n'élevait que peu d'eau. Elle en élevait beaucoup, quand la manivelle faisait 50 tours, et quand un ouvrier, qui alors ne pouvait soutenir ce travail que peu de temps, lui en faisait faire 60, le volume d'eau élevé était de 0^{mc},0289 par minute. La corde doit être fréquemment renouvelée.

La fig. 4 est à-peu-près copiée de l'*Expérienced millwright* de Gray, où cette machine, appelée en France du nom de Vera, son inventeur, est désignée sous le nom de *hair pump* (pompe de crin). La poulie inférieure ne doit pas être fixe, mais supportée par la corde, et chargée d'un poids suffisant pour donner constamment à cette corde le degré de tension convenable. Les poulies sont faites de manière à n'avoir que peu de points de contact avec la corde. Si on emploie plusieurs cordes, placées les unes à côté des autres, ce qui est le moyen d'obtenir un produit plus considérable eu égard à la force qu'on dépense, il ne faut pas laisser entre elles plus de 0^{m}, 025 d'intervalle.

Quel est l'effet utile de la machine de Vera dans la pratique.

Les indications précédentes peuvent servir à guider dans la construction d'une machine de ce genre, mais non à apprécier l'effet utile qu'on peut en espérer. C'est ce qu'on fera au moyen des résultats donnés en 1782 par de Parcieux dans sa *Dissertation sur les moyens d'élever l'eau par une corde sans fin*. Ce savant annonce en premier lieu avoir trouvé, par des expériences en petit, que l'effet utile produit par

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

H, Barres de 15 pieds de long.
I, Hérisson de 3 pieds de rayon, contenant 48 dents.
K, Lanternes de 15 pouces de rayon, contenant chacune 16 fuseaux.
L, Rouets de 2 pieds $\frac{1}{2}$ de rayon, contenant 32 dents.
M, Arbres horizontaux, communs aux rouets L et aux roues N.
N, Roues octogones de 2 pieds $\frac{1}{2}$ de rayon pour porter les chapelets.
O, Seaux contenant chacun un demi-pied cube d'eau.

---

la machine dont il s'agit était les $\frac{12}{25}$ de la quantité d'action dépensée; et il lui paraît qu'en grand ce rapport doit être moindre encore.

Pour l'apprécier à cet égard, de Parcieux établit qu'un homme travaillant avec des seaux et une poulie fixe, 6 à 8 heures par jour, élève par heure 880 pintes d'eau à 100 pi., et pour justifier cette assertion, il cite comme observation décisive celle faite au puits de Bicêtre, où 24 hommes élèvent 12000 pintes d'eau par heure à 176pi. avec deux seaux suspendus aux deux bouts d'un câble de 8 po. de tour, dont 43 toises pèsent 650 liv. L'évaluation de l'auteur pour la quantité d'action produite par l'homme revient pour une seconde à $7^{k \times m},4$ environ.

L'examen des expériences qui ont été faites lui donne les résultats compris dans le tableau suivant.

LIEUX où l'on a fait les épreuves.	Hauteurs auxquelles l'eau a été élevée.	Durée de l'épreuve.	Nombre d'hommes.	Pourtour des cordes.	PRODUITS avec la corde.	PRODUITS avec les seaux.	Rapports de ces produits.
	mètres.	minutes.		mètre.	mètre cube.	mètre cube.	
Petite Pologne.....	4,4	5	2		0,6147	1,0157	0,608
Rue de Sèvres.....	9,1	5	2	0,041	0,2794	0,4880	0,576
Rue Platrière.....	20,5	8	2	0,047	0,2329	0,3479	0,678
Courbevoie.....	26,0	10	4	0,090	0,4554	0,6826	0,664
Observatoire.....	54,6	2	2	0,045	0,0140	0,0354	0,388

On en conclut que le rapport moyen de l'effet utile à la quantité d'action dépensée, laquelle est ici représentée par le produit que les manœuvres auraient obtenu en montant l'eau avec des seaux, est 0,52, qui diffère peu du rapport 0,48 trouvé par des expériences en petit.

De Parcieux pense d'ailleurs que les hommes produisent plus d'effet avec une pompe qu'avec des seaux, et que la première est plus avantageuse dans le rapport 1,18 : 1. Il lui paraît en résultat que la rotation d'une corde sans fin est, de tous les moyens proposés jusqu'ici, le moins efficace sous le rapport de la force dépensée comparée avec l'effet utile. Cette assertion ne doit pas être prise à la lettre; car les notes de ce chapitre offrent des exemples de machines fréquemment employées, telles que le chapelet incliné, qui produisent moins d'effet que les résultats rapportés par de Parcieux n'en attribuent à la machine de Vera.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

P, Bassin qui reçoit l'eau des chapelets.

Q, Aquéduc pour conduire l'eau à la rivière.

R, Autre aquéduc qui conduit l'eau des formes aux puisards.

S, Puisards.

T, Niches et galeries autour du puisard.

V, Couëttes pour porter les arbres des roues et lanternes.

X, Rez-de-chaussée du bâtiment.

Y, Profil d'une arcade servant de pont aux chevaux qui font agir la machine,

Z, Escalier pour descendre dans le puisard.

749. Après cette légende était écrit ce qui suit: Cette machine est composée de quatre arbres, trois rouets, un hérisson, trois lanternes, trois roues octogones, *et de trois chapelets garnis chacun de* 30 *seaux, formant une chaîne de* 10 *toises, tournée par quatre chevaux, qui élèvent en une heure, à* 24 *pieds de hauteur dans le bassin* P, 1296 *pieds cubes d'eau.*

Quant au jeu de la machine, il est aisé de voir que le hérisson I, étant mis en mouvement, fait tourner les trois lanternes K, avec lesquelles il s'engrène, et que ces lanternes donnent le mouvement aux rouets L, par conséquent aux roues N qui font monter l'eau.

750. N'ayant point trouvé de développement particulier des seaux dans le dessin qu'on m'a donné, j'ai été en peine de savoir de quelle manière, après s'être remplis, ils se vuidaient dans le bassin P; mais y ayant un peu pensé, la première et la quatrième figure m'ont fourni des idées pour tracer la cinquième.

FIG. 5. Chaque seau est une espèce de tambour fait de planches, composé de deux fonds opposés, comme ABCDEF, unis ensemble par 6 faces liées par des équerres de fer, le tout formant un prisme dont l'épaisseur va en rétrécissant depuis l'arête GA jusqu'à l'autre opposée HD.

Contre les deux fonds sont attachées des bandes de fer LN, IO, chacune de deux pieds de longueur, percées à leurs extrémités pour recevoir des boulons KM, lesquelles traversant aussi les bandes qui répondent aux seaux adjacents, forment les nœuds de la chaîne du chapelet.

Un des fonds de chaque seau, du côté qui répond au bassin, est percé d'un trou, qui sera si l'on veut de la grandeur du triangle CDE, pour que les seaux puissent se remplir et se vuider plus promptement. Quand ils descendent leur ouverture est en bas, et après qu'ils se sont remplis elle se trouve en haut: alors étant parvenus au sommet des roues qui les portent, l'eau jaillit de côté et va tomber dans le bassin.

751. Si l'on considére cette machine avec un peu d'attention, on sera sans doute surpris de voir que, mue par quatre chevaux, son effet se réduise à n'élever que 1296 pieds cubes d'eau par heure à une hauteur de 24 pieds, tandis que dans l'article 745 nous avons déduit d'une expérience

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

dont j'ai été témoin, que quatre hommes pouvaient en élever 926 dans le même temps, et à la même hauteur. Or si l'on cherche le rapport de ces deux nombres, on trouvera celui de 7 à 5, qui montre que quatre chevaux n'épuisent ici que deux cinquièmes en sus de ce que peuvent épuiser quatre hommes.

Pour juger de l'effet de cette machine par une règle générale, nous commencerons par chercher la quantité de mouvement du poids qu'elle élève, afin de la comparer à la quantité de mouvement que doivent avoir naturellement les quatre chevaux qui la font agir.

752. Chacun des chapelets n'ayant jamais en montant que 12 ou 13 seaux remplis d'eau, les trois ensemble n'en soutiendront qu'environ 19 pieds cubes, dont le poids est de 1330 liv.

Puisque les trois chapelets élèvent 1296 pieds cubes d'eau en une heure, chacun n'en fera monter que 432 dans le même temps; et un seau ne contenant qu'un demi-pied cube, il faudra pour cela qu'il en monte 864. Or comme trois seaux occupent une toise de longueur, puisqu'il en faut 30 pour une chaîne de 10 toises (749), divisant 864 par 3, l'on aura 288 toises pour la vîtesse du poids de l'eau, dont la quantité de mouvement sera exprimée par 383040. PLANCHE 5.

La quantité de mouvement d'un cheval ordinaire étant exprimée par 306000 (124), celle de 4 chevaux le sera par 1224000, qui étant comparée à 383040, on trouvera, en faisant abstraction des frottements, que l'effet de cette machine n'est pas seulement les trois dixièmes de l'effet naturel de la puissance qui la meut.

La machine étant fort composée, on serait porté à croire qu'une aussi grande différence vient de ce que la plus grande partie de la force motrice est employée à surmonter les frottements, si on ne sentait en même temps qu'il n'est pas possible que la résistance qui peut venir de cette part, aille jamais jusques-là. Il y a bien plus d'apparence que, faute d'avoir fait un calcul exact de cette machine pour connaître la puissance qui devrait la mettre en mouvement, on emploie, sans le savoir, plus de chevaux qu'il n'en faut: aussi vais-je prouver que deux suffiraient au lieu de quatre.

753. Le rayon des roues qui portent le chapelet étant égal à celui des rouets (748), la résistance que les fuseaux des lanternes K trouveront à faire tourner les roues L sera égale au poids, qu'il faut multiplier par $\frac{19}{18}$, à cause qu'il y a un engrènement (290). On aura $1330 \times \frac{19}{18}$ pour cette résistance, qui sera égale à celle que les dents du hérisson I éprouveront à faire tourner les mêmes lanternes, parce que leur diamètre est un levier dont le point d'appui est au milieu. Or comme ce second engrènement occasionne un second frottement, il faut encore multiplier le produit précédent par $\frac{19}{18}$ pour avoir $1330 \times \frac{19^2}{18}$ (292, 293), ou 1428 livres Calcul de la même machine. PLANCHE 5.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pour le poids réduit à l'extrémité du rayon du hérisson, lequel étant de 3 pieds, et le bras de levier de la puissance de 15, cette puissance ne sera que la cinquième partie du poids, c'est-à-dire 296 livres.

Deux chevaux, au lieu de quatre, devraient suffire pour faire aller cette machine.

754. Comme j'ignore la charge que soutiennent la crapaudine et les coussinets des tourillons, je n'en ai point calculé le frottement, dont la résistance, réduite à l'extrémité d'un bras de levier de 15 pieds, ne peut être qu'un fort petit objet, eu égard à celui que causent les engrènements; et je suis bien assuré que la puissance n'emploiera jamais 24 livres de force pour le surmonter. Cependant nous ne laisserons pas de compter sur cette estimation qui, étant ajoutée à 296 livres, donne 320 livres pour la force de la puissance : et comme deux chevaux en ont ensemble une de 340 livres, on voit qu'elle excède de 20 livres, celle qu'il faut pour mouvoir la machine. J'ajouterai même qu'ils pourront donner plus de 1330 pieds cubes d'eau en une heure, si on les entretient dans la vîtesse qu'ils doivent avoir, ce qui est une sujétion à laquelle il paraît qu'on n'a pas eu égard, comme on en va juger.

La vîtesse des chevaux qui font aller cette machine, est inférieure à leur vîtesse naturelle.

755. Les roues des chapelets étant octogones, chacune fera monter 8 seaux, ou 4 pieds cubes d'eau dans une révolution : et comme nous avons vu que la machine en élevait 432 en une heure, il faut donc qu'elle fasse 108 tours dans le même temps. D'autre part chaque rouet ayant 32 dents et le hérisson 48, l'un et l'autre agissant sur les fuseaux d'une même lanterne, la vîtesse du rouet sera à celle du hérisson dans la raison réciproque de 48 à 32, ou de 3 à 2; d'où il suit que le rouet faisant 108 tours en une heure, le hérisson et par conséquent les chevaux n'en feront que 72 dans le même temps. Et comme dans chacun de ces tours ils décriront une circonférence de $15\frac{5}{7}$ toises, ils n'auront donc par heure qu'une vîtesse de 1131 toises, au lieu qu'elle devrait aller au moins à 1800.

J'ai cru devoir entrer dans le détail qu'on vient de voir, pour montrer de quelle manière il faut s'y prendre lorsqu'on veut examiner si une machine mue par des chevaux fait tout l'effet qu'on en doit attendre. Je pourrais aussi montrer que deux chevaux appliqués à une machine beaucoup plus simple épuiseraient une bien plus grande quantité d'eau; mais je laisse cette recherche aux lecteurs éclairés, qui ne manqueront pas d'en découvrir le moyen, sur-tout quand ils auront vu le second volume.

Au reste, je soumets tout ce que je viens de dire à la censure des personnes intelligentes qui sont à portée d'examiner cette machine sur les lieux, n'en ayant pu juger que sur les trois articles de la légende, qui sont, 1° *Que chaque seau contient un demi-pied cube d'eau.* 2° *Que la machine élève par heure* 1296 *pieds cubes à* 24 *pieds de hauteur.* 3° *Qu'elle est mise en mouvement par* 4 *chevaux* (*fe*).

Rectification des

(*fe*) La critique que l'auteur fait ici du chapelet de Rochefort porte entièrement

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Après avoir expliqué les différentes sortes de chapelets dont on peut faire usage, il me reste à décrire les autres machines répandues sur les planches qui accompagnent ce chapitre, que j'ai moins rapportées comme des modèles à suivre, que pour y joindre des réflexions utiles sur leurs avantages et leurs défauts.

Description d'une pompe pour les épuisements. Pl. 3, Fig. 6 et 7.

756. La sixième figure de la planche troisième est une espèce de pompe pour élever l'eau par aspiration, dont j'ai vu faire l'essai à la construction d'une écluse. Quatre planches bien jointes, calfatées et liées avec des équerres de fer, formant une buse qui a intérieurement 9 pouces en quarré, composent le corps de cette pompe. Au fond est une petite planche C garnie de cuir tout autour, servant de soupape, qui repose sur un châssis fixe auquel elle est attachée avec deux pentures. Le jeu de cette soupape dépend d'un *puisard* ou *piston* B, qui n'est autre chose qu'un petit coffre sans fond aussi garni de cuir, ayant un couvercle E qui tient lieu d'une seconde soupape. Ce coffre est attaché à deux bandes de fer, à travers lesquelles passe une barre de bois D, qui facilite aux manœuvres le moyen de lever et de baisser le piston, dont le jeu est de 16 pouces.

à faux. Pour montrer qu'on pourrait n'employer que deux chevaux à cette machine, il suppose ces animaux capables d'un effort et d'une vîtesse plus grands qu'on ne l'observe communément, et avec lesquels on ne pourrait d'ailleurs les faire travailler plus de 4 heures par jour. Il paraît au contraire, d'après le peu de vîtesse que prenaient ceux attelés à la machine de Rochefort, qu'ils travaillaient au moins 8 heures par jour; et il est vraisemblable qu'il y aurait eu plus à perdre qu'à gagner à atteler moins de chevaux, et à les faire travailler moins longtemps.

assertions de l'auteur sur le chapelet de Rochefort.

La machine élevant dans une heure $1296^{pc} = 44^{mc},4$ d'eau à $24^{p} = 7,^{m}8$ de hauteur, il se produisait un effet utile $= 44400^{k} \times 7^{m},8 = 346320^{k \times m}$. En évaluant la quantité d'action transmise dans le même temps d'après le tableau de la p. 396, qui indique $40^{k \times m},5$ par seconde pour un cheval, et pour 4 chevaux en une heure $583200^{k \times m}$, on trouverait que l'effet utile est les 0,59 de la quantité d'action dépensée, ce qui s'éloigne assez peu des résultats trouvés dans le § 1 de la note précédente pour une machine du même genre.

Rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée dans ce chapelet.

J'ajouterai quelques remarques sur la disposition de cette noria. On peut croire qu'il eût été préférable d'augmenter les dimensions des seaux, et de n'employer que deux des arbres M, en supprimant celui du milieu; parce qu'alors le hérisson I n'agissant que sur deux lanternes placées vis-à-vis l'une de l'autre, les actions latérales provenant de la pression des dents se seraient mutuellement détruites, sans se reporter sur l'arbre du manège G, qui n'en souffre non plus aucune par suite de l'action des chevaux. Peut-être aussi aurait-on trouvé de l'avantage à n'employer que l'arbre du milieu M, en le chargeant des trois chaînes de seaux, ce qui eût permis de supprimer les lanternes K, en faisant engrener immédiatement la roue horizontale I, fixée sur l'arbre du manège, dans la roue L montée sur l'arbre M. Un calcul exact des frottements pourrait seul résoudre cette question.

Remarques sur la disposition de cette machine. Planche 5.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Cette pompe étant placée à un endroit où l'on veut faire un épuisement, de manière que la soupape C soit submergée, on remplit d'eau tout le corps de la buse afin de chasser l'air; après quoi le piston étant mis en mouvement, l'eau de la source monte, et sort par le canal de décharge F, ce qui arrive par le jeu alternatif des deux soupapes, comme on le va voir.

Lorsqu'on baisse le piston, la soupape C se ferme, et l'autre E s'ouvre. L'eau de la buse passe au-dessus du piston, lequel étant levé, sa soupape se referme, et celle d'en-bas s'ouvre par l'action du poids de l'air, qui contraint l'eau de la source de monter dans la buse. Peu après, lorsque le piston vient à descendre, la soupape d'en-bas se referme, celle d'en-haut s'ouvre, et il arrive la même manœuvre que ci-devant.

Effet surprenant de cette pompe.

757. Celui qui a imaginé cette machine, qu'il croyait bien préférable à un chapelet vertical, ayant donné au piston 9 pouces en quarré et 16 pouces de jeu, afin qu'à chaque relevée il épuisât les trois quarts d'un pied cube d'eau, dont la pesanteur est à-peu-près de 52 livres, s'était imaginé que deux hommes le feraient aisément mouvoir, n'ayant chacun à soutenir qu'environ 26 liv. d'eau. Mais lorsqu'on en vint à l'exécution pour élever l'eau à 8 pieds, son étonnement fut extrême de voir que bien loin que deux manœuvres fissent jouer le piston avec aisance, comme il s'y était attendu, huit hommes ne le pouvaient mouvoir qu'avec beaucoup de peine, le nombre des relevées n'allant tout au plus qu'à 20 par minute, ce qui répond à un épuisement de 15 pieds cubes dans le même temps, et qui aurait été de 900 par heure, si les manœuvres avaient pu pousser le travail jusques-là sans perdre haleine. Mais il fallut abandonner la machine et multiplier les chapelets, pour ne point se laisser gagner par l'abondance des eaux d'un grand nombre de sources qui rendaient l'exécution du travail extrêmement pénible.

Cet effet paraîtra sans doute bien singulier à ceux qui ignorent la théorie des pompes: car il est peu de machines plus simples que celle-ci, la puissance étant immédiatement attachée au poids, et qui soient en apparence moins susceptibles des recherches abstraites que paraissent offrir dans les autres les engrènements et les différents bras de levier.

758. La grande résistance qu'opposait le piston de cette pompe venait de ce que les manœuvres, au lieu de n'avoir à soutenir que les trois quarts d'un pied cube d'eau, soutenaient un poids équivalent à celui de toute la colonne que contenait la buse, dont la pesanteur était de 315 livres, sans apercevoir de quelle part ce poids pouvait provenir : aussi n'était-il pas sensible aux yeux, quoiqu'ils en sentissent bien la réalité. On en trouvera la cause clairement expliquée dans le premier livre du second volume : je n'aurais pu la rapporter ici sans une trop longue digression, parce que, pour l'entendre, il faut être prévenu de plusieurs connaissances dont je n'ai pas encore fait mention.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

J'ai cru devoir parler de la pompe précédente, pour donner un exemple de l'illusion de la plupart de ceux qui, sans avoir aucun principe des choses, s'imaginent qu'il leur est réservé d'opérer des merveilles. Cependant, comme ce n'est que par la comparaison des effets de deux machines qui ont une même fin qu'on peut se déterminer en faveur de celle qui mérite la préférence, je vais faire un parallèle de la pompe dont nous parlons avec le chapelet qui est à côté.

Parallèle de l'effet de la même pompe à celui d'un chapelet vertical. PLANCHE 3. FIGURES 4, 5 et 6.

759. On a vu dans les articles 742 et 743 que ce chapelet, mu par quatre hommes, épuisait à une hauteur de 8 pieds 2780 pieds cubes d'eau en une heure, et qu'ils soutenaient ensemble une colonne d'eau réduite à 48 livres, au lieu qu'ici 8 manœuvres n'ont pu, avec un travail forcé, parvenir à épuiser 900 pieds d'eau dans le même temps, et à la même hauteur. Cela vient:

1° De ce que les 4 manœuvres appliqués aux manivelles ne soutenaient que le poids de 12 livres, sans être chargés de celui de la chaîne du chapelet qui se trouve en équilibre avec elle-même sur le hérisson dedans et dehors la buse, au lieu qu'à la pompe chaque manœuvre soutenait environ 46 livres, parce qu'indépendamment de la charge de 39 livres d'eau, il portait aussi sa part du poids du piston qui pesait à-peu-près 50 liv. et n'était soulagé par aucun bras de levier.

2° Les quatre manœuvres du chapelet faisaient faire 55 révolutions à la manivelle dans une minute, et l'eau ne discontinuait pas de monter, au lieu que les huit manœuvres de la pompe avaient bien de la peine à faire monter et descendre le piston vingt fois dans le même temps, dont près de la moitié, employée pour sa descente, était en pure perte.

C'est la combinaison des désavantages que nous venons de remarquer dans cette pompe, qui est cause que 8 hommes n'ont pu faire le tiers de l'effet de quatre, au lieu que les mêmes bras appliqués à deux chapelets eussent épuisé par heure, et avec un travail modéré, 5560 pieds cubes.

Réflexions sur les machines propres aux épuisements.

760. Je laisse à penser à ceux qui ont la conduite des grands travaux, combien il est dangereux de se laiser éblouir par les avantages qu'on voudrait attribuer à de nouvelles machines, à l'exclusion des anciennes, puisque si on les adopte sans une parfaite connaissance de la force qu'il faudra pour les mouvoir, et du plus grand effet dont elles peuvent être capables, on risque de faire un mauvais emploi du temps, qui est toujours précieux en pareil cas, et de multiplier la dépense fort mal-à-propos. C'est aussi dans le dessein d'insinuer cet esprit d'exactitude qui fait juger des choses telles qu'elles sont en elles-mêmes, et les apprécier à leur juste valeur, qu'il m'arrive quelquefois de m'étendre sur des sujets qui paraissent ne rien avoir de recommandable, mais qui sont propres à faire naître des réflexions judicieuses.

Je crois qu'il n'est pas besoin d'entrer dans un plus long détail pour

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

faire sentir combien le chapelet est préférable à la pompe qu'on vient de voir. Cependant, comme on peut la rendre utile moyennant quelque correction, et la faire exécuter à peu de frais, voici une autre manière d'en mouvoir le piston.

Autre pompe à l'imitation de la précédente, mais moins imparfaite. PLANCHE 3. FIGURES 1, 2 et 3.

761. La manivelle A répond à l'essieu d'un pignon C qui s'engrène avec une roue dentée D, dont l'essieu est commun à deux autres roues E et F qui n'ont des dents qu'autour de la moitié de leur circonférence, et cela dans un sens opposé, afin que dans le temps que l'une commence à s'engrener avec les *coches* d'une des règles H, l'autre s'échappe et tombe; ce que la première fera de même à son tour.

A ces règles sont attachés des puisards I, qui agissent chacun dans une buse séparée, représentée par la seconde figure, et dont l'intérieur est développé par la troisième où l'on voit les soupapes L et K, dont l'effet est le même que celui que nous avons expliqué dans la pompe précédente, quoiqu'elles soient placées différemment.

Comme ces puisards agiront alternativement, on voit que l'eau montera sans interruption, et qu'il n'y aura point de temps perdu. Pour que l'un puisse descendre avec au moins autant de vîtesse que l'autre montera, on chargera s'il est nécessaire chaque règle d'un poids G, et l'on ne fera pas mal d'accompagner la manivelle d'un volant B, pour en rendre le mouvement plus uniforme.

Cette machine me paraissant un peu trop composée, je voudrais supprimer le pignon C et la roue D, afin de n'avoir qu'un essieu. Alors donnant 15 pouces de coude à la manivelle, et 3 au rayon des roues E et F, la puissance sera la cinquième partie du poids, et la levée des puisards de 9 pouces.

Manière de déterminer les dimensions de la pompe précédente, eu égard à la puissance qui la meut.

762. Se servant de deux manivelles, on pourra employer quatre hommes pour faire agir cette machine, qui donnant une force moyenne de 100 livres, pourront élever un poids de 500, qui est la plus grande résistance que chaque puisard doit opposer; d'où il suit que pour bien régler le mouvement de la machine, il faut que le poids de la colonne d'eau qui aura pour base celle d'un des puisards et pour hauteur l'élévation de l'eau, joint à la pesanteur propre du puisard et de son équipage, n'excède par 500 liv. Car ici, comme dans la pompe précédente, la puissance aura encore à surmonter l'action d'un poids égal à celui de la colonne dont je viens de faire mention (758), quoiqu'elle ne soulève réellement que l'eau qu'élevera chaque puisard; ce qui vient encore de la même cause dont j'ai renvoyé l'explication au second volume.

763. Pour déterminer la base du puisard en ayant égard aux considérations précédentes, nous supposerons que l'épuisement doit se faire encore à 8 pieds de hauteur, et que chaque puisard pèse 45 livres. Ainsi il restera 455 liv. pour le poids de la colonne d'eau, qui sera de 11232

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pouces cubes; lesquels étant divisés par 96 pouces, hauteur de la colonne d'eau, donnent 117 pouces quarrés pour la superficie de la base du puisard, qu'on pourra faire de 10 pouces 9 lignes en quarré (*ff*).

Maximes générales qu'on doit suivre pour la construction des machines.

764. Il suit de tout ce que je viens d'exposer, que lorsqu'on veut faire le projet d'une machine, il faut, 1° connaître la force du moteur; 2° disposer les parties de la machine de manière que l'action du moteur soit uniforme et la vîtesse bien ménagée; 3° qu'il n'y ait point d'interruption dans l'effet que la machine doit produire, afin de bien employer le temps.

Lorsque ces trois conditions seront exactement remplies, peu importe que la machine soit ancienne ou nouvelle, qu'elle paraisse ingénieuse ou commune, la plus simple sera toujours la plus estimable, parce qu'elle répondra toujours au plus grand effet (298).

Plusieurs machines différentes

765. Il est fort inutile de se tourmenter à chercher les moyens d'élever

---

Remarques sur la machine proposée art. 761, et le calcul qu'en fait l'auteur.

(*ff*) Les observations de l'auteur sur la machine décrite art. 756 sont très-justes, mais celle qu'il propose à la place aurait de grands inconvénients. Le plus essentiel est qu'il résulte de la manière dont le mouvement est communiqué aux tiges des puisards, qu'au commencement et à la fin de chaque oscillation, ces tiges, qui sont chargées d'un poids considérable, prendraient et perdraient brusquement la vîtesse uniforme avec laquelle ces oscillations seraient accomplies, ce qui occasionnerait de tels chocs, qu'indépendamment de la grande perte de force qu'ils causeraient, la machine ne pourrait y résister long-temps. Je remarquerai aussi que le volant dessiné sur la figure est mal disposé, et qu'au lieu des sphères fixées aux extrémités des rayons, il vaudrait mieux que ces rayons fussent réunis par un cercle de fonte, ce qui permettrait de les faire plus minces, et de supprimer les quatre traverses par lesquelles ils sont entretenus, en sorte que la matière employée au volant étant mieux distribuée, on pourrait lui donner moins de poids, sans qu'il produisît moins d'effet. Son mouvement éprouverait d'ailleurs de la part de l'air moins de résistance (Voyez le § 5 de l'addition à la fin du 1^er^ livre).

Pl. 3, Fig. 1.

Quant au calcul de la machine (art. 762 et 763), je remarquerai qu'il ne faut point compter que des hommes qu'on ferait travailler 8 heures par jour, ce qui paraît être la durée du travail la plus convenable, produiraient en agissant sur une manivelle de 15 po. ou $0^m,4$ de rayon, une pression de 25 livres = 12 kil.. Ils n'en produiraient véritablement qu'une de 8^k environ (voyez le tableau de la p. 396). De plus, en déterminant la grandeur du puisard qu'ils pourraient élever, l'auteur paraît oublier que ce puisard fait proprement ici la fonction du piston d'une pompe, et par conséquent qu'il serait nécessaire de le faire joindre plus ou moins exactement contre les parois de la buse, d'où il résulterait un frottement dont il faudrait tenir compte dans l'évaluation de l'effort que la puissance appliquée à la manivelle aurait à exercer.

L'auteur a grande raison d'annoncer, art. 767, qu'il préférerait le chapelet vertical à la machine dont il s'agit ici; et aux raisons qu'il en donne, il faut ajouter celle de la continuité du mouvement de toutes les parties mobiles, et de l'absence de tout choc dans le chapelet vertical.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

destinées à élever l'eau à une même hauteur, doivent en donner une même quantité si elles sont également parfaites, et mues avec la même puissance.

une grande quantité d'eau avec une force médiocre. Je le répète encore, les lois de la mécanique n'étant autres que celles de la nature, il y a des bornes qu'on ne peut passer (122, 124). Quand une force est limitée, ainsi que sa vîtesse, on ne doit pas espérer qu'appliquée à une machine plutôt qu'à une autre, elle soit capable d'un plus grand effet. Si ces deux machines ont le même objet, et qu'elles soient également parfaites, la différence qui se rencontrera dans leur composition n'en mettra aucune dans leurs effets, et c'est une erreur de penser le contraire : car enfin d'où pourrait venir la différence, si la force et le temps sont également employés à élever l'eau à une même hauteur, et pourquoi l'une ferait-elle plus d'effet que l'autre ?

766. Quoique ce principe soit bien naturel, il n'est pas aisé d'en convaincre le plus grand nombre des machinistes, parce qu'ils ne font pas réflexion que l'effet d'une machine, ou la quantité de mouvement du poids qu'elle élève, que ce poids soit un corps solide ou liquide, est toujours égal à l'effet ou à la quantité de mouvement de la puissance motrice; et qu'appliquant cette puissance à différentes machines, leurs effets seront les mêmes, puisque chacun en particulier sera égal à celui de la puissance.

767. Par exemple, si la superficie du cercle du tuyau du chapelet était proportionnée au poids de la colonne d'eau que peuvent élever quatre hommes, et que dans la machine précédente on fît en sorte que la puissance ne fût point chargée de la pesanteur propre des puisards, ce qui n'est pas difficile à exécuter ; cette machine éleverait dans le même temps précisément la même quantité d'eau qu'éleverait le chapelet. Que si de ces deux machines il y en a une qui mérite la préférence, elle doit être nécessairement pour le chapelet : 1° à cause de sa simplicité ; 2° parce que la puissance n'est chargée uniquement que du poids de l'eau, la chaîne étant portée sur le hérisson.

768. Il ne reste donc à l'industrie de celui qui veut faire le projet d'une machine, que l'heureux choix de la manière de communiquer le mouvement au poids que l'on veut élever, en sorte que les pièces qu'il faudra employer pour cela n'aient que le moins de frottement qu'il est possible, et qu'elles composent un tout qui puisse être placé commodément dans l'endroit où la machine doit jouer, en n'occupant que la place qu'il lui faut indispensablement.

Description d'une nouvelle pompe pour les épuisements.
Planche 6. Fig. 1, 2 et 3.

769. Tandis que je me trouve engagé dans des remarques critiques sur les machines propres aux épuisements, je saisis l'occasion de parler d'une pompe de nouvelle invention, developpée sur la planche sixième. La première figure en représente l'élévation vue par derrière lorsqu'elle est toute montée, et la troisième le profil vu de côté. C est une caisse percée en différents endroits dans le fond et par derrière pour l'entrée de l'eau, afin que les ordures qui s'y trouveraient mêlées ne la suivent pas. Le

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

devant de cette caisse est fait en portion de cercle, ayant pour centre celui des tourillons d'un clapet E distinctement représenté par la seconde figure. Ce clapet, dans le milieu duquel est une soupape, est mis en mouvement par le moyen des leviers F, F.

Sur la caisse est attaché un tuyau A ou B, ayant au fond une soupape G, qui s'ouvre et se ferme alternativement avec celle du clapet. Quand ce clapet baisse, sa soupape s'ouvre, et l'eau passe à travers; quand il s'élève, cette soupape se referme, et l'eau qui est au-dessus ne peut plus sortir de la partie de la caisse où elle est renfermée, et que l'on remplit entièrement par une semblable manœuvre. Alors continuant à faire jouer le clapet, l'eau qui se trouve foulée contre la surface supérieure de la caisse ouvre la soupape G, passe dans le tuyau où elle monte insensiblement jusqu'à la décharge; car étant une fois entrée dans ce tuyau, elle n'en peut plus sortir, la soupape G se refermant toutes les fois que le clapet baisse. Je passe sous silence les pièces qui peuvent rendre cette pompe solide et commode, les figures en disant assez pour ne pas m'y arrêter.

770. L'auteur de cette pompe croyant avoir fait une découverte bien importante, la fit jouer avec beaucoup de mystère devant plusieurs personnes de marque qui paraissaient s'y intéresser, la jugeant fort utile pour les ouvrages de la fortification de la place où on en fit l'essai. J'ignore quelle en a été la suite, mais je ferai observer qu'elle a deux défauts essentiels. Le premier, que l'eau ne monte que par intervalle quand le clapet se lève, le temps qu'il met à descendre étant en pure perte. Le second, auquel on n'a peut-être point fait attention, que la puissance ne peut jamais produire un effet proportionné à la force qu'elle emploie pour faire jouer le clapet, parce qu'elle a à surmonter le poids de la colonne d'eau qui aurait pour base la superficie du clapet, et pour hauteur celle du tuyau, comme on en sera convaincu en se rappellant ce qui a été dit dans les articles 349,352, au lieu que, selon l'exposé de l'auteur, elle devait soutenir seulement le poids de celle que comprend le tuyau, ce qui est bien différent.

L'effet de la pompe précédente est moindre que celui de la puissance qui la meut.

Pour peu que l'on fasse réflexion à ces deux inconvénients, on conviendra que la même puissance appliquée à un chapelet vertical sera capable d'un bien plus grand effet, parce que la résistance qu'elle aura à surmonter sera proportionnée à la base et à la hauteur d'une colonne d'eau qui montera sans interruption.

771. Quand les épuisemens ne doivent se faire qu'à une hauteur médiocre, on a recours à des machines beaucoup plus simples que les précédentes. Le fréquent usage que l'on fait en pareil cas de celle que l'on nomme *hollandaise*, m'engage à en parler, quoiqu'elle soit fort connue.

Examen des machines appelées *hollandaises*, ou *épuise-volantes*. Pl. 6, fig. 5.

Elle est composée de cinq morceaux de planches, formant ensemble une espèce de *cuillère* emmanchée d'une gaule suspendue à trois perches, liées ensemble de la manière qu'on voit exprimée dans le dessin.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Comme la manœuvre de cette machine se réduit à la balancer et à la diriger de façon qu'après avoir puisé l'eau, elle la jette de l'autre côté du bâtardeau, je ne m'y arrêterai pas. J'ajouterai seulement qu'un manœuvre ne peut épuiser en deux *vibrations* qu'un demi-pied cube d'eau pendant le temps de 4 secondes; ce qui revient à 450 pieds par heure.

772. On voit que cette machine, dont beaucoup de gens font cas, ne répond pas au grand avantage qu'on croit en tirer. En ayant plusieurs fois calculé l'effet, il m'a paru qu'il ne pouvait guère aller plus loin que celui que nous venons d'estimer, et même le plus souvent emploie-t-on deux hommes.

Si l'on se rappelle encore (742) que quatre manœuvres appliqués à un chapelet peuvent épuiser par heure 2780 pieds cubes à 8 pieds de hauteur, ce qui revient à 695 pour l'effet de chacun; on conviendra qu'il s'en faut beaucoup que celui qui fait agir la hollandaise puisse aller jusques-là, quoiqu'il n'élève l'eau qu'à quatre pieds. Cela vient de ce qu'on perd ici près des trois quarts du temps, parce que la puissance ramène la hollandaise vuide, laquelle fait encore ensuite sans agir une demi-vibration pour aller puiser l'eau, qui ne peut d'ailleurs monter que par une ligne courbe, c'est-à-dire par le chemin le plus long. Cependant on a coutume de juger de l'effet de cette machine par la célérité de son mouvement, sans faire attention que la plus grande partie n'y contribue qu'indirectement (*fg*).

Usage des auges à soupape pour les épuisements.
Pl. 6, Fig. 6 et 7.

773. Il y a encore une autre manière d'élever l'eau à 3 ou 4 pieds de hauteur, par le moyen d'une espèce d'auge, dont le plan et l'élévation sont représentés par les figures 6 et 7 : au fond est une soupape ou petite trape A, qui s'ouvre quand on plonge dans l'eau la partie de l'auge à laquelle elle répond, et qui se referme quand on relève l'auge pour faire couler de l'autre côté du bâtardeau l'eau qu'on a puisée.

Pour ne point perdre le temps que l'auge emploie à descendre, on peut

---

Remarques sur les avantages qu'offre l'emploi de la hollandaise.

(*fg*) La machine dont il s'agit ici ne paraît pas mériter la condamnation dont l'auteur la frappe, du moins en adoptant le résultat qu'il donne sur son produit. $\frac{1}{8}$ de pi. cube d'eau élevé à 4 pi. en une seconde, revient à $5^k,566$ élevés à un mètre dans le même temps; et quand on ne supposerait que 6 heures de travail par jour, l'effet utile journalier serait d'après cela de 120000 kil. élevés à un mètre, c'est-à-dire plus grand que celui qu'on obtient de la plupart des autres machines.

On peut remarquer sur celle-ci que l'homme qui la fait mouvoir ne soutient qu'une petite partie du poids de l'eau qu'il élève, son effort étant employé presque entièrement à lui imprimer sa vîtesse; et que l'eau quitte la machine avant d'avoir atteint la hauteur à laquelle elle est élevée, en sorte que la vîtesse qu'elle possède à cet instant n'est point perdue pour l'effet utile, mais est employée à faire parcourir à cette eau le reste de la hauteur à laquelle elle doit parvenir.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

la faire double, comme elle est représentée dans la quatrième figure, où l'on voit qu'elle doit balancer sur un essieu par le moyen de deux hommes appliqués à chaque bout. Comme l'eau doit se vider par un trou qui répond à cet essieu, il en coulera sans cesse, parce que tandis qu'un côté en fournira, l'autre en puisera de nouvelle (*fh*). FIGURE 4.

774. Quand on est obligé de faire des épuisements dans un terrein où les sources sont abondantes, et où l'eau doit être élevée à 3 ou 4 pieds, comme dans les deux exemples précédents, il n'y a point de voie plus expéditive que de faire travailler avec beaucoup de vigueur un grand nombre de manœuvres à qui l'on met en main des *baquets*, *sceaux*, *vans*, et autres instruments propres à puiser l'eau, sur-tout quand on veut travailler dans la mer, où il faut agir avec toute la diligence possible pour profiter de quelques heures que l'on peut seulement gagner par jour, et où les machines ne peuvent guere être d'usage, par la difficulté de les soutenir contre l'impétuosité des flots qui pourraient tout-à-coup les emporter et les mettre en pièces. Comme cette manœuvre est des plus simples, et qu'elle se trouve sensiblement exprimée sur la planche septième, ce serait m'arrêter à la minutie que d'en parler davantage (*fi*).

Manière la plus prompte de faire les épuisements à force de bras, sans le secours d'aucune machine, lorsqu'il ne faut élever l'eau qu'à une hauteur médiocre. PLANCHE 7.

(*fh*) Je ne pense pas que les auges à soupapes puissent offrir à beaucoup près les mêmes avantages que la hollandaise, à raison sur-tout de la manière désavantageuse dont les hommes agissent, de l'effort inutile qu'ils doivent faire dans la disposition des fig. 6 et 7 pour soutenir une partie du poids de l'auge, et de la fatigue que doit leur causer le choc qui a lieu lorsque l'auge retombe dans l'eau. Ces présomptions sont confirmées par les résultats recueillis sur une machine de cette espèce, lors de la fondation du pont d'Orléans (Perronet, *Description des projets et de la construction des ponts*, etc., t. 2, p. 21). Elle était manœuvrée par 20 hommes, 10 à chaque bout, et élevait 150 fois en un quart d'heure, 4 pi. cub. d'eau à 3 pi. de hauteur. Cela revient $4^{mc},0185$ d'eau élevés à un mètre de hauteur, par heure et par homme. On ne dit point précisément combien de temps les hommes travaillaient dans la journée, mais seulement que « c'était un travail modéré, n'exi- « geant point de relais, si ce n'est pour la nuit », d'où l'on peut conclure que la durée du travail journalier était de 12 heures. Chaque homme élevait donc 48^{mc} d'eau à un mètre de hauteur dans la journée; effet utile extrêmement faible, et au-dessous même de celui qu'on obtient en faisant puiser l'eau avec des seaux tenus à la main, comme on le verra dans la note suivante. Cette machine a été abandonnée parce que l'agitation qu'elle communiquait à l'eau dégradait les maçonneries.

Remarques sur la faiblesse du produit obtenu avec les auges à soupaper.

(*fi*) Perronet a donné (*Description des projets et de la construction des ponts*, etc. t. 2, p. 21) quelques observations sur l'effet utile produit par des hommes employés au baquetage de la manière indiquée sur la pl. 7. Dans une première expérience, chaque homme élevait avec des seaux $0^{mc},034$ d'eau par minute à $1^{m},79$ de hauteur; et dans une seconde expérience $0^{mc},069$ d'eau à $0^{m},97$ de hauteur dans le

Quel est l'effet utile produit par les hommes employés au baquetage.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Description d'une nouvelle machine pour élever l'eau.

775. Il y a peu de machines parmi celles que l'on propose tous les jours comme nouvelles, qui le soient effectivement. Ce n'est souvent qu'un même temps. Les manœuvres travaillaient 12 heures par jour. Cela indique un effet utile journalier $= 46000^{k \times m}$. Parmi les machines en usage pour les épuisements, il n'en est presque aucune qui ne donne un résultat plus avantageux.

Quand un homme élève l'eau par le moyen d'un seau, le seau doit être suspendu à l'extrémité d'un levier, ou à une corde passant sur une poulie.

Quand on veut élever de l'eau à peu de hauteur au moyen d'hommes qui la puisent avec un seau dans le réservoir inférieur, il faut suspendre le seau à l'extrémité d'un grand levier soutenu sur un point d'appui, et dont l'autre extrémité est chargée d'un contre-poids. Alors c'est l'action du contre-poids qui élève l'eau, et l'homme n'agit plus que pour verser le seau et pour le faire descendre quand il est vide. Cette disposition offre un double avantage, en ce que l'effort de l'homme s'exerçant de haut en bas, il peut s'aider de son poids, tandis que son poids lui nuit au contraire dans la disposition précédente; et en ce que cet effort est réduit au poids de l'eau que le seau contient, abstraction faite du frottement sur le point d'appui du levier. L'élévation du poids seul du seau, quand il n'est point supporté de cette manière, consomme inutilement plus du $\frac{1}{6}$ de l'action journalière (Gauthey, *Construction des ponts*, t. 2, p. 225).

Au moyen de la disposition qui vient d'être indiquée, il est vraisemblable qu'on obtiendrait d'un manœuvre un effet utile journalier peu différent de celui qu'il fournit dans le battage des pieux, c'est-à-dire d'environ $70000^{k \times m}$. C'est aussi le résultat adopté par Coulomb (*Mémoires de l'institut, sciences physiques et mathématiques*, t. 2), pour l'effet utile produit par les hommes qui tirent de l'eau d'un puits au moyen d'une corde passant sur une poulie, disposition qu'il faut employer quand le puits est profond.

Disposition pour l'arrosage des terres en Égypte. Pl. L, Fig. 5.

L'emploi d'un seau suspendu à l'extrémité d'un levier est très-fréquent en Égypte, où l'on élève ainsi l'eau du Nil pour l'arrosage des terres (*Voyage d'Egypte, Etat moderne*, t. 1, *contenant les arts et métiers*, explic. de la pl. 7). La fig. 5, pl. L, montre la disposition employée à cet effet. Une traverse est supportée sur deux piliers en terre séchée A, et on lui attache les leviers B, à l'extrémité desquels sont suspendus les seaux C, faits en feuilles de palmier. Les hommes, placés sur la banquette M, saisissent les tiges par lesquelles les seaux sont suspendus, les font plonger dans l'eau inférieure en soulevant les contre-poids D formés de rondelles de terre séchée au soleil, puis les versent dans la rigole N faite en terre, mais dont l'entrée est garnie d'une natte, pour que le versement de l'eau ne la dégrade point. L'eau est élevée ainsi par étages, dont chacun a environ $2^m,5$ de hauteur. On a recueilli quelques observations sur l'effet obtenu au moyen de cet appareil. Les seaux ont $0^m,4$ de diamètre et $0^m,25$ de profondeur. Ils élèvent environ $0^{mc},01$ d'eau. Dans une première expérience, l'eau étant élevée à $2^m,3$, un homme élevait 64 paniers en 6 minutes; dans une autre, l'eau étant élevée à $2^m,6$, un homme élevait 50 paniers en 6 minutes. Les hommes ne travaillent que 2 heures par jour. Cela indique moyennement un effet utile de $28000^{k \times m}$ produit dans la journée. Cet effet paraîtrait extrêmement faible, si l'on n'avait point égard à la nature du climat de l'Égyte. Mais on peut appliquer ici la remarque faite par Coulomb, dans le mémoire cité ci-dessus, sur la diminution qu'une grande chaleur apporte à la quantité d'action

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

arrangement de plusieurs pièces en usage depuis long-temps que l'on emploie, même sans chercher à les rendre plus parfaites, comme nous le

---

journalière que l'homme peut fournir, remarque fondée sur l'observation de travaux exécutés à la Martinique, où les hommes ne faisaient pas la moitié du travail qu'ils auraient effectué en France.

Autre disposition adoptée en Égypte. Pl. L, Fig. 6.

La fig. 6, pl. L, représente un autre genre d'arrosage également usité en Égypte, dans le cas où l'eau n'est qu'à 50 ou 60 centimètres au-dessous du sol. Deux hommes font plonger un seau, le soulèvent, et le versent à l'entrée d'une rigole. On n'a point d'observations sur l'effet utile qu'ils produisent.

Appareil proposé par Desaguliers.

Parmi les dispositions au moyen desquelles l'action de l'homme est immédiatement appliquée au vase dans lequel l'eau est élevée, il faut distinguer celle imaginée par le docteur Desaguliers (*Cours de physique expér.*, t. 2, p. 591 de la trad. fr.). Elle consiste à suspendre à l'extrémité de la corde qui soulève le seau, et qui passe sur deux poulies, une trape sur laquelle se place un homme dont le poids fait équilibre à celui du seau plein d'eau, et le fait monter. Quand le seau a versé son eau, l'homme quitte la trape, et monte par un escalier à la hauteur du réservoir supérieur, pendant que le seau descend et fait monter la trape à son tour. Quelques auteurs ont vanté la simplicité de cet appareil. Mais si l'on fait attention à l'évaluation donnée dans le tableau p. 396 de la quantité d'action journalière fournie par un homme qui monte un escalier sans être chargé d'aucun fardeau, et à la perte que l'appareil dont il s'agit doit faire éprouver sur cette quantité d'action, on jugera qu'il est plus que douteux qu'un homme employé de cette manière pût fournir un effet utile aussi grand qu'en agissant sur une manivelle.

Indication des meilleures dispositions à adopter pour élever l'eau avec des seaux.

C'est effectivement à l'aide d'une manivelle qu'il faut faire agir les hommes, lorsqu'on doit tirer de l'eau d'un puits un peu profond, en suspendant deux seaux à une corde qui s'enroule sur l'arbre à laquelle la manivelle est adaptée. Coulomb pensait (*Mémoires de l'institut, sciences physiques et mathématiques*, t. 2) qu'il y a très-peu de circonstances où ce moyen d'élever l'eau par la force des hommes ne soit pas le plus avantageux de tous. Quand on a des seaux très-lourds, et qu'on veut employer un grand nombre d'hommes ou de chevaux, on les fait agir sur des barres horizontales fixées à un arbre vertical sur lequel les cordes des seaux s'enroulent, après avoir passé sur des poulies de renvoi. On peut voir dans le *Traité élémentaire des machines* de M. Hachette, p. 219, la description d'un appareil de ce genre très-bien disposé.

Comme il faut que chaque seau monte et descende alternativement, il est nécessaire que l'arbre sur lequel la corde s'enroule tourne alternativement dans les deux sens, et on est par conséquent obligé de changer le sens d'action du moteur chaque fois qu'un seau est arrivé au haut du puits, et a versé l'eau qu'il contient. On peut toute fois éviter cette sujétion en employant un mécanisme tel que, quoique le moteur agisse constamment dans le même sens, le sens du mouvement de rotation de l'arbre qui porte la corde se trouve changé, à l'instant où le versement de chaque seau s'est opéré. On trouvera dans *l'Essai sur la composition des machines*, p. 45, plusieurs dispositions propres à remplir cet objet. L'une d'elles, imaginée et exécutée avec succès par M. de Prony, est décrite plus en détail dans le tome 2 des *Mé-*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ferons voir dans le second volume, en parlant des pompes. Ce n'est pas que la matière soit épuisée : ceux qui ont du talent pour ces sortes de recherches ne manqueront pas de sujets pour exercer leur sagacité. Nous en voyons un exemple fameux dans la machine qu'on a inventée depuis peu en Angleterre pour élever l'eau par le moyen du feu. En voici une sur la planche huitième, que je n'ai pas dessein de mettre en parallèle avec la précédente, étant fort éloignée d'en avoir le mérite; mais on ne peut lui disputer celui de ne rien tenir de toutes celles que nous connaissons. Elle a été imaginée par M Morel, pour servir à épuiser les eaux jusqu'à une hauteur de 12 à 15 pieds: voici l'explication qu'il en donne.

Elle est formée de gouttières en double zig-zag, arrêté aux pièces de bois A, B, C. Chaque gouttière est composée de trois planches, et aux angles que forment les retours sont des clapets D, E, F, G, représentés au premier zig-zag que l'on voit en profil. Ces clapets s'ouvrent pour laisser entrer l'eau, et ensuite se referment afin d'empêcher qu'elle ne descende.

PLANCHE 8.

Toute la machine est suspendue par des tourillons marqués au point

---

moires de l'institut, sciences physiques et mathématiques, et dans le tome 19 des *Annales des arts et manufactures*. On trouve aussi dans ces ouvrages la description d'un appareil très-ingénieux, également imaginé par M. de Prony, pour faire dételer l'animal appliqué à la machine, dans le cas où, par l'effet de quelque obstacle, son effort se trouverait augmenté au-delà d'une limite donnée. Je saisirai cette occasion de parler d'un perfectionnement assez important, susceptible d'être appliqué aux mécanismes destinés à changer le sens d'un mouvement de rotation, et qui, je crois, a eu lieu pour la première fois dans les machines ingénieuses construites à Rochefort par M. Hubert (Elles sont décrites sommairement dans les *Mémoires sur la marine, les ponts et chaussées de France et d'Angleterre*, par M. Ch. Dupin, p. 363). Le changement dans le sens du mouvement de rotation de l'axe, dont il vient d'être question, s'opère ordinairement par le moyen de roues dentées fixées sur cet axe, susceptibles d'engrener et de désengrener alternativement avec d'autres roues dentées, qui reçoivent l'action du moteur. Si, à l'instant où l'engrenage s'opère, l'axe est obligé de prendre subitement le mouvement de rotation qui va lui être transmis, il se produit une secousse qui fatigue la machine, et fait user très-promptement les dents des roues qui s'engrènent de cette manière. Mais on peut remédier à cet inconvénient, en faisant en sorte que le mécanisme au moyen duquel l'engrenage s'effectue procure à celle des deux roues qui va joindre l'autre, deux mouvements, savoir, un mouvement de translation qui l'en approche, et un mouvement de rotation, en sorte qu'à l'instant où l'engrenage a lieu, la roue fixée sur l'axe ait reçu d'avance la vîtesse de rotation avec laquelle elle va marcher. M. Robertson Buchanan a rassemblé dans le 4e de ses *Practical essays on mill-worck* divers procédés ingénieux usités dans les machines anglaises, pour désengager et réengager les parties d'un mécanisme pendant le mouvement, mais on n'en trouve aucun qui remplisse le but qui vient d'être indiqué.

Condition que doit remplir le mécanisme au moyen duquel le sens du mouvement d'un axe est changé.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

H, qui en est le centre de mouvement. Pour la faire agir deux hommes la tirent alternativement, en lui faisant faire des vibrations assez grandes pour que chaque gouttière s'incline dans un sens opposé à celui où elle se trouve quand elle est en repos. Alors les extrémités I et L passent dans l'eau K, la puisent, et dans le balancement de la machine la partie M se trouvant plus haute que D, l'eau qui aura été puisée y coulera, ouvrira le clapet; et dans un mouvement contraire où D se trouvera plus élevé que E, le poids de l'eau refermera le premier clapet, et elle ira couler vers le second E, qu'elle ouvrira pour faire la même chose qu'auparavant. Ainsi elle montera de gouttière en gouttière jusqu'à la sortie N. Comme la même chose arrrivera au zig-zag adossé au précédent, dont les retours sont disposés dans un sens contraire, il n'y aura point de temps perdu; car, tandis qu'un de ces zig-zags versera l'eau dans la bâche O, l'autre en puisera de nouvelle.

776. L'avantage que je trouve à cette machine (continue M. Morel) c'est d'être simple, et d'avoir toutes ses parties en vue, par conséquent faciles à réparer. Il faut recouvrir le bout des gouttières vers les clapets, parce que l'eau y coulant avec violence suivant la force du balancement, elle ne manquerait pas de rejaillir et de se perdre sans cette précaution.

On peut mouvoir cette machine de trois façons, soit par le moyen de deux hommes que l'on voit appliqués aux cordes qui tiennent à l'anneau P du profil vu de côté, soit par les cordes pendues au bras Q, ou en poussant le bras R. Si un bras ne suffisait pas pour cette dernière manière, on pourrait en mettre deux ou trois pour faire agir autant d'hommes.

S, est l'essieu de la machine qui porte les tourillons.

T, est une jonction de deux gouttières vues en perspective.

V, est un morceau de gouttière, avec l'ouverture pour le passage de l'eau.

X, le même morceau garni de son clapet.

Y, le profil des gouttières, qui ont 8 pouces de largeur sur 9 de hauteur, et qu'on peut faire plus grandes ou plus petites, suivant le besoin.

Si l'on voulait faire une analyse exacte de cette machine, on pourrait y appliquer une théorie assez fine, et qui aurait beaucoup de rapport à celle qui appartient à la vis d'Archimède. Mais comme elle dépend d'un calcul algébrique fort composé, dont le résultat serait plus curieux qu'utile, je n'ai pas cru devoir le rapporter ici, vu le peu de fruit qu'on en aurait tiré, puisque, tout bien considéré, je donnerais encore la préférence au chapelet vertical, parce qu'occupant bien moins de place, il peut être posé indifféremment dans toutes sortes d'endroits, au lieu qu'ici il faut que le puisard ait beaucoup d'étendue, et faire un appareil de charpente pour suspendre la machine, dont je n'aurais peut-être pas fait mention si je n'avais voulu donner des exemples des différentes ma-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

nières dont l'eau peut être élevée, pour faire naître de nouvelles idées à ceux qui travaillent sur ce sujet (*fk*).

Description du tympan dont les anciens se servaient pour les épuisements. Pl. 9, Fig. 5.

777. Entre toutes les machines qui ont été inventées par les anciens pour épuiser l'eau, il paraît que le tympan dont parle Vitruve est celle qui en élève une plus grande quantité à la fois : en voici la description, que je rapporte pour faciliter l'intelligence d'une autre machine faite à son imitation, mais plus ingénieuse et plus parfaite.

Remarques sur la machine proposée par M. Morel. Planche 8.

(*fk*) Pour suppléer à ce que l'auteur a omis, je ferai quelques observations sur la machine de M. Morel. Je remarquerai d'abord que la disposition indiquée sur la figure n'est pas théoriquement la plus avantageuse, et qu'il faudrait que le dernier GN des canaux en zig-zag eût son extrémité dans le plan vertical HA, passant par l'axe de suspension. Supposant cette condition remplie, et faisant abstraction pour le moment de l'obstacle que l'eau éprouve en passant par les clapets qui séparent les canaux, il est aisé de reconnaître qu'à chaque oscillation de la machine, il suffit rigoureusement pour que l'eau puisse couler d'un canal dans l'autre ; que le centre de gravité de toute l'eau qu'elle porte soit élevé verticalement d'une hauteur au moins égale à la hauteur totale à laquelle on élève l'eau divisée par le nombre des canaux. Or la quantité d'eau que la machine verse à chaque oscillation, est celle que contient l'un quelconque des canaux ; par conséquent toute l'eau qu'elle porte est égale à celle élevée à chaque oscillation multipliée par le nombre des canaux : d'où l'on voit que la force appliquée à la machine n'est autre chose que celle nécessaire pour élever l'eau, ou que l'effet utile est égal à la quantité d'action dépensée. On remarquera d'ailleurs qu'au moyen du changement indiqué ci-dessus, l'eau sort de la machine à l'extrémité supérieure avec une vîtesse nulle.

En considérant donc ainsi cet appareil, il parait très-avantageux. Mais on observera d'abord que dans la réalité on sera obligé d'élever à chaque oscillation le centre de gravité de l'eau beaucoup plus haut qu'on ne l'a supposé, et qu'il n'est nécessaire, pour que les canaux en ziz-zag prennent alternativement une situation horizontale; car il faudra que l'eau non-seulement puisse couler d'une extrémité des canaux à l'autre, mais qu'elle sorte entièrement du canal où elle se trouve pour entrer dans le suivant en franchissant le clapet; en sorte qu'il est vraisemblable que les canaux ne pourraient pas se vider entièrement à chaque oscillation, et que la machine se trouverait ainsi chargée d'un poids inutile. Ou remarquera ensuite qu'à l'instant où une oscillation s'achève, l'eau s'élance d'une extrémité de chaque canal à l'autre, va frapper le clapet et la paroi avec violence, et qu'il faut que le moteur qui a tiré la machine pour l'élever, supporte la réaction de ce choc, puisque, après qu'il s'est opéré, la machine doit s'élever encore assez pour que l'eau puisse franchir le clapet, et entrer dans le canal suivant. Ces dernières circonstances ne sont pas susceptibles d'être soumises au calcul, mais on doit présumer qu'elles sont de nature à rendre l'emploi d'une machine de ce genre impraticable. Il vaudrait mieux, si l'on voulait élever l'eau à une grande hauteur, par un mouvement d'oscillation, la monter à plusieurs reprises avec les hollandaises simples dont il est question art. 771.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Le tympan est une grande roue G creuse, formant une espèce de tambour composé de plusieurs ais joints ensemble, bien calfatés et goudronnés, traversés par un essieu B. L'intérieur de ce tambour est divisé en 8 espaces égaux, par autant de cloisons placées sur la direction des rayons. Chaque espace ou cellule a une ouverture A d'un demi-pied de superficie, pratiquée dans la circonférence du tambour pour faciliter l'entrée de l'eau; de plus on creuse le long de l'essieu 8 canaux dont chacun doit répondre à une cellule, afin que l'eau qu'elle contient puisse couler à l'extrémité D pour se décharger dans la bâche E, d'où elle est conduite par l'auge F à l'endroit où l'on veut qu'elle se rende.

Lorsqu'on se sert du tympan pour élever une eau dormante, on l'accompagne d'une autre roue C, dans laquelle des hommes marchent comme dans celle d'une grue. Si l'on a un courant, et qu'on veuille arroser un jardin ou un terrain aride, on peut, en attachant des aubes sur la circonférence du tympan, le faire tourner en se servant de la force du courant même.

Le tympan est une machine des plus défectueuses.

778. Le principal défaut de cette machine est d'élever l'eau dans la situation la plus désavantageuse qu'il soit possible. Car le poids se trouvant toujours vers l'extrémité du rayon, le bras de levier qui lui répond va en croissant dans le quart de circonférence qu'il décrit pour passer du bas de la roue à la hauteur du centre, ce qui fait que la puissance se trouve dans le même cas que si elle était appliquée à une manivelle (108, 109); ainsi il n'agit point uniformément :

M. de la Faye, de l'académie royale des sciences, pour corriger ce défaut, a imaginé la machine que j'ai annoncée, et qui s'est présentée à son esprit après avoir fait ce raisonnement.

Nouvelle machine à l'imitation du tympan, mais incomparablement plus parfaite.

Pl. 9, fig. 6.

779. Quand on développe la circonférence d'un cercle, on décrit une courbe dont tous les rayons sont autant de tangentes au cercle, et autant de perpendiculaires à la courbe décrite (717), qui a pour plus grand rayon une ligne égale à la développée.

Cela posé, ayant un treuil AB dont la circonférence soit un peu plus grande que la hauteur où on veut élever l'eau, développant cette circonférence, faisant un canal courbe dont la courbure suive exactement le chemin CDEFG tracé par la développée : si l'une des extrémités de ce canal trempe dans l'eau qu'on veut élever, et que l'autre aboutisse au treuil, lorsqu'il viendra à tourner l'eau montera selon une direction verticale tangente au treuil, et perpendiculaire au canal en quelque endroit qu'elle puisse être. Ainsi l'action de son poids répondant toujours à l'extrémité d'un rayon horizontal qui en sera le bras de levier constant, la puissance qui élevera ce poids à l'aide d'une roue sera toujours la même, et si le rayon de cette roue est égal à la hauteur où l'on veut élever l'eau, par conséquent égal à la circonférence du treuil, la puis-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sance sera au poids réciproquement comme le rayon du treuil est à sa circonférence, c'est-à-dire à-peu-près comme 1 est à 6.

Pl. 9, Fig. 4. 780. Selon les vues de M. de la Faye la machine doit être composée de 4 canaux semblables à L K I H C, comme on en peut juger par la figure, qui montre que si la machine est mue par un courant dont la direction suive celle de la flèche, venant frapper les aubes A de la roue sur laquelle doivent être appliqués les canaux, l'eau entrera par leur ouverture C, montera de C en E, puis de E en F; et ainsi de suite pour s'aller décharger dans les gouttières.

781. Par cette construction, comme l'observe M. de la Faye, le fardeau à élever fait toujours uniformément le même effort, qui est le moindre qu'il soit possible, pendant que la puissance est appliquée le plus avantageusement qu'il se peut : et ces deux conditions remplies, font la plus grande perfection qu'on puisse desirer dans une machine. Celle-ci élevant l'eau par le chemin le plus court, lui paraît préférable à la vis d'Archimède qui est inclinée, qui ne se vide que d'une très-petite partie de son eau et demeure chargée du surplus, qui est très-considérable, sur-tout quand cette vis est d'un grand volume, comme il faut qu'elle le soit pour en tirer de l'utilité; au lieu que celle-ci se décharge de toute son eau à chaque tour de roue; et comme elle en peut aisément fournir un assez grand volume, ces avantages la rendent recommandable dans une infinité de cas.

La propriété de cette machine montre bien que les spéculations des géomètres ne sont point infructueuses, comme se l'imaginent la plupart de ceux qui n'ont que de la pratique (*fl*).

782. La roue précédente serait la plus parfaite de toutes celles qu'on peut employer pour épuiser l'eau, si elle n'avait pas un désavantage qui

---

Théorie du tympan des anciens.

(*fl*) La théorie du tympan des anciens, tel qu'il est décrit art. 777, s'établit de la même manière que celle du chapelet incliné (voyez la note (*fb*)), et n'en diffère que par une légère modification.

Nommons H la hauteur à laquelle l'eau est élevée, comptée depuis le niveau du réservoir inférieur jusqu'à l'axe de la roue; m la masse de l'eau continuellement contenue dans l'arc s de la roue, compris entre le plan horizontal passant par son axe, et le niveau du réservoir inférieur; V la vîtesse de la circonférence de la roue, P l'effort du moteur, supposé appliqué à cette circonférence.

Le mouvement de la roue étant supposé uniforme, on verra comme dans la note citée, que la quantité d'action imprimée pendant que la roue décrit l'arc s, est $P.s - mg.H$; et qu'à l'instant où l'eau entrant dans la roue prend brusquement la vîtesse de sa circonférence, il se fait une perte de force vive qui, pendant le même intervalle, est exprimée par mV^2. Mais ici cette eau sortant de la roue par un orifice contigu à l'axe, elle n'a plus alors aucune vîtesse circulaire, et par conséquent (en négligeant la considération de la vîtesse que l'eau doit avoir pour s'écouler, comme cela est d'usage dans ce genre de recherches) n'emporte avec elle

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

lui est commun avec le tympan, qui est de ne la pouvoir élever qu'à la hauteur de son demi-diamètre. Comme dans bien des occasions cette

---

aucune force vive. L'équation du mouvement de la roue est donc simplement $P.s - mg.H = \frac{1}{2}mV^2$.

Comme l'effet utile produit pendant l'intervalle de temps que l'on considère est $mg.H$, son rapport à la quantité d'action dépensée $P.s$ est $\frac{mgH}{mg.H + \frac{1}{2}mV^2}$. Ainsi, pour obtenir de cette machine le plus grand effet possible, il faut que sa vîtesse soit infiniment petite, et cet effet est alors égal à la quantité d'action dépensée. On voit d'ailleurs qu'à vîtesses égales, le tympan doit donner théoriquement un produit un peu supérieur à celui du chapelet, et des autres machines où l'eau sort de la roue par un point de sa circonférence.

Le plus grand effet possible a lieu quand la vîtesse est infiniment petite, et est égal à la quantité d'action dépensée.

A l'égard de la modification proposée au tympan des anciens par Lafaye (*Académie des sciences*, 1717), et décrite art. 779 et suivants, on ne peut pas dire ici, à raison de la forme des tuyaux, que l'eau puisée dans le réservoir inférieur prenne brusquement la vîtesse de rotation de la circonférence de la roue, en sorte qu'il n'y a théoriquement aucune force vive perdue dans la machine.

Du tympan de Lafaye.

Je remarquerai d'ailleurs que, dans la pratique, la force vive perdue dans le tympan des anciens à l'entrée de l'eau dans la roue, est dans les cas ordinaires une quantité négligeable, comme on peut s'en assurer par le calcul. A l'égard des autres circonstances d'après lesquelles l'auteur attribue à la machine de Lafaye une si grande supériorité sur l'autre, elles ne doivent dans la réalité lui en conférer aucune. En effet, en multipliant dans le tympan des anciens le nombre des cloisons, on rendra toujours l'effort du moteur aussi constant qu'on puisse le desirer, dans une machine sur-tout qui, par elle-même fait fonction de volant, et si dans la roue de Lafaye l'eau monte par un chemin plus court, elle le parcourt avec une moindre vîtesse, de manière que ces deux circonstances se compensent exactement.

Le tympan, à raison du peu de résistance au mouvement que comporte sa disposition, offre dans la pratique encore plus d'avantage que dans la théorie, sur les roues à godets et autres machines analogues. On conclut effectivement de quelques observations faites à la fondation du pont d'Orléans (*Œuvres de Perronet*, t. 2, p. 20) que 12 hommes qui travaillaient 8 heures par jour élevaient moyennement par heure $12^{mc},34$ d'eau à $2^m,6$ de hauteur. La roue avait $6^m,3$ de diamètre; elle plongeait dans l'eau de $0^m,16$, et faisait 3 tours par minute. L'effet utile journalier produit par chaque homme serait d'après cela d'environ $211100^{k\times m}$. Le tableau de la page 396 porte la quantité d'action journalière fournie par les hommes qui font tourner des roues à chevilles, à $250000^{k\times m}$ environ. Ainsi l'effet utile, si l'on adopte cette évaluation, serait ici les $\frac{4}{5}$ de la quantité d'action dépensée: d'où l'on peut conclure que le tympan est une des machines hydrauliques qui offrent les résultats le plus avantageux. L'emploi fréquent que les anciens faisaient de cet appareil était donc bien entendu.

Effet utile du tympan dans la pratique.

§ 2. Le tympan est la première des machines à élever l'eau décrite par Vitruve. Il indique aussi, pour les cas où l'eau doit être élevée à une hauteur plus considérable, la roue à godets décrite art. 782, et les seaux distribués le long d'une chaîne,

De la machine nommée *pompe spirale*.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

roue ne pourrait point servir, en voici une autre qui élève l'eau plus haut que son centre, dont l'usage est très-fréquent en Espagne.

---

ou la noria dont il a été question dans l'art. 747 et la note (*fd*). Mais ces derniers appareils ne peuvent jamais faire monter l'eau qu'à une hauteur fort limitée. On a depuis imaginé une machine qui est une sorte d'extension du tympan, et qui, avec des dimensions moins grandes que les siennes, peut élever l'eau à une hauteur considérable. Cet ingénieux appareil, nommé *pompe spirale* par les auteurs allemands et anglais, est peu connu en France, et il n'en est fait aucune mention dans l'*Essai sur la composition des machines*, et dans le *Traité élémentaire des machines* de M. Hachette. Il a été inventé à Zurich par André Wirtz, ferblantier, et exécuté avec succès dans la Limmat, où il élevait l'eau chez un teinturier à plus de 25^m de hauteur. Sa première description a paru dans le 3e vol. des *Transactionum Tigurinarum*. Daniel Bernouilly s'en est occupé (*Acad. Petropol. nov. comm.* 1772, t. 17), et on trouve sur le même sujet quelques observations du père Ximenès dans le t. 12 de la *Raccolta* des auteurs italiens sur l'hydraulique.

PLANCHE M. FIGURES 1 et 2.

La pompe spirale consiste dans un tuyau ABCDE...FG enroulé sur la surface d'un tronc de cône dont l'axe est horizontal, et offrant un nombre de révolutions ou spires plus ou moins considérable, suivant que l'eau doit être élevée plus ou moins haut. La machine est plongée dans le réservoir inférieur jusqu'à la hauteur de son axe, et on la fait tourner dans le sens indiqué par la flèche. L'eau s'introduit dans le tuyau quand son extrémité ouverte A plonge dans le réservoir, et par l'effet du mouvement de rotation parvient de spire en spire à l'autre extrémité G, où elle est reçue dans une capacité pratiquée à l'extrémité du tambour conique. Cette capacité communique avec le tuyau vertical fixe MN, dans lequel l'eau s'élève par l'effet de l'excès d'élasticité acquis par l'air renfermé dans les spires du tuyau mobile ABCDE...FG (on trouvera dans le volume suivant les notions sur les fluides élastiques qui sont nécessaires pour entendre ce qui suit).

Explication du jeu de cette machine. PL. M, FIG. 3.

On concevra facilement le jeu de la machine, en se rappelant ces baromètres formés avec un tuyau replié plusieurs fois sur lui-même, au moyen desquels on fait équilibre à la pression atmosphérique sans avoir besoin d'une colonne de mercure de $0^m,76$ de hauteur. L'espace A est vide. L'air contenu en BC supporte la pression de la colonne de mercure AB. L'air contenu en DE supporte la tension de l'air contenu en BC, plus la pression de la colonne de mercure CD, c'est-à-dire la pression des deux colonnes AB et CD réunies. Enfin la force d'élasticité de l'air contenu en DE agissant au haut de la colonne EF, on voit que la pression atmosphérique agissant à l'extrémité ouverte du tuyau F, devra être égale à la pression résultant du poids des trois colonnes AB, CD, EF, comme si elles étaient l'une au-dessus de l'autre dans un seul tuyau vertical. L'équilibre s'établit d'une manière analogue dans la pompe spirale. En supposant cette machine plongée dans l'eau jusqu'à l'axe, et la faisant tourner dans le sens marqué par la flèche, l'eau et l'air s'introduiront alternativement par l'extrémité du tuyau A, et se placeront dans les spires successives de la manière indiquée sur la fig. 2. La pression atmosphérique agissant en A, l'air contenu en BC supportera cette pression, plus celle due au poids d'une colonne d'eau dont la hauteur est la différence de niveau des points C et D. L'air contenu en DE supportera la pression précédente,

PLANCHE M. FIGURES 1 et 2.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Sur un côté des jantes sont attachés des godets A en forme de boîtes, et de l'autre sont les aubes I, qui reçoivent l'impression du courant EG H

Description d'une roue à godets.

plus celle due à la différence de niveau des points D et E. Et ainsi de suite jusqu'à l'air contenu dans la première spire GF, lequel supportera la pression atmosphérique, plus celle due à la somme des différences de niveau des extrémités des arcs occupés par l'eau dans toutes les spires. Mais d'une autre part, cet air contenu en GF supporte la pression atmosphérique, plus celle due à la hauteur verticale du tuyau MN. On voit donc que l'eau pourra s'élever dans ce tuyau à une hauteur verticale égale à la somme des différences de niveau des extrémités des arcs occupés par l'eau dans toutes les spires du tuyau mobile. C'est par cette condition que le nombre des spires de ce tuyau est déterminé, d'après la hauteur à laquelle l'eau doit être élevée. L'air introduit dans la machine à chaque révolution, qui passe de spire en spire avec l'eau, s'échappe au travers de la colonne d'eau contenue dans le tuyau MN, et en se mélangeant avec elle, tend à diminuer la pesanteur spécifique de cette colonne. Si ce mélange était plus ou moins parfait, il en résulterait que l'eau s'y trouverait soutenue à une hauteur qui surpasserait plus ou moins la somme des hauteurs verticales des colonnes d'eau contenues dans les spires du tuyau mobile.

Comment on détermine le nombre des spires du tuyau, d'après leur diamètre et la hauteur à laquelle l'eau est élevée.

Il est évident que cette machine doit être disposée de manière qu'elle ne contienne point d'eau inutile, condition qui sera remplie si le nombre des spires n'est pas plus considérable qu'il ne doit être, et si, à chaque tour de la roue, l'eau et l'air qui s'introduisent dans la première spire sont reçus en entier dans la spire suivante, puis dans la troisième, et ainsi de suite. On remplira cette condition en réglant les dimensions des spires de manière que les volumes des arcs d'eau étant tous égaux entre eux, les volumes des arcs d'air aillent en diminuant d'une spire à l'autre dans la même raison qu'augmente la pression que l'air y supporte. La diminution des volumes des spires, à partir de la première ABC, peut s'effectuer de deux manières principales: en conservant par-tout au tuyau le même diamètre, et le roulant sur un cône; ou en diminuant progressivement son diamètre à partir de l'extrémité A, et le roulant sur un cylindre. La première disposition paraît devoir être en général d'une exécution plus facile, mais toutes les deux sont également praticables.

Voici maintenant comment on pourra déterminer d'une manière suffisamment approchée le nombre et les dimensions des spires successives, que, pour plus de simplicité, je considérerai comme des cercles. Soit E le volume d'eau que la roue doit élever à chaque révolution, R le rayon de la première spire ABC, Ω la section du tuyau dans cette spire. La roue étant plongée dans le réservoir sur la moitié de sa hauteur, on peut admettre sans erreur dangereuse que la première spire puise alternativement des volumes d'eau et d'air égaux à E, en sorte qu'on a d'abord la relation $\pi R.\Omega = E$. Soit ensuite H la hauteur verticale à laquelle on élève l'eau, η la hauteur d'une colonne d'eau qui fait équilibre à la pression atmosphérique, r le rayon de la dernière spire FG, et ω la section transversale du tuyau dans cette spire. L'eau étant incompressible, conservera dans cette spire le volume E qu'elle avait dans la première: mais l'air, qui en s'introduisant dans la première spire supportait la pression η, étant soumis dans la dernière à la pression $\eta + H$, son volume

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

PLANCHE 4. FIGURES 2 et 4.

dans lequel trempent les godets qui se remplissent par un trou qu'ils ont dans l'angle d'une de leurs faces; et lorsqu'ils sont parvenus au sommet

---

primitif E y deviendra $E.\frac{\eta}{\eta+H}$. Le volume total de la dernière spire F_1G devra donc être $E+E.\frac{\eta}{\eta+H}$, ou $E.\frac{2\eta+H}{\eta+H}$, ce qui fournit la seconde relation $2\pi r.\omega = E.\frac{2\eta+H}{\eta+H}$. Les rayons et les grosseurs des spires extrêmes étant fixés de manière à satisfaire à ces deux équations, on répartira également leurs différences sur toutes les spires intermédiaires. Pour trouver ensuite le nombre des spires, on déterminera dans la dernière l'espace occupé par l'eau, et celui FG occupé par l'air, en divisant sa circonférence dans le rapport des quantités E et $E.\frac{\eta}{\eta+H}$: on connaîtra ainsi la hauteur verticale de la colonne d'eau contenue dans cette spire, laquelle sera égale au sinus verse de l'arc FG, et que je nommerai h. La hauteur de la colonne contenue dans la première spire diffère peu de son diamètre $2R$; et on peut d'ailleurs admettre que les hauteurs verticales des colonnes d'eau contenues dans toutes les spires iront en augmentant uniformément depuis h jusqu'à $2R$, en sorte que leur hauteur moyenne sera $R+\frac{1}{2}h$. Il suit de là qu'en nommant n le nombre des spires, la somme de ces hauteurs sera $n(R+\frac{1}{2}h)$. On aura donc pour déterminer n l'équation

$$n\left(R+\tfrac{1}{2}h\right)=H.$$

Théorie mécanique de la pompe spirale.

Je viens maintenant à la théorie de la pompe spirale, et j'observe qu'ici, comme dans le tympan de Lafaye, l'eau du réservoir inférieur, en entrant dans la roue, ne prend point brusquement sa vîtesse. De plus, lorsque l'eau quitte la machine à l'extrémité supérieure N du tuyau d'ascension, la vîtesse qu'elle possède alors dépend du diamètre du tuyau dans cet endroit, et de la vîtesse que l'on imprime à la roue, et peut être rendue fort petite; en sorte que l'eau peut être regardée comme n'emportant avec elle qu'une force vive très-petite, et dont la considération est tout-à-fait négligeable. D'après cela, si l'on fait abstraction des frottements et autres résistances analogues, on voit que la force que le moteur devra fournir n'aura d'autre effet à produire, pour chaque tour de la roue, si ce n'est d'élever à la hauteur H le volume d'eau E, et de comprimer le même volume d'air E de manière que sa force élastique, qui faisait d'abord équilibre à une colonne d'eau de la hauteur η, puisse supporter une colonne de la hauteur $\eta+H$.

La quantité d'action nécessaire pour élever le volume d'eau E à la hauteur H est, en nommant Π le poids de l'unité de volume d'eau, représentée par $\Pi E.H$.

Quant à la quantité d'action nécessaire pour comprimer l'air, on la trouvera comme il suit. Supposons le volume d'air E contenu dans un cylindre dont la section transversale est l'unité de surface, et qu'un piston appliqué à une des extrémités de la colonne d'air soit poussé de manière à diminuer sa longueur. Quand ce piston aura parcouru un espace quelconque e, le volume de l'air sera devenu $E-e$. Sa force élastique qui était d'abord $\Pi\eta$, sera devenue $\Pi\eta.\frac{E}{E-e}$; et cette force est précisément la pression qu'il faudra exercer contre le piston. Donc l'élément différentiel de la quantité d'action employée à comprimer l'air est $\Pi\eta.\frac{E}{E-e}\,de$, dont

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

de la roue, comme on le voit en B, ils se vuident dans un bac CD, d'où l'eau est conduite où on le juge nécessaire.

---

l'intégrale, qui doit être nulle quand $e = 0$, sera $\Pi\eta . E . \log . \frac{E}{E-e}$. Cette intégrale est ici complète quand la force élastique de l'air est devenue $\Pi(\eta + H)$, c'est-à-dire quand $\Pi\eta . \frac{E}{E-e} = \Pi(\eta + H)$, ou $\frac{E}{E-e} = \frac{\eta+H}{\eta}$. La valeur de la quantité d'action employée à opérer la compression est donc $\Pi\eta . E . \log . \frac{\eta+H}{\eta}$; d'où il résulte que la quantité d'action totale dépensée par le moteur à chaque tour de la roue est exprimée par $\Pi E\left(H + \eta . \log . \frac{\eta+H}{\eta}\right)$. L'effet utile opéré à chaque tour est d'ailleurs $\Pi E . H$. Ainsi le rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée est $\frac{H}{H + \eta . \log . \frac{\eta+H}{\eta}}$.

Rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée, en n'ayant pas égard à l'effet du mélange de l'air et de l'eau dans le tuyau d'ascension.

La valeur de ce rapport est d'autant plus grande que H est plus grand. Quand $H = 0$ cette valeur est $\frac{1}{2}$, et quand $H = \infty$ elle est 1. D'où il résulte que l'effet produit par la machine n'est jamais au-dessous de la moitié de la quantité d'action dépensée, et qu'il approche d'autant plus d'être égal à cette quantité d'action que la hauteur à laquelle on élève l'eau est plus grande.

La pompe spirale n'est pas de nature à être employée quand on veut élever l'eau à une petite hauteur, telle que 2 ou 3^m. Ce serait alors le tympan ordinaire dont il conviendrait de se servir. Pour juger du degré d'avantage qu'elle peut offrir pour une hauteur plus grande, supposons d'abord que l'on ait $H = \frac{1}{2}\eta = 5^m, 15$ environ: la formule précédente (en faisant attention que le logarithme est népérien) prendra à-peu-près la valeur $\frac{5}{9}$. En faisant ensuite $H = \eta = 10^m, 3$, elle prendra la valeur $\frac{3}{5}$; en faisant $H = 2\eta = 20^m, 60$, elle deviendra $\frac{2}{3}$. Il paraît donc que cette machine fait perdre une portion assez considérable de la force qui lui est appliquée.

Je remarquerai maintenant que le résultat précédent offre véritablement une limite au-dessus de laquelle l'effet utile produit par la machine doit toujours se trouver. En effet l'eau et l'air, qui sont entraînés alternativement dans le tuyau d'ascension, s'y mêleront plus ou moins, de manière que ce tuyau doit être considéré comme contenant un mélange d'eau et d'air, dont la pesanteur spécifique est moindre que celle de l'eau pure. Il suit de là que la hauteur verticale du tuyau d'ascension peut, comme on l'a déja observé, être plus grande que la hauteur H de la colonne d'eau capable de faire équilibre à l'élasticité de l'air contenu dans la dernière spire FG; et par conséquent, sans que l'action du moteur soit augmentée, que l'eau peut parvenir à une plus grande hauteur qu'on ne l'a supposé ci-dessus.

On peut se rendre compte comme il suit du changement que ce mélange de l'eau et de l'air, s'il était parfait, apporterait dans les résultats. Soit h la longueur verticale que le volume d'eau E occupe dans le tuyau d'ascension, supposée constante pour plus de simplicité; et admettons que les volumes d'eau et d'air qui arrivent au pied de ce tuyau y montent successivement, de manière que la colonne qu'il contient soit composée alternativement de portions d'eau dont le volume

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Toutes les roues à godets qui sont en usage ont le défaut de perdre une partie de l'eau qu'elles élèvent, parce que les godets s'inclinant à

$= E$, et de portions d'air dont le volume va en augmentant, à mesure que cet air, en s'élevant, se trouve déchargé d'une partie de la pression qu'il supporte. Cela posé, en partant de l'extrémité inférieure du tuyau, on trouvera d'abord une colonne d'eau dont la hauteur verticale sera h, puis une colonne d'air. Ce dernier, qui supportait dans la dernière spire une pression due à la hauteur $\eta + H$, ne supportera plus maintenant qu'une pression due à la hauteur $\eta + H - h$; en sorte que son volume, qui est E quand la pression est η, sera $E.\frac{\eta}{\eta+H-h}$: il occupera donc dans le tuyau une hauteur verticale $= h.\frac{\eta}{\eta+H-h}$.

On trouvera ensuite une seconde colonne d'eau dont la hauteur sera encore h; puis une seconde colonne d'air, où la pression ne sera plus due qu'à la hauteur $h+H-2h$ (en négligeant le poids de l'air par rapport à celui de l'eau), et qui occupera par conséquent dans le tuyau un espace vertical $= h.\frac{\eta}{\eta+H-2h}$.

En continuant de la même manière, et faisant la somme des hauteurs des colonnes d'eau et d'air, on voit que n colonnes d'eau et n colonnes d'air occuperont dans le tuyau une longueur verticale exprimée par

$$nh+h\left(\frac{\eta}{\eta+H-h}+\frac{\eta}{\eta-H-2h}+\frac{\eta}{\eta+H-3h}+\text{etc.....}+\frac{\eta}{\eta+H-nh}\right).$$

On remarquera maintenant que la hauteur à laquelle l'eau pourra s'élever est fixée par la condition que la pression, dans la dernière colonne d'air, soit égale à la pression atmosphérique; c'est-à-dire que si n est le nombre total des colonnes d'eau et d'air, on aura $\eta + H - nh = \eta$, d'où $n = \frac{H}{h}$.

Mettant cette valeur dans la formule précédente, on a pour la hauteur à laquelle l'eau peut être élevée, $H + h\left(\frac{\eta}{\eta+H-h}+\frac{\eta}{\eta+H-2h}+\frac{\eta}{\eta+H-3h}+\text{etc....}+1\right)$.

Il faut observer ensuite que quand on ne considérera plus la colonne en équilibre, mais en mouvement par l'effet du jeu de la machine, et qu'il s'agira de fixer la hauteur à laquelle l'eau pourra verser par l'extrémité supérieure du tuyau, et non pas celle à laquelle elle pourrait être soutenue, il faudra retrancher de la hauteur précédente la quantité h. On aura donc définitivement pour la hauteur à laquelle l'eau pourra parvenir

$$H+h\left(\frac{\eta}{\eta+H-h}+\frac{\eta}{\eta+H-2h}+\frac{\eta}{\eta+H-3h}+\text{etc.....}+1\right)-h.$$

Rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée, en supposant que l'air est complètement mélangé à l'eau dans le tuyau d'ascension.

Par conséquent la valeur trouvée ci-dessus pour le rapport entre l'effet utile et la quantité d'action dépensée deviendra

$$\frac{H+h\left(\frac{\eta}{\eta+H-h}+\frac{\eta}{\eta+H-2h}+\frac{\eta}{\eta+H-3h}+\text{etc.. ....}+1\right)-h}{H+\eta.\log.\frac{\eta+H}{\eta}}.$$

Cette quantité peut varier en raison des valeurs attribuées à h et à H. En faisant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

mesure qu'ils montent, la répandent quand ils ont passé au-dessus du centre, et n'en versent dans le bac qu'environ les deux tiers de celle qu'ils avaient puisée.

---

varier h, on voit qu'en supposant $h=0$, où la section horizontale du tuyau infinie, la formule se réduit à $\frac{H}{H+\eta.\log.\frac{\eta+H}{\eta}}$, ce qui est la plus petite valeur qu'elle puisse avoir. Il y a donc de l'avantage à placer le tuyau verticalement, et à lui donner un petit diamètre. Mais on ne peut pas diminuer la section horizontale du tuyau de manière à rendre $h > H$, et si l'on fait $h=H$, la formule ci-dessus devient encore $\frac{H}{H+\eta\log.\frac{\eta+H}{\eta}}$.

La valeur de h qui répond au maximum d'effet est donc comprise entre zéro et H, mais la nature de l'expression précédente ne permet pas d'obtenir l'expression de cette valeur sous forme finie, et on ne pourrait que la calculer dans chaque cas particulier, après avoir fixé celle de H en fonction de η.

Si l'on fait maintenant varier H dans l'expression du rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée, en supposant que h ne varie pas, on arrive aux mêmes conclusions que ci-dessus, c'est-à-dire que ce rapport est $\frac{1}{2}$ quand $H=0$, augmente avec H, et devient 1 quand H est infini.

Pour se former une idée de l'augmentation de l'effet utile qui peut résulter de la nouvelle considération introduite dans le calcul, on supposera que $H=\eta=10^{m}$, et que $h=1^{m}$. Alors le rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée deviendra, en divisant tout par 10,

$$\frac{1+\frac{1}{19}+\frac{1}{18}+\frac{1}{17}+\frac{1}{16}+\frac{1}{15}+\frac{1}{14}+\frac{1}{23}+\frac{1}{12}+\frac{1}{11}}{1+\log.2.}=\frac{1,610}{1,693}=0,98;$$

c'est-à-dire que l'effet utile serait presque égale à la quantité d'action dépensée, tandis que si l'on n'a point égard à la diminution de poids résultant du mélange de l'air avec l'eau, il en est seulement les $\frac{3}{5}$ environ.

On peut juger par cet exemple que toutes les fois que la hauteur à laquelle la pompe spirale élevera l'eau sera un peu considérable, la valeur théorique de l'effet utile, si les hypothèses ci-dessus étaient conformes aux effets naturels, différerait fort peu de la quantité d'action dépensée. Mais il n'est pas certain que l'eau et l'air prennent exactement dans le tuyau d'ascension la disposition régulière d'après laquelle les formules ont été établies, et on peut croire que l'air s'échappera à travers l'eau, et ne la soutiendra point à la hauteur indiquée par ces formules. Cette circonstance n'étant point de nature à être soumise au calcul, je ne pousserai pas plus loin ces recherches, et je me contenterai d'avoir établi les deux limites entre lesquelles, abstraction faite des résistances provenant des frottements, l'effet utile de la pompe spirale est nécessairement compris.

Disposition à donner à la pompe spirale dans la pratique.

Quant au degré d'avantage que cette machine peut offrir dans la pratique, il me paraît qu'en la faisant tourner lentement, donnant au tuyau un diamètre tel que l'eau y prenne peu de vîtesse, évasant les extrémités des tuyaux et arrondissant leurs coudes,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Description d'une autre roue beaucoup plus parfaite que la précédente.

Planche 9. Fig. 1, 2, 3.

783. Pour remédier à cet inconvénient, voici une autre roue accompagnée de seaux B, suspendus librement à des boulons de fer traversant un double rang de jantes, à l'un desquels sont attachés les aubes F, qui reçoivent le choc du courant GH. Comme les seaux, après s'être remplis, se maintiendront dans leur situation naturelle en parcourant la demi-circonférence de la roue, il arrivera qu'étant parvenus au sommet, où une barre D les contraint de s'incliner, ils verseront dans le bac C toute l'eau qu'ils ont épuisée; et cette opération ne durant qu'un instant, on voit qu'on peut laisser prendre à la roue toute la vîtesse qu'elle peut recevoir du courant, au lieu que celle de la précédente doit être proportionnée au temps qu'il faut aux godets pour se vuider.

Manière de calculer tout ce qu'il peut y avoir d'intéressant dans une roue à eau.

784. Pour mettre dans un juste rapport la puissance et le poids afin que cette roue soit capable du plus grand effet, il faut, après avoir déterminé son diamètre relativement à la hauteur où l'on veut élever l'eau, déterminer aussi en nombre pair la quantité de seaux qu'on pourra employer, eu égard à la grandeur de la circonférence. Après qu'on aura marqué la position de leur centre de mouvement, de manière qu'ils se répondent semblablement dans chaque quart-de-cercle, comme on le voit dans la fig. 3, on tirera les rayons KI et les perpendiculaires IL, IM, IN, etc. pour avoir les lignes KL, KM, KN, etc. qui sont les bras de levier des seaux, dont la direction répond à leurs extrémités; et en même temps les sinus

---

elle doit être au moins égale, et probablement supérieure, à la plupart des autres roues à élever l'eau, et des machines qui font mouvoir des pompes ordinaires. Elle offre d'ailleurs le moyen, sous un petit volume et avec un appareil facile à transporter et peu embarrassant, d'élever de grandes quantités d'eau à une hauteur considérable. On trouvera de l'avantage à placer au bas du tuyau d'ascension des diaphragmes qui divisent l'air et l'eau, et facilitent le mélange de ces deux fluides. La hauteur à laquelle l'eau pourra parvenir sera d'autant plus grande que ce mélange sera plus parfait; et après avoir déterminé le nombre des spires du tuyau mobile de la manière indiquée ci-dessus, il faudra essayer d'en retrancher quelques-unes, et s'assurer par expérience du plus petit nombre qu'il soit possible d'en employer pour faire parvenir l'eau à la hauteur à laquelle elle doit être élevée.

La jonction de l'extrémité M du tuyau fixe avec celle du tuyau mobile peut s'opérer au moyen d'un cylindre de cuir fort, fixé en dedans de l'extrémité du tuyau fixe, et pénétrant dans celle du tuyau mobile. La pression que l'eau et l'air supportent dans cet endroit suffira pour maintenir en contact la surface extérieure du cuir et la surface intérieure de l'extrémité du tuyau mobile, quoique le mouvement de rotation de la machine fasse glisser la seconde surface sur la première. Le frottement de l'axe du tympan sur ses appuis sera toujours peu important, d'autant mieux que l'eau dans laquelle la machine plonge supporte la plus grande partie du poids dont cet axe est chargé. On peut d'ailleurs rendre ce frottement presque nul en faisant porter les extrémités de l'axe sur des galets de friction.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des angles que les rayons KI forment avec la ligne horizontale. Ainsi l'on pourra supposer qu'à chaque point L, M, N, etc. on a suspendu des poids dont chacun est égal à la pesanteur de l'eau que peuvent contenir deux seaux.

Pour connaître la quantité d'eau que chaque seau pourra contenir, il faut prendre les $\frac{4}{9}$ de la force absolue du courant, c'est-à-dire les $\frac{4}{9}$ de la pesanteur du prisme d'eau qui aurait pour base la superficie d'une des aubes et pour hauteur celle de la chûte capable d'imprimer une vîtesse égale à celle du courant: alors on aura la puissance, qui doit être en équilibre avec la pesanteur de l'eau des seaux d'une demi-circonférence (589, 595).

Cela posé, on dira: comme la somme des sinus qui servent de bras de levier aux seaux est au sinus total, bras de levier de la puissance; ainsi cette puissance est à un quatrième terme (59), dont il faudra prendre la moitié pour la pesanteur de l'eau que chaque seau pourra contenir.

Comme la vîtesse de la roue sera le tiers de celle du courant (595) on saura la quantité de tours qu'elle fera dans un temps déterminé; par conséquent la quantité d'eau qu'elle élevera dans le même temps, puisqu'on connaît la capacité des seaux et le nombre qui s'en videra dans chaque révolution (*fm*).

(*fm*) La roue à godets est encore une des machines dont la théorie mécanique est absolument la même que celle du chapelet incliné, exposée dans la note (*fb*): la vîtesse qu'on lui imprime doit être très-petite, et l'effet utile serait alors égal à la quantité d'action dépensée, si cette machine n'offrait plusieurs circonstances que la théorie ne prend point en considération, et qui occasionnent une perte considérable sur cette quantité d'action.

La théorie de la roue à godets est la même que celle du chapelet incliné.

Quant à la règle donnée ici par l'auteur pour estimer l'effet du courant sur les aubes de la roue, elle est fondée sur des principes dont on a déja montré plusieurs fois l'inexactitude. Cette action doit s'évaluer d'après les considérations exposées dans le § 1 de la note (*dl*).

Inexactitude de la règle de l'art. 784.

Pour avoir maintenant une idée du rapport qui a véritablement lieu dans cette machine entre l'effet utile et la quantité d'action dépensée, on considérera en premier lieu la roue à godets mue par une roue à aubes, employée pour les fondations du pont de Neuilly (Perronet, *Description des projets et de la construction des ponts*, etc., t. 1, p. 39). La surface des aubes était $3^{mq},736 = \Omega$, et la vîtesse de leur centre $0^{m},523$. On ignore malheureusement celle du courant, mais en la supposant trois fois plus grande, comme il convient que cela soit pour qu'on obtienne le maximum d'effet, elle sera $1^{m},569 = v$. Mettant ces valeurs dans la formule $\frac{4}{27} k.1000\Omega\frac{v^3}{2g}$, qui représente la quantité d'action transmise à la roue en une seconde, et qui devient $18,88.\Omega v^3$, en y supposant $k = 2,5$; on trouvera $272^{k\times m}$. Le produit de la machine a été observé de 4442^{mc} d'eau élevés à $3^{m},6$ en 24 heures, ce qui revient à

Effet utile de la roue à godets dans la pratique.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On trouvera dans le second volume une autre espèce de roue à eau fort ingénieuse, exécutée à Liancourt.

$185^{k \times m}$ en une seconde. Le rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée serait donc $\frac{185}{272} = 0,68$.

Considérons encore la roue à godets employée pour les fondations du pont de Nemours (M. Boistard, *Expériences sur la main-d'œuvre*, etc. p. 67.). Dans la 5e expérience la surface des aubes était $6^{mq},465 = \Omega$; et la vîtesse du courant, dont celle de l'aube était à très-peu-près le tiers, $2^{m},169 = v$. Ces valeurs substituées dans la formule $18,88.\Omega v^3$, donnent $1245^{k \times m}$ pour la quantité d'action transmise à la roue en une seconde. Le produit de la machine était en une seconde $0^{mc},1257$ d'eau élevée à une hauteur qui n'est point énoncée avec précision dans l'ouvrage, mais qu'on doit porter, d'après les dimensions de la roue, à $6^{m},5$. Ainsi l'effet utile était pour une seconde $125^{k},7 \times 6^{m},5 = 817^{k \times m}$. Son rapport à la quantité d'action dépensée était donc $\frac{817}{1245} = 0,65$. Ce résultat diffère peu du précédent, et il paraît ainsi que les roues à godets rendent, aussi-bien que les chapelets ou norias (voyez les notes (*fd*) et (*fe*)), un peu moins des deux tiers de la force qu'on leur applique.

Indication de diverses dispositions de la roue à godets.

La disposition indiquée pl. 9, fig. 1, 2 et 3, est préférable à celle des fig. 2 et 4 de la planche 4; mais les seaux se trouvent supportés d'une manière très-peu solide, et ne peuvent avoir qu'une faible capacité. On trouve dans le *Traité élémentaire des machines* de M. Hachette, p. 76, la description d'une roue à godets qui n'offre pas le même inconvénient, et au moyen de laquelle on peut élever de grandes quantités d'eau. on peut voir aussi dans le *Voyage en Chine* de M. Holmes une roue de ce genre, fréquemment employée dans ce pays, et très-remarquable par la simplicité et la solidité de sa construction, où l'on n'emploie que du bambou.

On emploie en Angleterre, sous le nom de *flash wheel*, une modification de la roue à godets qui mérite d'être distinguée. De même que la roue à godets ordinaire est l'inverse de la roue à augets (voyez la note (*dm*), § 1), celle-ci est l'inverse de la roue de côté, nommée par les Anglais *breast wheel* (voy. la même note, § 3, et la pl. D, fig. 5, à la suite du premier chapitre de ce livre). Elle présente une construction absolument semblable à celle de cette dernière roue, et tournée en sens contraire, son mouvement oblige l'eau à monter le long du coursier dans laquelle elle est contenue. Cette disposition offre les avantages suivants : 1° l'eau n'est point élevée au-dessus du niveau du réservoir supérieur, et il n'y a d'autre perte que celle résultant du jeu entre les aubes et la paroi du coursier. 2° La plus grande partie du poids de l'eau contenue dans la roue est supportée par la paroi du coursier, ce qui diminue les efforts exercés sur la charpente de cette roue, et le frottement de son axe. 3° La portion de la circonférence de la roue plongée dans l'eau du coursier y perd une portion de son poids égale à celui du volume d'eau qu'elle déplace, et cette circonstance, nuisible quand la roue est mue par une chute d'eau, est au contraire favorable quand elle est employée à élever ce fluide. Smeaton a laissé quelques observations sur une roue de cette espèce, mue par quatre chevaux travaillant 8 heures par jour (*New cyclopedia* du docteur Rees, art. *flash wheel*). Chaque cheval produisait en une minute un effet utile équivalant

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Discours préliminaire sur la vis d'Archimède.

785. Il semble que ce serait ici le lieu de parler de la *vis d'Archimède*, qu'on peut regarder comme la machine la plus ingénieuse de toutes celles qui nous sont restées des anciens. Mais les développements que j'en ai faits se trouvant sur des planches dont les principales figures appartiennent au Traité des écluses, je me trouve contraint, malgré moi, de n'en donner la description et l'analyse que dans la seconde partie de cet Ouvrage : autrement il aurait fallu refondre des planches gravées depuis long-temps, et jetter mon libraire dans de nouveaux faux-frais, qui n'ont déja été que trop multipliés par la nouvelle disposition que j'ai donnée à mon ouvrage, dont l'objet n'était d'abord que d'enseigner la construction des travaux qui se font dans l'eau. Mais, en attendant, ceux qui ne connaissent point cette vis pourront en avoir une idée, en considérant celle qui est rapportée sur la huitième planche : ils verront qu'elle est composée d'un *canon* appliqué autour d'un cylindre ou *noyau* incliné à l'horizon. Quand elle agit, l'extrémité inférieure du noyau tourne dans une crapaudine, et l'autre dans un collier ; et ce qu'il y a de bien singulier, c'est que l'eau s'élève toujours en descendant (*fn*).

PLANCHE 8.

à 20418 *livres avoir-du-poids* élevées à un *pied*, ce qui revient à $2822^{k\times m}$. L'effet utile journalier était donc $1344560^{k\times m}$, résultat qui surpasse la quantité d'action journalière transmise moyennement par les chevaux, d'après l'évaluation admise dans le tableau de la p. 396.

(*fn*) On ne trouve point dans la 2^{e} partie de l'Architecture hydraulique la description et l'analyse de la vis d'Archimède que l'auteur promet ici. J'entrerai dans quelques détails sur cette machine, dont on fait un fréquent usage. Mais je placerai auparavant dans cette note l'indication de deux autres appareils qu'il est utile de faire connaître, et dont la théorie servira, sous un certain point de vue, de préparation à celle de la vis d'Archimède.

De la roue à force centrifuge.

§ 1. Le principe de la machine désignée communément sous le nom de roue à force centrifuge, a été donné pour la première fois en 1732 par Le Demours (*Machines approuvées par l'académie des sciences*, t. 6, p. 11). Euler l'a examinée dans les *Mémoires de l'académie de Berlin* pour 1752. Sa théorie me paraît devoir être fondée sur la considération des effets que présente une portion de fluide pesant, contenue dans un vase auquel on imprime un mouvement de rotation autour d'un axe vertical.

De la forme de la surface d'un fluide, quand le vase où il est contenu tourne autour d'un axe vertical.

Soit ABCD le vase dont il s'agit, EF un axe vertical autour duquel on le fait tourner avec une vîtesse uniforme, et admettons que toutes les molécules d'eau contenues dans le vase aient pris la même vîtesse de rotation qui lui est imprimée, soit par le seul effet du frottement et de l'adhérence, soit par l'effet de diaphragmes placés dans la capacité du vase. La force centrifuge résultant du mouvement de rotation (voyez la note (*ai*), § 4) élevera l'eau le long des parois, et la section de sa

PL. M, FIG. 4.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Quoique l'invention en soit attribuée à Archimède, des savants prétendent que les Égyptiens s'en sont servi long-temps avant lui pour dessé-

---

surface par un plan passant par l'axe EF sera une courbe NON', dont la nature est déterminée par la condition que les actions exercées par la gravité et par la force centrifuge sur les molécules du fluide contenu dans le vase se fassent mutuellement équilibre. Or quand l'équilibre existe dans une masse de fluide, il existe également dans un canal quelconque tracé dans cette masse, et si l'on trace ce canal de manière que ses deux extrémités aboutissent à la surface, ce principe peut servir à en déterminer la forme. Considérons donc le canal OPM dont la section transversale est censée infiniment petite, composé de la branche horizontale OP aboutissant au point le plus bas O de la surface du fluide, et de la branche verticale PM. Pour que l'equilibre existe dans ce canal, il faudra que les pressions exercées sur la molécule placée en P, par suite de l'action de la force centrifuge sur le fluide contenu dans la branche OP, et par suite de l'action de la gravité sur le fluide contenu dans la branche PM, soient égales entre elles. Or, en nommant v la vîtesse de rotation des points du vase situés à une distance de l'axe égale à l'unité, r la distance OP, et z la hauteur PM, on aura vr pour la vîtesse de rotation en P, et v^2r pour la force centrifuge de la molécule située en ce point. Cette force, du point O au point P, croît uniformément depuis zéro jusqu'à v^2r. Sa valeur moyenne dans la branche OP est donc $\frac{1}{2}v^2r$, et par conséquent la somme de ses actions sur les molécules contenues dans cette branche est $\frac{1}{2}v^2r.r$. La somme des actions de la gravité sur les molécules contenues dans la branche PM est d'ailleurs $g.z$. Ainsi la condition de l'équilibre du canal s'exprimera par l'équation $gz=\frac{1}{2}v^2r^2$, ou $z=\frac{v^2r^2}{2g}$; d'où l'on conclut que la forme de la surface du fluide est assujettie à la condition que la hauteur d'un point quelconque M au-dessus du point le plus bas O, soit celle due à la vîtesse de rotation qui a lieu en M; et que cette surface est décrite par la révolution autour de l'axe EF, d'une parabole dont le paramètre $=\frac{g}{v^2}$. Ce résultat s'accorde avec celui qu'on déduit des équations générales du mouvement des fluides (M. Poisson, *Traité de mécanique*, art. 492). On voit aussi que la pression qui a lieu dans un point quelconque de l'intérieur du vase, est due à la longueur de la verticale menée de ce point à la surface du fluide.

Comment l'eau peut être élevée au moyen d'un vase auquel on imprime un mouvement de rotation.

Supposons maintenant qu'on ait plongé le vase ABCD dans un autre vase contenant de l'eau, avec lequel il communique par un orifice placé en F. Tant que le vase ABCD demeurera immobile, l'eau s'y tiendra au niveau LL' de sa surface dans le second vase. Mais si on imprime au vase ABCD un mouvement de rotation autour de l'axe vertical EF, la surface de l'eau y prendra, conformément à ce qu'on a vu ci-dessus, la forme d'un paraboloïde de révolution décrit autour de l'axe EF, et il n'y aura plus que le point O où la surface coupe cet axe qui demeurera dans le niveau LL' de l'eau extérieure. Si alors on ouvre un petit orifice U dans la paroi dn vase, l'eau tendra à jaillir par cet orifice avec une vîtesse due à la longueur UN de la verticale menée du point U à la surface de l'eau. Ainsi cet appareil offre le moyen d'élever l'eau d'un réservoir inférieur à une hauteur plus

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

cher les prairies que les débordements du Nil avaient coutume d'inonder. Quoi qu'il en soit, il y a apparence que les auteurs, tant anciens que

---

ou moins considérable, suivant qu'on imprime au vase mobile un mouvement de rotation plus ou moins rapide.

Description d'une machine qui élève l'eau par l'effet de la force centrifuge résultant d'un mouvement de rotation.

PLANCHE M. FIGURES 5 et 6.

Tout ce qui précède étant indépendant de la forme de ce vase, et de la situation du plan de l'orifice, la disposition de la machine est susceptible d'être variée de beaucoup de manières. On pourrait la réduire à un seul tuyau incliné, assujéti à l'axe vertical EF, et dirigé de F en U, comme l'avait fait l'inventeur. J'indiquerai sur le champ la disposition qui paraît le plus convenable. LOL′ est le niveau de l'eau du réservoir inférieur, EF l'axe du vase mobile. On suppose qu'ayant fixé la vîtesse de rotation v qu'on veut imprimer à ce vase, on ait tracé la parabole NON′ dont le paramètre $=\frac{g}{v^2}$, et qui fixera la forme que la surface de l'eau y prendrait si elle était libre. Cela posé, on tracera un peu au-dessous de la courbe NON′ deux autres courbes dont la révolution autour de l'axe EF décrira deux parois, entre lesquelles l'eau s'élevera par l'effet du mouvement de rotation. La paroi extérieure est évasée dans le bas, de manière à offrir en F une embouchure telle que le fluide s'introduise dans la roue en éprouvant la moindre contraction possible. Des orifices UUU... sont distribués à la circonférence du vase, et sont placés de côté, de manière que l'eau jaillisse horizontalement et en sens contraire du mouvement de rotation de la roue, qui a lieu dans le sens indiqué par la flèche; cette eau est reçue au sortir des orifices dans une gouttière circulaire, dont elle s'échappe par une buse. L'intervalle compris entre les deux parois parallèles doit être partagé en plusieurs parties par des diaphragmes tracés suivant des courbes analogues à l'hélice, afin que l'eau qui monte dans la roue prenne bien toute sa vîtesse de rotation. Le mouvement est censé imprimé par des hommes agissant avec des tiges ou des cordes sur la manivelle double pratiquée dans la partie supérieure de l'axe. La roue peut être construite en fonte, et servirait elle-même de volant pour régulariser l'action du moteur.

Théorie de la roue à force centrifuge.

Pour établir maintenant la théorie de cette machine, supposons qu'on ait fait passer par l'orifice U une verticale NL, qui rencontre en N la parabole NON′ tracée comme il est dit ci-dessus. Nommons V la vîtesse de rotation constante imprimée aux points de la roue situés dans cette verticale, et H la hauteur LU à laquelle l'eau est élevée. La distance NL sera $\frac{V^2}{2g}$, et la distance NU, $\frac{V^2}{2g}-H$.

Soit O l'aire de l'orifice F par où l'eau entre dans la roue, et Ω la somme des aires des orifices U par où elle s'écoule, laquelle, pour plus de généralité, est supposée plus petite que O, mais non très-petite par rapport à O. La pression que le fluide exerce contre les orifices U étant due à la hauteur $\frac{V^2}{2g}-H$, la vîtesse de l'écoulement, l'entrée de ces orifices étant supposée évasée, sera, d'après la note (*ce*), exprimée par $\sqrt{\frac{V^2-2gH}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}$. L'écoulement se faisant en sens contraire de la

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

modernes, qui ont parlé de cette vis avant M. Parent, à qui rien n'échappait, n'ont eu qu'un sentiment confus sur l'inclinaison qu'il fallait lui

---

vîtesse V avec laquelle les orifices sont emportés par le mouvement circulaire de la roue, on voit que la vîtesse réelle que possédera le fluide à l'instant où il aura quitté la roue sera $V-\sqrt{\frac{V^2-2gH}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}$. Appelons maintenant m la masse de l'eau élevée dans une seconde, P l'effort du moteur, supposé appliqué à une distance de l'axe de rotation égale à celle des orifices d'écoulement. Comme il n'y a point de force vive perdue dans la machine, il résulte des principes employés si souvent que la quantité d'action imprimée dans une seconde, représentée par $PV-mg.H$, doit être égale à la moitié de la force vive acquise par l'eau élevée en une seconde, représentée par $\frac{1}{2}m\left(V-\sqrt{\frac{V^2-2gH}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}\right)^2$. L'équation du mouvement de la roue est donc

$$PV=mg.H+\tfrac{1}{2}m\left(V-\sqrt{\frac{V^2-2gH}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}\right)^2.$$

Expression de la vîtesse de la roue qui rend l'effet utile égal à la quantité d'action dépensée.

On en déduit pour la valeur du rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée $\frac{mg.H}{PV}=\frac{H}{H+\frac{1}{2g}\left(V-\sqrt{\frac{V^2-2gH}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}\right)^2}$. On déterminera la valeur de V qui rendra ce rapport le plus grand possible, en posant $V-\sqrt{\frac{V^2-2gH}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}=0$, d'où $V=\frac{O}{\Omega}\sqrt{2gH}$. En donnant à V cette valeur, l'effet utile sera théoriquement égal à la quantité d'action dépensée.

Dans le cas où les orifices d'écoulement U sont très-petits par rapport à l'orifice d'entrée F, Ω étant infiniment petit par rapport à O, la valeur de la vîtesse V qui répond au maximum d'effet est infiniment grande.

La nécessité de donner à cette roue une très-grande vîtesse pour lui faire produire le maximum d'effet, empêchera toujours qu'elle ne soit employée pour élever l'eau à une hauteur considérable. Si l'on veut avoir une idée de l'effet dont elle est susceptible quand on l'emploie pour élever l'eau à une hauteur médiocre, on supposera cette hauteur $H=2^m$, le diamètre de la roue $=2^m$, et qu'on lui fasse faire un tour par seconde. On aura alors $V=2^m.\pi=6^m,28$. En mettant ces valeurs dans l'expression du rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée, qui dans le cas où les orifices d'écoulement sont très-petits, devient $\frac{H}{H+\frac{1}{2g}(V-\sqrt{V^2-2gH})^2}$, on trouvera pour la valeur de ce rapport 0,66. Ainsi la roue rendrait théoriquement les $\frac{2}{3}$ à-peu-près de la force qu'on lui appliquerait. Il y aurait dans la pratique peu

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

donner par rapport à la situation des hélices à l'égard du noyau. L'expérience leur avait bien fait apercevoir que lorsque le noyau formait avec

---

de réductions à faire sur ce résultat, eu égard au peu de frottement que présente cette machine.

De la machine Pitotienne.

§ 2. Je ferai mention ici succinctement d'une espèce particulière de roue à élever l'eau, qui a quelque analogie avec la roue à force centrifuge, mais qui est fondée sur un principe différent. Elle a été nommée *machine Pitotienne* par M. J. Bernouilly (*Académie de Petersbourg*, 1786), parce qu'il l'a conçue formée par le tube de Pitot (voyez ci-dessus art. 614, et note (*de*)) lié à un axe vertical, et mu circulairement de manière à recevoir contre son orifice inférieur le choc direct de l'eau du réservoir inférieur.

Théorie de la machine Pitotienne.

Pour qu'une roue de ce genre soit bien disposée, la première condition à remplir est que l'extrémité supérieure du tuyau soit recourbée de manière que l'eau s'en écoule en sens contraire du mouvement de la roue. Cela supposé, admettons que les orifices d'entrée et de sortie de l'eau ne soient pas à la même distance de l'axe de rotation, et que la vîtesse de rotation du premier étant V, celle du second soit nV. Soit O l'aire de l'orifice inférieur du tuyau par où l'eau entre, Ω celle de l'orifice supérieur par où elle sort, tous deux étant supposés évasés. Nommons toujours H la hauteur de ce dernier orifice au-dessus du niveau du réservoir inférieur.

L'orifice inférieur O étant mu dans l'eau avec la vîtesse V, son mouvement fera naître contre cet orifice une pression due à la hauteur $k.\frac{V^2}{2g}$, en représentant par k un coëfficient constant dont la valeur dépend en général de la figure et du diamètre de l'extrémité inférieure du tuyau (voyez la note (*db*), § 1), et il en résultera à l'orifice supérieur une pression due à la hauteur $k.\frac{V^2}{2g}-H$. On remarquera de plus que, d'après le § 1 de la présente note, la force centrifuge fera naître du dedans au dehors, dans le plan de l'orifice d'entrée où la vîtesse de rotation est V, une pression due à la hauteur $\frac{V^2}{2g}$; et dans le plan de l'orifice de sortie où la vîtesse de rotation est nV, une pression due à la hauteur $\frac{n^2V^2}{2g}$. Donc, en vertu des principes établis dans la note (*ce*), la vîtesse avec laquelle l'écoulement se fera par l'orifice de sortie sera due à la hauteur $k.\frac{V^2}{2g}-H-\frac{V^2}{2g}(1-n^2)$; et l'expression de cette vîtesse sera par conséquent $\sqrt{\frac{k\,V^2-2gH-V^2(1-n^2)}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}$.

Cela posé, le même raisonnement qui a été fait dans le § précédent prouvera que le rapport de l'effet utile à la quantité d'action dépensée est exprimé ici par

$$\frac{H}{H+\frac{1}{2g}\left(nV-\sqrt{\frac{k\,V^2-2gH-V^2(1-n^2)}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}\right)^2},$$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

l'horizon un angle trop ouvert, l'eau cessait de monter, mais aucun n'avait encore déterminé son plus haut et son plus bas point, ni le rap-

---

Expression de la vîtesse de la roue qui rend l'effet utile égal à la quantité d'action dépensée.

quantité qui devient la plus grande possible quand le second terme du dénominateur est nul, ou quand $V=\sqrt{\frac{2gH}{k-\left(1-n^2\frac{\Omega^2}{O^2}\right)}}$.

Il paraît par cette formule que le mouvement de la roue n'a pas besoin d'être aussi rapide que celui de la roue du § précédent, pour qu'on obtienne le maximum d'effet. Mais la vîtesse de ce mouvement devrait néanmoins être toujours fort considérable. Il faut observer aussi qu'il est difficile que le bas de la roue ne communique pas à l'eau du réservoir inférieur des mouvements que le calcul précédent ne prend point en considération, et qui consommeront inutilement une partie de l'action du moteur. Il me paraît par cette raison que la disposition indiquée dans le § précédent doit être préférable dans la pratique.

Si on multiplie l'expression précédente de V par n, on aura la vîtesse qu'il convient de donner à l'orifice supérieur, laquelle sera $\sqrt{\frac{2gH}{\frac{k}{n^2}-\left(\frac{1}{n^2}-\frac{\Omega^2}{O^2}\right)}}$. Si l'on suppose maintenant le plan de l'orifice inférieur non plus exposé au choc de l'eau, mais placé dans le sens du mouvement de la roue, on aura $k=0$, et cette expression de la vîtesse deviendra $\sqrt{\frac{2gH}{\frac{\Omega^2}{O^2}-\frac{1}{n^2}}}$. Enfin si l'orifice inférieur est contigu à l'axe, comme dans la machine représentée pl. M, fig. 5 et 6, n sera infini, et cette expression se réduira à $\frac{O}{\Omega}\sqrt{2gH}$, comme on l'a trouvé directement dans le § précédent.

De la vis d'Archimède.

Construction de la vis d'Archimède, d'après la description de Vitruve.

§ 3. La vis d'Archimède est une des machines employées par les anciens, et décrite par Vitruve. D'après la construction qu'il indique, elle est composée d'un noyau cylindrique dont le diamètre est de $\frac{1}{16}$ de la longueur, et d'une enveloppe également cylindrique, concentrique au noyau, et d'un diamètre double, c'est-à-dire égal au $\frac{1}{8}$ de la longueur. Sur le noyau sont tracées huit hélices, dont la hauteur du pas est égal à la circonférence du noyau, ou qui font avec l'axe un angle de 50°. Elles forment la trace d'autant de cloisons, qu'on peut concevoir décrites par une ligne droite qui se meut en demeurant constamment perpendiculaire à l'axe, et passant toujours par cet axe et par l'hélice. Ces cloisons partagent l'espace compris entre le noyau et l'enveloppe de la vis en huit canaux hélicoïdes, dans lesquels l'eau s'élève, lorsque, ayant incliné la vis sur l'horizon, on la fait tourner dans le sens convenable. Vitruve prescrit de lui donner une inclinaison telle que la tangente de l'angle qu'elle forme avec l'horizon soit égale à $\frac{3}{4}$, ou que cet angle soit de 41° environ. Cette disposition est encore à-peu-près celle qu'on suit généralement aujourd'hui; mais, au moins dans les dernières vis construites à Paris, les pro-

D'après la disposition adoptée présentement.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

port de la puissance motrice à la charge. Il est vrai qu'ils sont excusables par les difficultés qu'ils ont rencontrées, n'y ayant point de machine

---

portions sont différentes. Le diamètre de l'enveloppe est environ le $\frac{1}{12}$ de la longueur, le diamètre du noyau est à peine le $\frac{1}{3}$ de celui de l'enveloppe, et le nombre des cloisons et des canaux hélicoïdes est réduit à trois. Quant à la pente de ces canaux sur l'axe, la trace des cloisons sur l'enveloppe y forme ordinairement avec l'axe un angle des $\frac{2}{3}$ d'un angle droit, ou de 67° environ, ce qui diffère peu de ce qui avait lieu dans la vis de Vitruve, où la trace des cloisons sur l'enveloppe formait avec l'axe un angle dont la tangente trigonométrique était double du rayon, c'est-à-dire un angle d'environ 70°. L'opinion commmune chez les ouvriers est que l'axe de la vis doit faire avec l'horizon un angle de 50°. On peut voir le dessin de ces vis dans le *Traité élémentaire des machines* de M. Hachette, ch. 1, pl. 6. La construction indiquée par Bélidor, art. 785, est prise du *Cours de mathématiques* de Wolf : j'ignore si l'on a jamais réellement construit des vis en roulant des tuyaux de plomb sur un noyau, disposition qui leur aurait donné un poids considérable.

Théorie de la vis d'Archimède, dans le cas où elle est formée par un tuyau hélicoïde, dont l'extrémité inférieure est constamment sous l'eau.

Pl. M, Fig. 7.

Pour exposer la théorie de cette machine de la manière la plus propre à en faire saisir l'esprit, il faut la supposer d'abord construite comme l'indique l'auteur, c'est-à-dire formée par un seul tuyau, dont le diamètre sera censé très-petit, roulé sur un noyau cylindrique suivant la trace d'un hélice. Soit ABCDEF.... le tuyau dont il s'agit. Les effets qui se manifesteront seront fort différents, suivant que le niveau de l'eau dans laquelle l'extrémité inférieure de la vis est plongée sera en LL′ au-dessus du point A, ou en MM′ au-dessous du même point. Dans le premier cas, l'extrémité du tuyau accomplissant, quand on fait tourner la vis, sa révolution entière dans l'eau, l'air ne peut s'y introduire, et le tuyau se remplit d'eau seule. Dans le second cas, l'eau et l'air s'y introduisent alternativement, et chaque spire du tuyau contient de l'eau et de l'air. La quantité d'air que les spires contiennent est plus ou moins considérable, suivant que l'arc décrit dans l'air par l'extrémité inférieure du tuyau est plus ou moins grand comparativement à celui qu'il décrit dans l'eau. Le premier de ces deux cas est le seul dans lequel Euler ait considéré cette machine (*Académie de Pétersbourg*, nouv. comment., t. 5), et je vais m'en occuper d'abord.

Le niveau de l'eau étant supposé en LL′, si la vis est immobile, l'eau entrera dans le tuyau et s'y tiendra au niveau de l'eau extérieure. Si on imprime ensuite à la vis un mouvement de rotation, l'eau contenue dans ce tuyau acquerra, par suite de ce mouvement, une force centrifuge, laquelle tendra à la soutenir au-dessus du niveau LL′, comme on l'a vu dans le § 1. Mais ici l'axe de rotation est incliné sur l'horizon, et il est nécessaire d'examiner de nouveau comment l'élévation de l'eau devra avoir lieu. Soit donc ABCD un vase contenant une certaine quantité de fluide pesant, auquel on imprime un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe EF, incliné à l'horizon; et NON′ la section de la surface du fluide par un plan quelconque passant par EF. La forme de cette courbe se déterminera par le même principe employé ci-dessus. Considérons le canal infiniment étroit OPM, composé de la branche horizontale OP aboutissant au point O où la surface du fluide coupe l'axe de rotation, et de la branche PM parallèle à cet axe. Nommons α l'angle EOL

De la forme de la surface d'un fluide, quand le vase où il est contenu tourne autour d'un axe incliné à l'horizon.

Pl. M, fig. 8.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

hydraulique d'une théorie aussi abstraite, et cette théorie ne pouvant être traitée sans le secours des nouveaux calculs, comme on en jugera par la suite.

---

formé par l'axe avec l'horizon, r la distance MR du point M à l'axe de rotation, z la hauteur verticale MQ de ce point au-dessus du point O, v la vîtesse de rotation des points situés à l'unité de distance de l'axe.

Pour que l'équilibre existe dans le canal OPM, il faut que la molécule placée en P supporte des pressions égales de la part des colonnes PM et OP. Or en premier lieu, la pression provenant de la colonne PM n'est autre chose que le poids de cette colonne, décomposé dans le sens MP. On a $MP = \frac{z}{\sin. \alpha}$, et par conséquent le poids de la colonne est $\frac{gz}{\sin. \alpha}$. Décomposé dans le sens MP, il se réduit à $\frac{gz}{\sin. \alpha}. \sin. \alpha = gz$. D'une autre part la pression qui s'exerce en P de la part de la colonne OP, est égale à l'action de la force centrifuge sur le fluide contenu dans cette colonne, décomposée dans le sens OP. La vîtesse en P est vr, et la force centrifuge $v^2 r$. Cette force est nulle en O, et sa valeur moyenne dans l'intervalle OP est $\frac{1}{2} v^2 r$. La longueur $OP = \frac{r}{\sin. \alpha}$. L'action de la force centrifuge sur la colonne OP est donc $\frac{1}{2} v^2 r. \frac{r}{\sin. \alpha}$, laquelle décomposée dans le sens OP se réduit à $\frac{1}{2} v^2 r. \frac{r}{\sin. \alpha}. \sin. \alpha = \frac{1}{2} v^2 r^2$. L'équilibre du canal OPM s'exprime donc par l'équation $gz = \frac{1}{2} v^2 r^2$, ou $z = \frac{v^2 r^2}{2g}$.

On voit par-là que la nature de la surface du fluide dans le vase en mouvement consiste ici, aussi-bien que dans le cas où l'axe de rotation est vertical (voyez ci-dessus, § 1), en ce que la hauteur d'un point quelconque M de cette surface au-dessus du point le plus bas O, est celle due à la vîtesse qui a lieu en M. On en conclut que tous les points de la surface situés à la même distance de l'axe de rotation sont compris dans un même plan horizontal; ou, en d'autres termes, que toutes les sections de la surface par des cylindres à base circulaire ayant pour axe EF, sont des courbes planes dont le plan est horizontal, et par conséquent sont des ellipses, dans lesquelles le rapport des axes est constamment égal à cos. α. On voit facilement aussi que pour avoir la pression qui a lieu dans un point quelconque de la masse du fluide, il faut mener de ce point à la surface une ligne parallèle à l'axe de rotation, et nommant ζ la longueur de cette ligne, la pression qui aura lieu au point dont il s'agit sera due à la hauteur $\zeta. \sin. \alpha$.

Comment un vase tournant autour d'un axe incliné à l'horizon pourrait servir à élever l'eau.

Si l'on admet maintenant que le vase ABCD ait été plongé dans un autre vase contenant une masse de fluide stagnant, avec lequel il communique, le point O de la surface du fluide contenu dans le vase mobile sera seul dans le niveau LL' de l'eau extérieure, et tous les autres points se souleveront conformément à ce qui vient d'être établi. Si l'on ouvre dans la paroi du vase ABCD un orifice infiniment petit U, l'eau tendra à jaillir par cet orifice avec une vîtesse due à la hauteur NU.sin. α.

Pour qu'une vis d'Archimède éle-

Tout ce qui précède étant absolument indépendant de la forme du vase mobile,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

subsisterait encore dans le cas où ce vase serait un petit tuyau roulé en hélice autour d'un noyau cylindrique. Quand on fera tourner ce tuyau l'eau y montera, et comme tous les points du tuyau sont également éloignés de l'axe de rotation, la surface supérieure de l'eau s'y maintiendra constamment pendant le mouvement dans un même plan horizontal, situé à la hauteur $\frac{V^2}{2g}$ au-dessus du niveau du réservoir inférieur, V exprimant la vîtesse de rotation des points du tuyau. Si la hauteur $\frac{V^2}{2g}$ est plus grande que la hauteur verticale de la vis, l'eau jaillira par l'extrémité supérieure du tuyau. Mais pour élever l'eau de cette manière à une hauteur médiocre, il faudrait imprimer à une vis une vîtesse très-considérable. L'eau ne pourrait être élevée à 2^m, par exemple, à moins que les points du tuyau n'eussent une vîtesse de 6 à 7^m, tandis que d'après la manière ordinaire de faire mouvoir les vis par des hommes, leur vîtesse est environ dix fois moindre. On voit par-là qu'il ne convient point d'employer une vis d'Archimède pour élever l'eau par le moyen de la force centrifuge résultant du mouvement de rotation, et on a vu dans le § précédent, comment devait être disposé un appareil adapté spécialement à cet objet.

vât l'eau par l'effet de la force centrifuge, il faudrait lui imprimer une très-grande vitesse.

La vis d'Archimède ne doit point, dans la pratique, être employée dans l'hypothèse où elle vient d'être considérée.

§ 4. Admettons présentement que le niveau de l'eau du réservoir inférieur soit un peu au-dessous du point A, afin qu'il puisse s'introduire, à chaque révolution de la vis, une petite quantité d'air dans le tuyau. Cet air passera avec l'eau de spire en spire, et si le mouvement de rotation est assez rapide pour que l'eau monte jusqu'à l'extrémité supérieure de la vis, l'eau et l'air s'y trouveront distribués comme la figure le représente, les diverses portions d'air qui se sont successivement introduites occupant les parties supérieures bC, dE, fG, ... de chaque spire. Les grandeurs des espaces occupés respectivement dans les diverses spires par l'eau et par l'air sont d'ailleurs assujetties aux conditions d'équilibre suivantes. Supposons que par les points les plus élevés de chaque spire, on ait fait passer des plans horizontaux qui couperont leurs branches montantes dans les points B, D, F, ... La pression atmosphérique agissant en h sur la surface supérieure de l'eau contenue dans la dernière spire, l'air contenu en Gf supportera cette pression, plus celle due au poids de la colonne d'eau hH. L'air contenu en Ed supportera la pression précédente, plus celle due au poids de la colonne d'eau fF; c'est-à-dire la pression atmosphérique, plus celle due au poids des deux colonnes d'eau hH et fF. Et ainsi de suite, jusqu'à la spire inférieure, dans laquelle l'air est soumis à la pression atmosphérique, plus une pression due à la somme des hauteurs verticales des colonnes d'eau contenues dans toutes les spires. On peut remarquer que chaque révolution du tuyau y introduit des quantité d'air égales, lesquelles se compriment d'abord dans la spire inférieure par l'effet de l'excès de pression qu'elles y supportent, puis se dilatent peu-à-peu, à mesure qu'elles passent dans des spires plus élevées, où la pression est moindre. Donc les espaces occupés par l'air dans chaque spire doivent augmenter à partir du bas de la vis, et par conséquent ceux occupés par l'eau diminuer, en sorte qu'une partie de l'eau puisée dans le réservoir inférieur y retomberait et ne parviendrait pas à l'extrémité supérieure, à moins qu'on n'eût augmenté peu-à-peu le diamètre du tuyau à partir du bas de la vis, afin de procurer à l'air l'espace dont il a besoin ponr se dilater à mesure qu'il s'élève.

Théorie de la vis d'Archimède, dans le cas où un peu d'air peut s'introduire par l'extrémité inférieure du tuyau hélicoïde.

Pl. M, Fig. 7.

Comment l'équilibre s'établit dans l'intérieur du tuyau.

On voit d'ailleurs qu'il y a cette différence entre le cas où on laisse introduire

Plus il entre d'air dans le tuyau,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

et plus, avec une vitesse donnée, l'eau peut être élevée dans la vis à une grande hauteur.

de l'air par l'extrémité inférieure du tuyau, et celui où il ne peut y entrer que de l'eau, que dans ce dernier cas la pression exercée sur cette extrémité inférieure, laquelle doit être balancée par la force centrifuge résultant du mouvement de rotation, est due à la hauteur totale à laquelle l'eau est élevée, tandis que dans l'autre elle est seulement due à la somme des hauteurs verticales des colonnes d'eau contenues dans toutes les spires. On pourrait donc, avec la même vîtesse de rotation, élever l'eau à une plus grande hauteur. En laissant entrer dans le tuyau à chaque révolution des quantités d'air de plus en plus considérables, la quantité d'eau contenue dans chaque spire diminuera de plus en plus, par conséquent les hauteurs des colonnes B*b*, D*d*, F*f*,..., et par suite la pression que l'eau contenue dans la vis exercera sur l'orifice inférieur du tuyau. Enfin si le niveau du réservoir inférieur est tel qu'il ne puisse s'introduire dans la vis à chaque révolution que la quantité d'eau nécessaire pour remplir les portions AB, CD, EF,... de chaque spire, appelées *arcs hydrophores*, ou une quantité moindre, la hauteur des colonnes d'eau dans toutes les spires sera nécessairement nulle, et l'air contenu dans la machine y sera à la même tension que dans l'atmosphère. Le poids de l'eau contenue dans le tuyau se trouvera alors supporté entièrement par sa paroi, et il ne s'exercera par l'effet de ce poids aucune pression sur l'orifice inférieur. Dans cette supposition la vis peut élever l'eau à une hauteur quelconque, lors même que son mouvement de rotation est très-lent : la force centrifuge résultant du mouvement de rotation n'entre plus pour rien dans le jeu de cette machine, et l'élévation de l'eau y est uniquement le résultat de la forme, de la situation et du mouvement du tuyau, dont chaque spire offre à l'eau un vase mobile dans lequel elle est reçue et transportée dans le sens de la longueur de la vis. C'est toujours de cette manière que la vis d'Archimède est employée dans la pratique, et c'est aussi sous ce point de vue que Daniel Bernouilly (*Hydrodynamica*, sect. 9) et Pitot (*Académie des sciences*, 1736) l'ont considérée.

Quand il entre assez d'air dans le tuyau pour que l'eau occupe seulement l'arc hydrophore de chaque spire, l'eau peut être élevée dans la vis à une hauteur quelconque.

C'est dans cette dernière hypothèse que la vis est employée dans la pratique.

Théorie de la vis d'Archimède, dans le cas où l'eau occupe seulement l'arc hydrophore de chaque spire du tuyau hélicoïde.

Pl. M, Fig. 9.

§ 5. Soit faite la projection de la vis sur un plan vertical parallèle à son axe, et soit AA la projection de cet axe, BB la trace d'un plan horizontal, BC la projection du cercle base du cylindre sur lequel est tracée l'hélice directrice du tuyau hélicoïde, BMOM'N.... la projection verticale de cette hélice. Supposons ensuite la base du cylindre rabattue sur le plan de projection en *bmm'cn*. Ayant mené la tangente OT à la projection de l'hélice, l'angle AOT sera l'angle constant formé par l'hélice avec l'axe du cylindre, que je représenterai par θ. Je nommerai α l'angle ADB formé par l'axe de la vis avec l'horizon, et r le rayon AB de la base du cylindre.

Explication de la manière dont l'élévation de l'eau s'effectue.

Concevons un plan horizontal dont la trace est MN, touchant l'hélice au point M, et imaginons que ce plan soit la surface de l'eau dans laquelle le pied de la vis est plongé. L'eau entrera dans le tuyau, et y occupera l'espace MM'N compris entre les points M et N situés dans le plan de sa surface, espace que l'on nomme *arc hydrophore*. Si l'on vient ensuite à faire tourner la vis dans le sens *bnc*, l'eau contenue dans l'arc hydrophore sera contrainte à couler dans le tuyau hélicoïde dans le sens MOM'N, et en même temps le sommet M de cet arc, ainsi que tous ses autres points, s'avanceront parallèlement à l'axe de la vis. Quand la vis aura fait une révolution entière, le sommet de l'arc hydrophore se retrouvera placé en μ sur la même arête cylindrique où il était quand le mouvement a commencé, en

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sorte que l'eau qu'il contient aura été transportée dans le sens de l'axe d'une quantité égale au pas de l'hélice. Si on continue ensuite à tourner la vis, un nouvel arc hydrophore s'élevera de la même manière, et quand tous les arcs hydrophores distribués dans la longueur de la vis auront été remplis, alors à chaque révolution elle en puisera un à son extrémité inférieure, et en versera un autre à son extrémité supérieure. Tel est le mécanisme de l'élévation de l'eau dans cette machine. On peut remarquer que pour que l'arc hydrophore M M′ N se remplisse en totalité à chaque révolution de la vis, il est nécessaire que le niveau de l'eau du réservoir inférieur soit au moins à la hauteur du point P, et alors la vis montera la plus grande quantité d'eau possible, en même temps qu'il entrera dans le tuyau à chaque révolution une quantité d'air suffisante pour que le jeu de la machine s'effectue conformément à ce qui est admis ici. Si le niveau de l'eau est au-dessous du point P, l'arc hydrophore ne se remplira pas entièrement, et à chaque révolution la vis montera moins d'eau qu'elle ne pourrait le faire. Si ce niveau descend au point P′, ou au-dessous de ce point, la vis ne montera plus d'eau. En admettant au contraire que le niveau de l'eau soit situé au-dessus du point P, et entre ce point et celui B, la machine se trouvera dans le cas où elle a été considérée dans le § 4; et si ce niveau était au-dessus du point B, elle tomberait alors dans le cas examiné dans le § 3. On voit d'ailleurs que la quantité d'eau qui peut être montée dans un temps donné, est proportionnelle à la longueur de l'arc hydrophore, et à la vîtesse verticale avec laquelle cet arc s'élève, par suite du mouvement de rotation imprimé à la vis.

Recherche de la longueur de l'arc hydrophore.

Cherchons en premier lieu l'expression de la longueur de l'arc hydrophore. Le point M, qui est l'une de ses extrémités, est évidemment déterminé par la condition que sa distance verticale M F au plan horizontal B B soit plus grande que pour tout autre point de l'hélice. Or si l'on considère M comme un point quelconque de l'hélice, et qu'on le mette en m en projection horizontale, en appelant s l'angle bam, la longueur absolue de l'arc bm sera rs, et par la nature de l'hélice on aura $\mathrm{PM} = \frac{rs}{\text{tang. }\theta}$. De plus bp ou $\mathrm{BP} = r\,(1 - \cos.\, s)$, et puisque l'angle B E P est égal à celui représenté par α, on a aussi $\mathrm{PE} = \frac{\mathrm{BP}}{\text{tang. }\alpha} = \frac{r(1-\cos.s)}{\text{tang. }\alpha}$. Donc $\mathrm{ME} = \mathrm{PM} - \mathrm{PE} = \frac{rs}{\text{tang. }\theta} - \frac{r(1-\cos.s)}{\text{tang. }\alpha}$. Mais $\mathrm{MF} = \mathrm{ME}.\sin.\,\alpha$: donc, on a enfin $\mathrm{MF} = \frac{rs.\sin.\alpha}{\text{tang.}\theta} - \frac{r(1-\cos.s)\sin.\alpha}{\text{tang. }\alpha}$. Différenciant par rapport à s, et égalant à zéro, il vient $\sin.\, s = \frac{\text{tang. }\alpha}{\text{tang. }\theta}$. Cette valeur détermine celle de l'angle s correspondante au maximum ou au minimum de M F; et les deux points m, m' pour lesquels on a $pm = p'm' = r.\frac{\text{tang. }\alpha}{\text{tang. }\theta}$, fixeront les points m, m' de l'hélice où cette courbe est touchée par un plan horizontal.

Il faut trouver maintenant l'autre extrémité N de l'arc hydrophore, c'est-à-dire le point de l'hélice où elle est coupée par le plan horizontal qui la touche en M. Le point N ayant été mis en projection horizontale en n, appelons t l'angle can. On aura bq ou $\mathrm{BQ} = r\,(1 + \cos.\, t.)$, et par conséquent $\mathrm{QG} = \frac{r(1+\cos.t)}{\text{tang. }\alpha}$; et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

comme NG est égal à ME dont on a trouvé ci-dessus la valeur, on obtiendra celle de $QN=QG+NG$, qui sera $QN=\frac{rs}{\text{tang.}\theta}+\frac{r(\cos.s+\cos.t)}{\text{tang.}\alpha}$. On trouvera une seconde valeur de QN en observant que puisque ce point est sur l'hélice, et que l'arc $bmm'cn=r(\pi+t)$, on a $QN=\frac{r(\pi+t)}{\text{tang.}\theta}$. Egalant ces deux valeurs de QN, il en résultera l'équation $\pi-s+t=\frac{(\cos.s+\cos.t)\,\text{tang.}\theta}{\text{tang.}\alpha}$, laquelle, puisque $\sin.s=\frac{\text{tang.}\alpha}{\text{tang.}\theta}$, se change en $\pi-s+t=\frac{\cos.s+\cos.t}{\sin.s}$, et doit être satisfaite par la valeur de t qui déterminera l'angle can, dont dépend la position du point cherché N.

A mesure que l'angle α augmente, la longueur de l'arc hydrophore diminue; ses deux extrémités M et N se rapprochent, et quand α est devenu égal à θ, c'est-à-dire lorsque la tangente OT est devenue parallèle à l'horizon, les deux points M, N se confondent dans le point O dont la projection horizontale est en o. Ces résultats, évidents à l'inspection de la figure, se déduisent des formules précédentes. En effet, en faisant $\alpha=\theta$ dans la première, elle donne $\sin.s=1$, d'où $pm=p'm'=ao$. En faisant ensuite dans la seconde $\sin.s=1$, et par conséquent $\cos.s=0$, $s=\frac{1}{2}\pi$, elle devient $\frac{1}{2}\pi+t=\cos.t$, équation qui ne peut être satisfaite qu'autant que $\frac{1}{2}\pi+t=\cos.t=0$, d'où $t=-\frac{1}{2}\pi$, en sorte que l'angle can représenté par t devient ici cao. La longueur de l'arc hydrophore étant ainsi nulle quand $\alpha=\theta$, on voit que la vis ne peut pas monter d'eau, à moins que l'axe ne fasse avec l'horizon un angle plus petit que celui formé par l'hélice avec l'axe du cylindre. La longueur de l'arc hydrophore, et par conséquent la quantité d'eau qu'il contient, augmentent d'ailleurs à mesure que l'angle α est plus petit, mais comme, à vîtesse de rotation égale, la vîtesse verticale de cette eau diminue avec α, il y a une limite au-delà de laquelle on perd plus par la lenteur avec laquelle l'eau monte, qu'on ne gagne par la grande quantité de ce fluide que la vis peut contenir.

La relation entre les angles s et t est telle, qu'on ne peut pas en déduire l'expression de t sous forme finie. Mais il est remarquable que cette relation est également indépendante du pas de l'hélice, et de l'inclinaison de l'axe sur l'horizon. Pour éviter la peine de résoudre l'équation $\pi-s+t=\frac{\cos.s+\cos.t}{\sin.s}$ par approximation, j'ai calculé la table suivante des valeurs simultanées des angles s et t qui y satisfont, et des valeurs correspondantes de l'angle $200^{o}-s+t$, qui répond à l'arc mon, projection horizontale de l'arc hydrophore.

s.	t.	$200^{o}-s+t$.	s.	t.	$200^{o}-s+t$.
0°	200°	400°	50°	4°	154°
5	143	338	55	— 7	138
10	118	308	60	— 18	122
15	99	284	65	— 28	107
20	83	263	70	— 39	91
25	68	243	75	— 49	76
30	54	224	80	— 59	61
35	40	205	85	— 70	45
40	28	188	90	— 80	30
45	15	170	95	— 90	15
50	4	154	100	—100	0

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Par ce moyen, ayant déterminé l'angle s par l'équation sin. $s = \frac{\text{tang. } \alpha}{\text{tang. } \theta}$, on aura sur-le-champ l'angle man, en prenant dans la table la valeur de $200^\circ - s + t$ correspondante à celle de s. La longueur absolue de l'arc $mom'n$ sera $\frac{\pi r}{200^\circ}(200^\circ - s + t)$, et par conséquent la longueur absolue de l'arc hydrophore MOM'N, $\frac{\pi r(200^\circ - s + t)}{200^\circ . \text{sin. } \theta}$.

Comment on en déduit l'incliuaison de la vis sur l'horizon qui correspond au plus grand produit.

On peut maintenant déterminer facilement l'angle sous lequel il faut incliner une vis dont le pas est donné, pour qu'elle monte la plus grande quantité d'eau possible. Supposons qu'on imprime à la surface du cylindre sur laquelle le tuyau hélicoïde est enroulé une vîtesse de rotation V. Il en résultera que les arcs hydrophores seront transportés dans le sens de l'axe avec la vîtesse $\frac{V}{\text{tang. } \theta}$, laquelle estimée verticalement est $\frac{V . \text{sin. } \alpha}{\text{tang. } \theta}$. La quantité d'eau élevée dans un temps donné étant comme on l'a remarqué plus haut, proportionnelle au volume de l'arc hydrophore et à sa vîtesse verticale, elle l'est donc à la quantité $\frac{\pi r(200^\circ - s + t)}{200^\circ . \text{sin. } \theta} . \frac{V \text{ sin. } \alpha}{\text{tang. } \theta}$, ou simplement au produit $(200^\circ - s + t) \text{ sin. } \alpha$. On déterminera de la manière la plus simple la valeur de α qui rendra ce produit un maximum, en construisant dans chaque cas particulier une table des valeurs correspondantes de α et de ce produit.

Supposons, par exemple, l'inclinaison de l'hélice sur l'axe des $\frac{2}{3}$ d'un angle droit, ou $\theta = 66^\circ, 67$. On ne pourra pas, comme on l'a vu ci-dessus, donner à α une valeur plus grande que $66^\circ, 67$. En lui donnant successivement à partir de cette limite des valeurs de plus en plus petites, et calculant les valeurs correspondantes de s et de $200^\circ - s + t$ conformément à ce qui a été indiqué, on formera la table suivante.

α.	s.	$200^\circ - s + t$.	$(200^\circ - s + t) \text{ sin. } \alpha$.
$66^\circ, 67$	100°	0°	0,0
55	47	163	124,0
50	39	190	134,4
47,5	36	202	137,1
45	33	217	140,9
42,5	30	224	138,7
40	28	231	135,8
35	23	251	131,1
30	19	267	121,2
25	15	284	108,7
etc.			

Elle montre que l'inclinaison sur l'horizon au moyen de laquelle la vis donnera le plus grand produit est voisine de 45°; et une plus grande approximation apprendrait que la véritable valeur de α correspondante au maximum est à-très-peu-près 44°. On voit aussi, par, les nombres de la dernière colonne, qu'on peut faire varier l'inclinaison de la vis depuis 35° jusqu'à 55° sans que le produit diffère du produit maximum de plus de $\frac{1}{13}$. On observera d'ailleurs que tout ce qui précède suppose la vis formée par un tuyau hélicoïde d'un diamètre très-petit, enroulé sur un cylindre.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

On considère une vis où l'eau s'élève, non plus dans un tuyau d'un petit diamètre, mais dans des canaux hélicoïdes d'une grandeur quelconque.

§ 6. Les résultats précédents pourraient s'appliquer sans erreur sensible à une vis semblable à celle représentée sur la pl. 8, dans le cas où le diamètre du tuyau serait petit par rapport à celui du noyau cylindrique sur lequel il est enroulé. On prendrait pour l'angle θ celui formé par l'hélice axe du tuyau, avec l'axe du noyau cylindrique. Mais dans les vis construites de la manière indiquée par Vitruve, et plus encore dans celles qu'on exécute présentement, où le noyau a un petit diamètre, et où l'eau s'élève dans des canaux formés par des surfaces hélicoïdes, la forme de la portion de chaque spire où l'eau est reçue, ou de l'*espace hydrophore*, est telle que l'évaluation exacte du volume de cet espace exige une nouvelle recherche. Avant de m'en occuper, je ferai remarquer dans les vis dont il s'agit présentement une circonstance particulière, par laquelle elles se distinguent essentiellement des vis composées d'un petit tuyau enroulé sur un noyau cylindrique. La vis étant toujours projetée sur un plan vertical passant par son axe, soit AA la projection de cet axe, et BC celle du cercle qui sert de base à l'enveloppe. On a dit plus haut que les cloisons qui partagent la vis en canaux sont formées par des surfaces hélicoïdes décrites par une droite coupant constamment l'axe AA auquel elle est toujours perpendiculaire, et passant par un hélice BON tracée sur l'enveloppe. Chacun des points de cette droite décrit évidemment une hélice. Soient représentées en B'ON' B''ON'',.... la suite de ces hélices, tracées sur des cylindres dont les rayons sont de plus en plus petits, ayant toutes le même pas, et dont l'ensemble compose la surface qui forme la cloison. Parmi ces hélices, qui font des angles de plus en plus aigus avec l'axe AA, il y en aura une $\mathcal{C}$O dont la tangente en O sera la ligne ON parallèle à l'horizon. Or si l'on fait passer par cette ligne ON un plan horizontal, ce plan, qui coupera la suite des hélices dans les points N, N', N'',... sera évidemment la surface supérieure de l'eau qui peut être reçue dans chaque révolution du canal hélicoïde. On voit par-là que l'espace hydrophore n'est proprement formé que par celles des hélices composant la cloison, qui sont comprises entre BON et $\mathcal{C}$O; et que les hélices qui viennent après $\mathcal{C}$O, et sont tracées sur des cylindres d'un moindre rayon, ne reçoivent point d'eau. Cela apprend qu'on n'augmente point la quantité d'eau qu'une vis peut contenir en donnant à son noyau un diamètre plus petit que celui du cylindre sur lequel est tracée l'hélice $\mathcal{C}$O, laquelle forme avec l'axe un angle égal à l'inclinaison de l'axe sur l'horizon. Mais on voit aussi que si le noyau a un diamètre plus petit que celui de ce cylindre, de manière qu'il y ait une portion de la surface des cloisons qui ne reçoive point d'eau, l'eau contenue dans chaque espace hydrophore n'interrompra point la libre communication de l'air d'une spire à l'autre des canaux. D'où il suit que quand l'extrémité inférieure de la vis demeure entièrement plongée sous l'eau, l'air, s'il ne peut pénétrer par en bas, arrive librement par l'extrémité supérieure, et par conséquent que l'eau se place nécessairement dans chaque espace hydrophore comme dans un vase où elle est reçue, et où sa surface supérieure étant en contact avec l'air atmosphérique est nécessairement un plan horizontal. On voit donc qu'ici la vis ne peut jamais présenter le genre de mouvement qui a été examiné dans les § 3 et 4, et que le jeu n'en peut être interrompu, quel que soit niveau du réservoir inférieur; propriété assez importante dans les épuisements pour les fondations.

Dans les vis de cette espèce, l'extrémité inférieure peut demeurer constamment sous l'eau, et cependant l'eau être élevée à une hauteur quelconque.

Pl. M, fig. 10.

Recherche du

J'en viens maintenant à l'évaluation du volume d'eau contenu dans chaque spire

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

des canaux hélicoïdes, volume que je nomme *espace hydrophore*. Cet espace est contenu entre le plan horizontal ON, qui forme nécessairement la surface supérieure de l'eau, la portion de la cloison hélicoïde qui est au-dessous de ce plan, et la portion OMN de l'enveloppe. En se représentant tous les cylindres sur lesquels sont tracées la suite des hélices OMN, OM′N′, OM″N″,.... on pourra considérer la portion de l'un quelconque de ces cylindres qui est comprise entre le plan horizontal ON et la partie OMN, OM′N′, OM″N″,.... de l'hélice tracée sur lui, comme un élément différentiel de ce solide; et si l'on avait l'expression générale des portions de surface cylindrique dont je viens de parler, en la multipliant par dr (r représentant le rayon des cylindres), et intégrant depuis la valeur de r qui répond à l'hélice 6O jusqu'à celle qui répond à l'hélice tracée sur l'enveloppe de la vis, on aurait la valeur de l'espace cherché.

volume de l'espace hydrophore. Pl. M, Fig. 10

Soient comme ci-dessus BC et $bocn$, les projections verticales et horizontales de l'un des cercles formant la base des cylindres sur lesquels sont tracées les hélices telles que OMN, dont l'ensemble forme les cloisons hélicoïdes; et soit r le rayon de ce cylindre. ON étant la trace du plan horizontal qui forme la surface de l'eau, il s'agit de trouver l'expression de la portion de la surface du cylindre comprise entre l'hélice OMN, et la section de cette surface par le plan ON. Soit M un point quelconque de l'hélice, mis en m en projection horizontale, et nommons s l'angle oam qui détermine la position de ce point. En appelant θ l'angle de l'hélice avec la génératrice du cylindre, om sera rs, et PM sera $\frac{rs}{\text{tang.}\,\theta}$. Mais en nommant α l'angle AOE, et remarquant que PO ou ap est le sinus de l'angle s, on aura $\text{PE}=\frac{r.\sin.s}{\text{tang.}\,\alpha}$. Donc $\text{ME}=\text{PE}-\text{PM}=\frac{r.\sin.s}{\text{tang.}\,\alpha}-\frac{rs}{\text{tang.}\,\theta}$. On aura donc l'aire de la portion de surface cylindrique OMN, en prenant l'intégrale $\int\left(\frac{r.\sin.s}{\text{tang.}\,\alpha}-\frac{rs}{\text{tang.}\,\theta}\right)r\,ds$ depuis le point O où l'on a $s=0$, jusqu'au point N où la valeur de ME étant nulle, on a $\text{ME}=\frac{r.\sin.s}{\text{tang.}\,\alpha}-\frac{rs}{\text{tang.}\,\theta}=0$.

Pl. M, Fig. 11.

En effectuant l'intégration indiquée, il viendra $-\frac{r^2\cos.s}{\text{tang.}\,\alpha}-\frac{r^2s^2}{2\,\text{tang.}\,\theta}+const.$ La constante se déterminera en observant que l'aire est nulle à son origine O où $s=0$, ce qui donne $const.=\frac{r^2}{\text{tang.}\,\alpha}$, et pour l'expression de l'intégrale, $\frac{r^2(1-\cos.s)}{\text{tang.}\,\alpha}-\frac{r^2s^2}{2\,\text{tang.}\,\alpha}$, laquelle sera complète en y donnant à s la valeur qui satisfait à l'équation $\frac{\sin.s}{\text{tang.}\,\alpha}-\frac{s}{\text{tang.}\,\theta}=0$. On observera d'ailleurs que la tangente de l'angle θ, nulle pour l'hélice tracée sur un cylindre dont le rayon est infiniment petit, augmente proportionnellement à ce rayon. Donc si r' est le rayon de l'enveloppe de la vis, et θ' l'angle que l'hélice tracée sur cette enveloppe forme avec l'axe du cylindre, on aura pour l'hélice tracée sur le cylindre dont le rayon est r, $\text{tang.}\,\theta=\frac{r}{r'}\text{tang.}\,\theta'$.

Mettant cette valeur dans les expressions précédentes, il viendra pour l'aire de

Expression de l'aire d'une sec-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tion quelconque faite dans l'espace hydrophore par un cylindre concentrique à l'enveloppe de la vis.

la portion de surface cylindrique OMN, $\frac{r^2(1-\cos.s)}{\text{tang.}\,\alpha} - \frac{rr's^2}{2\,\text{tang.}\,\theta'}$, où il faudra mettre pour s la valeur qui satisfait à l'équation $\frac{\sin.s}{\text{tang.}\,\alpha} - \frac{r's}{r.\text{tang.}\,\theta'} = 0$.

Comment on calculera par son moyen le volume de l'espace hydrophore.

Pouvant calculer, au moyen des formules précédentes, l'aire d'une section quelconque faite dans l'espace hydrophore par une surface cylindrique dont le rayon $= r$, on déterminera le volume de cet espace par les méthodes d'approximation indiquées dans la note (*o*). Ainsi on remarquera d'abord que cet espace est compris entre le cylindre pour lequel on a tang. θ = tang. α, et par conséquent $r = r'.\frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{tang.}\,\theta'}$; et l'enveloppe de la vis, pour laquelle $r = r'$: Supposant la distance de ces cylindres, qui est $r'\left(1-\frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{tang.}\,\theta'}\right)$, partagée en un nombre pair de parties égales, quatre par exemple, on remarquera que l'aire de la section correspondante au premier point de division, où le rayon $= r'.\frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{tang.}\,\theta'}$, est nulle, et l'on calculera les aires des sections correspondantes aux quatre autres points. On en conclura ensuite le volume cherché au moyen des formules de la note citée, de la même manière que si les sections dont il s'agit avaient été faites dans un solide par une suite de plans équidistants et parallèles.

Recherche de l'inclinaison de la vis sur l'horizon qui donnera le plus grand produit.

Le volume de l'espace hydrophore est nul lorsque l'angle α que la vis forme avec l'horizon est égal à l'angle θ' formé par l'hélice tracée sur l'enveloppe avec l'axe de cette vis. En donnant à α des valeurs de plus en plus petites à partir de θ', ce volume augmente de plus en plus; mais en même temps, à vîtesse de rotation égale, la vîtesse avec laquelle l'eau s'élève verticalement par le moyen de la machine diminue. Nommant A le volume de l'espace hydrophore correspondant à une valeur donnée de α, on verra comme dans le § précédent que l'effet produit par la machine sera proportionnel au produit A.*sin.*α. On pourra, en formant une table des valeurs correspondantes de α et de ce produit, reconnaître la valeur de α qui le rendra le plus grand possible. Cette recherche comporte un calcul assez long, mais l'objet n'en est pas fort important, puisque, par la propriété connue du maximum, on peut s'écarter assez sensiblement du terme qui le donne, sans perdre beaucoup sur sa valeur. Ainsi, l'angle θ' étant supposé, par exemple, d'environ 70°, on pourra faire $\alpha = 40°$ environ sans s'éloigner beaucoup du plus grand produit.

Théorie mécanique de la vis d'Archimède, dans le cas où l'eau occupe seulement l'espace hydrophore de chaque spire des canaux hélicoïdes.

§ 7. Il reste à examiner la théorie mécanique de la vis d'Archimède, considérée dans l'hypothèse des deux § précédents, théorie qui est extrêmement simple. On voit en effet que, par la manière dont le mouvement est imprimé à l'eau, ce fluide se trouve emporté par la machine, dans le sens des canaux hélicoïdes, avec une vîtesse égale à celle avec laquelle il coule en sens contraire le long de ces canaux. Il résulte de-là que l'eau entre dans les canaux et en sort avec une vîtesse nulle, quelle que soit d'ailleurs leur vîtesse de rotation. La quantité d'action dépensée par le moteur, abstraction faite des frottements, est donc nécessairement employée toute entière à produire l'élévation de l'eau. Nommant H la hauteur à laquelle l'eau est élevée, E le volume d'eau versé par l'extrémité supérieure à chaque révolution de la vis, P l'effort du moteur supposé appliqué à l'extrémité du rayon r' de l'enveloppe, on aura, puisque ce point d'application parcourt un espace $2\pi r'$

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

pendant que le volume d'eau E est élevé, la relation $P.2\pi r' = 1000\,E.H$ kil. × mèt., d'où l'on déduira l'effort du moteur, et la quantité d'action nécessaires pour élever un volume d'eau donné.

On arrive au même résultat en remarquant que l'effort du moteur doit être totalement employé à faire équilibre à l'action du poids de l'eau contenue dans la vis. On trouvera ce poids, en remarquant que chaque révolution des canaux hélicoïdes occupe dans le sens de la longueur de la vis un espace $\frac{2\pi r'}{\text{tang.}\,\theta'}$, lequel estimé verticalement est $\frac{2\pi r'.\sin.\alpha}{\text{tang.}\,\theta'}$; d'où il suit que le nombre des révolutions sur la hauteur H est $\frac{H.\text{tang.}\,\theta'}{2\pi r'.\sin.\alpha}$, et par conséquent que le poids de l'eau contenue dans la vis est $1000\,E.\frac{H.\text{tang.}\,\theta'}{2\pi r'.\sin.\alpha}$. On observera maintenant que si V est la vîtesse du point d'application du moteur, celle de l'eau contenue dans la vis estimée verticalement, c'est-à-dire dans le sens de l'action de son poids, sera, comme on l'a vu plus haut, $\frac{V.\sin\alpha}{\text{tang}\,\theta'}$. Donc, d'après le principe des vîtesses virtuelles, la condition de l'équilibre entre l'effort P et l'action du poids de l'eau doit être exprimée par l'équation $P.V = 1000\,E.\frac{H.\text{tang.}\,\theta'}{2\pi r'.\sin.\alpha}\frac{V.\sin.\alpha}{\text{tang.}\,\theta'}$; qui se réduit à $P.2\pi r' = 1000\,E.H$, comme ci-dessus.

Effet utile de la vis d'Archimède dans la pratique.

Les frottements et autres résistances étant peu considérables dans cette machine, il y a tout lieu de présumer qu'elle doit dans la pratique produire un effet utile très-peu inférieur à la quantité d'action qu'on y dépense, et il paraît au moins qu'elle doit avoir, comme le tympan, une supériorité marquée sur les chapelets, norias et roues à seaux. Cependant il résulte des observations recueillies sur la vis d'Archimède que l'effet utile journalier qu'un homme peut produire par son moyen est seulement 90^{mc} d'eau élevés à un mètre, ou $90000^{k\times m}$ (Gauthey, *Construction des ponts*, t. 2, p. 228); en sorte que si l'on admettait que la quantité d'action dépensée par cet homme fût celle qu'il peut fournir en agissant sur une manivelle, c'est-à-dire environ $170000^{k\times m}$, l'effet utile ne serait guères plus de la moitié de cette quantité d'action.

Ce résultat paraissant incompatible avec la nature de la machine, il paraît qu'il faut en chercher la cause dans la manière désavantageuse dont on emploie les hommes, en les faisant agir sur une manivelle montée sur l'axe de la vis, au moyen de bras ou balanciers qu'ils soutiennent dans une position à-peu-près horizontale, et qu'ils tirent et poussent alternativement. Cette manière d'imprimer le mouvement à un axe peut être avantageuse; mais il faudrait pour cela que les hommes fussent assis, afin d'agir à la manière des rameurs, et qu'il y eût sur l'axe un volant capable de régulariser le mouvement. Il est vraisemblable qu'on obtiendrait alors une quantité d'action plus grande que quand ils agissent à l'ordinaire sur une manivelle, tandis que d'après la disposition adoptée pour la manœuvre des vis d'Archimède, le contraire a certainement lieu. L'emploi d'un volant offrant quelque difficulté dans les vis employées aux épuisements pour les fondations, il paraît que la meilleure disposition à adopter est celle indiquée dans le *Traité de la construction des ponts*, t. 2, p. 231, qui consiste à monter une manivelle ordinaire sur un axe horizontal, dont le

Comment on peut faire mouvoir la vis par une manivelle horizon-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

tale, au moyen du joint brisé.

mouvement de rotation se communiquerait à l'axe incliné de la vis, au moyen du mécanisme connu en France sous le nom de *joint brisé*, et que les Anglais nomment *joint universel* (*universal joint*). Cet appareil peut être employé avantageusement tant que l'angle des deux axes ne surpasse point 35 à 45°, ce qui a lieu précisément dans le cas dont il s'agit, et on peut faire varier cet angle à volonté. On trouvera dans l'*Essai sur la composition des machines*, p. 60, la description du joint brisé, et l'indication d'une proposition démontrée par MM. Bétancourt et Breguet qui en constitue la théorie, et dont il résulte qu'en nommant I l'angle des deux axes supposés dans un même plan vertical, a l'angle décrit par l'un des axes par l'effet du mouvement de rotation, compté à partir d'un rayon horizontal, et a' l'angle correspondant décrit par l'autre axe, on a la relation tang. $a' =$ tang. a. cos. I. On déduit de là qu'en nommant P un effort exercé pour faire tourner le premier axe, P' la résistance appliquée au second axe, et à laquelle cet effort pourrait faire équilibre, ces deux puissances étant censées agir à égales distances de chaque axe, on a constamment $P = P' . \frac{\cos. I}{\cos.^2 a + \cos.^2 a . \cos.^2 I}$. On voit donc qu'une résistance constante appliquée à l'un des axes, comme cela a lieu dans la vis d'Archimède, comporte un effort variable appliqué à l'autre, et comme l'action que les hommes exercent sur la manivelle est effectivement variable, l'emploi de ce mécanisme ne comportera aucun inconvénient, pourvu que la manivelle soit convenablement disposée.

Diverses dispositions à donner à la vis d'Archimède.

M. Hachette a donné (*Traité élémentaire des machines*, ch. 1^er^) le dessin des vis hollandaises, qui diffèrent des nôtres en ce que l'enveloppe, dont la partie inférieure seulement est conservée, est fixe, l'axe et les surfaces hélicoïdes dont il est garni étant seules mobiles. Cette disposition a, comme dans les chapelets verticaux et inclinés, l'inconvénient de laisser perdre une partie de l'eau élevée, à raison du jeu qu'on est obligé de laisser entre l'enveloppe fixe et les ailettes mobiles. Cet inconvénient est peu important lorsque, comme on le voit en Hollande, les vis sont mues par le vent, puisque l'on peut compenser la perte dont il s'agit, en construisant une machine un peu plus puissante. Les machines de cette espèce doivent d'ailleurs avoir sur les autres une supériorité marquée sous le rapport de la solidité et de la durée, en ce que la très-grande partie du poids de l'eau qui s'y trouve contenue pendant qu'elles travaillent est supportée par l'enveloppe fixe, qu'on peut soutenir de manière à lui procurer toute la solidité nécessaire, et que ce poids n'exerce que peu d'action pour faire plier l'axe. Cet axe ne tend donc ni à se casser ni à se courber, ce qui arrive fréquemment dans les vis ordinaires, et nuit beaucoup à leur bon effet.

Quant à la disposition adoptée généralement en France, telle qu'elle est indiquée au commencement du § 3, elle diffère principalement de celle des anciens, en ce que son diamètre et le nombre des cloisons hélicoïdes étant beaucoup moins grands, elle contient beaucoup moins d'eau. A la vérité on la meut plus vîte, car Vitruve dit que les hommes la faisaient tourner « en la foulant aux pieds », en sorte qu'ils exerçaient un grand effort, en lui imprimant peu de vîtesse, disposition qui me paraît préférable et plus conforme à la nature de la machine. Il résulte d'ailleurs de la construction de nos vis, que l'espace occupé par l'eau n'est qu'une petite partie de leur capacité, ce qui n'est assurément point convenable. Il me semble qu'il y aurait de l'avantage à en augmenter le diamètre, ainsi que le nombre des cloisons, et

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

à les construire avec de la forte tôle, ou plutôt en cuivre laminé, en plaçant dans l'intérieur les armatures convenables pour les rendre peu susceptibles de fléchir.

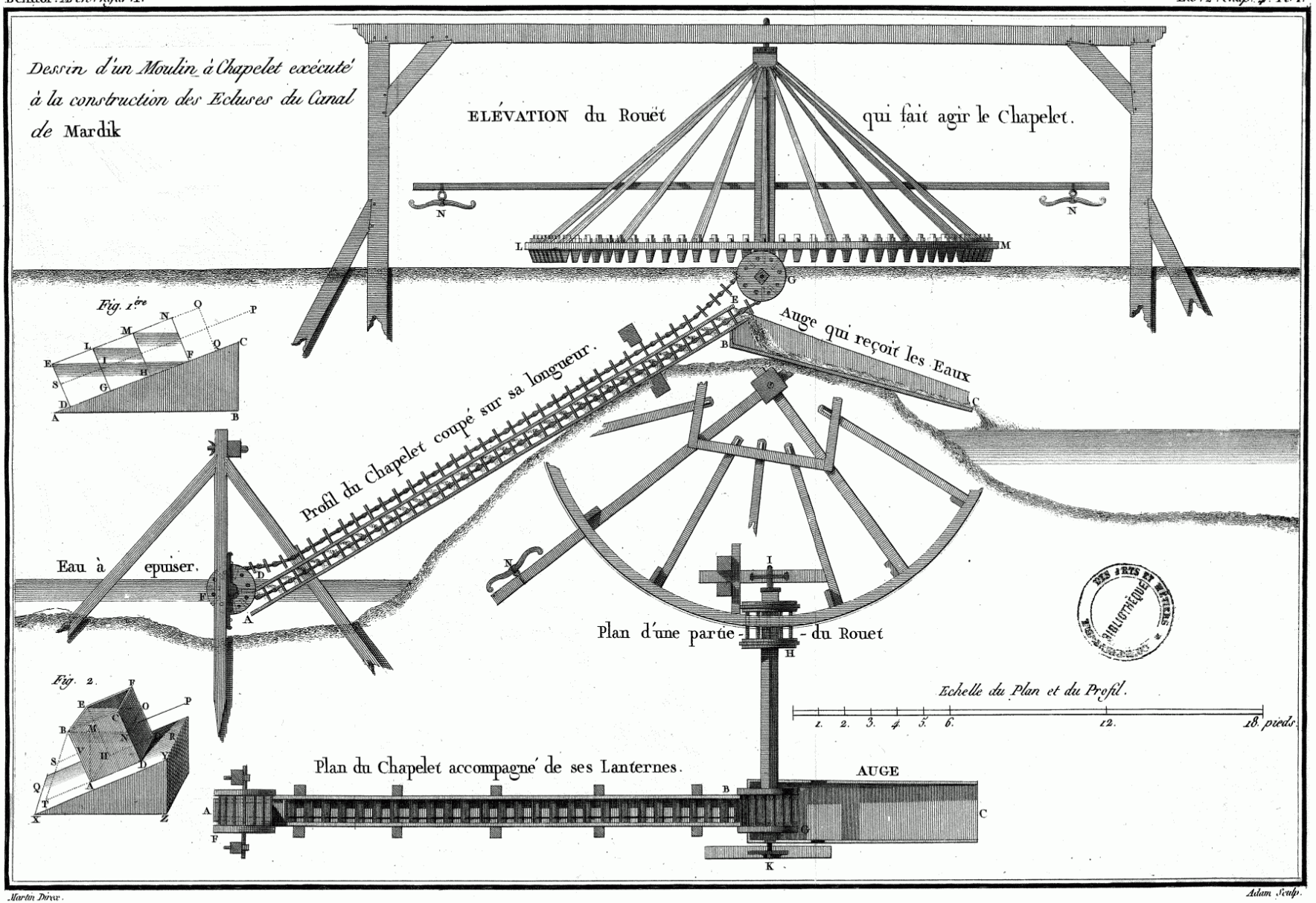
Il paraît aussi qu'il y aurait de l'avantage, soit dans les épuisements pour les travaux des fondations, soit dans toute autre circonstance où l'on serait dans le cas d'élever de l'eau à une hauteur médiocre, à employer de grosses vis d'Archimède mues par des chevaux, au moyen d'une roue dentée horizontale engrenant dans une lanterne ou un pignon fixé sur l'axe de la vis. Smeaton a laissé sur une machine de cette espèce, mue par deux chevaux travaillant 9 heures par jour, des observations d'après lesquelles l'effet utile produit par chaque cheval était en une minute 20104 *livres avoir-du-poids* élevées à *un pied*, (Rees, *Cyclopœdia*, art. *water, raising of*), ce qui revient à $2778^{k \times m}$. L'effet utile journalier serait d'après cela $1500120^{k \times m}$, nombre supérieur au résultat moyen inscrit dans le tableau de la p. 396. Cette observation vient donc à l'appui de ce qui a été dit ci-dessus, et montre que la vis d'Archimède fait éprouver peu de perte sur la quantité d'action qui lui est transmise.

On trouve dans les t. 2 et 3 des *Annales des arts et manufactures*, 2^{e} collection, la description d'un appareil proposé par M. Pattu, pour l'emploi de la vis d'Archimède. Il consiste en deux vis de diamètre et de longueur inégales, ayant leur axe commun. La plus grosse et la plus courte reçoit l'eau d'une chute, et sert de moteur de la manière indiquée à la fin du § 1 de la note (*ca*). Le mouvement de rotation qu'elle prend fait tourner la vis la moins grosse et la plus longue, qui sert de noyau à l'autre sur une portion de sa longueur, et qui élève de l'eau.

FIN DU TOME PREMIER.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

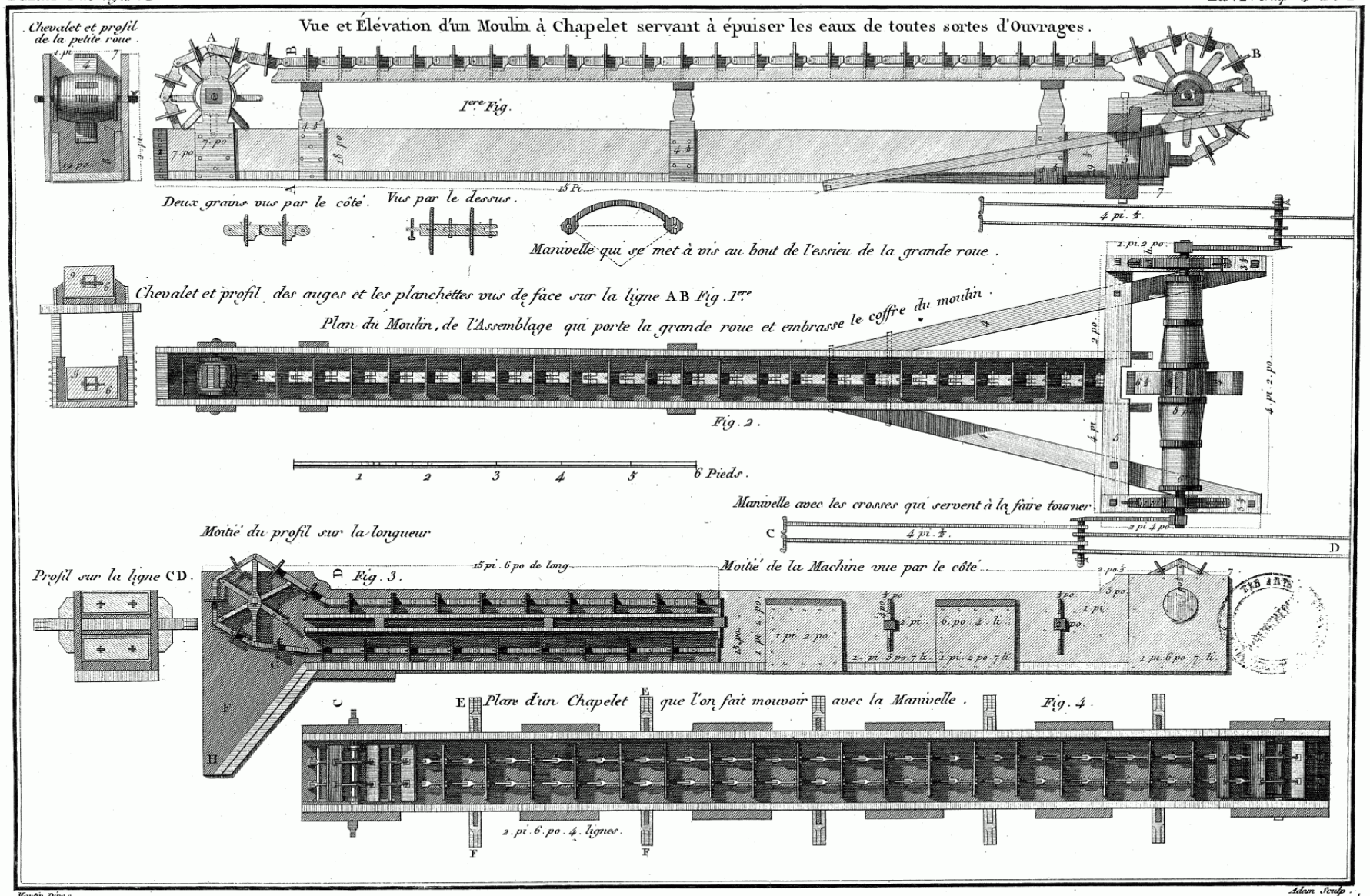


BIBLIOTHÈQUE DES ARTS ET MÉTIERS

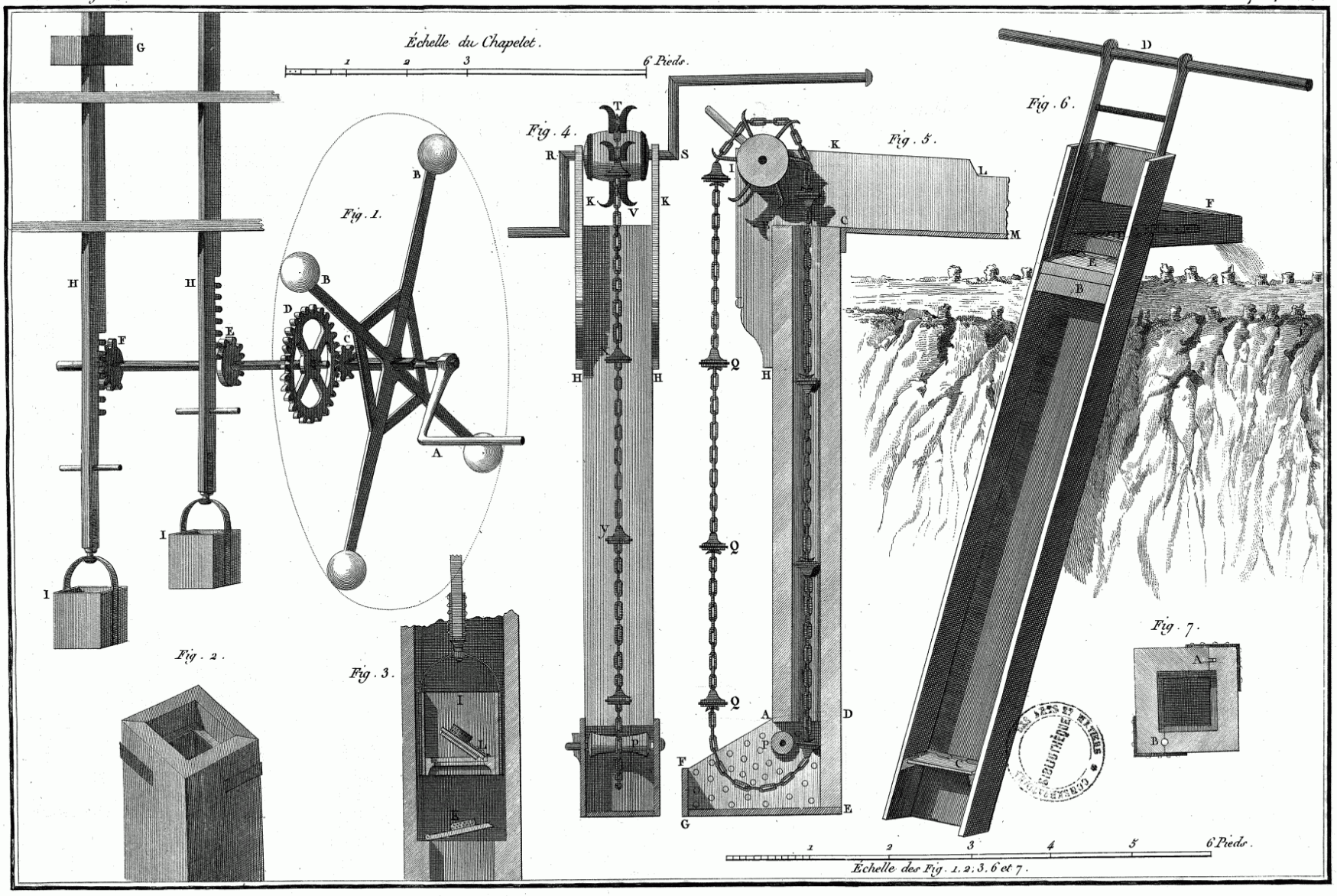
Martin Direx. Adam Sculp.

T. 36.

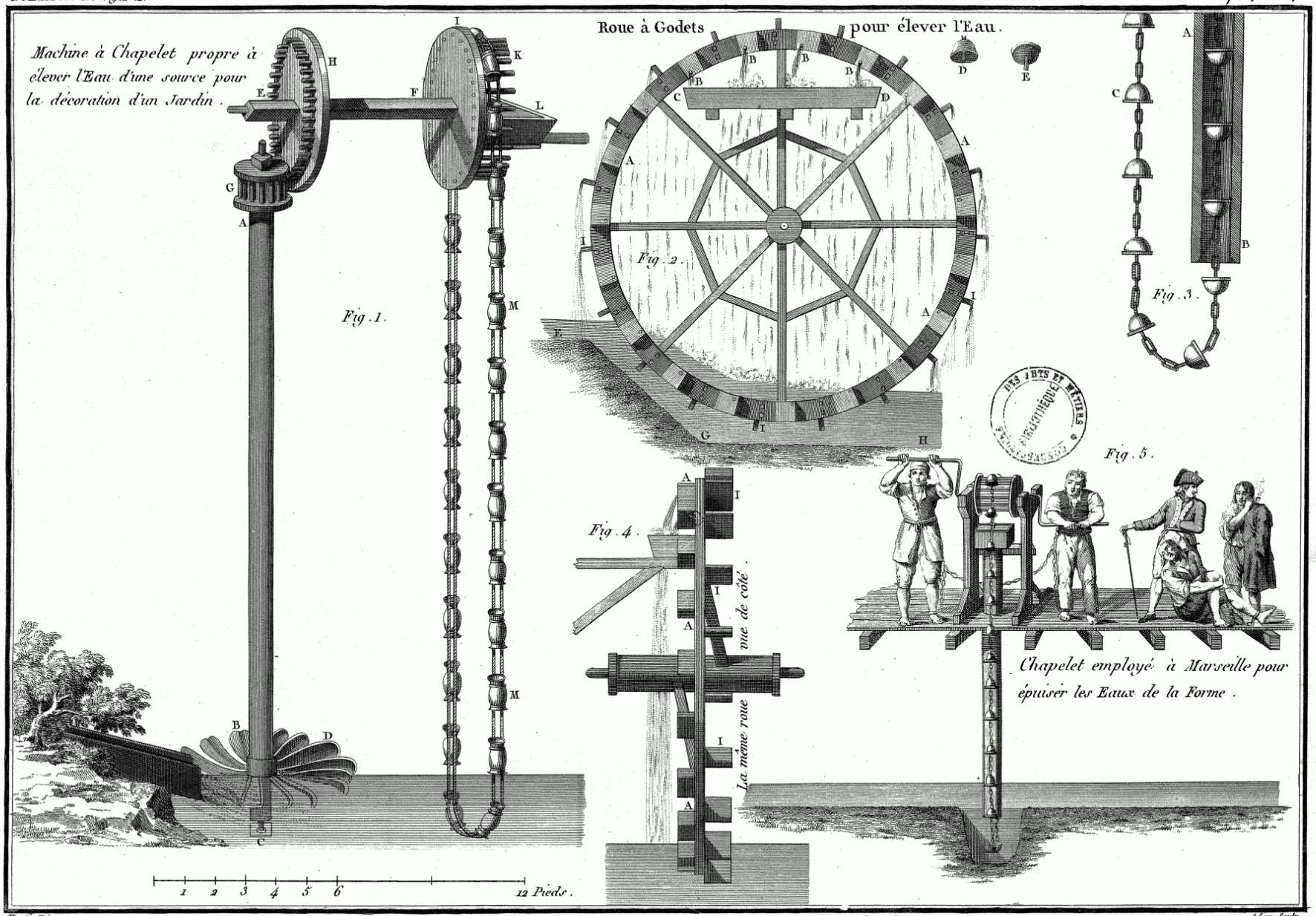
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



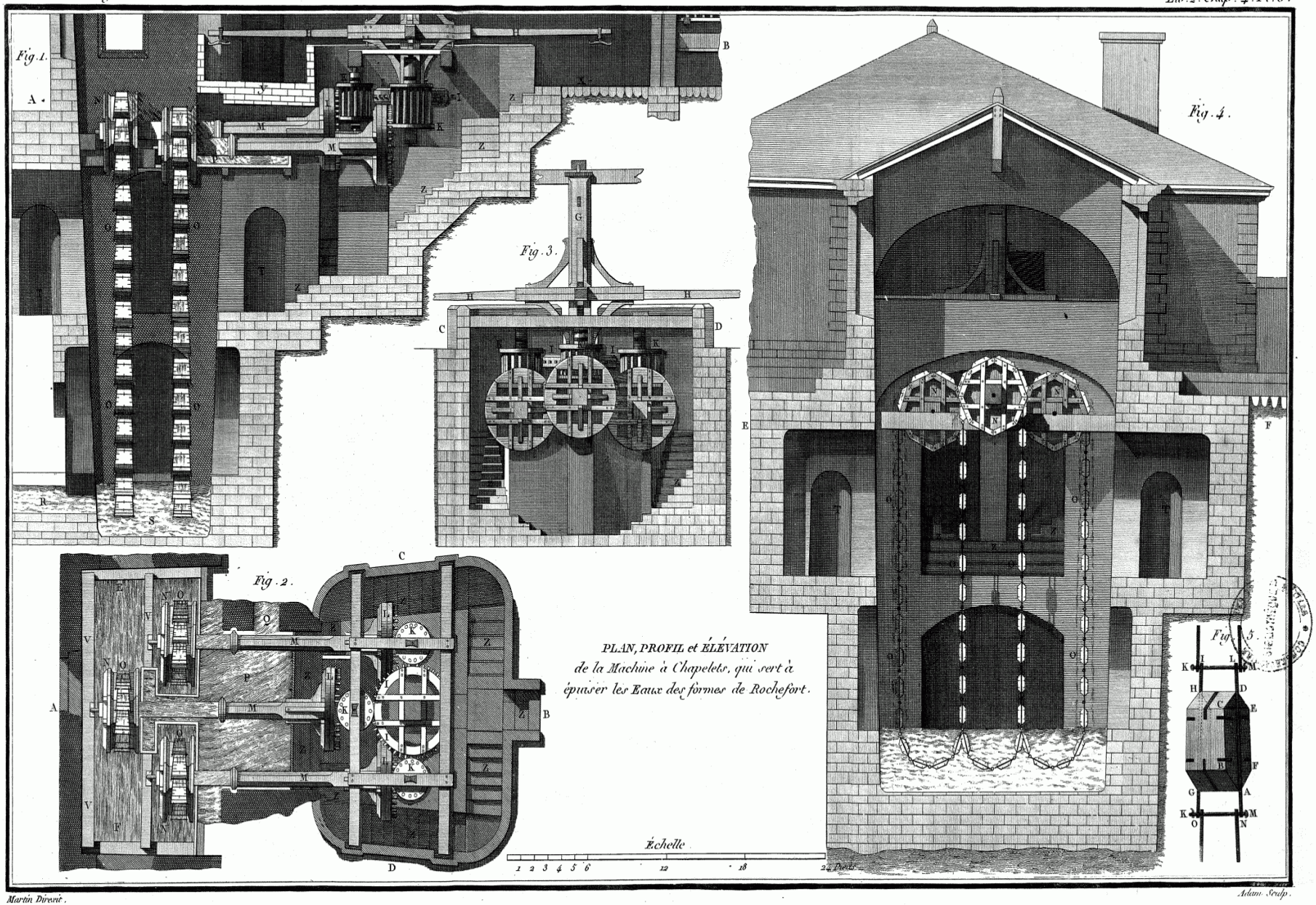
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

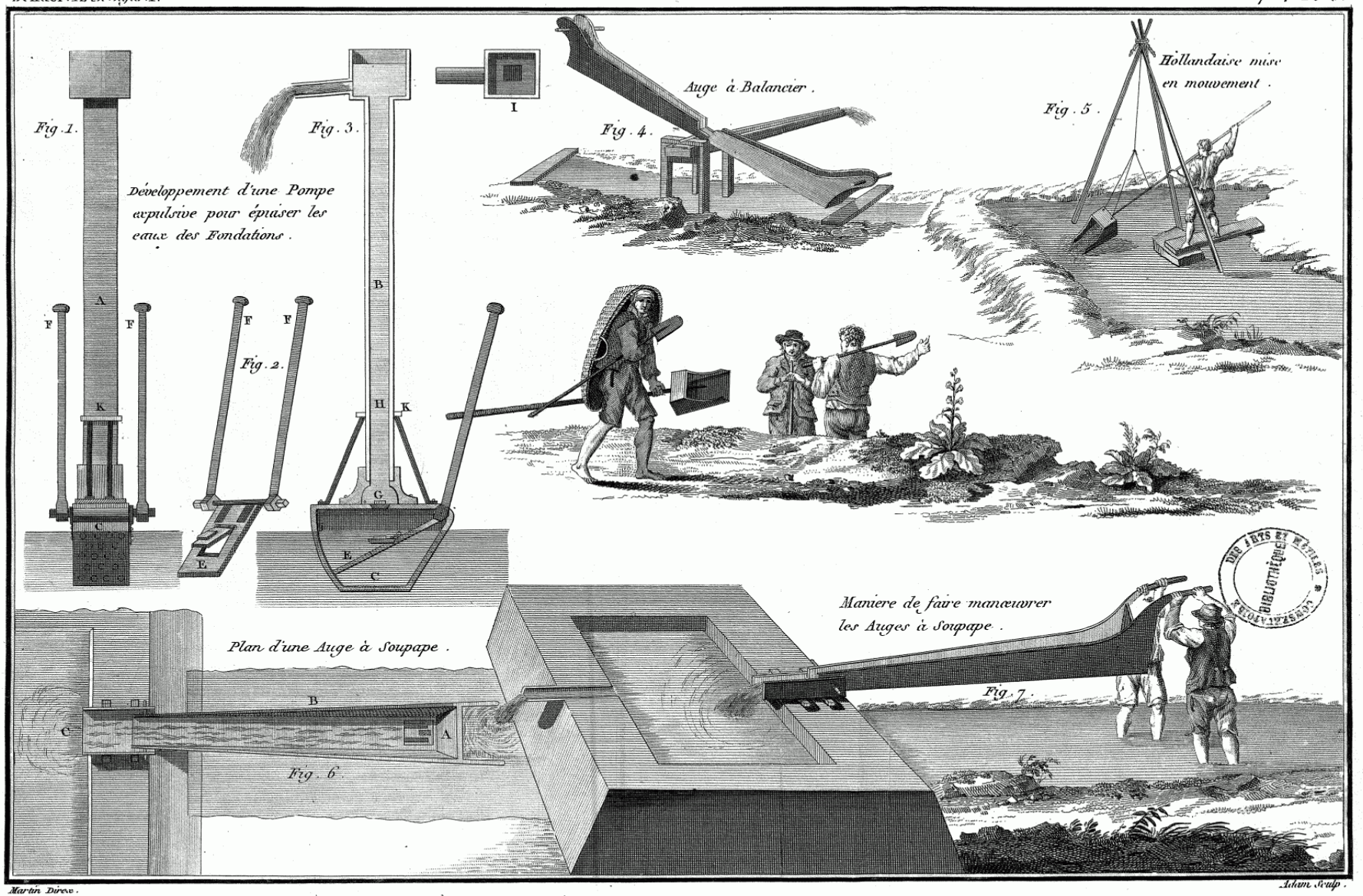


Martin Direxit.

Adam Sculp.

I. 40.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

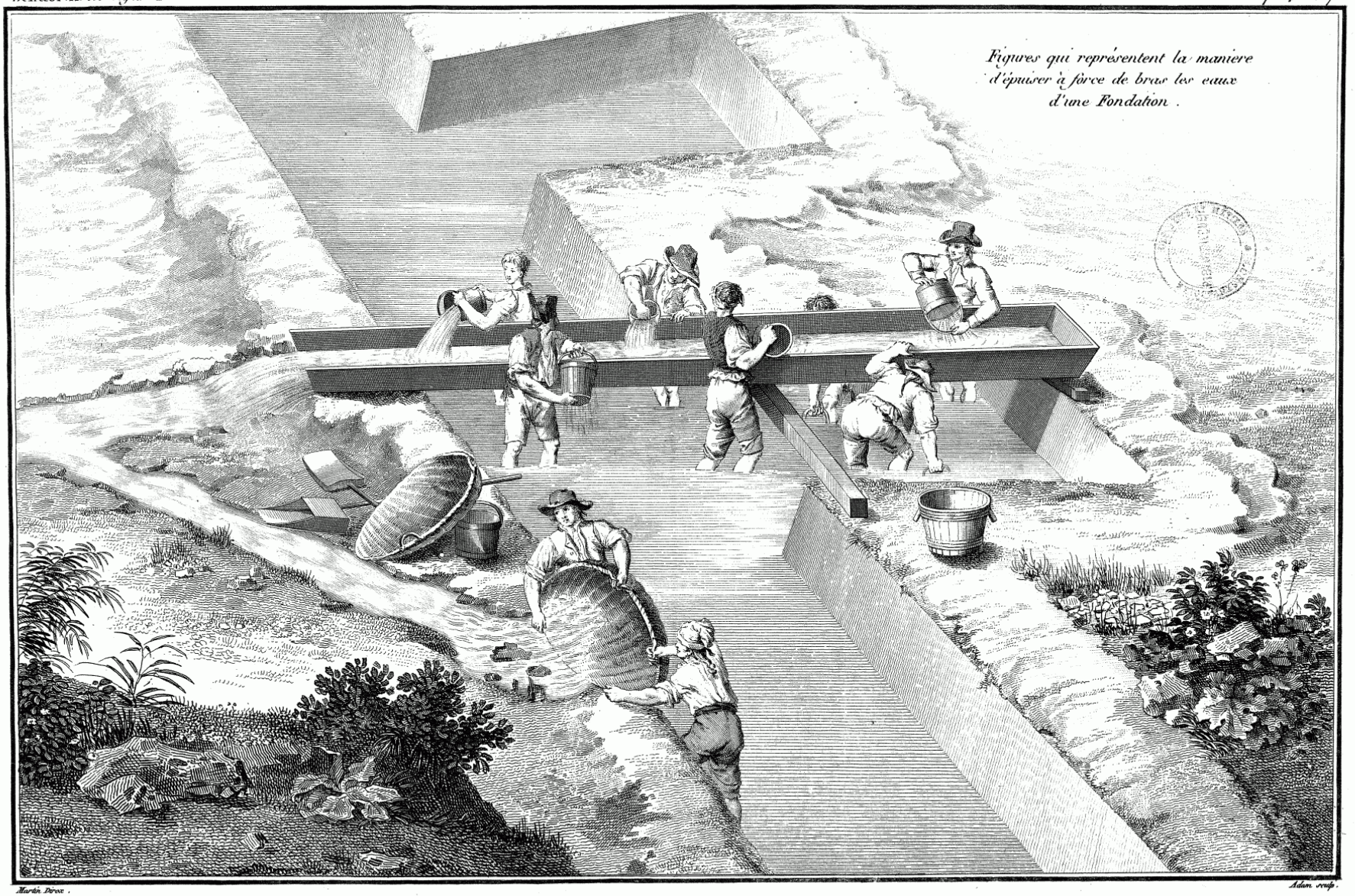


Martin Direx.

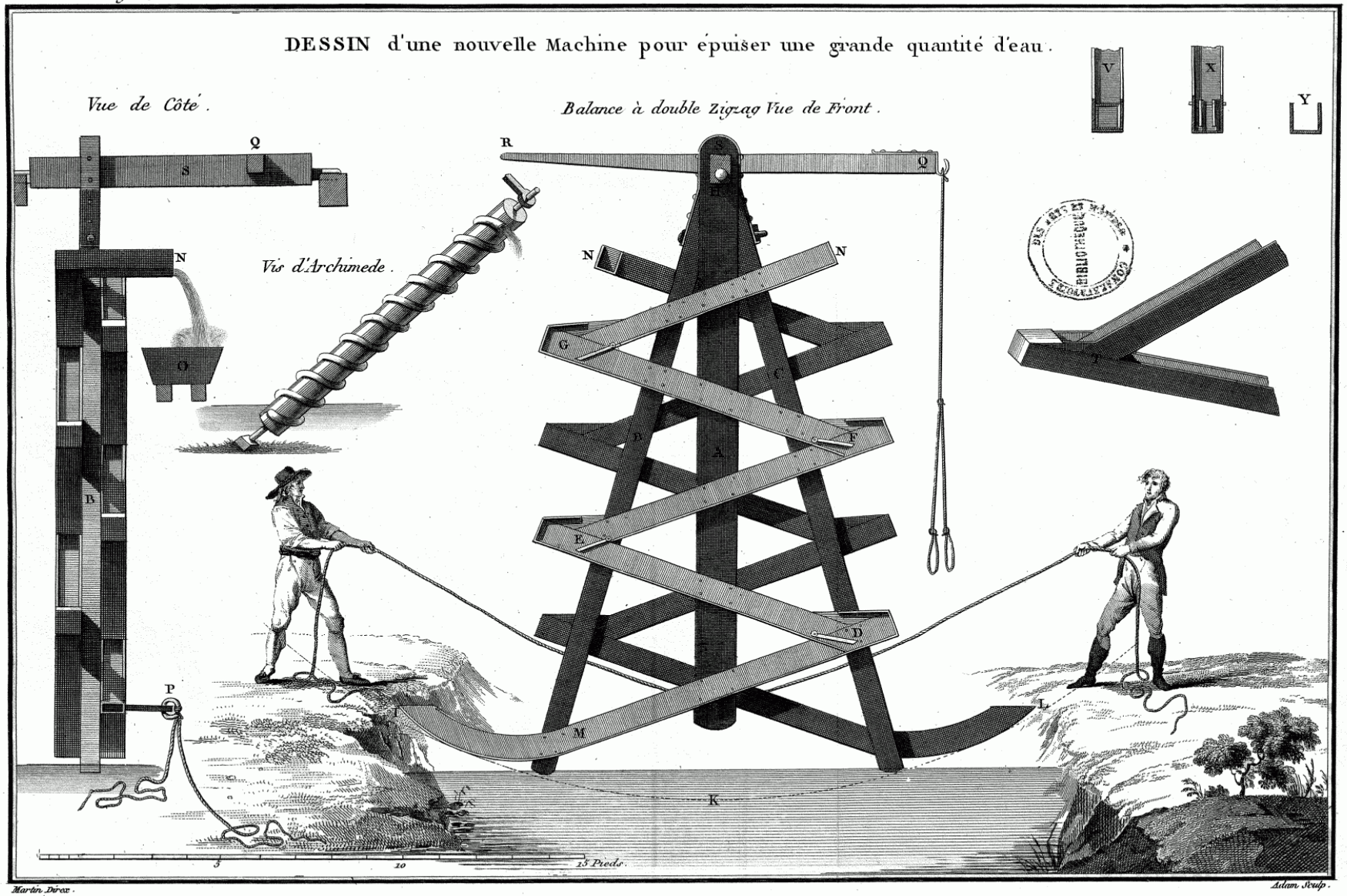
Adam Sculp.

I. 41.

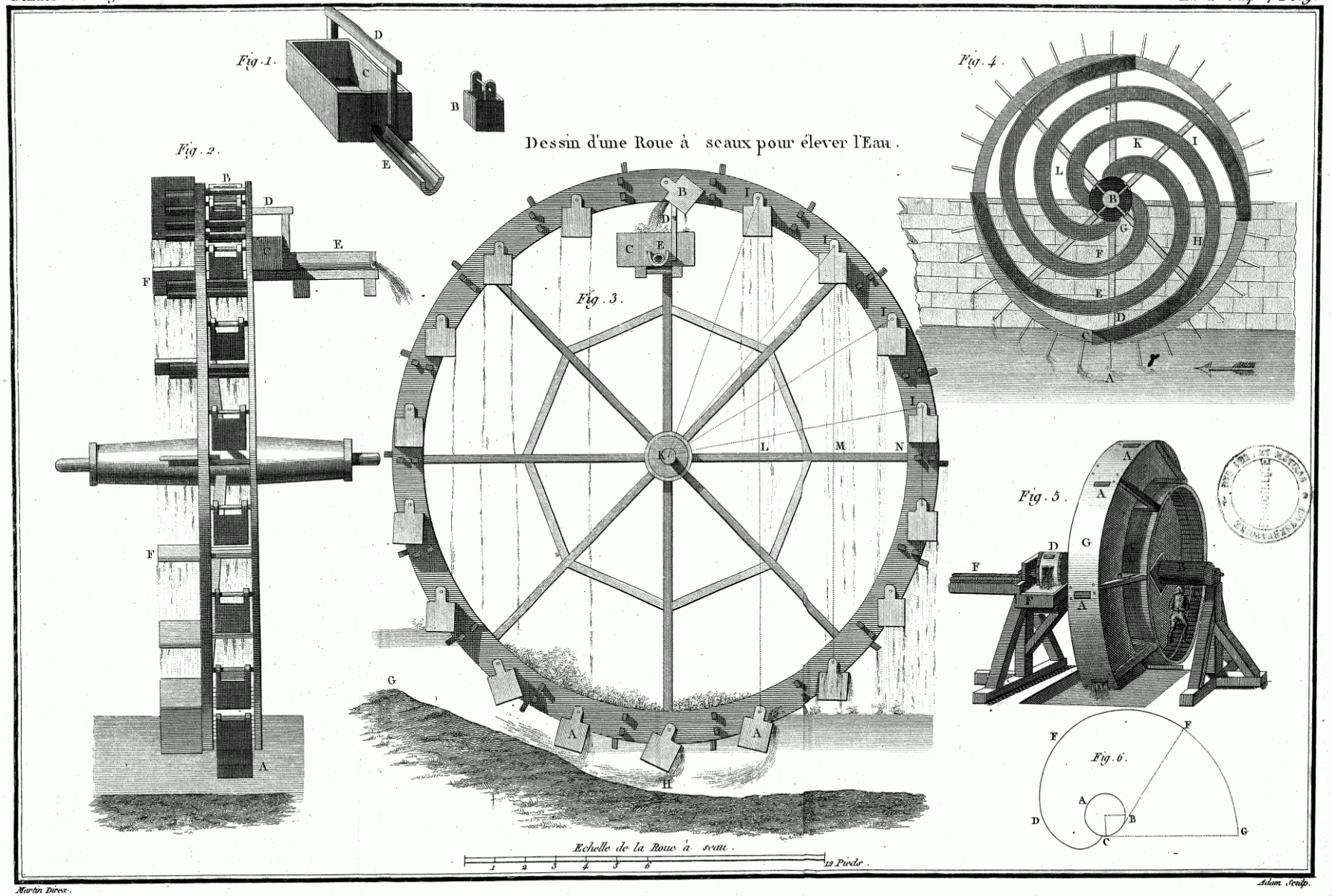
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



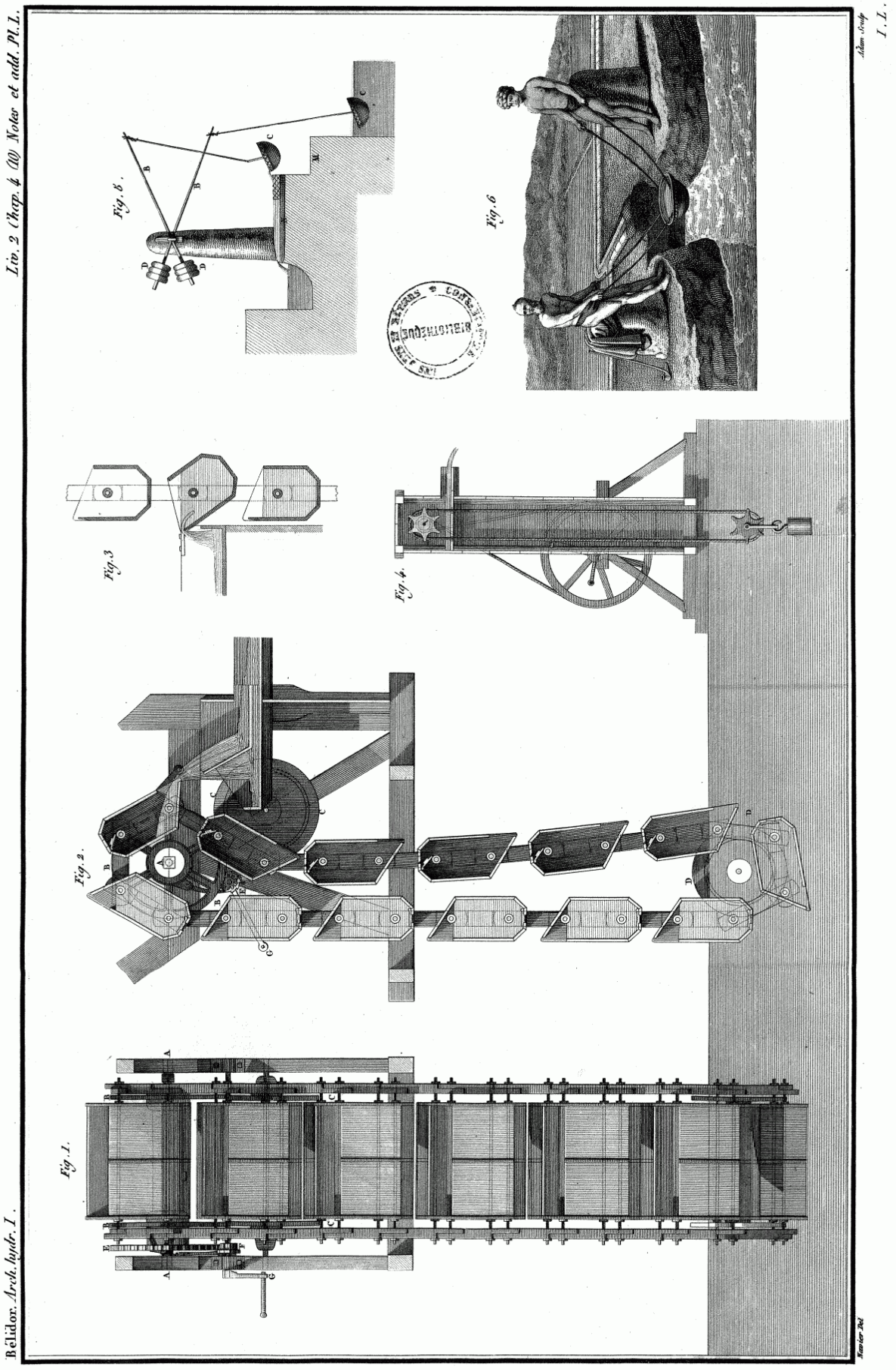
Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



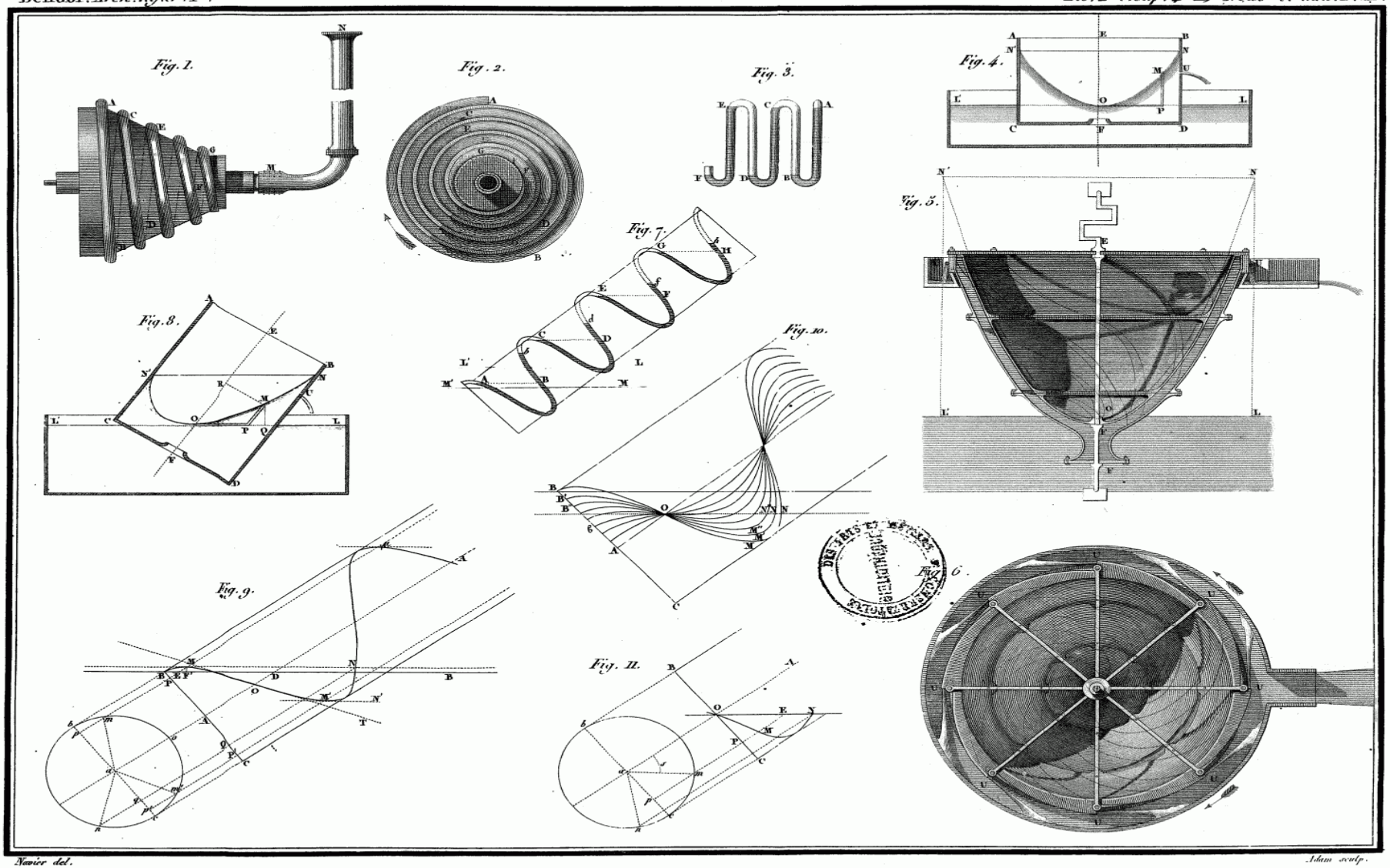
Martin Direx. *Adam Sculp.*

I. *44 et dernière*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Droits réservés au Cnam et à ses partenaires



Navier del. *Adam sculp.*

I. M.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

TABLE DES MATIÈRES.

RAPPORT *sur les corrections et additions faites par* M. NAVIER, *ingénieur du corps royal des Ponts-et-Chaussées, et ancien élève de l'École Polytechnique, à une nouvelle édition du premier volume de l'Architecture Hydraulique de* BÉLIDOR . . . . . Page i

AVERTISSEMENT de l'Éditeur. ix

TABLES de réduction des anciennes mesures françaises et des mesures anglaises. . xiii

PRÉFACE de l'Auteur 1

LIVRE PREMIER, SERVANT D'INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER,

Contenant les principes de la Mécanique.

1. DÉFINITIONS, axiômes, et remarques préliminaires 11

(*a*) Sur la nature du mouvement uniforme dans les machines . . . . . Page 12

(*b*) Notions générales sur le mouvement, la vitesse, la force. — Sur la pesanteur. — Le poids d'un corps est égal au produit de sa masse par la vitesse que la pesanteur peut imprimer dans l'unité de temps. . . 13

(*c*) Sur la proportionnalité de la force à la vitesse 15

Propriétés du parallélogramme des forces 16

15. La force exprimée par la diagonale d'un parallélogramme est égale à deux autres forces, lesquelles, agissant ensemble, seraient exprimées par les côtés du même parallélogramme 17

(*d*) Sur le principe de la composition des forces. — Relation entre la résultante de plusieurs forces et les angles qu'elles forment. — Conditions d'équilibre de plusieurs forces appliquées à un point 17

(*e*) Comment on passe de la composition des vitesses à la composition des pressions 20

23. Quand une force agit selon une direction oblique à une surface, elle ne pousse, tire, ou choque cette surface qu'avec une force relative exprimée par le sinus de l'angle d'incidence 22

Principe général de la mécanique 23

(*f*) Sur le principe établi par Varignon 23

(*g*) Comment on peut prendre le poids d'un corps pour sa masse 24

(*h*) Éclaircissement sur l'art. 32 du texte 25

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

33. Quand un nombre de puissances sont en équilibre autour d'un même point, on peut réduire toutes ces puissances à trois seulement..... Page 25
35. Définition des trois espèces de leviers qui se rencontrent dans les machines. *id.*

Propriétés du levier..... 26

54. Trouver le point d'appui, ou le centre de gravité commun, de plusieurs poids suspendus à un levier..... 29

(*i*) Sur la composition et l'équilibre de plusieurs forces appliquées à divers points d'un corps solide..... Page 29
§ 1. De plusieurs forces parallèles appliquées à divers points d'un corps solide..... 30
§ 2. De plusieurs forces situées dans un même plan et appliquées à divers points d'un corps solide..... 33
§ 3. De plusieurs forces dirigées d'une manière quelconque, et appliquées à divers points d'un corps solide..... 34

57. Prenant le diamètre du cercle pour un levier dont le point d'appui serait au centre, trouver le rapport de la puissance au poids exprimé par un quart de la circonférence..... 35

(*k*) Rectification de l'art. 57..... 36

59. Propriétés du levier du second genre..... 36
61. Propriétés du levier du troisième genre..... 37

Des leviers composés..... 38

(*l*) Eclaircissement sur l'art. 64, et sur ce que l'auteur nomme *leviers composés*..... 38

66. Les appuis qui soutiennent les tourillons d'un arbre ou essieu, partagent entre eux la pression que peuvent causer les poids suspendus à l'essieu..... 39
69. Manière de considérer les leviers composés pour les rapporter au calcul des machines..... 41
71. Remarque sur la situation la plus avantageuse des lanternes dont l'axe est vertical..... 42

(*m*) De plusieurs forces appliquées à un corps solide qui ne peut que tourner autour d'un axe fixe..... 42
§ 1. Les forces sont parallèles à l'axe fixe..... *id.*
§ 2. Les forces sont dans un même plan perpendiculaire à l'axe fixe. 43
§ 3. Les forces sont dans des plans différents, tous perpendiculaires à l'axe fixe..... 44
§ 4. Les forces sont dirigées d'une manière quelconque par rapport à l'axe fixe..... 45

Des leviers contigus qui agissent les uns sur les autres..... 43

74. Règle générale pour connaître le rapport de la puissance au poids dans les machines composées..... 46
76. Examen de deux leviers composés, qui agissent l'un sur l'autre, et qui forment ensemble le mécanisme des moulins ordinaires servant à moudre le blé..... 47

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Propriétés de la roue, des poulies, du plan incliné, du coin et de la vis. . Page 47
77. Analogie de la roue et de son essieu ..... *id.*
78. De la poulie 48
82. Analogies du plan incliné 49
84. Analogie du coin ..... *id.*
Principe de Descartes pour la mécanique 50
85. En quoi consiste la force des corps, et comment on peut l'estimer ..... *id.*
89. Manière de démontrer l'équilibre indépendamment du parallélogramme des forces ..... *id.*
98. La résistance d'un corps au mouvement est proportionnée à la vîtesse dont on veut le mouvoir 53
(*n*) Eclaircissements sur les art. 85 et suivants du texte ..... Page 53
Démonstration élémentaire du principe de vîtesses virtuelles 55
Manière de trouver le centre de gravité d'un triangle et d'un demi-cercle. 54
(*o*) Centre de gravité des lignes courbes. — Centre de gravité des aires planes. — Centre de gravité des corps solides. — Centre de gravité du trapèze, de l'arc, du segment, et du secteur de cercle 61
Examen des manivelles simples et composées 63
109. Manière de trouver la vîtesse moyenne d'une manivelle simple 64
(*p*) Effort moyen de la puissance dans la manivelle simple 65
111. Examen de la manivelle double 66
112. Examen de la manivelle triple ..... *id.*
(*q*) Effort moyen de la puissance dans la manivelle triple 68
115. Examen de la manivelle quadruple 68
(*r*) Effort moyen de la puissance dans la manivelle quadruple 69
117. Manière d'estimer la force d'un homme qui élève ou qui porte un fardeau 70
119. La force d'un homme appliquée à une manivelle pour la faire tourner n'est que d'environ 25 livres, en agissant avec une vîtesse de mille toises par heure 71
(*s*) Remarque sur une expression de l'art. 122 du texte 72
123. La force d'un cheval qui tire est équivalente à celle de sept hommes, ou d'environ 175 livres avec une vîtesse de 1800 toises par heure 72
(*t*) On renvoie à l'addition placée à la fin du 1^er^ livre pour les notions sur la force de l'homme et du cheval 73
Règles du mouvement et du choc des corps en général 73
(*u*) Sur la mesure de la force motrice 74
129. Manière d'exprimer la vîtesse, l'espace, le temps, la masse et la force d'un corps mu d'un mouvement uniforme 74
133. Règle générale du choc des corps 75
(*v*) Sur l'égalité d'action de deux corps dont les quantités de mouvement sont égales 75

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

(*x*) Sur la théorie du choc de deux corps solides.
§ 1. Des circonstances du choc. — De l'impression. — De la force de percussion..... 76
§ 2. Mouvemement des corps pendant le choc. — Vitesse des corps après le choc..... 77
§ 3. Du volume de l'impression..... 79
§ 4. Valeur de la force de percussion. — Durée du choc..... *id.*
138. Formules générales d'où l'on tire toutes les règles du mouvement uniforme..... Page 79
(*y*) Equation générale du mouvement uniforme. — Son usage pour trouver le lieu et le temps de la rencontre de deux mobiles..... 80
Du mouvement accéléré..... 82
154. Principe de Galilée sur la chute des corps..... *id.*
158. Manière de réduire le mouvement accéléré au mouvement uniforme... 84
161. Un corps qui est repoussé de bas en haut avec la vîtesse qu'il a acquise en tombant, doit remonter à la hauteur d'où il est tombé..... *id.*
162. Les espaces parcourus sont entre eux comme les quarrés des temps.... *id.*
166. Règle, ou formule générale pour le mouvement accéléré..... 85
(*z*) Eclaircissements sur l'art. 166..... 85
172. Expériences faites pour connaître l'espace qu'un corps parcourt depuis le repos dans une seconde..... 86
(*aa*) Valeur exacte de la vîtesse imprimée aux corps dans une seconde par la pesanteur..... 87
(*ab*) Formules générales du mouvement varié. — Ce qu'est *la vîtesse due à une hauteur* et la *hauteur due à une vîtesse*. — Comment on exprime la quantité de mouvement qu'une force peut imprimer dans l'élément du temps..... 88
De la descente des corps pesants sur des plans inclinés..... 89
196. Propriété singulière du cercle..... 93
(*ac*) Formules générales du mouvement d'un corps pesant le long d'un plan incliné..... 94
198. Examen du mouvement des corps qui tombent le long de plusieurs plans contigus..... 94
(*ad*) Expression de la vîtesse d'un corps pesant qui descend le long de plusieurs plans inclinés contigus..... 96
201. Examen du mouvement des corps qui roulent sur des surfaces curvilignes..... 97
(*ae*) Rectification de l'art. 206..... 99
211. Longueur du pendule à seconde..... 100
(*af*) Valeur exacte de la longueur du pendule.....
212. Règle pour trouver l'espace qu'un corps parcourt en tombant depuis le repos pendant une seconde..... 101
(*ag*) On renvoie à la note (*aa*) pour la valeur de l'espace parcouru par les corps pesants dans une seconde..... 101

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Comment l'intensité de la pesanteur varie à la surface de la terre.. Page 102

Objet de cette note..... 103
§ 1. Formules et lois générales du mouvement varié..... *id.*
§ 2. Mouvement d'un point matériel libre soumis à l'action de plusieurs forces accélératrices. — La force vive d'un corps est le produit de sa masse par le quarré de sa vitesse. — La quantité d'action imprimée à un corps est le produit de la pression qu'une force exerce sur lui par l'espace qu'il a parcouru, estimé suivant la direction de cette force. — Dans le mouvement d'un corps, la force vive acquise est toujours égale au double de la quantité d'action imprimée par les forces qui agissent sur lui..... 104
§ 3. Exemple. Mouvement d'un corps pesant lancé horizontalement dans un espace vide..... 106
§ 4. Mouvement d'un point matériel lancé avec une certaine vîtesse, et assujetti à se mouvoir dans une courbe donnée. — Pression normale à la courbe, ou force centrifuge..... 107
§ 5. Mouvement d'un point matériel soumis à l'action de plusieurs forces accélératrices, et assujetti à se mouvoir dans une courbe donnée. — L'augmentation de force vive d'un point à un autre se fait comme si le corps était libre..... *id.*
§ 6. Mouvement d'un corps pesant glissant le long d'une courbe donnée. — Exemple. Pendule simple oscillant dans un arc de cercle 108
§ 7. D'un assemblage de points matériels soumis à l'action de plusieurs forces accélératrices. — Principe de d'Alembert. — Dans le mouvement d'un système de points matériels, la somme des forces vives acquises est toujours égale au double de la somme des quantités d'action imprimées..... 110
§ 8. D'un assemblage de points matériels soumis à l'action de plusieurs forces accélératrices, quand il y a des changements finis instantanés dans leurs vitesses. — Théorême de Carnot: par l'effet d'un changement instantané dans les vitesses, il se perd une quantité de force vive égale à celle due aux vitesses perdues par les corps..... 112
§ 9. Du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe..... 113
§ 10. Du moment d'inertie..... 114
§ 11. Des efforts supportés par l'axe fixe à l'instant où l'impulsion est donnée au corps. — Du centre de percussion..... 116
§ 12. Des efforts supportés par l'axe fixe après l'impulsion, et pendant le mouvement de rotation du corps. — Des axes principaux. 117
§ 13. Du mouvement autour d'un axe fixe d'un corps solide dont tous les points sont sollicités par des forces accélératrices..... 118
§ 14. Du mouvement d'un corps pesant autour d'un axe fixe horizontal. — Du centre d'oscillation..... 119
§ 15. Du choc de deux corps parfaitement durs. — Du choc de deux corps élastiques. — La vitesse après le choc des corps parfaitement durs ou des corps non élastiques est la même, et il y a dans les deux cas la même perte de force vive. — Il n'y a aucune perte de force vive dans le choc des corps parfaitement élastiques..... 120

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

CHAPITRE II.

Du Frottement et de la manière d'en calculer l'effet dans les machines.

218. Quelle est la cause du frottement.....Page 123
(*ak*) Remarque sur les expériences d'Amontons sur le frottement, et sur la théorie qu'en a donnée Bélidor.....Page 124
219. La résistance causée par le frottement est proportionnée au poids dont les surfaces sont chargées, et non pas à l'étendue des mêmes surfaces... 124
220. Manière de connaître par raisonnement le rapport du poids à la résistance du frottement qu'il peut causer..... 125
222. Expériences faites avec différentes matières, par lesquelles on a reconnu que le frottement était toujours le tiers du poids..... 126
(*al*) Lois générales déduites des expériences de Coulomb sur le frottement. — Evaluation du frottement des surfaces planes, quand elles ont été quelque temps en contact. — Evaluation du frottement des surfaces planes en mouvement les unes sur les autres. — Evaluation du frottement des axes dans leurs boîtes..... 128
225. Quand la pesanteur de l'air agit sur une surface, il faut avoir alors égard à l'étendue de cette surface pour en estimer le frottement..... 129
(*am*) Remarque sur l'art. 226..... 133
226. Cas singulier où un même corps peut causer une multiplication de frottement..... 130
(*an*) Remarque sur l'art. 227. — Evaluation du frottement des pistons dans les corps de pompe..... 134
228. Si une surface verticale est poussée perpendiculairement par une autre surface, le frottement sera encore le tiers de la pression..... 134
(*ao*) Rectification de la théorie du frottement des pilons contre leurs prisons..... 136
231 Application des propriétés de l'hyperbole à la variété des frottements des pilons..... 136
239. Les frottemens qui se font par un mouvement circulaire doivent être calculés comme s'ils se faisaient en ligne droite, et l'on doit avoir égard aux bras de levier qui répondent au poids et à la puissance..... 138
240. Quand un corps est mu autour d'un point fixe, le bras de levier qui répond au frottement doit être exprimé par la distance du point fixe au centre de gravité de la surface qui frotte..... 139
241. Il y a des cas où une puissance qui agit pour élever un poids contribue à en augmenter le frottement..... *id.*
243. Règle générale pour calculer les frottements, dans le cas où l'action de la puissance se joint à celle du poids..... 140
(*ap*) Remarque sur la regle fautive donnée dans l'art. 243..... 140
248. Examen des différents degrés de force d'une puissance qui élève un poids à l'aide d'une manivelle..... 141

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

249. Manière de calculer le frottement des tourillons, ou de l'essieu d'une balance.....Page 142
253. Manière de calculer le frottement des poulies contre leur essieu..... 144
(*aq*) Théorie du frottement des axes dans les machines de rotation. — Application aux treuils et poulies. — Application aux palans...Page 145
256. Dans un terrain uni et horizontal, les animaux attelés à une voiture n'ont d'autre résistance à surmonter que le frottement des roues contre leur essieu..... 146
(*ar*) Evaluation du frottement des voitures. — De la puissance d'une roue. 147
258. Manière de calculer le frottement d'un corps contre un plan incliné... 148
261. Examen du frottement qu'une puissance a à surmonter, en se servant d'un coin pour élever un poids..... 149
(*as*) Théorie du frottement sur le plan incliné..... 150
262. Manière de calculer le frottement d'une vis..... 151
(*at*) Théorie du frottement dans la vis..... 152
267. Examen du frottement qui se fait à la rencontre de deux leviers..... 153
274. Examen de l'action du poids et de la puissance, lorsque les points d'appui demeurant les mêmes, les leviers changent de situation..... 155
(*au*) Remarque sur l'art. 274..... 156
280. Examen des différentes directions d'une puissance qui élève un pilon.. 158
282. Application des règles précédentes au calcul d'une machine..... 101
285. Examen des différentes manières de se servir des roues et des lanternes..... 161
292. Manière abrégée de déterminer une puissance qui élève un poids à l'aide d'une roue et d'une lanterne..... 163
290. Quand une puissance élève un poids donné à l'aide de plusieurs roues et lanternes, il faut, pour avoir égard au frottement, la multiplier par $\frac{19}{18}$ élevé au degré qui aurait pour exposant autant d'unités qu'il y a de roues ou de lanternes..... 164
294. Quand la puissance sera donnée, et qu'on voudra trouver le poids, il faudra multiplier la puissance par $\frac{18}{19}$ élevé au degré qui aurait pour exposant autant d'unités qu'il y a de roues..... 165
(*av*) Remarque sur les règles des art. 293 et 294..... 165
295. Calcul d'une machine composée d'une roue et de deux lanternes..... *id.*
296. Calcul d'une autre machine composée de roues et de lanternes..... *id.*
(*ax*) Remarque sur la théorie du frottement des engrenages donnée par Bélidor. — Rectification de cette théorie. — Application au frottement des cames soulevant un pilon. — Remarque sur la nature particulière du frottement des engrenages, qui se rapproche plus ou moins du frottement des rouleaux..... 168
300. Examen du frottement des cordes sur les cylindres ou rouleaux..... 169
(*ay*) Théorie du frottement d'une corde enroulée sur un cylindre immobile..... 173

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

307. Examen de la résistance causée par la roideur des cordes qui embrassent des rouleaux ou poulies..... Page 174
(*az*) Remarque sur le déroulement des cordes..... Page 175
(*ba*) Remarque sur les règles de l'art. 309..... 176
(*bb*) Théorie de la roideur des cordes, et son évaluation numérique. — De la roideur des chaînes..... 177
(*bc*) Rectification du calcul de l'art. 314. — Rectification du calcul de l'art. 315. — Formule pour le calcul d'un palan, en ayant égard au frottement et à la roideur des cordes..... 181
316. Observations auxquelles il faut avoir égard dans l'usage qu'on fait des cordes..... 182
(*bd*) Evaluation de la force des cordages..... 182
317. Maximes générales qu'il faut suivre quand on fait le projet d'une machine..... 183
(*be*) Sur la disposition du mécanisme dans les machines. — Conditions à remplir dans l'établissement des machines..... 183
§ 1. Sur la manière d'appliquer le moteur et de transmettre les mouvements. — Roues et pignons..... 184
§ 2. Comment doivent être disposés les pilons ou marteaux levés par le mouvement de rotation d'un axe..... 187
§ 3. Il est important de disposer les machines de manière que les mouvements soient uniformes et toujours dirigés dans le même sens. — Comment on diminue l'inconvénient des chocs et des changements de direction..... 188
318. Manière de diviser les roues et les lanternes selon le nombre des dents et des fuseaux..... *id.*
(*bf*) § 1. Des conditions que doit remplir tout engrenage. — Il faut que la normale commune aux deux courbes qui transmettent le mouvement, menée à l'un quelconque de leurs points de contact successifs, passe toujours par un même point de la ligne des centres. 191
§ 2. Engrenage d'une lanterne et d'une roue dentée. — Des arcboutements qui ont lieu quand les dents s'engrènent avant la ligne des centres..... 192
§ 3. Engrenage d'une roue dentée et d'un pignon..... 193
§ 4. Engrenage d'une roue dentée et d'une crémaillère..... 195
§ 5. Des cames qui soulèvent un pilon..... *id.*
§ 6. Engrenage d'une roue de chan avec une lanterne..... *id.*
§ 7. Engrenage d'une roue de chan avec un pignon. — Remarque sur quelques modifications à apporter dans la pratique aux règles précédentes..... 196
319. Le nombre qui exprime les fuseaux d'une lanterne ne doit pas être partie aliquote de celui des dents de la roue..... 192
320. Description du levier de la Garousse..... 197
321. Calcul de la machine précédente..... 198
(*bg*) Remarque sur le calcul de l'art. 321..... 198
(*bh*) Remarque sur la manière de calculer le frottement des axes quand les forces ne sont point parallèles..... 199

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

(*bi*) Remarque sur la manière différente dont on doit estimer l'action des hommes, quand il s'agit d'un effort momentané ou d'un travail continu. — Indication d'une espèce particulière de treuil, au moyen duquel les efforts entre la puissance et la résistance, peuvent être variés à volonté..... Page 200

322. Description de quelques machines dans le goût de la précédente.. Page 201

CHAPITRE III.

Où l'on enseigne les principes et les règles de l'hydraulique.

SECTION PREMIÈRE.

Du niveau des liqueurs et de leur équilibre..... 203

(*bk*) Propriété fondamentale des fluides..... 203

(*bl*) Définition de la surface de niveau..... *id.*

325. Lorsqu'une liqueur est renfermée dans un vase, sa surface se met toujours de niveau..... *id.*

(*bm*) Principes de l'équilibre de la surface des fluides..... 206

333. Dans les tuyaux capillaires, l'eau s'élève au-dessus de son niveau..... 206

(*bn*) On renvoie à la *Mécanique céleste* pour la théorie des phénomènes capillaires..... 207

(*bo*) Remarque sur le mécanisme de l'élévation de l'eau le long d'une étoffe..... 208

336. Manière de mesurer exactement la pesanteur spécifique des liqueurs.... 208

(*bp*) Sur l'aréomètre..... 209

Table des poids de plusieurs liqueurs d'usage pour un pouce cubique... 211

Autre table de plusieurs liqueurs les plus utiles pour un pied cubique, tirée de la précédente..... *id.*

339. En France, un certain volume d'air pèse en hiver le double de ce qu'il pèse en été..... 212

(*bq*) Valeur exacte de la pesanteur spécifique de l'air..... 212

340. Expériences de divers auteurs sur le poids de l'eau douce..... *id*

241. Poids des différentes mesures qui sont en usage pour le calcul des eaux.. 213

342. Le pouce d'eau est une mesure de 14 pintes, ou de 28 livres d'eau écoulée dans le temps d'une minute..... *id.*

(*br*) Sur les diverses évaluations du pouce d'eau..... 213

343. Le poids d'un pied cube d'eau est à celui d'un pied cube de mercure, à-peu-près dans le rapport de 2 à 27..... 214

(*bs*) Valeur exacte de la densité du mercure..... 212

SECTION II.

De l'action verticale de l'eau contre les parois des vaisseaux qui la contiennent..... 214

(*bt*) Remarque sur la supposition d'un mouvement perpétuel dans les molécules des fluides. — Inexactitude des démonstrations des arts 344, 355 et 369..... 215

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

344. Manière de calculer l'effort d'une puissance appliquée à un piston..Page 215
346. L'eau pousse de bas en haut avec une force déterminée, les corps qui l'empêchent de monter à son niveau..... 216
347. Une petite colonne ou un filet d'eau peut élever un corps fort pesant.. *id.*
349. L'effort d'une puissance qui soutient un piston est toujours égal au poids de la colonne d'eau qui aurait pour base le cercle du piston, et pour hauteur celle du niveau de l'eau au-dessus du même piston..... 218
351. La force de l'eau qui agit selon une direction verticale, ne dépend pas de sa quantité, mais seulement de sa hauteur et de l'étendue de la surface qu'elle pousse..... 219
352. Expérience sur la poussée de l'eau..... *id.*
353. Explication de la cause qui fait bomber les radiers des grandes écluses. 220
356. De quelle figure que soit un vaisseau rempli d'eau, et quelle que soit la quantité qu'il en contient, le fonds est toujours chargé du poids d'une colonne à laquelle il servirait de base, et qui aurait pour hauteur celle du niveau de l'eau au-dessus du même fonds..... 221

SECTION III.

De l'action de l'eau contre les surfaces verticales et rectangulaires.... 223

(*bu*) Remarque sur la direction de la pression que les fluides exercent contre les parois des vases.....Page 223

361. Raisonnement pour prouver que l'eau qui agit sur une surface verticale la pousse selon des directions horizontales..... *id.*
362. La poussée de l'eau contre une surface verticale et rectangulaire, va en croissant depuis son niveau, selon l'ordre des termes d'une progression arithmétique..... 224
370. La poussée de l'eau contre une surface rectangulaire est toujours égale au poids d'une colonne qui aurait pour base cette surface et pour hauteur la hauteur moyenne..... 226

(*bv*) Remarque sur l'art. 370..... 226

(*bx*) Des pressions supportées par les molécules d'un fluide pesant contenu dans un vase. — Chaque point supporte une pression *due à la hauteur du fluide au-dessus de ce point.* — De l'équilibre et de la pression dans le fluide, en ayant égard au poids de l'atmosphère. — Des cas où la valeur de la pression devient négative..... 128

375. Manière de calculer la force qu'il faut pour lever une vanne qui soutient de l'eau..... 230

SECTION IV.

De l'action de l'eau contre les surfaces inclinées..... 232

382. La poussée de l'eau contre les surfaces inclinées se mesure de la même manière que si ces surfaces étaient verticales..... 233
385. Manière de calculer la poussée de l'eau contre la surface d'un cône.... 234
388. Manière de calculer une puissance qui soutient, à l'aide d'un plan incliné, un vaisseau où il y a de l'eau..... 235

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

(*by*) Rectification de l'art. 388..... Page 235

390. Quand un vaisseau sans fond est posé sur un plan incliné, la puissance ne soutient que la différence des poussées opposées..... Page 236

(*bz*) Remarque sur l'art. 390..... 236

391. Recherche de l'angle sous lequel un plan doit être incliné pour y faire monter le plus d'eau qu'il est possible dans le temps le plus court.... 237

(*ca*) Remarque sur les solutions données par l'auteur du problême de l'inclinaison la plus avantageuse d'un plan le long duquel on fait monter de l'eau..... 239

SECTION V.

De l'action de l'eau contre les surfaces circulaires, verticales et inclinées. 239

397. La solidité de l'onglet est égale aux deux tiers du parallélipipède compris sous le quarré du rayon et sous la hauteur de l'onglet..... 240

398. La surface de l'onglet est égale au rectangle compris sous le diamètre de l'onglet et sous sa hauteur..... 241

399. La solidité de l'onglet est à celle de son complément comme 14 est à 19. *id.*

404. Manière de mesurer la poussée de l'eau contre un demi-cercle, eu égard à sa situation..... 242

SECTION VI.

Des centres d'impression..... 244

(*cb*) Remarque sur les art. 415, 416 et 417..... 246

SECTION VII.

De la mesure des eaux qui coulent par le fond des tuyaux ou réservoirs.. 248

424. Les parties de l'eau renfermée dans un vaisseau s'empressent de toute part à couler du côté le plus faible..... *id.*

428. L'eau d'un vaisseau, entretenue au même niveau, coule toujours avec une vîtesse uniforme, étant chassée par une force constante..... 249

429. Quand un tuyau vertical dont l'ouverture est égale à la base vient à se vider, la surface de l'eau acquiert en descendant une vîtesse qui croît comme celle des corps graves qui tombent librement..... *id.*

431. Les vîtesses de l'eau sont dans la raison des racines quarrées des hauteurs de la même eau..... *id.*

(*cc*) Remarque sur la démonstration sur laquelle est fondée l'expression de la vîtesse du fluide à l'orifice d'un vase..... 250

(*cd*) Remarque sur les art. 433, 434 et 435..... 251

436. La vîtesse de l'eau à la sortie d'un orifice, est la même que celle qu'un corps aurait acquise en tombant de la hauteur du réservoir..... 252

(*ce*) De la vîtesse d'un fluide qui s'écoule par l'orifice d'un vase entretenu constamment plein. — Cas où l'orifice est infiniment petit. — Cas où l'orifice a une grandeur comparable à celle des sections du vase. — Expression du volume de fluide écoulé dans l'unité de temps... 252

Du mouvement de l'eau dans un vase qui se vide..... 254

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

439. Un vaisseau toujours entretenu plein, dépense deux fois autant d'eau qu'il en contient, dans un temps égal à celui qu'il mettrait à se vider. . Page 253
442. Manière de trouver le temps qu'un vaisseau emploiera à se vider, par le moyen de celui qu'un corps mettra à tomber de la hauteur du vaisseau..... 255
443. Quand deux vaisseaux se communiquent, il faut le double de temps au premier pour remplir le second, que si celui-ci était au-dessous de l'autre..... 256
445. Formule générale, d'où l'on peut tirer toutes les règles pour la mesure des eaux..... *id.*
461. Manière de déterminer la valeur des grandeurs constantes de la formule. 258
469. Usage d'une table où l'on trouve la vîtesse uniforme d'un corps par seconde, acquise par toutes les chutes, depuis celle d'une ligne jusqu'à celle de quinze pieds..... 260
(*cf*) Indication de diverses tables des hauteurs dues aux vîtesses... Page 260
474. Usage d'une seconde table pour connaître la quantité d'eau que comprend une colonne dont la hauteur et le diamètre sont donnés..... 262
484. Problême d'hydraulique sur le mélange des liqueurs..... 265
486. Les pesanteurs absolues de deux liqueurs différentes sont dans la raison composée de leur volume et de leurs pesanteurs spécifiques..... 266
487. Les vîtesses de deux liqueurs différentes sont comme les racines quarrées des produits de leur pesanteur spécifique par leur hauteur..... 267
(*cg*) Rectification de l'art 487. La vîtesse d'un fluide demeure la même quand sa densité varie..... 267
Table première, qui comprend les vîtesses uniformes par seconde qu'un corps peut acquérir par une chute donnée..... 268
Table seconde de la pesanteur d'une colonne d'eau d'un pouce de diamètre qui aurait depuis un pied jusqu'à quatre cent de hauteur..... 273
Table des hauteurs correspondantes à différentes vîtesses, les unes et les autres étant exprimées en mètres; ajoutée par l'éditeur..... 274

SECTION VIII.

De la manière d'estimer le déchet causé par le bord des orifices.... 277
491. Le bord des orifices retarde la vîtesse de l'eau : ainsi tous les calculs qu'on a rapportés ci-devant sur leur mesure ne sont point exacts..... *id.*
(*ch*) Inexactitude de la section VIII..... 277
492. Le rapport du déchet d'un orifice à sa dépense naturelle, est au rapport du déchet d'un autre orifice à sa dépense naturelle, dans la raison réciproque de leur diamètre..... 278
494. Expérience de M. Mariotte, par laquelle il a trouvé qu'un tuyau de 13 pieds de hauteur dépensait par un orifice horizontal de 3 lignes de diamètre, 14 pintes d'eau en une minute..... *id.*
496. Formule générale pour trouver le rapport du déchet à la dépense naturelle d'un orifice quelconque..... 279

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

499. De quelle manière on peut suppléer au déchet.....Page 280
505. Formule qui comprend généralement tout ce qui peut appartenir à la mesure des eaux..... 282
(*ci*) Remarque sur l'art. 505 et les suivants..... 282
510. Trouver le rapport que doivent avoir les diamètres de deux orifices, pour que leurs dépenses effectives soient en raison donnée..... 283
516. Les orifices quarrés et circulaires causent moins de déchet que ceux de toute autre figure qui auraient la même superficie..... 285
(*ck*) § 1. Quelle est la cause de la différence qui a lieu entre la dépense effective et la dépense théorique, quand l'entrée d'un orifice n'est point évasée. — La contraction de la veine de fluide depend de la forme de la paroi où l'orifice est pratiqué..... 285
§ 2. Des orifices formés par un tuyau pénétrant dans l'intérieur du vase..... 286
§ 3. Des orifices pratiqués dans une paroi plane et mince. — Cas où les orifices pratiqués dans une paroi plane et mince ont plus de 2 centimètres de diamètre. — Lorsque la charge est fort grande par rapport au diamètre de l'orifice. — Lorsque la charge est petite par rapport au diamètre de l'orifice. — Les résultats paraissent devoir s'appliquer à de très-grands orifices. — Cas où les orifices pratiqués dans une paroi plane et mince ont moins de 2 centimètres de diamètre..... 286
§ 4. Des orifices pratiqués dans une paroi plane et prolongés par un tuyau additionnel cylindrique. — Expression théorique de la vîtesse du fluide. — Expériences faites sur ce genre d'écoulement..... 290
§ 5. L'augmentation de dépense causée par un tuyau additionnel n'a pas lieu dans le vide. — Charge d'eau sous laquelle l'augmentation de dépense causée par un petit tuyau additionnel n'aurait pas lieu dans l'atmosphère..... 292
517. Il est essentiel d'avoir égard au déchet pour la distribution des eaux des fontaines d'une ville..... 286

SECTION IX.

De la mesure des eaux qui coulent par des orifices rectilignes et verticaux. 294
(*cl*) Remarque sur les sections IX et X. — Quand l'orifice d'un vase est très-petit, la dépense est toujours indépendante de l'inclinaison de l'orifice. — Quand l'orifice n'est pas très-petit, la dépense est également indépendante de l'inclinaison de son plan, toutes les fois que le vase est entretenu constamment plein. — Comment la hauteur de la charge doit être évaluée pour un orifice dont le plan n'est pas horizontal. — Les formules ne s'appliquent qu'au cas où il y a une charge de fluide sur le sommet de l'orifice. — Inexactitude des art. 524 à 554. — Comment on peut évaluer la dépense lorsque le fluide tombe dans un vase où il est soutenu à divers niveaux. — De la *hauteur vive* et de la *hauteur morte*..... 294
518. L'eau qui sort des orifices verticaux est chassée selon une direction hori-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

zontale avec des vîtesses qui peuvent être exprimées par les ordonnées d'une parabole ..... Page 294
524. Manière de mesurer la dépense d'un pertuis vertical dont le sommet répond au niveau de l'eau 297
(*cm*) Evaluation théorique de la dépense d'un orifice ouvert à sa partie supérieure. — Evaluation de la contraction dans ce genre d'orifices, d'après les expériences de Dubuat ..... Page 298
527. De la dépense d'un vaisseau percé au fond, où l'eau n'est entretenue qu'à une hauteur médiocre 299
(*cn*) Remarque sur les art 527 et suivants 302
533. Manière de connaître la vîtesse moyenne et la dépense d'un pertuis rectangulaire dont le sommet est au-dessous du niveau de l'eau 303
(*co*) Simplification du calcul de la dépense d'un orifice rectangulaire 304
(*cp*) Remarque sur l'art. 535 305
542. De la dépense d'un pertuis triangulaire 307
546. Formule tirée des articles précédents pour la dépense des pertuis qui ont la figure d'un trapèze répondant au niveau de l'eau 309
548. Formule pour mesurer la dépense d'un pertuis triangulaire dont le sommet est au-dessous de l'eau ..... *id.*
(*cq*) Formule pour le calcul de la dépense d'un orifice triangulaire quand le sommet est en haut 310
549. Autre formule pour mesurer la même chose, lorsque le sommet du triangle est en bas 310
(*cr*) Formule pour le calcul de la dépense d'un orifice triangulaire quand le sommet est en bas 311

SECTION X.

De la mesure des eaux qui coulent par des orifices verticaux et circulaires. 312
550. De la dépense d'un pertuis circulaire et vertical dont le sommet répond au niveau de l'eau ..... *id.*
551. De la dépense d'un pertuis en demi-cercle 314
555. Analyse pour trouver une formule qui puisse mesurer la dépense des orifices circulaires placés au niveau de l'eau 315
561. Méthode pour mesurer la dépense des orifices circulaires placés au-dessous du niveau de l'eau 319
(*cs*) Formule pour calculer la dépense d'un orifice circulaire. — Il n'est utile d'employer les formules précédentes pour le calcul de la dépense des orifices, qu'autant que la charge sur leur sommet est plus petite que leur hauteur 319
563. Manière de découvrir les formules pour la dépense des orifices faits en demi-cercle placés au-dessous du niveau de l'eau 320

SECTION XI.

Du choc de l'eau contre les surfaces planes 321
567. Les chocs de l'eau sont dans la raison composée des quarrés des vîtesses, et des surfaces qui en reçoivent l'impression ..... *id.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

570. Les chocs sont mesurés par le poids des colonnes d'eau qui causent ces vîtesses, ou par la poussée que soutiendrait la surface choquée... Page 312

(*ct*) Remarque sur l'art. 570. Il faut distinguer le choc d'une veine, de la résistance d'un corps plongé dans un fluide. — Evaluation exacte du choc direct d'une veine de fluide contre un plan. — Expériences confirmant cette évaluation..... Page 312

572. Examen de la force que l'eau peut acquérir en accélérant sa vîtesse à la sortie du réservoir..... *id.*

(*cu*) Remarques sur les art. 572, 573 et 574..... 325

575. Le choc de l'eau qui sort d'un pertuis vertical et qui est dirigée par un canal horizontal, est égal au poids de la colonne qui aurait pour base la surface choquée, et pour hauteur la hauteur moyenne de l'eau.. 326

576. Les centres d'impressions qui répondent au choc de l'eau sont les mêmes que ceux qui appartiennent à sa poussée..... *id.*

(*cv*) Remarque sur les art. 575, 585, 586 et 587. — Evaluation exacte de l'effort exercé contre les aubes d'une roue mue dans un coursier. — Du centre d'impression. Remarque sur l'art. 576..... 326

577. La force que l'eau acquiert en descendant le long d'un plan incliné est la même que celle qu'elle acquerrait en parcourant la hauteur du même plan..... 327

(*cx*) Remarque sur les art. 578, 579 et 580. — De la meilleure manière de donner l'eau à la roue. — Du cas où l'aube ne remplit pas entièrement le coursier..... 328

581. Quand une surface verticale est inclinée à un courant, la force absolue du courant est à son impression contre la surface, comme le quarré du sinus total est au quarré du sinus de l'angle d'incidence..... 329

582. Lorsque de deux surfaces l'une est directement, l'autre obliquement opposée à un courant, les impressions qu'elles soutiennent sont en raison réciproque de leurs dimensions inégales..... *id.*

(*cy*) Remarque sur les art. 581, 582 et 583. Du choc oblique d'une veine de fluide contre un plan. — L'inclinaison des aubes d'une roue contenue dans un coursier ne change rien à l'action du fluide dans le sens de la circonférence de cette roue. — Cas où la roue n'est point contenue dans un coursier..... 330

585. L'impression que reçoit une surface verticale qui se meut avec une vîtesse uniforme dans le même sens qu'un courant, ne doit être exprimée que par le quarré de l'excès de la vîtesse du courant sur celle de la surface..... 331

588. Pour qu'une surface qui fuit reçoive de la part du courant la plus grande quantité de mouvement qu'il est possible, il faut que sa vîtesse soit le tiers de celle du courant..... 332

(*cz*) Remarque sur l'art. 588..... 332

589. Dans le cas du plus grand effet, la force respective du courant est égale aux $\frac{4}{9}$ de sa force absolue, et la surface ne pourra faire monter que les $\frac{4}{9}$ du poids d'équilibre..... 333

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

596. Lorsque le poids qu'on veut élever sera donné, il faut que son produit par sa vîtesse soit égal aux $\frac{4}{27}$ du produit de la force absolue du courant par sa vîtesse entière.....Page 334

597. Exemple appliqué aux pompes de la Samaritaine à Paris, pour montrer la nécessité de se conformer au principe précédent..... 335

(*da*) Inexactitude des règles données depuis l'art. 585. Il faut distinguer les roues mues dans un coursier, de celles mues dans un fluide indéfini. — Détermination exacte de la vîtesse correspondante au maximum d'effet pour les roues mues dans un coursier. — La même détermination pour les roues mues dans un fluide indéfini. — Remarque historique sur la théorie des roues à aubes..Page 336

599. Quand une surface va à la rencontre d'un courant, le choc doit être exprimé par le quarré de la somme des vîtesses du courant et de la surface..... *id.*

600. Quand une surface suit la direction du courant avec une vîtesse plus grande, elle est dans le même cas que si elle était mue dans une eau dormante avec l'excès de sa vîtesse sur celle du courant..... *id.*

601. Il n'y a point de courant dont la vîtesse uniforme ne puisse être regardée comme ayant été acquise par une chûte..... 338

(*db*) L'ancienne théorie de la résistance des fluides exposée par Bélidor est actuellement abandonnée. — § 1. Notions théoriques sur la résistance des fluides. — De la résistance en tant qu'elle est due au choc du fluide contre le corps. — De la résistance, en tant qu'elle est due aux différences des pressions qui ont lieu contre les faces antérieures et postérieures du corps. — Ces deux parties de la résistance doivent être ajoutées l'une à l'autre. — Il résulte des observations que la résistance d'un même corps est en général proportionnelle au quarré de la vîtesse du fluide. — Et que la résistance de plusieurs corps semblables l'est au quarré de leurs dimensions homologues. — Expression générale de la résistance d'un corps. 340

§ 2. Du cas où un corps serait mu dans un fluide en repos..... 344

§ 3. Examen des modifications dont les résultats précédents sont susceptibles par l'effet de diverses circonstances. — De l'adhésion des molécules du fluide. — De l'élasticité du fluide. — Du changement dans la loi de la résistance qui a lieu dans le cas d'une grande vîtesse..... 345

§ 4. De la résistance des corps flottants..... 346

§ 5. De la résistance d'un plan mince. — De la résistance d'un plan choqué obliquement..... 347

§ 6. De la résistance d'un prisme mu dans le sens de son axe..... 349

§ 7. De la résistance d'un prisme garni d'une proue et d'une poupe..... 351

§ 8. De la résistance d'une sphère..... 353

§ 9. De la forme du corps qui offrira la moindre ou la plus grande résistance possible. — La résistance d'un vaisseau est à-peu-près le $\frac{1}{6}$ de celle d'un prisme dont la base aurait la figure du maître couple. — De la forme d'un corps dont une des faces offrirait la plus grande, et l'autre la plus petite résistance possible..... 353

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

§ 10. Exemples pour l'application des principes précédents. — Radeau plongeur. — Halage des bateaux. — Indication des principaux ouvrages à consulter sur la résistance des fluides. ...Page 354

608. Usage d'une table qui donne les chûtes dont on a les vîtesses, et les chocs de l'eau relatifs aux vîtesses.....Page 340

(*dc*) Remarque sur la table des chocs relatifs aux vîtesses..... 356

613. Nouvelle manière de mesurer la vîtesse d'un courant, aussi parfaite que l'ancienne était défectueuse..... 356

(*dd*) Relations entre les vîtesses à la surface, au fond, et moyenne d'un courant. — Divers procédés pour mesurer la vîtesse d'un courant. — Comment les corps flottants entraînés par un courant prennent une vîtesse plus grande que la sienne. — Relation entre la résistance d'un corps mu dans un fluide, et l'excès de sa vîtesse sur celle d'un courant qui l'entraîne. — Mesure de la vîtesse d'un courant par le temps du refroidissement d'un corps..... 357

614. Description et usage d'un instrument imaginé par M. Pitot, pour mesurer la vîtesse d'un courant..... 360

(*de*) Remarque sur l'usage du tube de Pitot. — Véritable théorie de cet instrument. — Indication d'un autre instrument pour observer la vîtesse de l'eau..... 361

Table troisième, qui comprend les chutes relatives aux vîtesses uniformes données par seconde, et les chocs dont l'eau qui aurait ces vîtesses peut être capable sur une surface d'un pied quarré..... 363

SECTION XII.

Des corps plongés dans l'eau..... 367

616. Un corps d'une pesanteur spécifique moindre que celle de l'eau ne s'y enfonce qu'en partie..... *id.*

621. Un corps d'une pesanteur spécifique égale à celle de l'eau s'y maintient en équilibre à quelque profondeur qu'il y soit plongé..... 368

623. Les corps perdent dans l'eau une partie de leur poids égal à celui du volume dont ils occupent la place..... *id.*

(*df*) Théorie de l'équilibre d'un corps plongé dans un fluide pesant..... 369

625. Manière de connaître le rapport de la pesanteur spécifique des corps à celle de l'eau..... 369

626. Manière de connaître la solidité des corps irréguliers, en les plongeant dans l'eau..... 370

628. Manière de faire l'analyse des métaux mixtes ou hétérogènes..... 371

630. Quand un corps d'une pesanteur spécifique plus grande que celle de l'eau, y est plongé, il cesse, en descendant, de charger le fond du vaisseau avec toute sa pesanteur..... 373

(*dg*) Remarque sur la chute d'un corps dans une masse de fluide contenue dans un vase..... 375

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ADDITION.

Sur les principes du calcul et de l'établissement des machines, et sur les moteurs.

§ 1. Comment s'évalue en mécanique le travail ou *l'effet* des machines. — L'élévation des poids est le travail auquel on compare ou rapporte tous les autres. — Comment les quantités de travail rapportées à cette espèce d'unité doivent s'exprimer en nombres... Page 376

§ 2. De l'action des moteurs. — Elle s'évalue de la même manière que le travail effectué par les machines. — Le prix d'un travail est toujours proportionnel à la quantité d'action qu'il a consommée. La *quantité d'action* est une quantité de même nature que la *force vive*..... 378

§ 3. Comment, et dans quelle proportion, quand une machine travaille, l'action du moteur se transmet à la résistance. — L'action du moteur est toujours partagée entre les résistances provenant de *l'effet utile*, et celles inhérentes à la machine..... 380

§ 4. Comment on doit faire agir les moteurs, pour en tirer le plus grand parti possible..... 383

§ 5. De l'influence de la masse des machines sur leurs effets. — Cette influence est nulle quand le mouvement est parfaitement uniforme. — On considère le cas où la vitesse croît et décroît alternativement. — Les variations de la vitesse qui ont lieu par degrés insensibles, n'apportent aucune diminution dans l'effet utile. — Dans les variations de la vitesse, les roues conduisent et sont conduites alternativement. — On doit en général rendre les variations de la vitesse les moindres possible. — Des volants. — Détermination du volant dans le cas où l'on fait tourner une roue au moyen d'une pédale. — Détermination du volant dans le cas où l'on fait tourner une roue par une manivelle simple. — Des *régulateurs* ou *gouverneurs*. — Du pendule conique employé comme régulateur..... 384

§ 6. De la quantité d'action fournie par l'homme et le cheval dans divers travaux. — De l'effort et de la vitesse correspondants au maximum de quantité d'action journalière..... 393

Tableau des quantités d'action que peuvent fournir moyennement l'homme et le cheval dans divers genres de travaux..... 396

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

LIVRE SECOND.

Où l'on donne la description des différentes sortes de moulins, la manière d'en calculer les effets, et d'en découvrir le point de perfection.

CHAPITRE PREMIER.

Des moulins pour moudre le blé, où l'on trouve l'application des principes qui peuvent contribuer à la perfection des machines mues par un courant.

634. Raisons qui ont engagé l'auteur à écrire sur cette matière..... 397
635. Manière dont les meules agissent pour moudre le blé..... 398
636. L'effet d'une meule tournante dépend de sa quantité de mouvement... *id.*
(*dh*) Comment on conserve aux meules la pesanteur nécessaire. — Sur la manière de piquer les meules. — Fabrication artificielle des pierres meulières..... 399
(*di*) Notions élémentaires sur la mouture du blé. — Du poids des meules relativement à leur grandeur. — De la vîtesse des meules. — De la quantité d'action dépensée pour faire tourner une meule. — De la quantité de blé moulue par une quantité d'action donnée..... 401
640. Attention qu'il faut avoir avant que de construire un moulin à eau..... 403
(*dk*) On renvoie aux volumes suivants les questions relatives au ménagement des eaux pour les usines..... 406
642. Remarques sur la disposition qu'on doit donner au coursier d'un moulin. 407
(*dl*) § 1. Théorie des roues à aubes mues dans un courant d'une largeur et d'une profondeur indéfinies. — Comment les roues pendantes doivent être disposées pour recevoir le plus grand effort de la part du courant..... 407
§ 2. Emploi des roues pendantes à la construction des moulins à blé..... 410
643. Description des roues de moulin nommées vulgairement *roues-à-pots*. 408
(*dm*) Les roues à augets, condamnées par Bélidor, sont au contraire avantageuses..... 411
§ 1. Théorie des roues à augets..... 412
§ 2. Application de la théorie précédente à la pratique. — Calcul d'un moulin à blé décrit par Désaguliers..... 413
§ 3. Des roues à augets contenues dans un coursier, et des roues de côté..... 417
§ 4. Emploi des roues en-dessus ou de côté à la construction des moulins à blé..... 419
645. Manière de tirer le meilleur parti qu'il est possible d'une petite quantité d'eau qui répond à une chûte..... 412
(*dn*) Remarque sur l'inexactitude des art. 645 et 646..... 421
§ 1. Théorie des roues verticales mues par le choc de l'eau..... *id.*
§ 2. Application de la théorie précédente à la pratique..... 422
§ 3. Formules qui expriment la quantité d'action transmise aux

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

roues en dessous d'après l'aire des aubes, et la vitesse de l'eau dans le coursier. — Comment la vitesse de l'eau dans le coursier doit être évaluée..... Page 423

§ 4. Emploi des roues en dessous à la construction des moulins à blé..... 424

647. Quand on soutient l'eau pour faire tourner une roue de moulin, la force du courant dépend uniquement de la hauteur moyenne de l'eau, et non de l'étendue du terrein qui lui sert de base au pied de l'écluse..Page 422

(*do*) Remarque sur l'art. 647..... 426

648. Description des moulins à eau ordinaires..... 426

649. Manière de calculer l'effet de toutes les parties qui concourent à moudre le blé dans un moulin à eau..... *id.*

(*dp*) Inexactitude de l'évaluation de la force de percussion..... 427

(*dq*) Inexactitude de l'évaluation du frottement de la roue sur ses tourillons..... 428

(*dr*) Omission du frottement latéral de l'axe de la meule..... 429

655. La puissance qui surmonte l'action de la pesanteur relative d'une meule sur le blé, est à-peu-près la trente-cinquième partie de la pesanteur absolue de la meule..... 431

(*ds*) Calcul du moulin à blé de La Fère, d'après les principes établis dans les notes précédentes. — Rapport de l'effort exercé sur la meule au poids dont elle est chargée. — Calcul d'un autre moulin mu par une roue en dessous, décrit par Lambert. — Calcul d'un autre moulin mu par une roue de côté, décrit par Lambert..... 432

656. Estimation de la quantité de blé que le moulin précédent peut moudre par jour..... 433

657. Examen du moulin précédent, pour voir de combien il est éloigné du plus grand effet..... 434

(*dt*) Calcul pour l'établissement du moulin de La Fère, d'après les données du texte, et les principes établis dans les notes précédentes..... 435

658. Manière de disposer les parties d'un moulin pour que la même roue fasse tourner deux meules à-la-fois..... 437

659. Pour qu'un moulin soit complet, il faut qu'il puisse bluter la farine à mesure que le blé est moulu..... *id.*

660. Description d'un moulin exécuté à Mont-Royal avant la démolition de cette place..... 438

661. Manière de faire chômer une ou plusieurs roues qui se trouvent dans le même coursier, sans empêcher les autres de tourner..... *id.*

662. Quelles doivent être les proportions du moulin de Mont-Royal dans l'état de perfection..... 439

(*du*) Calculs pour l'établissement du moulin de Mont-Royal, d'après les données du texte, et les principes établis dans les notes précédentes..... 442

665. Manière de régler la pente qu'il faut donner à un coursier dans lequel

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

il se trouve plusieurs roues de suite, pour que le courant puisse les frapper toutes avec la même force..... Page 443

666. Description d'un moulin fort simple dans le goût de ceux qu'on fait en Provence..... 444

(*dv*) § 1. Théorie des roues horizontales mues par le choc de l'eau..... 444
§ 2. Calcul d'une expérience faite sur une roue de cette espèce..... 447
§ 3. Application des roues horizontales mues par le choc de l'eau à la construction des moulins à blé..... 447

667. Manière de calculer la force que l'eau acquiert en coulant dans un canal incliné..... 445

(*dx*) Remarque sur l'inexactitude de l'art. 667..... 448
(*dy*) Remarque sur l'inexactitude de la deuxième partie du même article.. 449

668. Autre espèce de moulin en usage sur la Garonne..... 449

(*dz*) On renvoie à la note (*ea*), pour la théorie des roues indiquées art. 688..... 449

669. Description des moulins du Basacle à Toulouse..... *id.*

(*ea*) Remarque sur l'art. 669. § 1. Théorie des roues horizontales à palettes courbes mues par la pression de l'eau. — Principe général de l'établissement des roues hydrauliques. — Application de la théorie précédente à la pratique. — De la vis d'Archimède employée comme roue hydraulique..... 451
§ 2. On examine le cas où l'eau sortirait d'une roue à aubes courbes plus près ou plus loin de l'axe qu'elle n'est entrée. — De la roue à réaction. — Etablissement de la roue à réaction..... 455
§ 3. Des roues où l'eau sort par un orifice contigu à l'axe. — Danaïde. — Etablissement de la Danaïde..... 460
§ 4. Des roues à aubes courbes, où la veine d'eau choquerait les aubes à son entrée dans la roue..... 461
§ 5. Emploi des roues horizontales à la construction des moulins à blé..... 462

670. Manière de se servir du flux et reflux de la mer pour faire tourner des roues toujours du même sens..... 452

671. Exemple d'un moulin exécuté autrefois à Dunkerque qui allait par le flux et reflux..... 464

672. Autre manière de se servir du flux et reflux pour faire tourner des roues. 465

673. Manière de faire une roue de moulin qui puisse tourner, étant entièrement plongée dans l'eau d'une rivière..... 466

(*eb*) Observation sur les roues à ailes mobiles décrites art. 673. — Description d'un moulin mu par la marée exécuté en Angleterre. — Roue flottante de M. Williamson. — Roue submersible proposée par M. Dryden. — Roue de côté ordinaire mue par la marée. — — Avantage des roues horizontales pour les moulins mus par la marée..... 467

674. Règle pour déterminer le nombre des aubes qu'il faut donner aux roues selon la grandeur de leur diamètre..... 468

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

(*ec*) Remarques sur les règles données par l'auteur pour la disposition des roues à aubes..... Page 474

677. Description d'un moulin à bras..... Page 474

679. Calcul d'un moulin à bras, y compris celui des frottements..... 475

(*ed*) Calcul du moulin à bras décrit art. 678 et suiv. — Remarque sur l'art 681..... 478

(*ee*) Observation sur la maniere de faire agir les hommes sur les moulins à bras..... 479

683. Description d'un moulin à bras plus simple encore que le précédent... 479

(*ef*) Indication de divers moulins à bras simplifiés..... 479

684. Manière de déterminer les dimensions d'un moulin mis en mouvement par un cheval..... 480

687. Manière de calculer le produit du même moulin..... 482

(*eg*) Remarques sur le calcul du moulin à cheval commençant art. 685... 483

688. Description de greniers à poire pour conserver le blé, à l'imitation de ceux d'Ardres..... 483

ADDITION.

Art. 1^er^. *Sur divers appareils susceptibles d'être introduits dans les moulins à blé, et propres à diminuer la main-d'œuvre que leur service exige*..... 485

Indication de divers moyens pour opérer les transports du blé et de la farine dans l'intérieur des moulins. — Observation sur l'emploi des bandes pour transmettre les mouvements de rotation.

Art. 2^e^. *Sur les moyens de maintenir l'uniformité du mouvement dans les moulins à blé, et en général dans les usines mues par une chute d'eau*..... 486

Pendule conique employé pour régulariser le mouvement des meules. — Pendule conique employé à régler l'écoulement de l'eau.

Art. 3^e^. *Sur la forme et les dimensions des axes, et de leurs tourillons.*

§ 1. Des axes, et de la manière de leur assujettir les tourillons.... 487

§ 2. De la grosseur à donner aux tourillons, eu égard aux efforts qu'ils supportent..... 488

§ 3. De la forme et de la grosseur à donner au corps des axes.... 490

Tableau contenant l'indication des grosseurs données à divers axes, etc. 492

CHAPITRE II.

Des moulins à scier le bois, le marbre, et à percer les tuyaux.

689. A quoi se réduit le mécanisme d'un moulin à scier..... 493

690. Description générale d'un moulin à scier..... 494

691. De quelle manière avance le chariot qui porte la pièce qu'on veut scier.. *id.*

692. De quelle manière le moulin s'arrête de lui-même, lorsque la pièce est sciée sur toute sa longueur..... 496

693. De quelle manière la machine fait avancer la pièce que l'on veut scier. *id.*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

694. Détail de ce qui appartient à la scie.....Page 497
695. Proportions qu'il faut donner à la roue dentée et à la hampe du pied de biche qui la fait tourner..... 498
696. Détail des parties du chariot qui fait avancer la pièce qu'on veut scier... 499
697. Dimension des principales parties du moulin..... 500
698. La résistance que la puissance motrice doit surmonter se réduit à lever le poids du châssis de la scie..... *id.*
699. Dans le cas du plus grand effet, la scie, en descendant, aura une action équivalente à celle des huit neuvièmes de la force absolue du courant..... 501
(*eh*) Erreur des art. 698 et 699. — Détermination exacte de l'action que le moteur doit exercer dans le sciage du bois. — Indication des recherches d'Euler sur l'action des scies..... 501
700. Calcul de la force qu'il faut pour faire avancer le chariot lorsqu'il est chargé du plus gros arbre que la scie puisse jamais débiter..... 502
(*ei*) Rectification du calcul de l'art. 700..... 502
701. Examen de l'action de la manivelle qui communique le mouvement à la scie..... 503
704. Manière de découvrir quel doit être le poids de la scie et de son équipage, dans le cas du plus grand effet..... 505
705. Manière de calculer le chemin que le chariot fera dans un temps déterminé, par conséquent le progrès de la scie..... 507
706. Quel est le résultat du plus grand effet de ce moulin..... *id.*
707. Examen de la force que la puissance emploie à scier le bois, indépendamment des frottements et des autres accidents..... 508
(*ek*) Remarques sur le calcul de l'établissement du moulin à scier, commençant art. 704. — § 1. Evaluation de la quantité d'action consommée par le sciage du bois..... 509
§ 2. Comparaison entre la quantité d'action consommée par le sciage du bois, et celle dépensée au moulin de La Fère. — Observations sur l'art. 707..... 510
§ 3. Etablissement des moulins à scier mus par une roue à eau — Détermination du poids qu'il convient de donner au châssis des scies..... 511
(*el*) De l'effort nécessaire pour lever la vanne qui donne l'eau à la roue.. 513
708. Sujétions principales qui doivent diriger la construction d'un moulin à scier, et qui peuvent servir d'exemple pour l'emplacement des machines en général..... 514
709. Description d'un autre moulin à scier le bois, plus simple que le précédent..... 516
(*em*) Remarque sur les moulins décrits art. 709..... 517
710. Expériences sur le travail des scieurs de long..... 517
711. Description d'un moulin pour scier le marbre..... *id.*
(*en*) Remarques sur le moulin à scier le marbre. — De la quantité d'action dépensée pour le sciage de la pierre..... 520

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

712. Description d'un moulin pour percer des tuyaux de bois..... Page 521
(*eo*) Sur le procédé décrit pour le forage des tuyaux en bois..... 522

ADDITION.

Art. 1^er^. *Sur la manière de débiter le bois au moyen de la scie*..... 523
Art. 2^e^. *Sur les moulins à scier le bois à mouvement alternatif*..... 524
Moulin à scies verticales, à mouvement alternatif, construit à Woolwich. — Moulin à scie horizontale à mouvement alternatif, exécuté à Portsmout.
Art 3^e^. *Sur les moulins à scier le bois à mouvement continu*..... 526
Scie à lame flexible et sans fin. — Moulin à scies circulaires pour le débit des bois en planches, par M. Brunel. — Etablissement de ce moulin.—Machine à scie circulaire pour couper les bois en travers, construite à Portsmouth par M. Brunel. — Emploi des scies curvilignes dans l'intérieur des ateliers de charpente, menuiserie, etc.
Art. 4^e^. *Sur les machines à forer le bois pour la formation des tuyaux de conduite*..... 533
Forets cylindriques pour la formation des tuyaux en bois.—Machine proposée pour la formation des tuyaux en bois au moyen des forets cylindriques.—Etablissement de cette machine.
Art. 5^e^. *Sur les machines à scier et à forer la pierre et le marbre*.. 534
Diverses dispositions pour le sciage de la pierre par un mouvement alternatif. — Machine à scier et à polir le marbre, employée en Angleterre. — Machine employée à Paris, pour scier les tronçons de colonne par un mouvement continu. — Machine employée par M. W. Murdock pour la formation des tuyaux de conduite en pierre. — Dispositions adoptées à Manchester pour le forage des tuyaux de conduite en pierre. — Etablissement de ces machines. — Machine employée par M. Perronnet, pour percer les trous dans la pierre.

CHAPITRE III.

Des moulins à fabriquer la poudre à canon, et d'une machine pour pulvériser le ciment.

713. Produit des moulins à poudre qui sont en France..... 539
714. Dimensions et pesanteur des pilons..... 540
(*ep*) Remarques sur la nécessité de tenir compte, dans le calcul des machines, de l'effet des chocs..... 540
717. Chaque pilon peut être élevé avec une force toujours uniforme, en donnant aux levées une certaine courbure..... 542
(*eq*) Indication de la meilleure disposition à donner aux pilons et aux cames..... 543
718. Composition de la poudre à canon..... 544

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

719. Manière de lisser la poudre à giboyer.....Page 544
721. Examen de l'effet de ce moulin dans son état actuel..... 545

(*es*) Rectification de l'art. 721.....Page 545
(*et*) Inexactitude du calcul du frottement des pilons..... 548
(*eu*) Inexactitude de l'évaluation de l'effort exercé sur les aubes..... *id.*
(*ev*) Inexactitude du calcul du frottement de l'axe du hérisson..... *id.*
(*ex*) Calcul du moulin à poudre tel qu'il est décrit dans le texte. — Calcul du moulin à poudre, en supposant la disposition des cames et pilons améliorée. Remarque sur le résultat des calculs du texte... 550

727. Le résultat des calculs précédents est que ce moulin peut avoir 36 mortiers au lieu de 24..... 551

(*ey*) De l'établissement d'un moulin à poudre tel qu'on les construit présentement..... 554

728. Description d'une machine pour pulvériser le ciment..... 555

(*ez*) Indication d'une autre machine à broyer le ciment. — Remarque sur les machines à broyer..... 555

ADDITION.

Sur la machine employée en Angleterre pour battre le blé. (thrasing machine.)..... 556

Notions historiques sur la machine employée en Angleterre..... 557
Description de la machine à battre simplifiée par M. Lee..... 559
Description d'une machine à battre complète, donnée par M. Gray. — Manière dont s'effectue l'opération de la machine à battre.... *id.*
Principaux avantages résultant de l'emploi de la machine à battre... 563
Quantité d'action consommée par le battage du blé. — Établissement de la machine à battre le blé. — Rapprochement entre le travail exécuté par la machine à battre et celui d'un ouvrier..... *id.*

CHAPITRE IV.

Des moulins à chapelet, roues à eau, et autres machines pour les épuisements.

(*fa*) Division générale des machines à élever l'eau en deux classes. — Objet de ce chapitre..... 567

729. Description d'un chapelet incliné mu par un cheval..... 567
730. Description d'un chapelet incliné, mu à force de bras, exécuté à Strasbourg, pour les ouvrages de la ville..... 568
733. Autre chapelet dans le goût du précédent, exécuté aussi à Strasbourg pour les ouvrages de la fortification..... 569
735. La perfection des chapelets inclinés se réduit à placer les palettes à une distance égale à leur hauteur, et à incliner le plan sous un angle de 24 degrés 21 minutes..... 570

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

736. Manière de calculer la résistance qu'oppose l'eau élevée par un chapelet incliné..... Page 571

(*fb*) Rectification des résultats admis dans le texte sur la meilleure inclinaison du chapelet incliné, et la force qu'il lui faut appliquer — Théorie du chapelet incliné.—Son effet utile dans la pratique..Page 573

740. Description d'un chapelet vertical pour les épuisements..... 574

741. Calcul de la quantité d'eau qu'un chapelet vertical peut épuiser par heure..... 577

(*fc*) Rectification des assertions et calculs de l'auteur sur le chapelet vertical. — Théorie mécanique du chapelet vertical. — Son effet utile dans la pratique. — Perfectionnements dont il est susceptible..... 578

746. Description d'un autre chapelet vertical exécuté à Marseille..... 580

747. Autre chapelet mis en mouvement par un courant..... *id.*

(*fd*) § 1. Des *norias* ou chapelets composés d'une chaîne de seaux.— Noria de M. Gateau. — Expériences pour l'évaluation de son produit. — Action journalière produite par les manœuvres employés au service de cette machine. — Observations sur une noria de M. Gateau mue par des chevaux..... 586

§ 2. Indication des dispositions de la noria qui paraissent le plus convenables..... 587

§ 3. De la machine de Vera, où l'eau est élevée par une corde sans fin. — Son effet utile dans la pratique..... 588

748. Description de la machine à chapelet, exécutée à Rochefort pour épuiser les eaux de la forme..... 582

753. Calcul de la machine..... 591

(*fe*) Rectification des assertions de l'auteur sur le chapelet de Rochefort. — Son effet utile. — Remarques sur sa disposition..... 592

756. Description d'une pompe pour les épuisements..... 593

761. Autre pompe à l'imitation de la précédente, mais moins imparfaite..... 596

764. Maximes générales qu'on doit suivre pour la construction des machines. 597

(*ff*) Remarques sur la machine proposée art. 761, et le calcul qu'en fait l'auteur..... 597

769. Description d'une nouvelle pompe pour les épuisements..... 598

771. Examen des machines appelées *hollandaises* ou *épuise-volantes*..... 599

(*fg*) Remarques sur les avantages qu'offre l'emploi de la hollandaise..... 600

773. Usage des auges à soupape pour les épuisements..... 600

(*fh*) Remarques sur la faiblesse du produit obtenu avec les auges à soupape..... 601

774. La manière la plus prompte de faire les épuisements est à force de bras sans le secours d'aucune machine, lorsqu'il ne faut élever l'eau qu'à une hauteur médiocre..... 601

(*fi*) Quel est l'effet utile produit par les hommes employés au baquetage. — Quand le seau est suspendu. — Dispositions pour l'arrosage des

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

terres en Egypte. — Appareil proposé par Désagulier. — Indication des meilleures dispositions à adopter pour élever l'eau avec des seaux.....Page 601

775. Description d'une nouvelle machine pour élever l'eau.....Page 602

(*fk*) Remarques sur la machine proposée par M. Morel..... 606

777. Description du tympan dont les anciens se servaient pour les épuisements. 606

779. Nouvelle machine à l'imitation du tympan, mais incomparablement plus parfaite..... 607

(*fl*) § 1. Théorie du tympan des anciens. — Du tympan de Lafaye. — Effet utile du tympan dans la pratique..... 608

§ 2. De la machine appelée *pompe spirale*. — Théorie mécanique de la pompe spirale. — Disposition à lui donner dans la pratique.... 609

782. Description d'une roue à godets..... 609

783. Description d'une autre roue beaucoup plus parfaite que la précédente 616

(*fm*) La théorie de la roue à godets est la même que celle du chapelet incliné. — Inexactitude de l'art. 784. — Effet utile de la roue à godets dans la pratique. — Diverses dispositions de la roue à godets. 617

785. Discours préliminaire sur la vis d'Archimède..... 619

(*fn*) *De la roue à force centrifuge.*

§ 1. De la forme de la surface d'un fluide, quand le vase où il est contenu tourne autour d'un axe vertical. — Description d'une machine qui élève l'eau par l'effet de la force centrifuge résultant d'un mouvement de rotation. — Théorie de la roue à force centrifuge..... 619

De la machine Pitotienne.

§ 2. Théorie de la machine Pitotienne..... 623

De la vis d'Archimède.

§ 3. Construction de la vis d'Archimède, d'après la description de Vitruve. — D'après la disposition adoptée présentement. — Théorie de la vis d'Archimède, dans le cas où elle est formée par un tuyau hélicoïde dont l'extrémité inférieure est constamment sous l'eau. — De la forme de la surface d'un fluide, quand le vase où il est contenu tourne autour d'un axe incliné à l'horizon. — La vis d'Archimède ne peut, dans la pratique, être employée dans l'hypothèse où elle vient d'être considérée..... 624

§ 4. Théorie de la vis d'Archimède, dans le cas où un peu d'air peut s'introduire par l'extrémité inférieure du tuyau hélicoïde..... 627

§ 5. Théorie de la vis d'Archimède, dans le cas où l'eau occupe seulement l'arc hydrophore de chaque spire du tuyau hélicoïde — Recherche de la longueur de l'arc hydrophore. — Comment on en déduit l'inclinaison de la vis sur l'horizon qui correspond au plus grand produit..... 628

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

§ 6. On considère une vis où l'eau s'élève, non plus dans un tuyau d'un petit diamètre, mais dans des canaux hélicoïdes d'une grandeur quelconque. — Recherche du volume de l'espace hydrophore. — Recherche de l'inclinaison de la vis sur l'horizon qui donnera le plus grand produit..... 632

§ 7. Théorie mécanique de la vis d'Archimède, dans le cas où l'eau occupe seulement l'espace hydrophore de chaque spire des canaux hélicoïdes. — Son effet utile dans la pratique. — Diverses dispositions à donner à la vis d'Archimède..... 634

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

ERRATA.

Page 36, ligne 32, ou, *lisez* Par conséquent.
Même page, l. 33, *effacez* par $\frac{r.\sin.s}{s}$. Par conséquent.
Même page, l. 35, d'un arc quelconque, *lisez* d'un arc quelconque s.
P. 44, l. 21, contient, *lisez* contiennent.
P. 105, l. 25, $m\zeta dz$, lisez $m\zeta dz$).
P. 121, l. dernière, de force, *lisez* de force vive.
P. 146, l. 33, B_n, *lisez* B^n.
P. 197, l. dernière, Reiss, *lisez* Rees.
P. 389, l. 19, ou, *lisez* au.
P. 436, l. 30, du rouet de la lanterne, *lisez* du rouet et de la lanterne.
P. 563, l. 12, Pl. K, *lisez* Pl. I.
P. 582, en marge, Pl. H, *lisez* Pl. L.
P. 587, *idem*, Pl. H, *lisez* Pl. L.
P. 588, *idem*, Pl. H, *lisez* Pl. L.

Fautes à corriger dans la nouvelle édition de la Science des Ingénieurs, publiée en 1813 *chez Firmin Didot.*

Page 175, ligne 7, $\mu''\alpha''$, *lisez* $\mu''x'$.
P. 176, l. 9, 12, 14, 18 et 26, *au lieu de* 1, *lisez* x_1.
P. 177, l. 6, $\mu'\alpha'+\left(1-\frac{\gamma'}{\gamma''}\right)\mu''\alpha''=0$, *lisez* $\mu'\alpha'+\mu''\left(x'-\alpha''\frac{\gamma'}{\gamma''}\right)=0$.
Même page, l. 29 et 30, *au lieu de* 1, *lisez* x_1.
P. 182, l. 4, *au lieu de* 1, *lisez* x'.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

AVIS AU RELIEUR.

Le portrait de Bélidor doit être placé en face du titre.

Les planches marquées au bas	doivent être mises en regard des page
1, 2, 3, 4, 5, 6, A	122
7, 8, 9, 10, B	202
11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, C	396
19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, D, E	492
29, 30, 31, 32, 33, F, G	538
34, 35, H, I, K	566
36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, L, M	638

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires