

Titre : Nouveau cours de mathématique à l'usage de l'artillerie et du génie où l'on applique. Les Parties les plus utiles de cette Science à la Théorie et à la Pratique des différents sujets qui peuvent avoir rapport à la Guerre

Auteur : Belidor, Bernard Forest de

Mots-clés : Art et science militaires*France*18e siècle

Description : 1 vol. ([30]-560-[32] p.-[33 pl. dépl.]) ; 26 cm

Adresse : Paris : chez Claude Jombert, rue S. Jacques, au coin de la rue des Mathurins, à l'image Notre-Dame, 1725

Cote de l'exemplaire : CNAM-BIB 4 Py 4 Res

URL permanente : <http://cnum.cnam.fr/redir?4RESPY4>

H^o Py. 4

NOUVEAU COURS
DE
MATHEMATIQUE,
A L'USAGE
DE L'ARTILLERIE ET DU GENIE
OU L'ON APPLIQUE

Les Parties les plus utiles de cette Science à la Theorie &
à la Pratique des differens fujets qui peuvent avoir
rapport à la Guerre.

D E D I E
A SON ALTESSE SERENISSIME
MONSEIGNEUR
LE DUC DU MAINE.

*Par M. BELIDOR, Professeur Royal des Mathematiques des
Ecoles de l'Artillerie, Correspondant des Academies Royales
des Sciences de France & d'Angleterre.*



A PARIS,

Chez CLAUDE JOMBERT, rue S. Jacques, au coin de la rue
des Mathurins, à l'Image Nôtre-Dame.

M. DCC. XXV.

Avec Approbation de Messieurs de l'Académie Royale des Sciences,



A SON ALTESSE SERENISSIME
MONSEIGNEUR
LE DUC DU MAINE,

PRINCE LEGITIMÉ DE FRANCE,
Prince Souverain de Dombes, Comte d'Eu, Duc d'Aumale, Commandeur des Ordres du Roy, General des Suisses & Grisons, Gouverneur & Lieutenant General pour Sa Majesté dans ses Provinces du Haut & Bas Languedoc, Grand Maître & Capitaine General de l'Artillerie de France.



ONSEIGNEUR,

Ce n'est point le desir d'être Auteur qui me fait mettre ce Livre au jour. Mon ambition va plus loin ; c'est d'apprendre à la posterité que j'ai été assez heureux pour composer un Ouvrage qui s'est trouvé du goût de

VOTRE ALTESSE SERENISSIME : Car aussi-

ã ij

E P I T R E.

tôt que j'ai sçu que la lecture des Traitez que je donnois dans l'Ecole de la Fere , avoit merité son approbation , je me suis mis à les travailler tout de nouveau , pour les rendre publics , esperant qu'ils seroient bien reçûs , dès qu'on les verroit sous la protection d'un Prince à qui toutes les Sciences sont connûes , particulièrement celle que je traite ici ; puisque les Mathématiques qui ont toujours été estimées des grands Hommes , ont trouvé par ce seul endroit chez VOTRE ALTESSE SERENISSIME un accueil qui flatte plus ceux qui les cultivent , que la découverte des Problèmes les plus interressans : Et de tous ceux-là , je serois , MONSEIGNEUR , celui qui auroit lieu d'être le plus content de son sort , si avec l'avantage que j'ai d'enseigner Messieurs les Officiers de l'Artillerie , & de Royal Artillerie , pour les mettre en état de servir Sa Majesté avec plus de distinction que jamais , j'osois esperer que le present que j'ai l'honneur de vous faire de mon Ouvrage , fût un témoignage assez puissant du profond respect avec lequel je serai toute ma vie ,

DE VOTRE ALTESSE SERENISSIME,

MONSEIGNEUR,

Le très-humble & très-
obéissant serviteur ,
BELIDOR.



P R E F A C E.

SI ceux qui donnent quelque Ouvrage au Public sont dans l'obligation de lui rendre compte de leur dessein, je puis moins que personne me dispenser d'expliquer le mien. Il est question ici d'un Livre de Mathématique, que j'ai crû rendre utile dans un tems où l'on s'y applique plus qu'on n'a encore fait. Mais comme beaucoup d'habiles gens ont travaillé sur cette matiere, ne dira-t'on pas qu'on a assez de Livres dans ce goût-là, & que l'on ne peut que repeter ce que les autres ont dit? Je n'ai pas été sans faire cette reflexion; & elle auroit suffi pour m'engager au silence, s'il ne m'avoit paru qu'il étoit toujours permis d'écrire, quand on sentoît quelque nouveau moyen de rendre la Science qu'on veut traiter plus intelligible aux Commençans, en appliquant ses principes à des sujets qui en fassent voir toute l'utilité. J'ai considéré aussi que parmi ceux qui étudioient les Mathématiques, les uns s'y appliquoient pour se rendre l'esprit juste, pénétrant, & capable des Sciences abstraites, comme de la Physique, de la Métaphysique, &c. les autres pour se mettre en état de servir avec distinction dans le Génie ou l'Artillerie; & que personne n'ayant travaillé particulièrement pour ceux-

P R E F A C E.

ci, il seroit avantageux qu'ils eussent un Livre dans lequel ils pussent trouver toutes les parties des Mathématiques qui leur sont nécessaires , afin de leur éviter la peine de les aller démêler dans un grand nombre d'autres , où ils ne trouveroient peut-être pas ce qui leur convient ; & c'est l'objet que je me suis proposé dans celui-ci. Or comme ce n'est qu'en appliquant la Théorie à la Pratique qu'on peut leur faire sentir l'usage d'une quantité de principes , dont ils ne voyent point l'utilité , je me suis attaché à leur rendre les Mathématiques intéressantes , en les faisant servir à un nombre de sujets differens , qui regardent les Ingenieurs & les Officiers d'Artillerie , comme l'on en pourra juger par le détail suivant.

Cet Ouvrage contient dix Parties. Dans la première on enseigne les Elemens de la Géométrie , mis dans un ordre nouveau , & démontrez par des voyes beaucoup plus courtes & plus aisées que celles dont on se sert ordinairement. Ils sont divisez en huit Livres. Dans le premier Livre on donne une Introduction à la Géométrie & à l'Algèbre , afin de mettre les Commençans en état d'entendre les autres suivans. Le second traite des Proportions ou Rapports des grandeurs. On y enseigne aussi les Fractions numeriques & algébriques. Le troisième traite des différentes Positions des lignes droites par rapport aux angles qu'elles peuvent former. Dans le quatrième on démontre les Proprietez des figures rectilignes ,

P R E F A C E.

particulièrement des Triangles & des Parallelogrammes ; & ce Livre qui ne contient que douze Propositions, comprend plus de Géométrie qu'Euclide n'en enseigne en soixante-deux , dans le premier & second Livre de ses Elemens. Le cinquième explique les Proprietez du Cercle par rapport aux différentes lignes tirées au dehors ou au dedans de la circonference ; la mesure des angles formez par ces lignes ; le rapport des rectangles compris sous les parties de celles qui se coupent ou se rencontrent au dedans ou au dehors du Cercle , & l'on y donne tous les principes sur lesquels la Trigonométrie est établie. Le sixième traite des Polygones reguliers inscrits & circonscrits au Cercle : & comme la plupart ne peuvent se tracer simplement avec la Regle & le Compas , l'on y donne la construction & l'usage d'une courbe , pour inscrire toutes sortes de Polygones au Cercle , avec laquelle on peut aussi diviser un angle en autant de parties égales que l'on voudra. Dans le septième on applique la doctrine des proportions aux figures planes ; l'on y fait voir le rapport des côtes de celles qui sont semblables ; celui de leur superficie ; la maniere de les augmenter ou diminuer selon une raison donnée , & comme l'on peut trouver des lignes proportionnelles à d'autres données. Enfin dans le huitième on traite des rapports des Surfaces & des soliditez des Corps ; de la maniere de les mesurer , de les augmenter ou de les diminuer selon une raison

P R E F A C E.

donnée; & ce Livre est démontré d'une manière si aisée & si différente de celles dont on s'est servi jusqu'ici, qu'en seize Propositions, y compris plusieurs Problèmes, l'on voit ce qu'Archimede a découvert de plus beau sur la Sphere, le Cone & le Cylindre.

Pour faire voir l'utilité des Livres précédens, l'on a mis après chaque Proposition des Corollaires qui en montrent la fécondité; & l'on voit avec admiration l'étendue de la Géométrie, dont il suffit de sçavoir les premiers Elemens, pour découvrir des veritez qui semblent se présenter d'elles-mêmes à l'esprit, au lieu que dans la plûpart des autres Sciences l'on est toujours dans l'incertitude de sçavoir si l'on possède la verité; & malgré les soins qu'on s'est donné pour la chercher, l'on n'ose s'assurer d'avoir été assez heureux pour la rencontrer.

Comme les simples Elemens de la Géométrie ne suffisent pas pour entendre beaucoup de choses qui sont traitées dans les autres Parties, qui demandent une connoissance des Sections Coniques, j'en ai donné un petit Traité à la fin de la premiere Partie, qui comprend les proprieté de la Parabole, de l'Ellipse & de l'Hyperbole, qui se trouvent démontrées d'une façon si simple, que pour peu qu'on y apporte d'attention, on n'aura nulle peine à les entendre.

La seconde Partie est un Traité de Trigonométrie rectiligne. L'on y enseigne l'usage des tables

P R E F A C E.

cles des Sinus, la Théorie du Calcul des Triangles, que l'on applique ensuite à la manière de mesurer les hauteurs & les distances accessibles & inaccessibles, à celles de calculer les parties d'une Fortification, & comme on les peut tracer sur le terrain. L'usage de la Trigonométrie dans la conduite des Galeries des Mines, lorsqu'on rencontre quelque obstacle qui oblige le Mineur à se détourner du droit chemin. Enfin l'on donne la manière de lever les Cartes par le calcul des Triangles.

La troisième Partie est un Traité de la Théorie & de la Pratique du Nivellement pour les opérations simples & composées, soit avec le Niveau d'eau, ou avec le Niveau à lunette, & l'on y donne tout ce qui peut servir à faire des Nivellemens avec précision.

La quatrième Partie est un Traité du Calcul ordinaire du Toisé & de celui de la Charpente : toutes les opérations de ce Calcul y sont démontrées ; & l'on s'est attaché à le rendre si clair & si facile, que les Commençans peuvent en peu de jours se le rendre familier.

La cinquième Partie est une application générale de la Géométrie à la mesure des Solides réguliers & irréguliers : par exemple, on y enseigne la manière de toiser les Voûtes en plein cintre, surbaissées, en tiers point & en bonnet de Prêtre ; comme il faut toiser géométriquement la

P R E F A C E.

maçonnerie du revêtement des Fortifications ; par exemple , les orillons & les flancs concaves , les arrondissemens des Contrescarpes , les pyramides tronquées qui se trouvent aux angles , l'onglet des bâtardeaux , les solides formez par l'excavation des Mines , & une quantité d'autres choses , dont la plupart n'avoient pas encore été traitées ; & cette cinquième partie finit par un principe general pour trouver la surface qu'une ligne droite ou courbe peut décrire par une circonvolution autour d'un axe : & comme on peut par le même principe trouver la solidité de toutes sortes de corps formez par la circonvolution d'un plan autour d'un axe , en connoissant les centres de gravité des lignes & des plans.

La sixième Partie est une application des principes de la Géométrie à la Géodesie , c'est-à-dire , à la division des Champs , pour partager les figures triangulaires , quadrilateres , & même toutes sortes de Polygones , selon telle raison que l'on voudra , & par des points donnez.

La septième Partie est une application de la Géométrie à l'usage du Compas de proportion , pour faire voir comme l'on peut avec cet Instrument résoudre beaucoup de Problèmes d'une façon fort aisée. Il est vrai qu'on peut s'en passer ; mais j'ai eu intention seulement de le faire connoître à ceux qui n'en sçavent pas l'usage. Ensuite est une application de la Géométrie à l'Artillerie

P R E F A C E.

dans plusieurs Problèmes fort utiles. Par exemple, l'on donne la maniere de faire l'analyse de la fonte de chaque espece de métal dont le Canon est composé ; celle de trouver le diamètre des Boulets de toutes sortes de calibres ; comme l'on peut déterminer les dimensions des mesures qui servent à distribuer la Poudre ; quelle longueur doivent avoir les pièces de Canon par rapport à leurs differens calibres , pour chasser un Boulet avec le plus de violence qu'il est possible ; & plusieurs Dissertations sur les effets de la Poudre dans le Canon.

Dans la huitième Partie l'on traite du choc & du mouvement des Corps accelerez & retardez , des courbes qu'ils décrivent , quand ils sont jetez selon des directions paralleles ou obliques à l'horison ; & ces principes sont ensuite appliquez à la Théorie & à la Pratique du Jet des Bombes.

La neuvième Partie est un Traité de Mécanique , démontré selon le principe de M. Descartes & celui de M. Varignon : & après avoir enseigné les proprieté des Machines simples & composées , & donné la maniere d'en calculer les forces , on fait voir les differens usages auxquels elles sont propres ; soit pour les manœuvres de l'Artillerie , ou pour la pratique des Arts ; & les principes generaux sont ensuite appliquez à la construction des Magazins à poudre , ou de tout

P R E F A C E.

autre Edifice , pour faire voir la difference de la poussée de la Voûte en plein ceintre , avec celle qui est surbaissée , ou en tiers point : & comme l'on peut regler l'épaisseur des pieds droits qui soutiennent ces Voûtes , pour que leur résistance soit en équilibre avec le poids & la poussée des mêmes Voûtes. L'on détermine après cela quel est le choc des Bombes & des Boulets de Canon, qui viennent rencontrer des surfaces horizontales ou inclinées , & quelle élévation il faut donner à un Mortier , pour qu'une Bombe venant à tomber sur un Magazin à poudre , choque la Voûte avec toute sa pesanteur absoluë ; & ce Traité finit par un discours sur la Théorie des Mines & contre-Mines , où l'on fait voir la maniere de regler la charge de leurs Fourneaux par rapport à leurs différentes lignes de moindre résistance , & à l'effet auquel on les destine..

La dixième Partie , qui est une suite de la précédente , contient un Traité d'Hydraulique , où l'on démontre l'équilibre des Liqueurs , les vitesses avec lesquelles elles s'écoulent par différents ajutages ; le choc des Eaux courantes contre des surfaces perpendiculaires ou obliques au courant , & l'usage qu'on peut tirer de toutes ces Regles , pour conduire & ménager les Eaux ; & cette Partie finit par un Discours sur la nature & les proprieté de l'Air , pour servir d'Introduction à la Physique , & à expliquer l'effet

P R E F A C E.

des Machines hydrauliques, comme des Pompes, Siphons, &c.

Voilà une idée des Parties que j'ai crû qui devoient composer un Cours des Mathématiques à l'usage du Génie & de l'Artillerie. Il semblera peut-être que j'aurois dû y joindre un Traité de Fortification, pour rendre cet Ouvrage complet. Mais comme je n'ai eu en vûë ici que les Mathématiques speculatives, je compte de satisfaire bien-tôt au reste par le Traité de Fortification que j'ai promis en 1720. comme il est prêt à être mis sous la presse, & que les Planches, qui sont en très-grand nombre, vont être finies, je ne tarderai guères à le rendre public. Il me reste à désirer qu'on soit content de celui-ci, & que ceux qui commencent, ayent autant de goût pour l'apprendre, que j'ai pris de soin de le rendre utile, clair & intéressant. Cependant comme il pourroit se trouver des personnes qui après avoir appris ce Livre-ci, désireroient d'en avoir d'autres, où ils pussent apprendre plus d'Algebre que je n'en enseigne. Je rapporte une Liste des meilleurs Livres des Mathématiques que nous avons en François : on la trouvera à la fin de la premiere Partie, plusieurs habiles gens m'ayant fait connoître qu'elle pourroit être utile, entr'autres Monsieur M Ingenieur en Chef de B aussi recommandable par son mérite, que par son sçavoir. Je lui suis même.

E.ijj

P R E F A C E.

redevable de plusieurs bonnes choses sur lesquelles il m'a engagé de travailler ; & l'on trouvera dans mon Traité de Fortification quelques morceaux qu'il a bien voulu me communiquer. J'aurai toujours beaucoup d'obligation à ceux qui voudront bien me donner lieu de travailler sur des sujets utiles , & je ferai charmé de leur en faire honneur dans le Public.





ETABLISSEMENT DES ECOLES D'ARTILLERIE.

Comme les Ecoles de l'Artillerie commencent à donner des marques du succès que le Roy a espéré de leur établissement, & que c'est particulièrement pour leur instruction que j'ai fait cet Ouvrage, je crois qu'il convient de dire un mot sur la conduite qu'on y observe, afin d'en donner la connoissance à ceux qui n'en sçavent pas les particularitez.

Le Roy, voulant former un Corps composé de Canoniers, Bombardiers, Mineurs, Sapeurs & Ouvriers, fit assembler à Vienne en Dauphiné dans le mois de Février 1720. les quatre Bataillons du Regiment Royal Artillerie, le Regiment des Bombardiers, les quatre Compagnies de Mineurs, & un nombre d'Ouvriers que chaque Bataillon de l'Infanterie avoit eu ordre de fournir, pour être incorporez, aussi-bien que les Bombardiers & les Mineurs, dans le Regiment Royal Artillerie, qu'on divisa en cinq Bataillons, composez de huit Compagnies de 100 hommes.

Il y a dans chaque Compagnie un Capitaine en premier, un Capitaine en second, deux Lieutenans, deux Sous-Lieutenans, deux Cadets, quatre Sergens, quatre Caporaux, quatre Enspassades, deux Tambours, & quatre-vingt quatre Soldats.

Chaque Compagnie est divisée en trois Escoüades. La premiere, qui est double, est composée de vingt-quatre Canoniers ou Bombardiers, & de vingt-quatre Soldats apprentifs.

ETABLISSEMENT

La seconde est composée de douze Mineurs ou Sapeurs , & de douze Apprentifs.

La troisième est composée de douze Ouvriers en fer , en bois & autres propres à l'usage de l'Artillerie , & de douze Apprentifs.

Les cinq Bataillons ayant été formez , ils eurent ordre de se rendre à Metz , Strasbourg , Grenoble , Perpignan & la Fere , qui étoient les Garnisons qui leur étoient destinées.

Dans chacune de ces Places le Roy a établi des Ecoles de Théorie & de Pratique , qui sont commandées par un Lieutenant d'Artillerie , & par deux Officiers d'Artillerie , qui commandent en second & en troisième. Outre ces Commandans , le Roy a nommé Messieurs Camus Destouche & de Valiere , Directeur & Inspecteur des mêmes Ecoles , pour les visiter tous les ans , afin de reconnoître les progrès que les Officiers y font , & d'en rendre compte à la Cour.

L'Ecole de Théorie se tient trois jours de la semaine , le matin depuis 8 heures jusqu'à 11. Messieurs les Officiers , à commencer par les Capitaines en second , Lieutenans , Sous-Lieutenans & Cadets , sont obligez de s'y trouver , aussi-bien qu'un grand nombre d'Officiers de l'Artillerie , qui sont entretenus dans chaque Ecole , dans lesquelles on veut bien recevoir les jeunes gens de famille Volontaires dans l'Artillerie , ou Royal Artillerie , pour y profiter des Instructions , & remplir les Emplois vacans , quand on les en juge dignes.

L'on commande tous les jours de Mathématiques un Capitaine en premier pour présider à l'Ecole , afin d'y maintenir le bon ordre. Il y a aussi une Sentinelle à la porte , pour empêcher que pendant la Dictée l'on ne fasse du bruit dans le voisinage. Ces Dictées sont remplies par des Traitez d'Arithmétique , d'Algèbre , de Géométrie , des Sections Coniques , de Trigonométrie , de Mécanique , d'Hydraulique , de Fortification , de Mines , de l'attaque & de la défense des Places , & de Mémoires sur l'Artillerie.

Comme

DÈS ÉCOLES D'ARTILLERIE.

Comme suivant l'Ordonnance du Roy , il ne peut être mis à la tête des Bataillons du Regiment Royal Artillerie , soit pour Lieutenant-Colonel , Major ou Capitaine , que des gens élevez dans le Corps , & que les Officiers d'Artillerie qui sont aux Ecoles , ne se ressentent des graces du Grand Maître de l'Artillerie , qu'autant qu'ils s'attachent à s'instruire des choses que l'on enseigne , il se fait un Examen tous les six mois par le Professeur des Mathématiques , en présence des Commandans de l'Artillerie & du Bataillon , où les Officiers sont interrogés les uns après les autres sur toutes les parties du Cours de Mathématiques , dont ils démontrent les Propositions qui leur sont demandées ; & après qu'ils ont satisfait à l'Examen , le Professeur dicte publiquement l'apostille de celui qui a été examiné : & comme l'inégalité des âges & des génies , & même de la bonne ou mauvaise volonté de la plupart , peut faire beaucoup de difference dans un nombre de près de cent Officiers qu'il y a dans chaque Ecole , l'état de l'Examen est divisé en trois Classes. Dans la première sont ceux qui se distinguent le plus par leur application. Dans la seconde , ceux qui sont de leur mieux ; & dans la troisième , ceux dont on n'espère pas grand'chose. Cet Etat est ensuite envoyé à la Cour , qui a par ces moyens une connoissance des progrès de chacun.

Pour l'Ecole de Pratique qui se fait les trois autres jours de la semaine , où l'on n'enseigne point de Théorie , elle consiste principalement à exercer les Canoniers , les Bombardiers , les Mineurs & les Sapeurs , à tirer du Canon , jeter des Bombes , à apprendre les Manœuvres de l'Artillerie , qui sont proprement des pratiques de Mécaniques , à construire des Ponts sur des Rivières avec la même promptitude qu'on les fait à l'Armée ; à conduire des Galeries de Mines & de Contre-Mines , des Tranchées & des Sappés. Comme tous ces exercices ont pour principal objet l'Art d'attaquer & de défendre

ETABLISSEMENT DES ECOLES, &c.

dre les Places, l'on a élevé dans chaque Ecole à la campagne un Front de Fortification, accompagné des autres ouvrages détachés d'une grandeur suffisante pour pouvoir être attaqué & défendu, comme dans une véritable Action; ce qui s'exécute par un Siege que l'on fait tous les deux ans, & qui dure deux ou trois mois de l'Esté.

C'est ainsi que joignant la Théorie à la Pratique dans les Ecoles: chacun travaille à se perfectionner dans le Métier de la Guerre; l'exactitude & le bon ordre avec lequel tout ce qui s'y passe est dirigé, doit faire juger des avantages que le Roy retirera un jour d'un Etablissement aussi digne de la France que celui-ci.



Approbation de M. SAURIN, Censeur Royal.

J'AY lû par l'ordre de Monseigneur le Garde des Sceaux un Manuscrit intitulé *Nouveau Cours de Mathématiques, à l'usage de l'Artillerie & du Génie* : J'ai trouvé cet Ouvrage fort clair, & fait avec beaucoup de méthode, sçavant, & très-propre à ceux pour qui il est composé. A Paris le 10. Octobre 1723.

SAURIN.

PRIVILEGE DU ROT.

LOUIS par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre : A nos amez & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien-amé & féal le Sieur BERNARD BELIDOR, Professeur Royal des Mathématiques, Correspondant des Académies des Sciences de France & d'Angleterre, Nous a fait remontrer qu'il avoit composé un Traité qui a pour titre : *Cours de Mathématique & de Fortifications, à l'usage des Ingenieurs & des Officiers d'Artillerie*, qu'il desireroit donner au Public : mais comme il ne le peut faire imprimer sans s'engager à de très-grands frais, à cause de beaucoup de Planches absolument nécessaires pour l'intelligence de ce qui y est contenu, qu'il a été obligé de faire graver, il Nous a très-humblement fait supplier de lui accorder nos Lettres à ce nécessaires. A CES CAUSES voulant favorablement traiter l'Exposant, & lui donner moyen de faire imprimer cet Ouvrage, qui ne peut être que très-utile à nos Officiers d'Artillerie, & à nos Ingenieurs, Nous lui avons permis & permettons par ces Presentes de faire imprimer ledit Livre intitulé : *Cours de Mathématique & de Fortification, à l'usage des Ingenieurs & des Officiers d'Artillerie*, en tels volumes, marge, caractère, conjointement, ou séparément, & autant de fois que bon lui semblera, de le faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de dix années à compter du jour de la date des Presentes. Faisons défenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance, comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, débiter ni contrefaire ledit Livre en tout ou en partie, d'en faire aucun extrait sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement sans la permission expresse & par écrit de l'Exposant ou de ceux qui auront droit de lui ; à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de notre bonne Ville de Paris, & l'autre tiers à l'Exposant, & de tous dépens, dommages & intérêts ; à la charge que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois du jour de la date ; que l'impression de ce Livre sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & en beaux caractères,

conformément aux Reglemens de la Librairie ; qu'avant que de les exposer en vente, les Manuscrits qui auront servi de Copie à l'impression du Livre, seront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, à notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur Fleury d'Armenonville ; qu'il en fera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur Fleury d'Armenonville ; le tout à peine de nullité des Présentes : Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Exposant ou les Successeurs & ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement : Voulons que la copie desdites Présentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin dudit Livre, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & féaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution des Présentes tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. Donné à Paris le vingt-cinquième jour du mois de Novembre l'an de grace mil sept cents vingt-trois, & de notre Regne le neuvième. Par le Roy en son Conseil.

ROBINOT.

Registré sur le Registre V. de la Chambre Royale & Syndicale de la Librairie & Imprimerie de Paris, N° 717. fol. 416. conformément au Reglement de 1723. qui fait défense, art. IV. à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, & faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement : Et à la charge de fournir les Exemplaires prescrits par l'article CVIII. du même Reglement. A Paris le 23 Decembre 1723.

BRUNET, Syndic.

J'ai cédé sans reserve au Sieur Jombert l'aîné, le Privilege general que j'ai obtenu du Roy le vingt-cinquième jour du mois de Novembre 1723. d'un Ouvrage intitulé : *Cours de Mathématique & de Fortification, à l'usage des Ingenieurs & des Officiers d'Artillerie*, pour en jouir comme chose à lui appartenante. A la Fere ce 25. Novembre 1724.

BERNARD BELIDOR.

Je cede au Sieur Jean-Luc Nyon Libraire à Paris, moitié dudit Privilege pour le Nouveau Cours de Mathématique seulement. A Paris ce 25. Janvier 1725.

C. JOMBERT.

Registré les Cessions ci-dessus & de l'autre part, sur le Registre VI. de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, page 130. conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arrêt du Conseil du 13. Août 1703. A Paris le 26. Janvier 1725.

BRUNET, Syndic.

R E M A R Q U E.

Comme il est de conséquence que le Lecteur ne se trouve point arrêté par des fautes d'impression, on a eu soin de donner ici un *Errata* de celles qui se trouvent dans cet Ouvrage, qu'il faut corriger avant même de le lire. Il ne s'en seroit peut-être pas tant glissé, si j'avois pû revoir les Epreuves moi-même. Mais à l'occasion des fautes d'impression qui se trouvent dans les Livres des Mathématiques, je suis bien aise d'avertir ceux qui ne savent pas faire le choix de ces sortes de Livres, de prendre toujours les Editions de Paris, préférablement à celles de Hollande; car comme ce sont ordinairement des Livres contrefaits, dont les Epreuves n'ont point été corrigées, il s'y rencontre une si grande quantité de fautes, qu'en bien des endroits on a peine à trouver le sens de l'Auteur.

E R R A T A.

Comme l'on a trouvé que la première Définition de la première Partie étoit un peu trop générale pour ne convenir qu'à la Géométrie seulement, on pourra la prendre aussi pour celle des Mathématiques.

Page 8 art. 41 lig. 4, un 3 au devant, *lis.* un 3 après.

Page 24 art. 81 lig. 20, de 6 reste 3, *lis.* de 36 reste 3.

Page 29 art. 93 lig. 17, par 100, *lis.* par 1000.

Page 40 art. 102 lig. 13, dont la racine cube, *lis.* dont le cube.

Page 50 art. 123 lig. 6. *lis.* $x=d+e$.

Page 51 art. 127 lig. 6, ax , *lis.* aa .

Page 56 lig. 16, $17x-102$, *lis.* $17x=102$.

Page 83 art. 192 lig. 4 *lis.* & les deux conséquens aussi l'un par l'autre.

Page 121 lig. 11, ABD, *lis.* ADB.
 Page 185 art. 431 lig. 2, CB, *lis.* CD.
 Page 188 lig. 18, 402, *lis.* 442, & 414, *lis.* 453.
 Page 194 lig. 10, ~~+~~xabb, *lis.* xxbb.
 Page 227 art. 515, 100000, *lis.* 10000.
 Page 233 lig. 2, complement, *lis.* supplement.
 Page 234 lig. 11, CD, *lis.* CB.
 Page 272 lig. 3, OB, *lis.* OP.
Ibid. lig. 28, GD, *lis.* GB.
 Page 273, lig. 32, BF, *lis.* PF.
 Page 285 art. 554 lig. 28, je pose 8 pouces, *lis.* je pose
 3 pouces.
 Page 288 lig. 19, 6 pieds, *lis.* 5 pieds.
 Page 298 art. 557 lig. 16, la folive, *lis.* la partie.
 Page 323 lig. 13, Spheroïque, *lis.* Spheroïde.
 Page 324 lig. 4, EG, *lis.* AG.
Ibid. art. 605 lig. 10, OP, *lis.* OQ.
 Page 325, lig. 6, ML, *lis.* NL.
 Page 333 lig. 11, *lis.* le quarré de la plus grande or-
 donnée.
 Page 336 lig. 6, *lis.* du profil qu'il faut multiplier.
 Page 338 lig. 4, IHD, *lis.* IDH.
Ibid. lig. 14, 5 toises, *lis.* 4 toises.
 Page 357 art. 641 lig. 17, BDE, *lis.* BDC.
 Page 358 art. 643 lig. 28, rectangle, *lis.* triangle.
 Page 361 art. 647. lig. 6, la ligne, *lis.* la figure.
 Page 386 lig. 5, charabres, *lis.* chambres.
 Page 392 lig. 14, parallele à la base, *lis.* oblique à la
 base.
 Page 395 lig. 33, PS, *lis.* MS.
 Page 423 lig. 7, $\frac{GD \times GD}{AF}$, *lisez* $\frac{GD \times GD}{AG}$.
Ibid. lig. 9, x, *lis.* y.
Ibid. art. 728 lig. 8, CE, *lis.* GE.
 Page 424 art. 729 lig. 20, IG, *lis.* IH.
 Page 446 lig. 7, E, *lis.* F.

Page 452 art. 772 lig. 19. P. Q:: BC. BG. lis. P. Q:: BG. BC.

Page 474 lig. 31, mobile, lis. immobile.

Page 489 lig. 4, troisième coup, lis. premier coup.

Page 503 lig. 20, HD, lis. DQ.

Page 504 lig. 1. par des batteries, lis. tiré des batteries.

Page 557. lig. 25 & 37, rarefraction, lis. rarefaction.

A V E R T I S S E M E N T.

COMME un Auteur ne peut s'assurer de la bonté de son Ouvrage que par le témoignage des habiles gens à qui il le communique, je n'ai pas plutôt eu achevé le mien, qu'il m'est venu un scrupule, de sçavoir si le dessein que je m'étois proposé, étoit bien rempli. Dans cette espece d'embarras, j'ai crû ne pouvoir mieux faire que de prier Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, de vouloir bien l'examiner avec soin, afin que s'il m'étoit échappé quelque chose qui ne fût point exact, je pûs faire les corrections qu'ils jugeroient à propos, avant que mon Livre parût, & tirer de-là occasion de faire voir à une Compagnie aussi illustre, que je cherchois à me rendre digne par mon travail de la continuation de ses bontez; & quoique l'usage de l'Académie ne fût pas d'examiner les Ouvrages qui ne sortent point directement de chez elle, elle a cependant bien voulu me faire la grace de répondre à mes instances; & voici l'Approbation qu'elle a jugée à propos de me donner.

E X T R A I T
DES REGISTRES DE L'ACADEMIE
Royale des Sciences.

Du 27. Janvier 1725.

LEs Reverends Peres Sebastien & Reneau, & Messieurs Saurin, de Mairan & Chevalier, qui avoient été nommez pour examiner un Ouvrage présenté par M. Belidor, Professeur Royal des Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie de la Fere, & intitulé : *Nouveau Cours de Mathématique, à l'usage de l'Artillerie & du Génie*, en ayant fait leur rapport ; la Compagnie a jugé que puisque l'Auteur avoit recüeilli avec choix & avec ordre des diverses Parties des Mathématiques, les principales connoissances qui pouvoient appartenir au Génie & au service de l'Artillerie ; qu'il avoit rendu toutes ses démonstrations plus nettes & plus courtes, en y employant l'Algèbre, dont il donne les premiers Elemens, & qu'il faisoit voir l'usage des connoissances qu'il donnoit, en les appliquant à des exemples considerables, tirez du Génie même & de l'Artillerie ; il avoit bien rempli les vûes qu'il s'étoit proposées, & qu'on ne pouvoit trop louer son zele pour le progrès de l'Ecole à laquelle il a voué ses soins & ses travaux. En foi de quoi j'ai signé le present Certificat. A Paris ce 29. Janvier 1725.

FONTENELLE, *Sec. perp. de l'Ac. R. des Sc.*
NOUVEAU



NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE,

A L'USAGE

DES INGÉNIEURS ET OFFICIERS D'ARTILLERIE.

LIVRE PREMIER.

Où l'on donne l'Introduction à la Géométrie.

DEFINITIONS.

I.



A Géométrie est une Science qui ne considère pas tant la grandeur en elle-même, que le rapport qu'elle peut avoir avec une autre grandeur de même genre.

ARTICLE
PREMIER.

II.

2. Tout ce qui peut tomber en question s'appelle *proposition*. Il y en a de différentes natures, & elles changent de nom selon leur sujet. Par exemple,

A

III.

3. *Axiome* est une proposition si claire, qu'elle n'a pas besoin de preuve.

IV.

4. *Théoreme* est une proposition dont il faut démontrer la vérité.

V.

5. *Problème* est une proposition dans laquelle il s'agit de faire quelque chose, & de prouver ce qu'on avoit proposé de faire.

VI.

6. *Lemme* est une proposition qui en précède une autre pour en faciliter la démonstration.

VII.

7. *Corollaire* est une proposition qui n'est qu'une suite ou une conséquence d'une autre précédente ; & comme toutes ces propositions ont pour objet la grandeur, voici l'idée qu'il faut s'en former.

VIII.

Planche première. 8. Il y a trois sortes de dimensions ; *Longueur*, *Largeur*, & *Profondeur*.

IX.

9. La *Longueur* considérée sans largeur & sans profondeur, se nomme *Ligne*.

X.

10. La *Longueur* & la *Largeur* considérées sans la profondeur, se nomment *Surface*, laquelle est aussi nommée *Surface plane*, ou simplement *Plan*, quand elle est plate & unie comme un miroir.

XI.

11. La *Longueur*, la *Largeur*, & la *Profondeur* considérées ensemble, se nomment *Corps* ou *Solide*.

XII.

12. Le *Point* est l'extrémité d'un *Corps* ou d'une *Surface*, ou bien d'une *Ligne* que l'on conçoit comme indivisible ou sans dimension, c'est-à-dire, auquel on n'attribue aucune *Longueur*, *Largeur*, ni *Profondeur*.

XIII.

13. La *Ligne droite* est la plus courte de toutes celles que l'on peut mener d'un point à un autre, comme AB.

XIV.

14. La *Ligne courbe* est celle qui n'est pas la plus courte qu'on peut tirer d'un point à un autre, comme CD.

XV.

15. La *Ligne mixte* est celle qui est en partie courbe & en partie droite, comme EF.

XVI.

16. Une *Ligne perpendiculaire* est une *Ligne droite* CD, Fig. 4, qui aboutissant sur AB, ne panche pas plus d'un côté que de l'autre.

XVII.

17. *Quarré* est une figure composée de quatre côtes Fig. 1, égaux, qui aboutissent perpendiculairement les uns sur les autres.

XVIII.

18. *Rectangle* est un *Quadrilatère* dont les quatre côtes Fig. 2, ne sont pas égaux entr'eux, mais seulement ceux qui sont opposés, & qui aboutissent aussi perpendiculairement les uns sur les autres.

Aij

XIX.

Fig. 3. 19. Le *Cube* est un Corps qui a la figure d'un dez à jouer ; il est renfermé par six quarrés égaux , & a ses trois dimensions égales.

XX.

Fig. 5. 20. *Parallelepiped* est un solide renfermé par six *rectangles* , dont les oppozés sont égaux , & qui n'a point ses trois dimensions égales.

21. Il y a une maniere de considerer les trois especes de l'étendue , c'est-à-dire , la *Ligne* , la *Surface* & le *Corps* qui est très-propre à expliquer beaucoup de choses en Géométrie ; c'est d'imaginer la Ligne composée d'une infinité de Points , la Surface composée d'une infinité de Lignes , & le Corps composé d'une infinité de plans. Mais pour faire entendre ceci , considerez deux points , comme A & B , éloignez l'un de l'autre d'une distance quelconque ; si l'on suppose que le point A se meut pour aller vers le point B , sans s'écarter ni à droite ni à gauche , & qu'il laisse sur son chemin une trace d'autres points , il arrivera qu'ils formeront ensemble une ligne droite AB , puisqu'il n'y aura point d'espace dans la longueur AB si petit qu'il soit , que le point A n'ait parcouru : ainsi toute la ligne droite AB peut être considérée comme ayant été formée par une multitude de *points* , dont la quantité est exprimée par la longueur de la ligne même.

Fig. 2. 22. L'on concevra de même que le Plan est composé d'une infinité de *lignes* ; car supposant que la ligne AC se meut le long de la ligne CD en demeurant toujours également inclinée , il est sensible que si elle laisse après elle au ant d'autres lignes qu'il y a de points dans CD , que lorsqu'elle sera parvenue au point D , toutes les lignes composeront ensemble la surface BC.

Fig. 5. & 6. 23. Enfin si l'on a un plan AB , qui se meut le long de la ligne BC , & qu'il laisse autant de plans après lui qu'il y a de points dans cette ligne , l'on voit que lorsque

le plan sera arrivé à l'extrémité C, il aura formé un corps tel que DB, qui sera composé d'une infinité de plans, dont la somme sera exprimée par la ligne BC.

24. Comme l'on entend par la génération d'une chose les parties qui l'ont formée, il s'ensuit que selon ce qui vient d'être dit, le point est le generateur de la ligne, la ligne la generatrice de la surface, & la surface la generatrice du corps.

25. Si l'on suppose que la ligne AC soit de 8 pieds, & la ligne CD de 6, & que l'on considere ces nombres comme exprimant la quantité de points qui se trouve dans ces lignes, l'on verra que multipliant 8 par 6, le produit sera la valeur de la surface AD; car cette surface étant composée d'une infinité de lignes, & chacune de ces lignes étant composée d'une infinité de points, il s'ensuit que la surface est composée d'une infinité de points, dont la quantité sera le produit de tous les points de la ligne CD, par tous les points de la ligne AC, c'est-à-dire, de sa longueur AC, par sa largeur CD, qui donnera 48 pieds, qu'il faut bien se garder de confondre avec le pied courant; car le pied courant n'est qu'une longueur sans largeur, au lieu que ceux qui sont formez par le produit de deux dimensions, sont autant de surface quarrées, qui servent à mesurer toutes les superficies.

Fig. 2

26. Or comme le solide DB est composé d'autant de plans qu'il y a de points dans la ligne CB, il faut donc multiplier le plan AB par la ligne BC, pour avoir le contenu de ce solide: ainsi supposant que le plan AB vaut 48 pieds quarrés, & que les points de la ligne BC soient exprimez par 4 pieds courans, multipliant 48 par 4, l'on aura 192 pieds pour la valeur du solide AC. Il faut faire encore attention que ces pieds sont differens du pied courant & du pied quarré; car ce sont autant de petits solides qui ont un pied de longueur, un pied de largeur, & un pied de hauteur, que l'on nomme cubes, à cause qu'ils ont leurs trois dimensions égales. Ainsi il

Fig. 3

faut remarquer que les lignes mesurent les lignes , que les surfaces sont mesurées par des surfaces , & les solides par des solides.

27. Mais comme il s'agit beaucoup moins ici de chercher la valeur des grandeurs , que de trouver le rapport qu'elles ont entr'elles , nous nous servirons de lettres de l'alphabet au lieu de nombre , pour exprimer les grandeurs , afin de rendre generales les démonstrations des propositions.

28. Par exemple , pour exprimer une ligne , l'on se servira d'une des lettres a, b, c, d , &c. & pour exprimer un plan , on mettra deux lettres l'une contre l'autre , & pour un solide trois lettres ; car quand plusieurs lettres sont les unes près des autres , elles représentent le produit dont chaque lettre exprime une dimension.

29. Par exemple , ab représente un plan dont les deux dimensions sont a & b , qui ayant été multipliées l'une par l'autre , ont donné ab pour la valeur du plan.

30. Comme l'on nomme toujours les lignes égales par les mêmes lettres , & les lignes inégales par des lettres différentes , dès que l'on verra ab ou cd , l'on jugera que ce sont des rectangles , parce que leurs dimensions sont inégales , au lieu que aa signifie un carré , parce que l'on voit que les deux dimensions sont égales.

31. De même quand on verra aaa , l'on jugera que c'est un cube , puisque les trois dimensions sont égales , chacune d'elles étant représentée par a ; & quand l'on verra abc , l'on jugera que c'est un parallélepède , puisque les trois dimensions sont inégales.

32. Les caracteres de l'alphabet sont bien plus propres pour exprimer les grandeurs , que les nombres ; car quand je vois , par exemple , ce nombre 8 , je ne sçai s'il représente une ligne de 8 pieds courans , ou un plan de 8 pieds quarrés , ou un solide de 8 pieds cubes ; car un plan qui auroit 4 pieds de longueur sur 2 de largeur , aura 8 pour sa superficie , & un solide qui auroit chacune de ses trois dimensions exprimées par une ligne de 2 pieds.

aura aussi 8 pour la solidité : ainsi dans les opérations que l'on fait avec les nombres, il faut que la mémoire soit assujettie à retenir ce qu'ils signifient, au lieu que celles qui se font avec les lettres ne la fatiguent aucunement, puisque la nature des grandeurs est représentée par les lettres mêmes ; car dès que je vois aa & bcd , j'apprends aussi-tôt que aa est un carré, & que bcd est un solide, au lieu que si ces grandeurs étoient représentées par des nombres, je ne saurois ce qu'elles signifient.

33. Comme l'on fait avec les lettres de l'alphabet les opérations qui se font sur les nombres, c'est-à-dire, l'*Addition*, la *Soustraction*, la *Multiplication*, la *Division*, & l'*Extraction des racines* ; & que les quantitez inconnues entrent dans le calcul, de même que les quantitez connues, l'on est convenu, pour distinguer ces différentes especes de quantitez, que l'on nommeroit celles qui sont inconnues avec les dernières lettres de l'alphabet f, t, u, x, y, z , &c. & celles que l'on connoît avec les premières lettres a, b, c, d , &c.

34. L'on se sert dans l'Algebre de quelques signes qui marquent les opérations que l'on fait sur les lettres, par exemple, ce signe $+$ signifie *plus*, & marque l'addition ; car $a+b$ marque que a est ajouté avec b .

35. Ce signe $-$ au contraire signifie *moins*, & marque la soustraction ; car $a-b$ signifie que b est soustrait de a .

36. Quand on veut marquer qu'une grandeur est multipliée par une autre, on met entre les deux ce signe $\times$; ainsi $c \times d$ marque que c doit être multiplié par d .

37. Quand on verra une petite ligne, au dessus & au dessous de laquelle il y aura quelque lettre, cela veut dire que les lettres de dessus sont divisées par les lettres de dessous ; par exemple, $\frac{ab}{c}$ signifie que ab est divisé par c .

38. Lorsqu'on verra ce signe $=$ précédé d'une quantité Algebrique, & suivie d'une autre, cela voudra dire

que ces quantitez sont égales : c'est pourquoi on le nomme le signe d'égalité ; ainsi $ab=cd$ signifie que ab est égal à cd .

39. Les deux quantitez Algebriques differentes , entre lesquelles se trouve le signe d'égalité , sont nommées ensemble *Equation* ; ainsi $a=b$, $cd+xx=aabb$, $y=\frac{ab}{d}$ sont des *Equations*.

40. L'on appelle *Membre* d'une Equation les deux quantitez Algebriques qui se trouvent de part & d'autre du signe d'égalité ; ainsi les quantitez abc & dfx , sont les *Membres* de l'Equation $abc=dfx$, dont abc est nommé le premier *Membre* , parce qu'il precede le signe $=$, & dfx le second *Membre* , parce qu'il suit le signe $=$.

41. Quand on a une quantité produite par la multiplication de plusieurs lettres semblables , comme aaa , ou abb , l'on peut abreger , au lieu de aaa , écrire un a avec un 3 ^{exposant} devant ; & pour lors a^3 est la même chose que aaa , parce que l'un & l'autre signifient que c'est un produit de trois dimensions , & par consequent au lieu de abb , on peut écrire ab^2 , & dans ce cas on nomme le nombre qui fait voir la quantité de fois qu'une lettre a été multipliée par elle-même *exposant*.

42. Mais pour exprimer le Quarré ou le Cube d'une ligne qui sera , par exemple , nommée AB dans une Figure , l'on marquera $\overline{AB}^2$ ou $\overline{AB}^3$; car $\overline{AB}^2$ signifie le Quarré de la ligne AB , & $\overline{AB}^3$ le Cube de la même ligne.

43. Quand une quantité Algebrique a été multipliée une fois , deux fois , trois fois , quatre fois , &c. le produit est appelé *Puissance* ou *Degré* : ainsi a ou a^1 est nommé le premier Degré ou la premiere Puissance , & aa ou a^2 le second Degré ou la seconde Puissance , ou si l'on veut , le Quarré de a , & aaa , ou a^3 le troisième Degré , ou la troisième Puissance , ou le Cube de a ; enfin a^4 sera le quatrième Degré , ou le Quarré quarré , c'est-à-dire , aa multiplié par lui-même ; ou , ce qui est la même chose , a multiplié par a^3 : ainsi des autres.

44. Une puissance peut être regardée comme le produit de deux puissances ; car a^5 est la même chose que le produit a^2 par a^3 .

45. Il peut y avoir aussi des puissances faites du produit de deux ou plusieurs lettres multipliées l'une par l'autre ; car si l'on multiplie ab par lui-même , le produit $aabb$ fera la seconde puissance de la puissance ab , qui devient pour lors le côté ou la *racine* de la puissance $aabb$, de même qu'on peut dire que a est le côté ou la *racine* de aa , & que b est la *racine* de b^2 .

46. Les quantitez Algebriques sont nommez *incomplexes*, lorsqu'elles ne sont pas accompagnées des signes $+$ ou $-$; ainsi ab , bd , $\frac{bb}{a}$ sont des quantitez *incomplexes* , & quand elles sont liées avec les signes $+$ & $-$, elles sont nommées *complexes* ; comme $a+ab$, $aa+bb$, $ab+cd$, $-ac$, $\frac{aa+cc}{d}$.

47. L'on nomme *termes* les parties des quantitez complexes, qui sont distinguées par les signes $+$ & $-$; ainsi $aa+bc-dd$ est une quantité complexe , qui renferme trois termes , aa , bc , & dd .

48. Lorsque les quantitez incomplexes ne sont précédées d'aucuns signes , on suppose qu'elles sont toujours précédées du signe $+$; car $+ab$ est la même chose que ab , & pour lors les quantitez sont nommées *positives* , & quand elles sont précédées du signe $-$, elles sont nommées *negatives* ; ainsi $+bd$, ou simplement bd , est une quantité *positive* , & $-ab$ est une quantité *negative*.

49. Lorsqu'une quantité in complexe , ou les termes d'une quantité complexe sont précédés de quelques nombres , ces nombres sont nommez *coëfficiens* ; ainsi les nombres 4 & 3 sont les *coëfficiens* des termes $4ab$ & $3cd$.

50. Lorsque les quantitez incomplexes , ou les termes des quantitez complexes contiennent les mêmes lettres , on les nomme *semblables* : par exemple , $4abc$ est une quantité semblable à $3abc$. De même si l'on a

B

$3bcd + 5bcd - abd$, les termes $3bcd$ & $5bcd$ sont encore semblables ; mais pour s'appercevoir facilement de la similitude des quantitez Algebriques, l'on observera d'écrire toujours les premières lettres de l'alphabet les premières, & les autres selon leur rang ; ainsi au lieu d'écrire bca ou cab , il faut écrire abc .

PREMIERE REGLE POUR REDUIRE
les quantitez Algebriques à leurs moindres termes.

§ 1. Quand on a des quantitez Algebriques complexes, qui renferment des termes semblables, il faut ajouter les coefficients de ceux qui ont le même signe, & donner à la somme le même signe, afin de les réduire à leurs moindres termes. Ainsi $4ab - 2ac + 2ab - 3ac$ étant réduits, deviennent $6ab - 5ac$.

§ 2. Quand les quantitez semblables ont des signes differens, il faut soustraire le plus petit coefficient du plus grand, & donner à la difference le signe du plus grand : par exemple pour réduire $cd + 6ab - 4a - 4ab$, il faut soustraire $-4ab$ de $+6ab$, & l'on aura après la réduction $cd + 2a + 2ab$. De même l'on voit que faisant la réduction de $2ab + 5cd + 3ab - 7cd$, il vient $5ab - 2cd$.

§ 3. Enfin lorsque deux termes sont semblables & égaux, & que l'un a le signe $+$, & l'autre le signe $-$, ils se détruisent, puisque la difference se réduit à rien, ou autrement à 0 : ainsi $aab + cdb - aab$, est la même chose que cdb , puisque $-aab$ étant soustrait de $+aab$, la difference est 0.

ADDITION DES QUANTITEZ ALGEBRIQUES
incomplexes & complexes.

§ 4. Pour ajouter ensemble des quantitez Algebriques, qui ne sont précédées d'aucuns signes, il faut les écrire de suite, & les lier avec le signe $+$: ainsi pour

ajouter les quantitez ab , cd , ac , l'on écrira $*ab+cd+ac$ * Art. 34.

55. Si les quantitez que l'on veut ajouter sont complexes, on les écrira aussi de suite avec leurs signes ; & après avoir réduit les termes semblables, l'on aura la somme de ces quantitez. Par exemple, pour ajouter $2aab-3acd$ avec $acc+5acd-6aab$, l'on écrira $2aab-3acd+acc+5acd-6aab$, qui se réduit à $*acc+2acd-4aab$: pour ajouter $6add+5aac-4abb$ avec $2aac-2abb$, l'on écrira $6add+5aac-4abb+2aac-2abb$, qui se réduit à $6add-6abb+7aac$. Enfin pour ajouter $abc-ddc-dcc$ avec $dcc-abc+3ddc$, on écrira $abc-ddc-dcc+dcc-abc+3ddc$, qui se réduit à $2ddc$; puisque les grandeurs qui sont semblables & égales se détruisent. * Art. 53.

S O U S T R A C T I O N D E S Q U A N T I T E Z Algebriques complexes & complexes.

Pour soustraire une quantité Algebrique d'une autre, il faut changer les signes de celle qui doit être soustraite, c'est-à-dire, qu'il faut, ou il y a $+$ mettre $-$, & ou il y a $-$ mettre $+$, & puis les écrire de suite, & l'on aura après la réduction faire la difference de ces deux quantitez.

Par exemple, pour soustraire bb de aa , je fais précéder bb du signe $-$, parce que l'on sous-entend que bb a le signe $+$, étant une grandeur positive : ainsi la difference sera $aa-bb$. * De même pour soustraire $c+d$ de $a+b$, il faut changer les signes de $c+d$, & écrire $a+b-c-d$, qui sera la difference. Pour soustraire $b-d$ de $a+c$, l'on écrira $a+c-b+d$. Pour soustraire $2bb-3cc$ de $aa+bb$, l'on écrira $aa+bb-2bb+3cc$, qui se réduit à $aa-bb+3cc$. * Enfin pour soustraire $ab-dc+bb$ de $aa-dc+3bc-bb$, l'on écrira $aa-dc+3bc-bb-ab+dc-bb$, qui étant réduits, donnent $3bc-2bb-ab+4aa$. Il en sera ainsi des autres.

B ij

Art. 35. Il n'est pas difficile de comprendre pourquoi on change le signe $+$ sous-entendu en $-$ dans le premier terme de la grandeur, & dans les autres qui ont le signe $+$; car c'est en cela même que consiste la Soustraction: * mais presque tous les Commençans sont surpris de ce qu'il faut changer les signes des autres termes de $-$ en $+$; cependant cela est facile à comprendre, si l'on fait attention que pour ôter $b-d$ d'une quantité quelconque, telle que $a+c$, il ne faut pas ôter b tout seul, puisque ce feroit trop ôter de toute la quantité d étant plus grand que $b-d$ de la quantité d , cependant b étant précédé du signe $-$, il est absolument retranché de $a+c$; c'est pourquoi afin de ne point ôter plus qu'il ne faut, on rend par le signe $+$ la quantité d qu'on avoit ôté de trop.

Mais comme on entendra mieux ceci par les nombres, supposons qu'il faille retrancher du nombre 12 la quantité $6-2$, selon la Regle, il faut écrire $12-6+2$, dont la difference est 8; car comme $6-2$ est égal à 4, l'on voit qu'on ne peut retrancher que 4 de 12, & que par consequent si au lieu de 4 on en retranche 6, il faut rendre à 12 la quantité 2, qui est ce qu'on avoit ôté de trop.

Enfin pour expliquer ceci d'une autre façon, supposons deux personnes, dont l'une a cent écus, & ne doit rien, & l'autre au contraire n'a rien, & doit cent écus, il est certain que la premiere personne est plus riche que la seconde de deux cens écus; par consequent si l'on retranche moins de plus, la difference sera plus.

MULTIPLICATION DES QUANTITEZ incomplexes.

37. Quand on veut multiplier deux ou plusieurs lettres l'une par l'autre, il faut les écrire de suite sans aucuns signes qui les separe, & l'on aura le produit. Par

exemple, pour multiplier ab par ac , l'on écrira $aabc$: * Art. 28.
pour multiplier $2c$ par $3dd$, il faut multiplier les deux
coëfficiens 2 & 3, ensuite mettre l'une contre l'autre les
lettres que les coëfficiens précédent, & écrire $6cdd$. Pour
multiplier $3aa$ par $4bb$, l'on écrira $12aabb$.

58. Pour multiplier deux ou plusieurs quantitez sem-
blables qui ont des exposans, il faut ajouter les exposans
ensemble, & en écrire la somme après une des lettres
des quantitez semblables. Par exemple, pour multiplier
 a^2 par a^3 , l'on ajoutera les exposans 2 & 3 ensemble,
qui font 5, & l'on écrira a^5 . * Mais si les quantitez ne * Art. 44.
sont pas semblables, il ne faut pas toucher aux exposans,
il suffira d'écrire les lettres de suite, accompagnées de
leurs exposans : ainsi pour multiplier a^2 par c^3 , l'on écri-
ra $a^2 c^3$. Il en fera de même pour les autres.

MULTIPLICATION DES QUANTITEZ complexes.

59. Pour multiplier une grandeur complexe par une
autre complexe ou incomplexe, il faut faire autant de
multiplications particulieres que le multiplicateur a de
termes, observant de donner le signe $+$ au produit des
deux termes, s'ils sont chacun précédés du signe $+$ ou $-$,
de donner au produit le signe $-$, si l'une des quantitez
est précédée du signe $+$, & l'autre du signe $-$. Ainsi la
regle generale de la multiplication des quantitez com-
plexes, est que $+$ multiplié par $+$, donne $+$; $-$ par
 $-$ donne $+$, & que $-$ par $+$, ou $+$ par $-$ donne $-$.

60. Il faut observer de multiplier d'abord les coëffi-
ciens des quantitez, s'il y en a ; ensuite les lettres : après
quoi il faut additionner toutes les multiplications, en
faire la réduction, & l'on aura le produit total. Ainsi pour
multiplier $+a$ par $+a$, l'on écrit $+aa$; pour multi-
plier $-b$ par $-b$, l'on écrit $+bb$. Pour multiplier $-d$
par $+d$, ou $+d$ par $-d$, l'on écrit $-dd$.

61. Pour multiplier $2a+b$ par $3c$, l'on dit $2a$ par $3c$
donne $6ac$, * $3c$ par b donne $+3bc$: * ainsi le produit * Art. 57

14 NOUVEAU COURS

fera $6ac + 3bc$; pour multiplier $a - b$ par d , l'on dira d par a donne ad , & d par $-b$ donne $-bd$, & par conséquent le produit est $ad - bd$: pour multiplier $a + c$ par $a + c$, je mets une de ces quantitez sous l'autre , & commençant à multiplier par la gauche , je dis a par a donne aa , a par $+c$ donne $+ac$; & puis multipliant par la seconde lettre c , je dis $+c$ par a donne $+ac$, & $+c$ par $+c$ donne $+cc$; & additionnant le tout , le produit est $aa + ac + ac + cc$; & pour abreger , au lieu d'écrire deux fois la même quantité ac , je marque seulement

* Art. 51. $2ac$ * ; ce qui donne $aa + 2ac + cc$.

62. Pour multiplier $a - b$ par $a - b$, je pose encore une de ces quantitez sous l'autre , & je dis a par a donne aa ,

* Art. 59. & puis a par $-b$ donne $-ab$ * . (car on sous-entend que a a le signe $+$) Ensuite multipliant par la seconde lettre du multiplicateur , je dis $-b$ par a donne $-ab$, & $-b$ par

* Art. 59. $-b$ donne $+bb$ * . Et après avoir fait l'addition , je trouve au produit $aa - 2ab + bb$.

Enfin l'on voit que multipliant $aa + bb - ad - xx$ par $aa + bc$, que le produit est $a^4 + aabb - aaad - aaxx + aabc + bbbc - abcd - bcxx$.

* Art. 61. Mult. * $2a + b$, $a - b$, $a + c$ $a - b$

par $3c$ d $a + c$ $a - b$

* Art. 60. 1. prod. $6ac + 3bc$, $ad - bd$, $aa + ac$ $aa - ab$

2. produit $+ac + cc$ $-ab + bb$

Produit total $aa + 2ac + cc$ $aa - 2ab + bb$

* Art. 62. Multiplier * $aa + bb - ad - xx$

par $aa + bc$

premier prod. $a^4 + aabb - aaad - aaxx$

2. produit $+aabc + bbbc - abcd - bcxx$

Produit total $a^4 + aabb - aaad - aaxx + aabc + bbbc - abcd - bcxx$

ÉCLAIRCISSEMENT SUR LA
Multiplication des quantitez complexes.

Il n'est pas difficile de juger pourquoi $+$ multiplié par $+$ donne $+$, puisque cela est assez naturel ; mais on a de la peine à comprendre pourquoi $+$ par $-$ donne $-$, & $-$ par $-$ donne $+$. C'est pourquoi ces deux cas ont besoin d'être expliqués.

La raison du premier cas est que multipliant, par exemple, $a-b$ par d , l'on ne peut multiplier a par d sans que le produit ad ne soit plus grand qu'il ne doit être, parce que a est plus grand que $a-b$, & par conséquent pour ôter ce qu'il y a de trop dans le produit ad , il faut multiplier b par d , & ôter le produit bd de ad pour avoir $ad-bd$, qui est conforme à la Règle.

Et pour le faire voir par les nombres, multiplions $15-5$ par 6 . Or comme $15-5$ est égal à 10 , c'est proprement 10 par 6 qu'il faut multiplier, & non pas 15 par 6 , à moins que, selon la Règle, l'on ne multiplie aussi 5 par 6 , pour en ôter le produit de celui de 15 par 6 ; mais comme le produit de $15-5$, c'est-à-dire, de 10 par 6 est 60 , & que celui de $15-5$ par 6 est $90-30$, qui est encore égal à 60 , il s'ensuit que ce principe est vrai.

A l'égard du second cas il paroît bien étrange ; mais ce qui fait qu'on met $+$, c'est que les deux termes qui sont précédés du signe $-$, donnant deux multiplications négatives, par lesquelles on ôte plus qu'il ne faut, l'on est obligé de mettre $+$ au produit des deux termes qui ont le signe $-$, pour remplacer ce qu'on avoit ôté de trop. Par exemple, pour multiplier $a-b$ par $a-b$, je vois, après avoir fait la Règle que du produit aa il faut retrancher $-2ab$, & que retranchant plus qu'il ne faut de toute la quantité bb , il faut rendre à aa cette même quantité bb en la liant à elle par le signe $+$.

Pour le faire voir par les nombres, multiplions, par exemple, $10-4$ par $10-4$, qui est la même chose

que de multiplier 6 par 6, puisque $10-4$ est égal à 6. Or comme 6 par 6 donne 36, voyons si $10-4$ par $10-4$ produira 36, je dis donc d'abord 10 fois 10 font 100; 10 par -4 donne -40 , & puis -4 par $+10$ donne -40 , & -4 par -4 donne $+16$, & additionnant le tout, il vient $100-80+16$. Or vous voyez que si l'on retranchoit 80 de 100, il ne resteroit que 20, qui est fort éloigné de 36; mais que si à 100 on y ajoute 16, l'on aura 116; d'où ayant retranché 80, il reste 36.

A V E R T I S S E M E N T.

Pour donner une idée de la facilité que l'on a de démontrer les propositions de Géométrie par le moyen du calcul Algébrique, j'ai crû qu'il étoit à propos avant d'aller plus avant, de faire une application de la Multiplication à la démonstration des propositions suivantes.

P R O P O S I T I O N P R E M I E R E.

Théoreme. *

* Art. 4.

63. Le *Quarré* de toutes grandeurs exprimées par deux lettres positives, est égal au *Quarré* de chacune de ces lettres, plus à deux *Rectangles* compris sous les mêmes lettres.

Car si l'on multiplie $a+b$ par $a+b$, l'on aura au produit $aa+2ab+bb$, qui est composé des *Quarrez* aa & bb , & de deux *Rectangles* compris sous a & sous b , qui font $2ab$.

P R O P O S I T I O N I I.

Théoreme.

64. Le *Cube* de toutes grandeurs positives exprimées par deux caractères, est égal au *Cube* du premier, plus au *Cube* du second, plus à trois *parallelepipèdes* du *Quarré* du premier par le second; plus enfin à trois autres *parallelepipèdes* du *Quarré* du second par le premier.

Car

Car le quarré de $a+b$ étant $aa+2ab+bb$ *, si on le * Art. 63;
multiplie encore par $a+b$, l'on aura le cube $a^3+3aab+3abb+b^3$, qui renferme a^3 Cube de a ; plus $3aab$, qui font
trois parallelepipèdes du quarré aa par b ; plus $3abb$,
qui font trois autres parallelepipèdes de a par le quarré
 bb ; plus enfin b^3 Cube de b , nous nous servirons de ceci
dans la suite pour démontrer les operations de la Racine
quarrée & de la Racine cube.

Racine $a+b$	Quar. $aa+2ab+bb$
par $a+b$	par $a+b$
$aa+ab$	$a^3+2aab+abb$
$+ab+bb$	$+aab+2abb+b^3$
Quarré $aa+2ab+bb$	Cube $a^3+3aab+3abb+b^3$

PROPOSITION III.

Théoreme.

65. Si l'on a une ligne AB divisée également au point C , & Fig. 7.
inégalement au point D , je dis que le rectangle compris sous
les parties inégales AD & DB , avec le quarré du milieu CD ,
est égal au quarré de la moitié de la ligne AB , c'est-à-dire,
au quarré de AC ou CB .

Nous nommerons AC ou CB a , CD x , ainsi DB fera
 $a-x$, & AD , $a+x$.

DEMONSTRATION.

Si l'on ajoute à $AD \times DB$ ($aa-xx$) le quarré de CD
(xx) l'on pourra former cette équation $AD \times DB + CD^2$
($aa-xx+xx$) $= AC^2$ (aa) puisqu'effaçant ce qui se
détruit, les deux membres de l'équation se réduisent à 0.
C. Q. F. D.

COROLLAIRE. *

66. Il suit de cette proposition que si une ligne est di- * Art. 7;
C

visée également & inégalement, que le quarré de la moitié de la ligne moins le quarré de la partie du milieu, est égal au rectangle compris sous les parties inégales, ce qui est bien évident, puisque $\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 (aa - xx) = AD \times DB$ ($aa - xx$).

PROPOSITION IV.

Théoreme.

Fig. 7. 67. Si l'on a une ligne droite AB , divisée également au point C , & qu'on lui en ajoute une BE , je dis que le rectangle compris sous la composée des deux AE , & sous l'ajouté BE avec le quarré du milieu CB , sera égal au quarré de la ligne CE , composée de la moitié CB , & de l'ajouté BE . Nous nommerons AC ou CB a , CE x ; ainsi BE sera $x - a$, & AE , $x + a$.

DEMONSTRATION.

Il est évident que si l'on ajoute au rectangle de $AE \times BE$ ($xx - aa$) le quarré de CB (aa) l'on pourra former cette équation $AE \times BE + \overline{CB}^2 (xx - aa + aa) = \overline{CE}^2 (xx)$ puisqu'effaçant ce qui se détruit, il vient $xx = xx$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

68. Il suit de cette proposition que si à une ligne divisée en deux également, l'on en ajoute une autre, que le quarré de la ligne CE composé de la moitié de la ligne & de l'ajoutée moins le quarré du milieu CB , sera égal au rectangle compris sous toute la ligne AE , & la partie ajoutée BE ; ce qui est bien évident, puisque $\overline{CE}^2 - \overline{CB}^2 = AE \times BE$ ($xx - aa$).



DE MATHÉMATIQUE.
PROPOSITION V.

19

Théoreme.

69. Si l'on a deux lignes, dont la première soit double de la seconde, je dis que le carré de la première sera quadruple du carré de la seconde.

DEMONSTRATION.

Si de ces deux lignes la seconde se nomme a , la première sera $2a$. Or multipliant $2a$ par $2a$, l'on aura $4aa$ pour le carré de la première ligne; & si on multiplie a par lui-même, l'on aura aa , & par conséquent le carré de la première ligne est quadruple du carré de la seconde.

DIVISION DES QUANTITEZ ALGÈBRIQUES
incomplexes & complexes.

70. Pour diviser une quantité Algébrique in complexe par une autre in complexe, il faut écrire le diviseur au dessous du dividende, & faire une soustraction, dont la différence sera le quotient. Par exemple, pour diviser abb par a , l'on écrira $\frac{abb}{a}$ *, & ôtant a de abb , on aura bb *Art. 371 pour le quotient: la raison est que multipliant le quotient bb par le diviseur a , l'on a abb , qui est égal au dividende; ce qui prouve que la division est bien faite: car la preuve de la division Algébrique est la même que celle de la division Arithmétique. Ainsi pour diviser bbc par bb , l'on voit que le quotient est c , puisque le quotient c multiplié par le diviseur bb , donne bbc , qui est égal au dividende; mais si l'on rencontre des lettres dans le diviseur, qui ne se trouvent point dans le dividende, qui empêchent qu'on ne puisse faire la division réellement, on fait une fraction du dividende & du diviseur, que l'on regarde comme étant le quotient de la division. Ainsi si l'on veut, par

Cij

exemple, diviser abb par cc , on marque $\frac{abb}{cc}$, qu'on regarde comme le quotient.

71. Si quelques nombres précèdent les lettres des quantitez Algebriques, que l'on veut diviser, on divise les nombres par les nombres, & les lettres par les lettres, & l'on écrit le coefficient des nombres avant les lettres. Ainsi pour diviser $6ab$ par $2a$, l'on dit en 6 combien de fois 2, on trouve 3, & qui de ab ôte a reste b , & le quotient est $3b$.

72. Quand on divise une quantité complexe ou incomplète, il faut que si chaque grandeur a le même signe $+$, ou le même signe $-$, que le quotient ait le signe $+$; & que si l'une des grandeurs a le signe $+$, & l'autre le signe $-$, que le quotient ait le signe $-$.

73. Par exemple, divisant $+ab$ par $+a$, le quotient sera $+b$, parce que multipliant le diviseur $+a$ par le quotient $+b$, le produit $+ab$ est égal au dividende; de même que pour diviser $-ab$ par $-a$, il faut que le quotient soit $+b$, parce que multipliant le diviseur $-a$ par le quotient $+b$, le produit sera $-ab$ *, puisque $-$ par $+$ donne $-$. Si l'on divise $+ab$ par $-a$, le quotient sera $-b$, parce que multipliant le diviseur $-a$ par le quotient $-b$, le produit sera $+ab$, puisque $-$ par $-$ donne $+$. * & par la même raison si l'on divisoit $-ab$ par $+a$, le quotient sera encore $-b$, puisque multipliant le diviseur par le quotient, le produit est $-ab$.

74. Pour diviser $ab+ad$ par a , je dis qui de ab ôte a reste b , que j'écris au quotient; & qui de ad ôte a reste $+d$, qui étant écrit à la suite de b , donne $b+d$ pour le quotient: & pour avoir plutôt fait, il n'y a qu'à effacer dans le diviseur & le dividende les lettres qui se trouvent égales & autant de fois, ce qui restera sera le quotient; faisant attention que ceci ne peut avoir lieu que quand le diviseur est incomplexe.

75. Quand le diviseur & le dividende contiennent plusieurs termes, on dispose la division à peu près comme celle des nombres.

76. Par exemple, pour diviser $aa + 2ab + bb$ par $a + b$, je pose les premiers termes du diviseur sous les premiers termes du dividende, & puis je dis que de aa ôte a , le quotient est a , qu'il faut multiplier par le diviseur $a + b$ pour avoir $aa + ab$ *, qu'il faut retrancher du dividende, en les écrivant à la suite avec des signes contraires *, & le restant sera $aa + 2ab + bb - aa - ab$, qui étant réduit, donne $ab + bb$ *, & je continue la division en disant que de ab ôte a vient $+b$, que j'écris à la suite de la lettre que je viens de marquer au quotient; & multipliant $+b$ par le diviseur, il vient $ab + bb$, que j'écris encore à la suite du dividende avec des signes contraires; & le restant est $ab + bb - ab - bb$, qui se réduit à 0. Ainsi l'on voit que la division est exacte, puisqu'il ne reste rien, & que le quotient est $a + b$.

* Art. 61.

* Art. 56.

* Art. 53.

77. Pour diviser $aa - 2ab + bb$ par $a - b$, je dis que de aa ôte a vient $-a$ au quotient, que je multiplie par le diviseur $a - b$: donc le produit est $aa - ab$ *, que je retranche du dividende pour avoir le restant $aa - 2ab + bb - aa + ab$ *, qui étant réduit, donne $-ab + bb$ *, que je divise encore par $a - b$, en disant que de $-ab$ ôte $-a$ vient $-b$ au quotient, qui étant multiplié par le diviseur, le produit est $-ab + bb$, & le retranchant du dividende, reste $-ab + bb - (-ab + bb)$, qui se réduit à 0; ainsi le quotient est $a - b$.

* Art. 60.

* Art. 56.

* Art. 52.

& 53.

78. Pour diviser $aa - bb$ par $a + b$, je dis que de aa ôte a vient $+a$ au quotient, qui étant multiplié par le diviseur, le produit est $aa + ab$, le retranchant du dividende, il reste $aa - bb - aa - ab$, qui étant réduit, donne $-bb - ab$, ou bien $-ab - bb$, que je divise encore par $a + b$, en disant; si de $-ab$ j'ôte $+a$, le quotient sera $-b$, qui étant multiplié par le diviseur, vient $-ab - bb$, qui étant retranché du dividende, vient $-ab - bb - (-ab - bb)$, qui se réduit à 0. Par conséquent le quotient est $a - b$; ce qui est bien évident, puisque si l'on multiplie le diviseur $a + b$ par le quotient $a - b$, le produit sera $aa - bb$ égal au dividende.

* Art. 76. * Dividende $\frac{aa+2ab+bb}{a}$ (quotient a)
 Diviseur $a+b$
 Produit $aa+ab$
 Soustraction $aa+2ab+bb-aa-ab$
 Réduction $\frac{ab+bb}{a+b}$ (quotient $a+b$)
 Diviseur $a+b$
 Produit $ab+bb$
 Soustraction $ab+bb-ab-bb=0$

* Art. 77. * Dividende $\frac{aa-2ab+bb}{a}$ (quotient a)
 Diviseur $a-b$
 Produit $aa-ab$
 Soustraction $aa-2ab+bb-aa+ab$
 Réduction $\frac{-ab+bb}{a-b}$ (quotient $a-b$)
 Diviseur $a-b$
 Produit $-ab+bb$
 Soustraction $-ab+bb+ab-bb=0$

* Art. 78. * Dividende $\frac{aa-bb}{a}$ (quotient a)
 Diviseur $a+b$
 Produit $aa+ab$
 Soustraction $aa-bb-aa-ab$
 Réduction $\frac{-ab-bb}{a+b}$ (quotient $a+b$)
 Diviseur $a+b$
 Produit $-ab-bb$
 Soustraction $-ab-bb+ab+bb=0$

A V E R T I S S E M E N T.

Nous n'avons point parlé des quatre Regles ordinaires de l'Arithmétique, parce que nous avons supposé que ceux qui étudieront ce Traité, sauront au moins l'Ad-

dition, la Soustraction, la Multiplication & la Division des nombres : mais comme la plupart pourroient n'avoir aucune connoissance de la Racine quarrée, & de la Racine cube, nous avons crû qu'il étoit à propos d'enseigner la maniere de faire ces Régles sur les nombres, afin de faire mieux entendre comme on extrait la Racine quarrée & la Racine cube des quantitez Algebriques.

MANIERE D'EXTRAIRE LA RACINE quarrée.

79. Pour trouver facilement la racine quarrée de quelque nombre qu'on puisse proposer, il faut au moins connoître les quarrés des chiffres simples depuis 1 jusqu'à 10, ainsi qu'ils sont marquez dans la Table suivante, ou les chiffres simples depuis 1 jusqu'à 10 se trouvent dans la rangée d'en haut, & les quarrés des mêmes chiffres se trouvent en bas immédiatement dessous.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Ainsi vous voyez que le quarré de 1 est 1, que le quarré de 2 est 4, que celui de 3 est 9, celui de 4 est 16, & celui de 5 est 25; ainsi des autres.

80. Extraire la racine quarrée d'un nombre, c'est chercher un autre nombre, qui multiplié par soi-même, produit un tout égal au premier nombre proposé; ou bien c'est trouver un nombre, qui étant multiplié par soi-même, donne un produit qui approche le plus près qu'il est possible du nombre proposé. Ainsi extraire la racine quarrée de 25, c'est chercher le nombre 5, parce que ce nombre étant multiplié par lui-même, produit 25; de même qu'extraire la racine quarrée de 64, c'est chercher le nombre 8, parce que ce nombre étant multiplié par lui-même, est le plus grand nombre quarré qui puisse être contenu dans le nombre 64.

Pour extraire la racine quarrée des nombres qui ne sont composez que de deux figures, on pourra le faire par cœur, ou par le moyen de la Table précédente. Mais si le nombre donné contient plus de deux figures, il faut avoir recours à une operation qui fait tout l'objet de la racine quarrée, comme on le va voir.

81. Pour extraire la racine quarrée de 1967. il faut separer les chiffres de deux en deux, en commençant par la droite, pour avoir un nombre de tranches qui donneront chacune une figure pour la racine; ainsi ayant donc separé 19.67 (comme on le voit marqué) je commence, pour en avoir la racine quarrée, par dire, la racine quarrée de 19 est 4, que je pose au quotient, & le quarré de 4 est 16, qui étant ôté de 19 reste 3.

Or comme la racine quarrée doit être composée d'autant de figures qu'il y a de tranches dans le nombre donné; pour avoir la figure de la seconde tranche, je double celle qui est provenue de la premiere tranche, c'est-à-dire, 4 pour avoir 8, qui doit me servir de diviseur, que je pose sous le nombre 6; ensuite je dis en 36 combien de fois 8, il y est 4, & posant 4 au quotient, & le même 4 sous le nombre 7 à côté de 8, je multiplie les nombres 8 & 4 par la seconde figure que je viens de poser au quotient, en disant 4 fois 4 font 16, qui ôté de 17 reste 1 & retient 1, & puis 4 fois 8 font 32, & 1 que j'ai retenu font 33, qui ôté de 36 reste 3: après quoi je vois que la racine est 44, & qu'il reste 31.

82. Pour extraire la racine quarrée de 2978, je separe les chiffres de ce nombre de deux en deux, pour avoir encore deux tranches, c'est-à-dire, pour avoir (29 | 78) & puis je dis comme ci-devant, la racine quarrée de 29 est 5, que je pose au quotient, & 5 fois 5 font 25, qui ôté de 29 reste 4.

Pour avoir la figure de la seconde tranche je double 5 pour avoir 10, que je pose sous 4 & sous 7, en plaçant 0 sous 7, & en avançant 1 sous 4; après quoi je dis en 4 combien de fois 1, & je vois qu'il y est 4, que je pose

au quotient, & puis sous le 8 à côté du 0, & multipliant par 4 ce que j'ai posé sous le nombre donné, je dis 4 fois 4 font 16, qui ôté de 18 reste 2 & retiens 1, & puis 4 fois 0 est 0, & 1 que j'ai retenu font 1, qui ôté de 7 reste 6, & 4 fois 1 font 4, qui ôté de 4 reste 0 : ainsi la racine quarrée de 2978 est 54, & il reste 62.

$$\begin{array}{r} \text{Art. 81.} \quad 3 \overline{) 1} \\ 29 \overline{) 67} (44 \\ \underline{18} \\ 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Art. 82.} \quad 0 \overline{) 62} \\ 4 \overline{) 62} \\ 29 \overline{) 78} (54 \\ \underline{144} \end{array}$$

83. Pour extraire la racine quarrée de 867972 je sépare les chiffres de deux en deux, commençant de la droite à la gauche, & je dis, la racine quarrée de 86 est 9, dont le quarré est 81, qui étant ôté de 86 reste 5.

84. Et pour avoir le diviseur de la seconde tranche, je dis 2 fois 9 font 18, je pose 8 sous le 7, & j'avance 1 sous le 5, & je dis en 5 combien de fois 1, je trouve qu'il ne peut y être que 3 fois : je pose donc 3 au quotient, que je place aussi sous le 9 à côté du 8 ; & puis je dis 3 fois 3 font 9, qui ôté de 9 reste rien ; 3 fois 8 font 24, qui ôté de 27 reste 3, & 3 fois 1 font 3, & 2 que j'ai retenu font 5, qui ôté de 5 reste rien.

85. Or pour trouver le diviseur de la troisième tranche je double les deux figures qui sont au quotient, en disant, 2 fois 3 font 6, que je pose sous la première figure de la troisième tranche, & puis 2 fois 9 font 18, & je pose 8 sous la seconde figure de la seconde tranche, c'est-à-dire, sous 9, & j'avance 1 sous le 7, & puis je dis en 3 combien de fois 1, je trouve qu'il ne peut y être qu'une fois, je pose 1 au quotient, & sous la seconde figure de la dernière tranche : ensuite je multiplie, en disant, 1 fois 1 est 1, qui ôté de 2 reste 1, & 1 fois 6 est 6, qui ôté de 7 reste 1, 1 fois 8 est 8, qui ôté de 10 reste 2, & retiens 1, & 1 fois 1 est 1, & 1 que j'ai retenu font 2, qui ôté de 3 reste 1 : après quoi je trou-

D

ve que la racine est 931, & qu'il reste 1211.

Art. 83. & 84. $\begin{array}{r} 0 \\ 9 \overline{) 8677} \\ 81 \\ \hline 57 \\ 54 \\ \hline 37 \\ 36 \\ \hline 17 \end{array}$	Art. 85. $\begin{array}{r} 0 \overline{) 12} \\ 9 \overline{) 8677} \\ 81 \\ \hline 57 \\ 54 \\ \hline 37 \\ 36 \\ \hline 17 \end{array}$
---	---

86. Pour extraire la racine quarrée du nombre 97515625, je sépare les chiffres de deux en deux, en commençant de la droite à la gauche, & je dis la racine quarrée de 97 est 9, que je pose au quotient; puis 9 fois 9 font 81, qui ôté de 97 reste 16.

87. Pour avoir le diviseur de la seconde tranche, je dis 2 fois 9 font 18; ainsi je pose 8 sous le 5, & j'avance 1 sous le 7; pour dire en 16 combien de fois 1, je trouve qu'il ne peut y être que 8 fois; ainsi je pose 8 au quotient, & je le place aussi sous la seconde figure de la seconde tranche, & je multiplie en disant 8 fois 8 font 64, qui ôté de 71 reste 7 & retiens 7, & puis 8 fois 8 font 64, & 7 que j'ai retenu font 71, qui ôté de 75 reste 4 & retiens 7, & 8 fois 1 font, 8 & 7 de retenu font 15, qui ôté de 16 reste 1.

88. Pour avoir le diviseur de la troisième tranche, je double 98 du quotient, en disant 2 fois 8 font 16, & je pose 6 sous la première figure de la troisième tranche & retiens 1, & 2 fois 9 font 18, & 1 que j'ai retenu font 19, & posant 9 sous la seconde figure de la seconde tranche, & 1 sous la première, je dis en 14 combien de fois 1, je trouve qu'il ne peut y être que 7 fois, je pose 7 au quotient, & je le place aussi sous la seconde figure de la troisième tranche, & puis je multiplie, en disant 7 fois 7 font 49, qui ôté de 56 reste 7 & retiens 5, 7 fois 6 font 42, & 5 de retenu font 47, qui ôté de 55 reste 8 & retiens 5, 7 fois 9 font 63, & 5 de retenu font 68, qui ôté de 77 reste 9 & retiens 7; & 7 fois 1 font 7, & 7 de retenu font 14, qui ôté de 14 reste 0.

89. Enfin pour trouver le diviseur de la quatrième tranche, je double les figures que j'ai posées au quotient, en disant 2 fois 7 font 14, je pose 4 sous la première figure de la quatrième tranche, & avançant les autres comme à l'ordinaire, je dis 2 fois 8 font 16, & 1 de retenu font 17, pose 7 & retiens 1, & 2 fois 9 font 18, & 1 de retenu font 19, je pose 9 & avance 1, qui se trouvant sous le 9 qui est resté, je dis en 9 combien de fois 1, je trouve qu'il n'y peut être que cinq fois; ainsi je pose 5 au quotient, aussi-bien que sous la seconde figure de la dernière tranche, & je dis 5 fois 5 font 25, qui ôté de 25 reste 0 & retiens 2, 5 fois 4 font 20, & 2 de retenu font 22, de 22 reste 0 & retiens 2, 5 fois 7 font 35, & 2 de retenu font 37, de 37 reste 0 & retiens 3, 5 fois 9 font 45, & 3 de retenu font 48, de 48 reste 0 & retiens 4, & 5 fois 1 font 5, & 4 de retenu c'est 9, de 9 reste 0; ainsi je vois que la racine quarrée de 97515625 est justement 9875, puisqu'il ne reste rien.

Art. 87.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 26 \overline{) 47} \\ 52 \\ \hline 97 \end{array}$$

Art. 88.

$$\begin{array}{r} 105 \\ 26 \overline{) 278} \\ 52 \\ \hline 97 \end{array}$$

Art. 89.

$$\begin{array}{r} 105 \\ 26 \overline{) 278} \\ 52 \\ \hline 97 \end{array}$$

90. La preuve se fait en quarrant la racine que l'on a trouvée, & en ajoutant au produit les nombres qui sont restez, car la somme doit faire une quantité égale au nombre donné. Par exemple, pour sçavoir si l'on a bien fait l'opération de la première Règle, je quarré la racine 44 pour avoir le produit 1936, auquel ajoutant 31 qui sont restez en faisant la Règle, je trouve 1967, qui est égal au nombre donné.

De même pour sçavoir si je ne me suis pas trompé dans

Dij

la troisième Règle, je quarre la racine 931 pour avoir le produit 866761, auquel j'ajoute 1211, qui sont restez, & comme le tout fait 867972, je conclus que l'opération a été bien faite.

*MANIERE D'APPROCHER LE PLUS PRES
qu'il est possible de la racine d'un nombre donné par le
moyen des Décimales.*

91. Comme le principal usage de la racine quarrée dans la Géométrie, sur tout dans la Géométrie Pratique, est de trouver en nombre le côté d'un quarré égal à une quantité de toises ou de pieds quarez, il est nécessaire pour agir avec plus de précision, d'approcher le plus près qu'il est possible de la racine qu'on cherche, en faisant en sorte que les restans soient de si petite conséquence, qu'on puisse les regarder comme de nulle valeur. Pour cela voici ce qu'il faut suivre.

Si l'on veut avoir la racine d'une quantité de toises quarrées, il faut supposer que la toise courante est divisée en mille petites parties, que l'on nomme *décimales*; par conséquent la toise quarrée sera de 1000000, qui est le produit de 1000 par 1000. Or si l'on a, par exemple, à extraire la racine quarrée de 869 toises, je multiplie ce nombre par 1000000 pour avoir 869000000, dont j'extrais la racine, que je trouve de 29478, que je regarde comme la racine positive, parce que je neglige les restans, comme étant d'une très petite valeur.

92. Mais comme cette racine est exprimée en petites parties, pour sçavoir combien elle contient de toises, je la divise par 1000, valeur de la toise en petites parties, & je trouve 29 toises, sur quoi il reste 478 petites parties; dont je trouverai la valeur, en faisant ce raisonnement: si 1000 valeur de la toise courante en petites parties, m'a donné 6 pieds pour les parties ordinaires de la toise, qui me donneront 478 (petites parties de la toise) pour les parties de la toise ordinaire, la

Règle étant faite, je trouve 2 pieds 10 pouces 4 lignes 11 points; ainsi la racine quarrée de 869 toises, est 29 toises 2 pieds 10 pouces 4 lignes 11 points.

Si l'on vouloit trouver la racine d'un nombre de pieds quarez, on pourra, pour abreger, supposer le pied courant divisé en 100 parties; par conséquent il faudra multiplier les pieds quarez dont on veut avoir la racine par 10000, & on fera le reste comme ci-devant.

93. Si l'on a une quantité composée de toises, de pieds, de pouces, comme, par exemple, 24 toises, 3 pieds, 9 pouces, pour en extraire la racine quarrée, il faut réduire 3 pieds 9 pouces en petites parties, & cela en considérant le rapport que 3 pieds 9 pouces ont avec la toise: ainsi comme trois pieds est la moitié de la toise, ils vaudront donc la moitié de 1000000, c'est-à-dire, 500000, & comme 9 pouces est le quart de 3 pieds, 9 pouces vaudront donc le quart de 500000, c'est-à-dire, 125000. Or mettant la valeur de 3 pieds & celle de 9 pouces dans une somme, l'on aura 625000, & si l'on multiplie, comme ci-devant, 24 toises par 1000000, l'on aura 24000000 pour les toises réduites en petites parties: à quoi ajoutant 625000, l'on aura 24625000 pour les 24 toises 3 pieds 9 pouces, réduites en petites parties, dont la racine quarrée est 4962, & cherchant la valeur de cette quantité, en la divisant par 1000 & en faisant une règle de trois pour connoître la valeur des restans, je trouve que la valeur de 24 toises, 3 pieds, 9 pouces, est 4 toises, 5 pieds, 9 pouces, 3 lignes 2 points.

*MANIÈRE D'EXTRAIRE LA RACINE
quarrée des quantitez Algebriques.*

94. Comme il n'est rien de plus aisé que d'appercevoir la racine quarrée d'une quantité incomplexa, nous n'en parlerons pas ici, afin de nous attacher seulement aux quantitez complexes, parce que l'on est souvent obligé

III

pour trouver la valeur d'une inconnue, de se servir de la racine quarrée.

- * Art. 45. Pour extraire la racine quarrée de $aa + 2ab + bb$, il faut dire, la racine de aa est a , * qu'il faut poser au quotient, & l'ayant multiplié par lui-même, il vient aa , qu'il faut soustraire de la grandeur donnée, * & il reste $2ab + bb$; ensuite il faut doubler a , & diviser le reste par $2a$, l'on trouvera qu'il vient $+b$ au quotient, qu'il faut ajouter avec le diviseur $2a$ pour avoir $2a + b$, qu'il faut multiplier ensuite par b , & le produit est $2ab + bb$, qu'il faut soustraire de ce qui reste de la quantité donnée; & comme il ne reste plus rien, l'on voit que la racine demandée est $a + b$.

Pour voir si l'on a bien fait l'operation, il n'y a qu'à quarrer la racine qu'on a trouvée comme on a fait pour les nombres; & si le produit est égal à la quantité donnée, ce sera une preuve que la regle est bien faite.

95. Pour extraire la racine quarrée de $aa - 2ab + bb$, il faut dire, la racine quarrée de aa est a , qu'il faut poser au quotient; ensuite ôter le quarré de a de la quantité donnée, & il reste $-2ab + bb$, qu'il faut diviser par $+2a$, & il vient $-b$, parce que $-$ divisé par $+$ donne $-$: après cela il faut ajouter $-b$ au diviseur pour avoir $+2a - b$, qu'il faut multiplier par $-b$, & il vient $-2ab + bb$, qui étant retranché de $-2ab + bb$, reste 0; par conséquent la racine est $a - b$, parce que multipliant $a - b$ par lui-même, il vient $aa - 2ab + bb$.

96. Quand on ne peut pas extraire réellement la racine quarrée d'une quantité Algebrique, on l'extrait par indication, & l'on se sert de ce caractère $\sqrt{}$, qu'on appelle signe *radical*, auquel on joint l'exposant de la puissance dont on veut extraire la racine. Par exemple, si c'est une racine quarrée, l'on marquera $\sqrt{}$, & si c'est une racine cubée³, & l'on tire un petit trait au dessus, qui embrasse les termes de la quantité dont on veut extraire la racine. Par exemple, $\sqrt[3]{aa + cd - dd + c - g}$ signifie qu'il faut ex-

traire la racine quarrée des trois termes $aa + cd + dd$, parce qu'ils sont embrassez par le trait qui accompagne le signe radical ; car pour les autres termes au dessus desquels ce trait ne passe point, il n'est pas question de leur racine.

Art. 94.

$$\begin{array}{l}
 aa + 2ab + bb \ (a \\
 aa - aa + 2ab + bb \\
 2ab + bb \ (a + b \\
 2a \\
 2ab + bb \\
 2ab + bb \\
 2ab + bb - 2ab - bb = 0
 \end{array}$$

Art. 95.

$$\begin{array}{l}
 aa - 2ab + bb \ (a \\
 aa - aa - 2ab + bb \\
 -2ab + bb \ (a - b \\
 + 2a \\
 -2ab + bb \\
 -2ab + bb \\
 -2ab + bb + 2ab - bb = 0
 \end{array}$$

DEMONSTRATION DE LA RACINE quarrée.

57. Pour démontrer les Regles précédentes, nous extrairons la racine quarrée d'un nombre, par exemple, de 676, & nous ferons voir la raison de chaque operation.

Pour extraire la racine quarrée de 676, après avoir séparé les figures de deux en deux, je commence par dire, la racine quarrée de 6 est 2, ou autrement la racine quarrée de 600 est 20, à cause des deux nombres qui sont sur la droite du 6, & qui le font valoir 600 ; ainsi je pose 2 au quotient avec un point à côté, qui tient lieu de la seconde figure qui doit venir au quotient, & qui fera que 2 vaudra 20 ; ainsi retranchant le quarré de 2, qui est 4 de 6, c'est tout comme si je retranchois le quarré de 20, qui est 400 de 600 : c'est pourquoi d'une façon comme de l'autre il me reste 2. Cela posé, l'on sçait encore que selon la Regle il faut doubler 2, ou autrement doubler 20 pour avoir 40, qui doivent servir de diviseur ; car si l'on met un petit point sur la droite du 4 au dessous du 6, il fera que 4 vaudra 40, & après avoir trouvé ce diviseur, je dis, en 27 combien de

fois 4, je trouve qu'il y est 6, & posant le 6 au quotient, & à côté du 4, je dis 6 fois 6 font 36, qui ôté de 36 reste 0 & retiens 3, & 6 fois 4 font 24, & 3 de retenu font 27, de 27 il ne reste rien; ainsi la racine est 26. Mais par l'art. 63, le carré d'une grandeur composée de deux quantitez est égale au carré de chacune de ces quantitez, plus à deux rectangles compris sous ces mêmes quantitez: ainsi le carré de 26, ou autrement de 20 & de 6 sera donc composé du carré de 20, qui est 400, du carré de 6, qui est 36, & de deux rectangles compris sous 20 & sous 6. Or comme nous avons ôté de 676 d'abord le carré de 20, ensuite le produit de 40 par 6, qui est la même chose que deux rectangles compris sous 20 & sous 6, & outre cela le carré de 6, il s'ensuit donc que l'on a ôté du nombre donné les grandeurs qui composent le carré de la racine 26, & que par conséquent la racine de 676 est 26, puisqu'il n'est rien resté de la soustraction qu'on a faite.

Mais si au lieu de deux tranches il y en avoit trois ou davantage, la démonstration seroit toujours la même, parce que l'on regarderoit les nombres que l'on a trouvez au quotient de la première & de la seconde tranche, comme ne faisant qu'un terme de la racine, supposant toujours un 0 à la place du second terme: c'est pourquoi on le double pour avoir le terme d'après, que l'on regardera comme le second terme de la quantité qui doit composer la racine. Ainsi ayant trouvé 430 pour la racine des deux premières tranches de 186749, je regarde 430 comme étant le premier terme de la racine; & comme j'en ai déjà soustrait le carré, qui est 184900 du nombre donné, je double 430 pour avoir le second terme, qui sera 2, & posant 2 à la place ordinaire, j'ôte son carré de la quantité donnée, & je multiplie 860, qui est le double de 430 par 2, pour soustraire de la quantité donnée un produit égal aux deux rectangles compris sous 430 & sous 2. Ainsi l'on voit que l'opération de trois tranches, ou plus, étant la même que

que celle que l'on fait pour deux tranches, la démonstration que nous avons donnée pour deux tranches, sera générale pour toutes les autres.

*MANIERE D'EXTRAIRE LA RACINE
Cube.*

98. Extraire la racine cube d'un nombre, c'est trouver le côté du plus grand cube qui peut être contenu dans le nombre. Par exemple, extraire la racine cube de 234, c'est trouver le nombre 6, qui est le côté du plus grand cube, qui peut être contenu dans 234; car ôtant le cube de 6, qui est 216, de 234, je vois qu'il reste 18, & que la racine du nombre donné est 6; de même je vois que la racine cube de 519 est 8, parce que le cube de 8 est 512, qui est le plus grand cube qui peut être contenu dans 519.

L'on trouvera de même la racine cube de tous les nombres qui ne seront composés que de trois figures ayant recours seulement à la Table suivante, qui contient les cubes des nombres depuis 1 jusqu'à 10,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

qu'il est nécessaire d'apprendre par cœur, afin d'apercevoir d'abord le plus grand cube qui peut être contenu dans un nombre donné.

PREMIER EXEMPLE.

Mais pour extraire la racine cubique d'un grand nombre, comme de 81439, il faudra séparer les figures de trois en trois de la droite à la gauche, pour avoir un nombre de tranches comme à la racine quarrée, & operer de la maniere suivante.

Je commence par extraire la racine cube de la première tranche, en disant: le côté du plus grand cube qui peut

E

être contenu dans 81 est 4; c'est pourquoi je pose 4 au quotient, & je soustrais son cube; qui est 64 de 81, & il reste 17; & comme dans la racine cube, aussi-bien que dans la racine quarrée, il doit venir autant de figures au quotient qu'il y a de tranches dans le nombre donné. Pour trouver la figure de la seconde tranche, voici de la maniere qu'on doit operer.

$$17 \overline{) 439(4}$$

Il faut quarrer sur un bout de papier le quotient de la premiere tranche, c'est-à-dire, 4 pour avoir le quarré 16, qu'il faut multiplier par 3 pour avoir 48, qui doit servir de diviseur pour trouver la figure de la seconde tranche, je pose 8 sous la premiere figure 4 de la seconde tranche, & j'avance 4 sous la derniere figure de la premiere, puis je dis, en 17 combien de fois 4, il y est trois fois; ainsi je pose 3 au quotient, & un autre 3 sous la derniere figure du diviseur; pour multiplier le diviseur 48 par la figure que je viens de trouver, je dis donc: 3 fois 8 font 24, je pose 4 & retiens 2, 3 fois 4 font 12, & 2 de retenu font 14, je pose 4 & avance 1, & après la multiplication faite j'efface le diviseur 48, & le multiplicateur 3, parce qu'il n'en est plus question.

$$\begin{array}{r} 17 \\ 81 \overline{) 439(43} \\ 4 \overline{) 8} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 81 \overline{) 439(43} \\ 4 \overline{) 8} \\ 3 \end{array}$$

$$\text{A} \quad 144$$

Après cela il faut quarrer la seconde figure du quotient, & tripler son quarré 9 pour avoir 27, qu'il faut multiplier par la premiere figure 4 du quotient pour avoir 108, qu'il faut poser sous le produit A, en avançant d'une figure sur la droite.

$$\begin{array}{r} 17 \\ 81 \overline{) 439(43} \\ 4 \overline{) 8} \\ 3 \\ \hline \text{A} \quad 144 \\ \text{B} \quad 108 \\ \text{C} \quad 27 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ 9 \\ 3 \\ \hline 27 \\ 4 \\ \hline 108 \end{array}$$

Enfin il faut cuber 3, c'est-à-dire, la seconde figure du quotient, & poser son cube 27 sous le produit B, en avançant d'une figure sur la droite.

Présentement il faut ajouter ensemble les trois produits A, B, C, pour avoir le nombre D, qu'il faut soustraire de ce qui est resté du nombre donné, après que l'on en a eu ôté le cube de la première tranche, c'est-à-dire, qu'il faut soustraire 15507 de 17439, & la différence E, qui est 1932, sera le restant du nombre donné 81439, après en avoir extrait la racine, qui est 43.

$$\begin{array}{r}
 17 \overline{) 81439} \\
 \underline{81} \\
 8 \\
 3 \\
 \hline
 A \quad 144 \\
 B \quad 108 \\
 C \quad 27 \\
 \hline
 D \quad 15507 \\
 \hline
 E \quad 1932
 \end{array}$$

Il est à remarquer que si le nombre D se trouve plus grand que le restant de la quantité donnée, après en avoir ôté le cube de la première tranche, c'est une preuve que la seconde figure que l'on a trouvée est trop grande, & que quand la première figure du nombre du restant, après en avoir soustrait le nombre D, ne s'évanouit pas, que c'est presque toujours une marque que la seconde figure qu'on a posée au quotient est trop petite.

SECOND EXEMPLE.

Pour extraire la racine cube de 148089, je sépare les chiffres qui me donnent encore deux tranches, & je dis; la racine cube de 148 est 5, dont le cube est 125, qui étant ôté de 148, reste 23.

$$\begin{array}{r}
 23 \overline{) 148089} \\
 \underline{125} \\
 23
 \end{array}$$

Pour trouver la figure de la seconde tranche, je quarre 5 pour avoir 25, qui étant triplé donne 75, que je pose sous le nombre donné pour me servir de diviseur, & je dis en 23 combien de fois 75; il y est 2, que je pose au quotient.

$$\begin{array}{r}
 23 \overline{) 148089} \\
 \underline{125} \\
 23 \\
 75 \\
 \hline
 5 \\
 25 \\
 \hline
 3 \\
 75 \\
 \hline
 9
 \end{array}$$

E ij

Je multiplie après cela le diviseur 75 par la figure 2 que je viens de trouver, qui me donne le produit F.

$$\begin{array}{r} 23 \overline{) 248089(52} \\ 46 \\ \hline 78 \\ 150 \end{array}$$

Après cela je multiplie la seconde figure par elle-même, qui donne 4 pour son carré, que je triple pour avoir 12, qui étant multiplié par la première figure 5, donne 60 au produit, que je pose à l'endroit G sous F, en avançant d'une figure sur la droite.

$$\begin{array}{r} 23 \overline{) 248089(52} \\ 46 \\ \hline 78 \\ 150 \\ \hline 60 \end{array}$$

Enfin pour dernière operation, je cube 2, & je mets le produit 8 sous G à l'endroit H, en avançant d'une figure sur la droite, & additionnant après cela les trois produits F, G, H, j'ôte la somme I de 23089, & il vient le restant K; ainsi la racine cube de 148089 est 52, & il reste 7481.

Pour sçavoir si l'on ne s'est pas trompé en faisant la regle, il faut cuber la racine 52, ou toute autre que l'on aura trouvée, & ajouter au produit 140608 ce restant K, qui est 7481: si la somme 148089 est égal au nombre donné, il s'ensuivra que la regle est bonne.

$$\begin{array}{r} 23 \overline{) 248089(52} \\ 46 \\ \hline 78 \\ 150 \\ \hline 60 \\ \hline 8 \\ \hline 15608 \\ \hline 7481 \end{array}$$

TROISIÈME EXEMPLE.

Pour extraire la racine d'un plus grand nombre, comme de 99865243, je sépare les chiffres de 3 en 3, ce qui me donne trois tranches; & comme il faut operer sur la première & la seconde de la même manière que dans les regles précédentes, je fais abstraction de la troisième

tranche, & j'extrais la racine cube de 99865, que je trouve être 46, sur quoi il reste 2529. Or comme la première & la seconde tranche ont donné les figures 4 & 6 au quotient. Pour trouver celle de la troisième tranche, voici comme il faut opérer.

$$\begin{array}{r|rr}
 35 & 865 & 243(46 \\
 4 & 8 & \\
 \hline
 6 & & \\
 288 & & \\
 432 & & \\
 \hline
 216 & &
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 4 & 6 \\
 4 & 6 \\
 \hline
 16 & 36 \\
 3 & 3 \\
 \hline
 48 & 108 \\
 4 & 4 \\
 \hline
 432 &
 \end{array}$$

Je joins sur la droite de 2529 restant des deux premières tranches les nombres 243 de la troisième tranche pour avoir 2529243,

qui est le restant total, auquel je cherche un diviseur, pour qu'il me donne la figure de la troisième tranche.

Pour le trouver je quarre 46 pour avoir son carré 2116, que je triple pour avoir 6348, qui est le diviseur que je cherche; ainsi je divise donc le restant L par 6348, en disant en 25 combien de fois 6, je trouve qu'il y est 3 fois; ayant donc posé 3 au quotient à côté des deux autres figures, je multiplie le diviseur M par le même 3 pour avoir le produit N.

$$\begin{array}{r|rr}
 L & 2529243(463 & 46 \\
 M & 6348 & 46 \\
 \hline
 3 & & 276 \\
 \hline
 N & 19044 & 184 \\
 \hline
 & & 2116 \\
 & & 3 \\
 & & 6348
 \end{array}$$

Après cela je quarre 3 pour avoir le carré 9, que je triple pour avoir 27, que je multiplie par la première & la seconde figure du quotient, c'est-à-dire, par 46, & le produit me donne 1242, que je pose sous le nombre N à l'endroit O, en avançant d'une figure sur la droite.

$$\begin{array}{r|rr}
 L & 2529243(463 & 3 \\
 M & 6348 & 3 \\
 \hline
 3 & & 9 \\
 \hline
 N & 19044 & 27 \\
 \hline
 O & 1242 & 46 \\
 \hline
 & & 162 \\
 & & 108 \\
 & & 1242
 \end{array}$$

E iiij

Enfin je cube 3 & je pose le produit 27 sous le nombre O à l'endroit P, en avançant d'une figure sur la droite, & j'ajoute comme ci-devant les trois produits N, O, P, pour avoir la somme Q, que je retranche du nombre L, & la soustraction étant faite, la différence 612396 est le restant du nombre donné 99865243, après en avoir extrait la racine, qui est 463.

L	2529243(463	3
M	6348	3
	3	9
N	19044	3
O	1242	27
P	27	
Q	1916847	
R	612396	

Si au lieu de trois tranches, il y en avoit quatre, l'on trouveroit la figure de la quatrième tranche en quarrant les trois figures du quotient, & en multipliant le quarré par 3, qui donnera un produit qui servira de diviseur. Il en fera de même pour cinq, six ou sept tranches, &c.

*MANIERE D'APPROCHER LE PLUS PRES
qu'il est possible de la racine cube d'un nombre donné par
le moyen des Décimales.*

99. Supposant la toise courante divisée en 1000 parties, c'est-à-dire, en décimales, comme à la racine quarrée, la toise quarrée fera encore de 1000000, & par conséquent la toise cube fera de 1000000000. Or pour nous servir des décimales dans la racine cube comme dans la racine quarrée, il faut pour trouver la racine cube la plus approchante d'un nombre donné, le multiplier par 1000000000, & extraire la racine cube du produit. Ainsi voulant extraire la racine cube de 694, je multiplie ce nombre par le précédent pour avoir 694000000000, dont j'extrait la racine cube qui se trouve de 8895 petites parties, que je divise par 1000 pour avoir des toises; ainsi je trouve que la racine est 8 toises, & quelque chose que je trouverai en cherchant la valeur de 895 en pieds, pouces, lignes, &c. pour cela je fais une regle de 3 en disant, si 1000 m'a donné

6^{es} pieds ; combien me donneront 895, après avoir fait la règle, je trouve 5 pieds 4 pouces 5 lignes 3 points & $\frac{1}{4}$ de point ; ainsi la racine cube de 694 est 8 toises, 5 pieds 4 pouces 5 lignes 3 points, & $\frac{1}{4}$ de point.

100. Mais si l'on vouloit extraire la racine cube d'un nombre de toises, pieds, pouces, lignes, cubes, il faudra réduire les pieds, les pouces, les lignes en décimales, en considérant le rapport que ces parties ont avec 1000000000, & faire pour la racine cube ce qui a été enseigné à l'occasion de la racine quarrée pour les pieds, pouces, lignes, quarez, &c.

*MANIERE D'EXTRAIRE LA RACINE CUBE
des Quantitez litterales.*

101. Pour extraire la racine cube de $a^3 + 3a^2b + 3abb + b^3$, il faut commencer par extraire la racine cube du premier terme a^3 , qui est a^* , qu'il faut poser * Art. 45^e au quotient ; ensuite ôter le cube de a de la quantité donnée : après cela il faut quarrer a , & en tripler le quarré pour avoir $3aa$, pour servir de diviseur ; ainsi l'on dira $3aab$ divisé par $3aa$, donne $+b^*$ au quotient ; * Art. 73^e après quoi il faut multiplier le diviseur $3aa$ par b , & le produit sera $3aab$, qu'il faut ôter de la quantité donnée : ensuite il faut quarrer b , multiplier ce quarré par la premiere lettre a qu'on a trouvée au quotient, tripler le produit bba pour avoir $3bba$, qu'il faut encore soustraire de la quantité donnée ; enfin il faut cuber b , & ôter encore le produit b^3 de la quantité donnée, & l'on verra que la réduction generale se réduit à 0, & que par conséquent la racine cube que l'on a demandée est $a + b$.

Pour être assuré de la justesse de cette règle, il faut cuber $a + b$, & si le produit est égal à la quantité donnée avec le restant, s'il y en a, c'est une preuve que l'opération est bonne.

$$\begin{array}{r}
 a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \quad (a \\
 3aab + 3abb + b^3 \quad (a + b \\
 3aa \quad \quad \quad bb \\
 \quad b \quad \quad \quad a \\
 \hline
 3aab \quad \quad \quad bba \\
 \quad \quad \quad 3 \\
 \quad \quad \quad 3abb \\
 \quad \quad \quad b^3
 \end{array}$$

$$3aab + 3abb + b^3 - 3aab - 3abb - b^3$$

DEMONSTRATION DE LA RACINE CUBE.

102. Pour démontrer la racine cube, nous ferons voir les raisons de chaque operation qu'il faut faire pour tirer la racine d'un nombre, comme de 97336, en supposant seulement qu'on est bien prévenu de ce qu'on a dit dans l'art. 64. que le cube de toutes les grandeurs composées de deux termes, est égal au cube du premier terme, plus à trois parallelepipèdes sous le quarré du premier & le second, plus à trois autres parallelepipèdes sous le quarré du second & le premier, plus enfin au cube du second.

Pour extraire la racine cube du nombre donné, je sépare les chiffres comme à l'ordinaire, & puis je dis; la racine cube de 97 est 4, dont le ~~racine~~ cube est 64, qui étant soustrait de 97, reste 33. Mais comme le 4 que je viens de poser au quotient, doit être accompagné d'une autre figure, à cause qu'il y a deux tranches au nombre donné; il s'ensuit que ce 4 doit valoir 40, & que c'est le cube de 40 que j'ai retranché du nombre, & non pas celui de 4; car l'on voit que le cube de 40 étant 64000, si on le retranche du nombre donné, il restera après la soustraction 33336. Ainsi regardant

40 comme le premier terme de la racine, l'on voit qu'on a retranché son cube du nombre donné.

$$\begin{array}{r} 33 \overline{) 336(4} \\ 99 \end{array}$$

Presentement pour trouver la seconde figure, je quarre 4, & je triple ce quarré qui donne 48 au produit que je pose à l'endroit A. Or si l'on fait attention qu'ayant placé le nombre 48 à l'endroit où il est, on l'a avancé de deux figures, qui font que ce nombre au lieu de valoir 48, vaut 4800; l'on verra qu'agissant ainsi, c'est comme si l'on avoit quarré 40, & triplé son quarré pour avoir un diviseur.

$$\begin{array}{r} 33 \overline{) 336(4} \\ 99 \text{ A } 4 \overline{) 8} \end{array}$$

Après avoir trouvé le diviseur je dis, en 33 combien de fois 4, je trouve qu'il y est 6, je pose donc 6 au quotient, qui devient le second terme de la racine. Après cela je multiplie le diviseur par le second terme pour avoir le produit B, qui vaut, comme on le peut voir dans le lieu où il est 28800, qui est une quantité égale à trois parallelepipedes compris sous le quarré du premier terme, & sous le second, c'est-à-dire, sous le quarré de 40 & sous 6; car quand on a triplé le quarré de 4 ou autrement celui de 40, l'on n'a fait autre chose que joindre ensemble les trois bases des premiers parallelepipedes, pour leur chercher une hauteur commune.

Continuant donc à suivre la regle ordinaire, je quarre 6, & triple son quarré pour avoir 108, qui étant multiplié par la premiere figure 4, donne 432, que je pose à l'endroit C, en faisant attention qu'à la place où est ce nombre, il vaut 4320, & qu'agissant ainsi, c'est comme

F

si j'avois multiplié par 40 le triple du carré 6, c'est-à-dire, 108 ; par conséquent je puis donc dire que le nombre C vaut trois parallépipèdes compris sous le carré du second terme, & sous le premier, puisque quand j'ai triplé le carré du second terme, je n'ai fait autre chose que mettre ensemble les trois bases des trois parallépipèdes du second terme pour les multiplier par le premier qui est leur hauteur commune.

Enfin en suivant la règle, je cube la seconde figure pour avoir 216, que je pose à l'endroit

D, c'est-à-dire, que j'ajoute aux parallépipèdes précédens, le cube du second terme; additionnant donc les trois quantitez B, C, D, pour avoir la somme E, je vois que la soustrayant du restant du nombre donné, il n'y a aucune différence, & que par conséquent la véritable racine du nombre donné est 46, puisqu'en ayant ôté le cube de la première quantité, trois parallépipèdes

sur le carré de la première & la seconde, trois parallépipèdes sous le carré de la seconde & sous la première, & le cube de la seconde, il n'est rien resté.

L'on pourra démontrer de même les opérations que l'on fera pour trois tranches, quatre tranches, &c. en considérant (comme on l'a dit dans la démonstration de la racine carrée) les figures de la première & seconde tranche, comme ne faisant que le premier terme de la racine, & celle de la troisième, comme étant le second terme. Ainsi des autres.

	33	
	97	336 (46
A	4	8
		6
B	288	
C	432	
D	216	
E	3336	



METHODE DE DEGAGER LES QUANTITEZ
inconnues des Equations.

DEFINITION.

103. Lorsqu'une quantité est positive, & qu'elle ne se trouve qu'une seule fois dans un seul membre d'une équation, on l'appelle *Quantité dégagée*; par exemple, dans l'équation $a + b = x$, la quantité x est une quantité dégagée.

AXIOME * PREMIER.

* Art. 3.

104. Si à des grandeurs égales on en ajoute d'égales, les tous seront égaux.

II.

105. Si de grandeurs égales on en retranche d'égales, les restes seront égaux.

III.

106. Si l'on multiplie des grandeurs égales par une même grandeur, les produits seront égaux.

IV.

107. Si l'on divise des grandeurs égales par une même grandeur, les quotiens seront égaux.

V.

108. Si l'on extrait la racine de quantitez égales, ces racines seront égales.

SECONDE REGLE.

Où l'on fait voir l'usage de l'Addition & de la Soustraction pour le dégagement des inconnues.

109. Pour dégager une quantité, il faut faire passer les grandeurs qui l'accompagnent dans l'autre membre

F ij

avec des signes contraires, & les effacer du membre où elles étoient.

Par exemple, si l'on a une équation $a + c = x - d$, pour dégager x , il faut faire passer $-d$ du second membre dans le premier, avec le signe $+$; & l'on aura $a + c + d = x$, où la quantité x est dégagée, puisque sa valeur est $a + c + d$; car comme on n'a fait qu'ajouter d à chaque membre d'équation, il s'ensuit par l'axiome premier, qu'on n'a rien changé à l'égalité.

De même, pour dégager y dans l'équation $y + a = b + c$, l'on fera passer a du premier membre dans le second avec le signe $-$ pour avoir $y = b + c - a$, qui donne la valeur de y ; puisque par le second axiome on n'a fait que retrancher de deux grandeurs égales la même grandeur.

COROLLAIRE.

110. Il suit de la Règle précédente, premièrement, que l'on peut rendre tous les termes d'une équation positifs, en transposant ceux qui ont le signe $-$ d'un membre de l'équation dans l'autre, en leur donnant le signe $+$. Par exemple, pour rendre positifs tous les termes de l'équation $ab - cc + cd - dd = az + bb$, il n'y a qu'à faire passer les termes cc & dd , qui ont le signe $-$ du premier membre dans le second, en leur donnant le signe $+$, & après les avoir effacé du premier membre, l'on aura $ab + cd = az + bb + cc + dd$, où il n'y a plus de quantitez negatives. De même si l'on a $ca - dd + cd - ab = ac + cc - ad$, l'on n'a qu'à faire passer dd & ab du premier membre dans le second, & ad du second dans le premier avec des signes contraires, l'on aura $az + cd + ad = ac + cc + dd + ab$, où il n'y a plus de termes negatives.

111. L'on peut encore par la même Règle faire passer tous les termes d'un des membres d'une équation dans l'autre, en réduisant l'égalité à 0; car pour faire passer, par exemple, les termes du second membre de cette équation $az + bb = cd + bc - dd$ dans le premier, l'on n'a qu'à transposer les termes, en leur donnant des signes contraires, & l'on aura $az + bb - cd - bc + dd = 0$.

TROISIÈME RÈGLE.

Où l'on fait voir l'usage de la Multiplication pour dégager les inconnues, & pour délivrer de fractions les équations.

112. Pour dégager une quantité qui se trouve divisée par quelque nombre, ou par quelque lettre, il faut multiplier les autres termes de l'équation par le diviseur de cette quantité, sans toucher à cette quantité, que pour en effacer le diviseur : ainsi pour dégager $\frac{xx}{c}$ dans l'équation $a + b = \frac{xx}{c}$, il faut multiplier le terme $a + b$ par le diviseur c , & l'on aura $ac + bc = xx$ où xx est dégagé : de même si l'on avoit $c + b = \frac{z}{2}$, il faut pour dégager $\frac{z}{2}$ multiplier les termes $c + b$ par le diviseur 2, & l'on aura $2c + 2b = z$; ce qui est bien évident par le troisième axiome, puisqu'ayant multiplié les deux membres de cette équation par une même quantité, on n'a rien changé à l'égalité.

COROLLAIRE.

113. Comme la division indiquée ou autrement $\frac{a}{b}$ n'est autre chose qu'une fraction. Il s'ensuit par la Règle précédente que l'on peut non seulement dégager les quantitez inconnues qui sont divisées, mais que l'on peut encore délivrer de fractions, les termes d'une équation, en multipliant tous les autres termes de l'équation par les dénominateurs des fractions. Par exemple, pour ôter la fraction qui se trouve dans l'équation $a + \frac{dd}{c} + b = d + c$, je multiplie tous ces termes par le dénominateur c de la fraction $\frac{dd}{c}$, & il vient $ac + dd + bc = dc + cc$, où il n'y a plus de fractions. Pour ôter les fractions de l'équation $xd + \frac{bbc}{a} - cc = dd - \frac{aad}{c} + bc$, je commence par multiplier

Fiii

tous les termes de l'équation par le dénominateur a de la première fraction pour avoir $adx + bbc - acc = add - \frac{aaa}{c} + abc$, où il n'y a plus de fractions dans le premier membre ; ensuite je multiplie tous les termes de cette nouvelle équation par le dénominateur de la seconde fraction pour avoir $adcx + bbcc - accc = acdd - a^3d + abcc$, où il n'y a plus de fractions. Enfin si l'on avoit une équation comme $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{x}{a} = \frac{b}{c} + \frac{d}{e}$, l'on en feroit évanouir toutes les fractions, en multipliant chaque dénominateur par le numérateur de toutes les autres fractions, & l'on aura $aacde + abcce + bcdex = abbde + abcdy$.

114. Mais au lieu de multiplier l'un après l'autre chaque dénominateur par tous les numérateurs des autres fractions, on peut tout d'un coup ôter les fractions d'une équation, en multipliant chaque terme par le produit de tous les dénominateurs, & puis effacer dans les numérateurs & les dénominateurs de chaque fraction, les lettres qui se trouvent semblables.

QUATRIÈME REGLE.

Où l'on fait voir l'usage de la Division pour dégager les inconnues.

115. Lorsqu'une quantité inconnue, que l'on veut dégager, est multipliée par une grandeur connue, on dégagera l'inconnue, en divisant chaque membre de l'équation par cette grandeur connue.

Ainsi pour dégager l'inconnue x dans l'équation $ax = bb - cc$, l'on divisera chaque membre par a , & l'on aura

Art. 70. $x = \frac{bb - cc}{a}$: de même si l'on a $c\zeta = dd + a\zeta$, on dégagera l'inconnue ζ , en faisant passer $a\zeta$ du second membre dans le premier, avec un signe contraire, pour avoir $c\zeta - a\zeta = dd$, & divisant chaque membre par $c - a$, l'on aura

$x = \frac{ad}{c-a}$; ce qui est bien évident par l'axiome quatrième , puisqu'ayant divisé chaque membre de l'équation par la même grandeur , les quotiens doivent être égaux.

COROLLAIRE.

116. Il suit de cette Règle, que lorsque tous les termes d'une équation sont multipliés par une même lettre, ou par une même grandeur, qu'on peut rendre l'équation plus simple, en divisant tous les termes par cette grandeur.

Par exemple, si l'on a $aa+ab=ac+ad$, où tous les termes sont multipliés par a , l'on n'a qu'à diviser les deux membres de cette équation par cette même lettre a , il viendra l'équation $a+b=c+d$, qui est plus simple que la précédente; mais s'il se trouvoit quelque terme qui ne pût pas être divisé comme les autres, ne contenant pas des lettres semblables au diviseur: cela n'empêche pas que la division ne se fasse toujours, parce que quand on ne peut pas la faire effectivement à l'égard de quelque terme, on la fait par indication.

Par exemple, pour diviser cette équation $abb+cb=cdx+bbe$ par bb , dans laquelle il y a le terme cdx , qui n'a point de lettres semblables au diviseur, l'on efface bb des autres termes, & l'on marque pour celui-ci $\frac{cdx}{bb}$: ainsi l'on a $a+c=\frac{cdx}{bb}+e$.

117. Enfin lorsque les deux membres d'une équation ont un diviseur commun, on pourra les réduire à une équation plus simple, en divisant chaque membre par le diviseur qui leur est commun.

Par exemple, si l'on a une équation comme $bbx+bx=bb+bx$, dont les membres ont pour diviseur commun $bb+bx$, l'on fera la division, qui donnera cette autre équation $x=a$.

CINQUIEME REGLE.

Où l'on fait voir l'usage de l'Extraction des racines pour dégager les inconnues.

118. Quand on a une équation, où l'un des membres ne contient que des grandeurs connues, & que l'autre où est l'inconnue est un carré ou un cube parfait, il faut extraire la racine de ces deux membres pour avoir une nouvelle équation, dans laquelle on pourra dégager l'inconnue.

Par exemple, si l'on a $xx + 2ax + aa = bc + dd$; où le premier membre de cette équation est un carré parfait, on extrait la racine carrée de chaque membre *

* Art. 94.

* Art. 109. pour avoir $x + a = \sqrt{bc + dd}$; d'où faisant passer a * du premier membre dans le second, l'on aura $x = \sqrt{bc + dd} - a$; qui fait voir que si l'on extrait la racine carrée de $bc + dd$, & que l'on ôte de cette racine la grandeur a , la différence sera la valeur de x .

De même pour dégager x de $xx - 2ax + aa = bb$, j'extrait la racine carrée de chaque membre *, qui donne $x - a = b$, ou bien $x = b + a$ *.

* Art. 95.

* Art. 109.

119. Comme le premier membre de l'équation $x^3 + 3axx + 3aax + a^3 = aab$ est un cube parfait, en tirant la racine cube de chaque membre, l'on aura l'équation

* Art. 101. plus simple $x + a = \sqrt[3]{aab}$ *, & en transposant, l'on aura $x = \sqrt[3]{aab} - a$, qui fait voir que si l'on extrait la racine cube de aab , & que l'on ôte de cette racine la grandeur a , la différence sera la valeur de x .

Le premier membre de cette équation $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = bdd$ étant encore un cube parfait, si l'on extrait la racine cube de chaque membre, l'on aura $x - a = \sqrt[3]{bdd}$, & en dégageant x , l'on aura $x = a + \sqrt[3]{bdd}$, qui fait voir que la grandeur a , plus la racine de bdd est égale

120.

120. Il arrive quelquefois qu'on peut rendre le membre d'une équation où est l'inconnue, une puissance parfaite, en lui ajoutant une grandeur connue : par exemple, si l'on ajoute aux membres de l'équation $xx + 2ax = bc$ le carré aa , l'on aura $xx + 2ax + aa = bc + aa$, où le premier membre est un carré* : ainsi extrayant la racine carrée de l'un & de l'autre membre, l'on aura $x + a = \sqrt{bc + aa}$ *, ou bien en dégageant x , $x = \sqrt{bc + aa} - a$. * Art. 63. * Art. 94.

De même, si l'on ajoute ax à chaque nombre de l'équation $xx - 2ax = cd$, l'on aura $xx - 2ax + aa = cd + aa$, où le premier membre est un carré : ainsi extrayant la racine carrée de l'un & l'autre membre, l'on aura $x - a = \sqrt{cd + aa}$, ou bien $x = a + \sqrt{cd + aa}$.

121. Mais si l'on avoit $xx + ax = ab$, l'on pourra encore changer le premier membre en un carré parfait, en ajoutant $\frac{1}{4}aa$ à l'un & l'autre membre pour avoir $xx + ax + \frac{1}{4}aa = ab + \frac{1}{4}aa$, où la racine du premier membre est $x + \frac{1}{2}a$; car si l'on multiplie $x + \frac{1}{2}a$ par $x + \frac{1}{2}a$, le produit sera le carré de x plus deux demi xa , qui font ensemble xa plus le carré de $\frac{1}{2}a$, qui est $\frac{1}{4}aa$: ainsi l'équation précédente se changera en celle-ci après en avoir extrait la racine, $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{ab + \frac{1}{4}aa}$, ou bien $x = \sqrt{ab + \frac{1}{4}aa} - \frac{1}{2}a$, qui donne la valeur de x .

122. Enfin si l'on a $xx - ax = bc$, & que l'on ajoute encore à chaque membre $\frac{1}{4}aa$, l'on aura $xx - ax + \frac{1}{4}aa = bc + \frac{1}{4}aa$, où le premier membre est un carré : ainsi extrayant la racine de l'un & l'autre membre, il viendra $x - \frac{1}{2}a = \sqrt{bc + \frac{1}{4}aa}$, ou bien $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{bc + \frac{1}{4}aa}$.

G

Art. 121.

$$\begin{array}{r}
 x + \frac{1}{2}a \\
 x + \frac{1}{2}a \\
 \hline
 xx + \frac{1}{2}xa \\
 \quad + \frac{1}{2}xa + \frac{1}{4}aa \\
 \hline
 xx + xa + \frac{1}{4}aa
 \end{array}$$

Art. 122.

$$\begin{array}{r}
 x - \frac{1}{2}a \\
 x - \frac{1}{2}a \\
 \hline
 xx - \frac{1}{2}xa \\
 \quad - \frac{1}{2}xa + \frac{1}{4}aa \\
 \hline
 xx - xa + \frac{1}{4}aa
 \end{array}$$

SIXIEME REGLE.

Où l'on donne la maniere de substituer dans une équation la valeur des inconnues.

123. Quand on connoît la valeur de quelques lettres que l'on veut faire évanouïr dans une équation, on substitue à leur place les quantitez qui leur sont égales, en leur donnant le même signe.

Par exemple, si l'on a l'équation $a + z = y + b - c$, où l'on veut faire évanouïr z , & que l'on suppose $z = d + e$ l'on effacera z dans l'équation, & l'on mettra à sa place sa valeur $d + e$, & l'on aura ensuite $a + d + e = y + b - c$ où z ne se trouve plus, si l'on a cette équation $b + d - x = c + z$, dans laquelle on veut faire évanouïr x , supposant que $x = a - e$, l'on effacera x , & l'on mettra à sa place $-a + e$, à cause que x a le signe $-$, & l'on aura $b + d - a + e = c + z$, où x ne se trouve plus.

124. Si la lettre qu'on veut faire évanouïr est multipliée ou divisée dans l'équation par quelque autre grandeur, il faut multiplier ou diviser sa valeur par cette même grandeur, & l'écrire dans l'équation avec le même signe.

Par exemple, si de l'équation $bb + ax - cc = ad + aa - yy$, l'on veut faire évanouïr x , supposant que $x = c + f$, il faut, à cause que x est multiplié par a dans l'équation, multiplier sa valeur $c + f$ par la même lettre a pour avoir $ax = ac + af$, & mettant $ac + af$ à la place de ax , l'on

aura $bb+ac+af-cc=ad+ax-yy$, ou x ne se trouve plus.

125. Pour faire évanouir de l'équation $cc+yy-2db=aa-bz$, la lettre z supposant que $z=d-c+g$, il faut multiplier la valeur de z par b pour avoir $bz=bd-be+bg$; & comme bz a le signe $-$ dans l'équation, il faut changer les signes de $bd-be+bg$, & mettre dans l'équation $-bd+be-bg$, & l'on aura $cc+yy-2db=aa-bd+be-bg$, où z ne se trouve plus.

126. Pour faire évanouir y de l'équation $2ab+ze=be+\frac{ddy}{a-f}$, supposant que l'on a $y=c-g$, il faut multiplier $c-g$ par dd pour avoir $ddy=dde-ddg$: mais comme ddy est divisé par $a-f$ dans l'équation, il faut pour y substituer $dde-ddg$ le diviser aussi par $a-f$, & alors on aura $2ab+ze=be+\frac{dde-ddg}{a-f}$, où y ne se trouve plus.

127. Pour faire évanouir u de l'équation $ax+dd=au+bd$, supposant que l'on a $u=\frac{aa-cc+fg}{b+d}$, il faut, à cause que u est égal à une fraction, multiplier le numerateur de cette fraction par a pour avoir $au=\frac{a^3-acc+afg}{b+d}$, & puis mettre à la place de au dans la premiere équation la fraction qui lui est égale, & l'on aura $ax+dd=\frac{a^3-acc+afg}{b+d}+bd$, où u ne se trouve plus.

Et si l'on veut ôter la fraction de cette équation, l'on n'aura qu'à multiplier les autres termes par le dénominateur $*b+d$, & l'équation sera transformée en celle-ci * Art. 12:
(après avoir effacé les termes bdd , qui se trouvent dans l'un & l'autre membre avec le même signe *) $abx+adx+dd^3=a^3-acc+afg+bbd$. * Art. 105.

128. Si la lettre qu'on veut faire évanouir est le côté d'un quarré ou d'un cube, il faut quarrer ou cuber sa valeur, & mettre son quarré ou son cube dans l'équation à la place du quarré ou du cube de la lettre qu'on veut faire évanouir.

Par exemple, si l'on veut faire évanouir y de l'équation $yy - 2bd = 2ax + dd$, supposant que $y = b + d$, il faut quarrer la valeur de y pour avoir $yy = bb + 2bd + dd$, & mettre la valeur du quarré de y à la place de yy , & l'on aura $bb + 2bd + dd - 2bd = 2ax + dd$, & effaçant $+2bd$ & $-2bd$, qui se détruisent dans le premier membre, & dd qui se trouve dans le premier & le second membre avec le même signe, l'équation se réduira à $bb = 2ax$; d'où dégageant x en divisant les deux membres de l'équation par $2a$, l'on aura $\frac{bb}{2a} = x$, qui donnera la valeur de x .

L'on pourra de même substituer dans une équation la valeur d'un cube, quand on connoîtra celle de sa racine.

Comme l'on ne fait en substituant que mettre une grandeur égale à la place d'une autre dans une équation, il s'ensuit que les deux membres de l'équation demeurent toujours égaux.

SEPTIEME REGLE.

Où l'on fait voir comment on peut faire évanouir toutes les inconnues d'une equation.

129. Pour résoudre un Problème par l'Algebre, il faut commencer par considérer attentivement l'état de la question, & toutes les conditions qu'elle renferme, ensuite marquer ce que l'on connoît avec les premieres lettres de l'alphabet, & ce que l'on ne connoît pas avec les dernieres; & considérant le Problème comme résolu, l'on tirera autant d'équations qu'on a employé de lettres inconnues, lesquelles seront nommées les premieres équations.

On choisira la plus simple de ces équations pour dégager une des inconnues qu'elle renferme, & ayant trouvé la valeur de cette inconnue, on la substituera dans les autres équations aux endroits où cette inconnue se trouvera.

On recommencera de nouveau à choisir la plus simple des autres équations pour y dégager une seconde inconnue, & l'on substituera comme auparavant la valeur de cette lettre dans les autres équations, & l'on réitérera la même chose pour faire évanouir l'une après l'autre toutes les lettres inconnues ; & de cette manière on trouvera la valeur connue de toutes les inconnues ; ce qui donnera la résolution du Problème.

Pour rendre ceci plus sensible, nous allons faire évanouir toutes les lettres inconnues des trois équations $x + y = z + a$, $y + z = b + x$, & $x + z = c + y$. Pour cela je commence par chercher la valeur de z dans la première équation, en la dégageant de a , que je fais passer dans l'autre membre avec le signe contraire *, *Art. 109. afin d'avoir $x + y - z = a$, qui me donne la valeur de z ; ensuite je mets cette valeur à la place de z dans les autres équations *, qui se trouvent changées en celle-ci, *Art. 123. $2y + x - a = b + x$, & $2x + y - a = c + y$; & comme x se trouve dans le premier & le second membre de la première équation avec le signe $+$, de même que y dans la seconde : je les efface, & en dégageant les inconnues * *Art. 109. qui restent, il vient $2y = b + a$, & $2x = c + a$, ou bien $y = \frac{b+a}{2}$ & $x = \frac{c+a}{2}$ *, où les valeurs de x & de y se trouvent *Art. 115. d'elles-mêmes, sans avoir été obligé de faire une seconde substitution. Or si l'on met présentement dans la première équation où l'inconnue z a été dégagée la valeur de x & de y *, l'on aura $\frac{b+a}{2} + \frac{c+a}{2} - a = z$, ou bien $\frac{b+c}{2} = z$. Par *Art. 123. conséquent on a trouvé la valeur des inconnues x , y & z en lettres connues.

AVERTISSEMENT.

On s'est contenté de donner seulement un petit exemple de cette Règle, parce qu'on en va voir l'application, aussi-bien que des précédentes dans la résolution de plusieurs Problèmes curieux, que l'on a rapportez exprès

§4. NOUVEAU COURS

pour familiariser les Commençans avec le calcul Algèbrique, & pour rendre intéressant ce que l'on a vû jusqu'ici, qu'il est à propos d'entendre parfaitement pour avoir le plaisir de comprendre sans peine tout ce qui compose la suite de cet Ouvrage.

APPLICATION DES REGLES PRECEDENTES à la résolution de plusieurs Problèmes curieux.

PREMIERE QUESTION.

Trois personnes ont gagné ensemble au jeu 875 livres ; la seconde personne a gagné deux fois autant que la premiere, & 10 livres de plus : la troisième a gagné autant que la premiere & la seconde, & 15 livres de plus ; on demande combien chaque personne a gagné.

Pour résoudre cette Question, j'appelle x le gain de la premiere personne, par consequent celui de la seconde sera $2x$, parce qu'elle a gagné le double de la premiere, & comme elle a gagné encore 10 livres de plus, son gain sera $2x + 10$. Or comme la troisième personne a gagné autant que la premiere & la seconde, & même 15 livres de plus, j'ajoute ensemble le gain des deux premieres personnes, c'est-à-dire, x & $2x + 10$ pour avoir $3x + 10$: à quoi ajoutant 15, le gain de la troisième personne sera $3x + 25$; & comme le gain des trois personnes est égal à 875, je forme cette équation $x + 2x + 10 + 3x + 25 = 875$: d'où je dégage la quantité inconnue, en faisant passer la somme des nombres que je connois du premier membre dans le second avec le signe $-$ *, & réduisant le tout au moindre terme, il vient cette nouvelle équation $6x = 875 - 35$, ou bien $6x = 840$, que je divise par 6 *, pour avoir $x = 140$, qui me fait voir que la premiere personne a gagné 140 livres. Pour avoir le gain de la seconde je double 140, & j'ajoute 10 au produit, qui donne $2x + 10 = 290$. Enfin si j'ajoute cette équation à la précédente, & 15 à la somme, j'aurai la valeur

*Art. 109.

*Art. 115.

du gain de la troisième personne, c'est-à-dire, $3x + 25 = 44.5$: par conséquent la première personne a gagné 140 livres, la seconde 290 livres, la troisième 44.5 livres qui est bien évident, puisque ces trois sommes font ensemble 875 livres.

SECONDE QUESTION.

Quatre Sapeurs ont fait chacun une quantité de toises de fappe, & ils ont gagné ensemble 140 livres : le second Sapeur a gagné trois fois plus que le premier moins 8 livres : le troisième a gagné la moitié de ce qu'ont gagné ensemble le premier & le second moins 12 livres ; & le quatrième a gagné autant que le premier & le troisième. L'on demande combien ils ont gagné chacun.

Pour résoudre cette Question, j'appelle x le gain du premier Sapeur ; ainsi $3x - 8$ sera le gain du second, $2x - 16$ le gain du troisième, & $3x - 16$ le gain du quatrième ; & comme toutes ces quantitez prises ensemble font égales à 140 l. je forme cette équation $x + 3x - 8 + 2x - 16 + 3x - 16 = 140$, que je réduis en moindre terme, en ajoutant ensemble toutes les quantitez semblables *, & * Art. 51. il vient $9x - 40 = 140$, ou bien $9x = 180$, en faisant passer 40 du premier membre dans le second. Or si l'on divise les membres de cette équation par 9 * pour dégager l'inconnue, l'on trouvera $x = 20$, qui donne le gain du premier Sapeur, qui est 20 livres : ainsi celui du second, qui est $3x - 8$, sera 52 livres ; celui du troisième, qui est $2x - 16$, sera 24 livres ; & celui du quatrième, qui est $3x - 16$, sera 44 livres ; ce qui est bien évident, puisque ces quatre sommes prises ensemble font égales à 140 livres. * Art. 115.

TROISIEME QUESTION.

Cinq Canoniers ont tiré dans une après-midi 96 coups de Canons : le second a tiré le double du premier, plus 2 coups ; le troisième a tiré autant que le premier & le

second moins 6 coups ; le quatrième a tiré autant que le second & le troisième, plus 10 coups ; & le cinquième a tiré autant que le premier & le quatrième , moins 20 coups : On demande combien de coups de Canon ils ont tiré chacun.

Ayant nommé x la quantité de coups que le premier a tiré, je trouverai pour le second $2x+2$; pour le troisième $3x+2-6$, ou, ce qui est la même chose, $3x-4$; pour le quatrième $5x+2-4-10$, ou bien $5x-8$; enfin pour le cinquième $6x+8-20$, ou bien $6x-12$. Or comme toutes ces quantitez prises ensemble doivent être égales à 96, je forme cette équation $x+2x+2+3x-4+5x-8+6x-12=96$, que je réduis en moindre terme, en ajoutant dans une somme toutes les quantitez connues qui ont le signe $+$ & le signe $-$, & il vient $17x-6=96$, ou bien $17x=102$, après avoir fait passer -6 du premier membre dans le second. Pour savoir presentement la valeur de x , je divise cette équation par 17 *, & je trouve $x=6$; ce qui fait voir que le premier Canonier a tiré 6 coups ; ainsi le second, qui est $2x+2$, en aura tiré 14 ; le troisième, qui est $3x-4$, en aura aussi tiré 14 ; le quatrième, qui est $5x-8$, en aura tiré 38 ; & le cinquième, qui est $6x-12$, en aura tiré 24 : ce qui est évident, puisque tous ces nombres pris ensemble font 96.

* Art. 51.

* Art. 115.

QUATRIEME QUESTION.

Un Officier de Mineurs a fait faire en trois mois mille toises courantes de galerie de Mine ; il a fait le second mois le double de l'ouvrage du premier, & 50 toises de plus, parce qu'il a reçu un renfort de Mineurs : le troisième mois il a fait 200 toises d'ouvrage de moins que le second, parce qu'une partie de son monde est tombé malade : On demande combien il a fait de toises de galerie de Mine dans le premier mois, dans le second & dans le troisième.

Pour

Pour résoudre cette Question, je nomme x la quantité de toises de galerie de Mines qui s'est faite le premier mois, $2x+50$ pour ce qui s'est fait le second mois, & $2x+50-200$, ou bien $2x-150$ pour la quantité qui a été faite dans le troisième mois; & comme la somme de ces quantitez doit être égale à 1000 toises, je forme cette équation $x+2x+50+2x-150=1000$, qui étant réduit *, donne $5x-100=1000$, ou bien $5x=$ * Art. 51.
 1100 , & divisant chaque membre de cette équation par 5 *, l'on aura $x=220$; ce qui fait voir que dans le pre- * Art. 115.
 mier mois on a fait 220 toises courantes de galerie de Mines; par conséquent on en a fait 490 toises le second mois, & 290 le troisième mois: ce qui est évident, puisque ces trois quantitez font ensemble 1000 toises.

CINQUIÈME QUESTION.

On a fait un détachement de Grenadiers pour attaquer un Poste, parmi lesquels il s'en trouve deux qui raisonnant ensemble sur les Grenades qu'ils ont dans leurs poches, le premier dit au second: Si tu m'avois donné une de tes Grenades, j'en aurois autant que toi; & le second lui répond: Si tu m'en avois donné une des tiennes, j'aurois le double de celles que tu as. On demande combien ils avoient de Grenades chacun.

Comme cette Question renferme deux inconnues, je nomme y le nombre des Grenades qu'a le premier Grenadier, & z le nombre de celles qu'a le second; & puis je fais autant d'équations comme il y a d'inconnues, selon l'art. 129. Or pour former la première je dis: Si y avoit une Grenade de plus, & z une Grenade de moins, y seroit égal à z : ainsi je puis écrire $y+1=z-1$; & puis pour la seconde équation je fais encore ce raisonnement: Si z avoit une Grenade de plus, & y une Grenade de moins, z seroit double de y ; par conséquent je puis donc écrire $z+1=2y-2$. Presentement que j'ai autant d'équations que d'inconnues, je dégage l'inconnue z de

H

- la premiere équation , en faisant passer -1 du second membre dans le premier * pour avoir $y+2=z$: ensuite je substitue dans la seconde équation à la place de z sa valeur * , & il vient $y+3=2y-2$; où z ne se trouve plus * , & faisant passer -2 du second membre dans le premier , il vient $y+5=2y$, & effaçant y de part & d'autre , j'aurai cette équation $5=y$ * , qui me donne la valeur de y , & substituant la valeur de y dans l'équation où z est dégagé , l'on aura $7=z$; par conséquent le premier Grenadier avoit cinq Grenades , & le second sept : ce qui est bien évident , puisque ces deux nombres s'accordent avec les conditions du Problème.

SIXIEME QUESTION.

Trois Bombardiers ont jetté en une journée une certaine quantité de Bombes dans une Place assiégée : le premier & le second en ont jetté ensemble 20 plus que le troisième , le second & le troisième 32 plus que le premier , & le premier & le troisième 28 plus que le second. On demande combien chaque Bombardier a jetté de Bombes.

Comme les quantitez connues dans cette Question sont exprimées par des nombres , nous substituerons à leur place dans le calcul Algebrique les premieres lettres de l'alphabet : ainsi au lieu de 20 , 32 , 28 , nous prendrons a, b, c , parce que nous supposerons que $20=a$, $32=b$, $28=c$ pour rendre la résolution de ce Problème plus generale , & nous nommerons x la quantité de Bombes que le premier Bombardier a jetté , y la quantité du second , & z la quantité du troisième.

Cela posé , je dis : Si de $x+y$, qui exprime la quantité de Bombes qu'ont jetté le premier & le second Bombardier , je soustrais a , qui exprime la quantité de Bombes que le premier & le second Bombardier ont tiré plus que le troisième , j'aurai $x+y-a=z$ pour la premiere équation ; $y+z-b=x$ pour la seconde , & $x+z-c=y$ pour la troi-

sième. Or considérant que j'ai trois équations qui renferment chacune trois inconnues, je cherche la valeur d'une de ces inconnues, pour la substituer dans les autres équations, aux endroits où cette inconnue se trouvera *; *Art. 129: & comme la première équation $x + y - a = z$ me donne la valeur de z , qui est la quantité $x + y - a$, je la mets dans la seconde & la troisième équation à la place de z ; ensuite elles se trouveront changées en celles-ci $y + x + y - a - b = x$, & $x + y - a + x - c = y$, dont les termes étant rendus positifs, & réduits à leur plus simple expression, donnent $2y = a + b$, & $2x = a + c$, qui étant divisez par 2, * donnent enfin $y = \frac{a+b}{2}$, & $x = \frac{a+c}{2}$. Or comme il n'y a *Art. 129: plus d'inconnues dans ces deux équations, il faut revenir à la première, c'est-à-dire, à $x + y - a = z$, afin de substituer à la place de x & de y leur valeur $\frac{a+b}{2}$ & $\frac{a+c}{2}$ pour avoir $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c - a = z$ *, ou bien $\frac{b+c}{2} = z$ (par- *Art. 129: ce que deux demi- $+a$ détruisent $-a$) on a donc la valeur de z , qui est la dernière quantité qu'il restoit à connaître.

Presentement que je sçais que $x = \frac{a+c}{2}$, que $y = \frac{a+b}{2}$, & que $z = \frac{b+c}{2}$, je prends à la place de la moitié de $a + c$ la moitié des quantitez qu'ils representent, c'est-à-dire, la moitié de 20 & de 28, pour avoir 24, qui sera la valeur de x . A la place de la moitié de $a + b$, je prends la moitié de 20 & de 32 pour avoir 26, qui est la valeur de y , & à la place de la moitié de $c + b$ je prends la moitié de 28 & de 32 pour avoir 30, qui sera la valeur de z : d'où je conclus que le premier Bombardier a jetté 24 Bombes, le second 26, & le troisième 30; ce qui est évident, puisque ces nombres se rencontrent avec les conditions de la Question.

Hij

SEPTIEME QUESTION.

L'on a assiégué une Place, dont la Garnison étoit composée de Troupes Allemandes, Angloises, Hollandoises, & Espagnoles. Après la prise de la Place l'on a trouvé qu'il y avoit eu ensemble autant d'Allemands, d'Anglois & de Hollandois de tuez, moins 620 hommes que d'Espagnols; autant d'Allemands, d'Anglois & d'Espagnols ensemble moins 460 hommes que de Hollandois; autant d'Allemands, de Hollandois & d'Espagnols ensemble moins 380 hommes que d'Anglois: enfin autant d'Anglois, de Hollandois & d'Espagnols ensemble moins 500 hommes que d'Allemands. On demande combien il y a eu d'Allemands de tuez, combien d'Anglois, de Hollandois & d'Espagnols.

Ayant nommé u le nombre d'Allemands, x celui des Anglois, y celui des Hollandois, & z celui des Espagnols, nous supposons que $620 = a$; que $460 = b$; que $380 = c$, & que $500 = d$, afin de rendre la solution de la Question plus generale.

Cela posé, comme cette Question me donne quatre équations, j'écris $u+x+y=z+a$ pour la premiere, $u+x+z=y+b$ pour la seconde, $u+y+z=x+c$ pour la troisieme, & $x+y+z=u+d$ pour la quatrieme. Après
 * Art. 129. cela je dégage une inconnue dans la premiere équation *, qui sera, par exemple, z pour avoir $u+x+y-a=z$, qui me donne la valeur de z , que je substitue dans les trois autres équations, qui sont changées en celles-ci, $u+x+u+x+y-a=y+b$, $u+y+u+x+y-a=x+c$, & $x+y+u+x+y-a=u+d$, ou bien en celles-là, $2u=a+b-2x$, $2y=a+c-2u$, & $2x=a+d-2y$, après les avoir réduit en moindres termes, & dégagé $2u$, $2x$, & $2y$, ou prenant la valeur de $2u$ pour la substituer dans l'équation $2y=a+c-2u$, il vient $2y=a+c-a-b$
 * Art. 129. $+2x$, où u ne se trouve plus *: & si à la place de $2y$ je mets sa valeur dans l'équation $2x=a+d-2y$, il viendra cette derniere équation, $2x=a+d-a-c+a+b-2x$,

où bien $x = \frac{a+d-c-b}{4} *$, où il n'y a plus d'inconnues: * Art. 317
& 115.

or si à la place de $2x$, dans l'équation $2u = a + b - 2x$ l'on met la moitié de la valeur de $4x$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b$, l'on aura $2u = a + b - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$, ou $2u = \frac{a+b-d+c}{2}$, ou $u = \frac{a+b-d+c}{4}$, qui donne la valeur de u , & si l'on met dans l'équation $2y = a + c - 2u$, la moitié de la valeur $4u$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}c$, l'on aura $2y = a + c - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}c$, ou $y = \frac{a+c-b+d}{4}$, qui donne la valeur de y : enfin si l'on met dans l'équation $u + x + y + z = a$, les valeurs de u , x & y , l'on aura après la réduction $z = \frac{b+c+d-a}{4}$.

Comme l'on vient de trouver $u = \frac{a+b-d+c}{4}$, $x = \frac{a+b+d-c}{4}$, $y = \frac{a+c-d-b}{4}$, & $z = \frac{b+c+d-a}{4}$: il s'ensuit que le Problème est résolu; puisque si l'on divise $1460 - 500$ par 4 , qui est égal à $\frac{a+b+c-d}{4}$, l'on trouvera 240 pour la valeur de u ; & en faisant de même pour les autres, l'on trouvera 300 pour la valeur de x , 260 pour celle de y , & 180 pour celle de z . Ainsi il y a eu 240 Allemands de tuez, 300 Anglois, 260 Hollandois, & 180 Espagnols: ce qui est évident, puisque ces nombres répondent aux circonstances de la Question.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE

LIVRE SECOND.

Qui traite des proportions des Rapports & des Fractions.

DEFINITIONS.

130. **O**N appelle *Homogenes* les grandeurs de même genre, comme deux *Nombres*, deux *Lignes*, deux *Surfaces*, deux *Solides*.

131. On les appelle *Hétérogenes*, quand elles sont de divers genre, comme un *Nombre*, une *Ligne*, une *Surface*, un *Solide*.

132. *Raison* ou *Rapport* est la comparaison de deux grandeurs *homogenes*.

133. Ce Rapport peut être de deux manières, *Arithmétique*, ou *Géométrique*.

134. Le Rapport *Arithmétique* est quand on considère combien la plus grande surpasse la plus petite ; ce qui s'appelle *différence*. Par exemple, combien 15 surpasse 5, ou *a* surpasse *b* ; comme on ne peut le connaître que par la soustraction, on marque $15 - 5$, ou $a - b$: car on peut prendre la soustraction indiquée pour la soustraction même, ou pour la différence des deux grandeurs qui la composent.

135. Le Rapport *Géométrique* est quand on considère la manière dont une grandeur est contenue dans une autre. Par exemple, combien de fois 4 est contenu dans 12, ou combien de fois *b* est contenu dans *a* ; & comme

on ne peut le sçavoir que par la division , l'on marque $\frac{12}{4}$ ou $\frac{a}{b}$; car on peut prendre la division indiquée pour la division même , ou pour le quotient des quantitez qui la forment.

136. Les grandeurs qui ont entr'elles un rapport de nombre à nombre , sont appellées *Commensurables* , parce qu'elles ont au moins l'unité pour commune mesure. Par exemple , une ligne de 4 pieds est dite commensurable avec une ligne de 10 pieds , parce que ces deux lignes ont un rapport de nombre à nombre , qui est celui de 4 à 10.

137. Les grandeurs qui n'ont point un rapport de nombre à nombre , ou qui ne peuvent avoir de mesures communes si petites qu'elles soient , sont nommées *Incommensurables*. Par exemple , si l'on a un carré de 16 pieds , & un autre de 32 pieds , la racine du premier carré sera incommensurable avec celle du second ; car comme 32 n'est point un nombre carré , quelque près que l'on puisse approcher de la racine de ce nombre , il y aura toujours quelque reste , si petit qu'il puisse être : ainsi ne pouvant trouver précisément la racine de 32 , elle sera donc incommensurable avec celle de 16 , puisqu'on ne pourra pas déterminer le rapport de ces deux racines.

138. Comme une raison ou rapport est toujours composée de deux termes , le premier s'appelle *Antecedent* , le second *Consequent* : ainsi comparant 12 avec 4 , ou a avec b , 12 est l'antecedent , & 4 le consequent , de même que a est encore l'antecedent , & b le consequent.

139. Une raison est égale à une autre , quand l'antecedent de l'une contient autant de fois son consequent , que l'antecedent de l'autre contient le sien. Par exemple , la raison de 12 à 4 est égale à celle de 15 à 5 , parce que 12 contient autant de fois 4 , que 15 contient de fois 5 ; sçavoir , 3 fois , & pour lors on marque $\frac{12}{4} = \frac{15}{5}$: & si a a même rapport avec b , que c avec d , l'on peut marquer

encore $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, qui fait voir que les quatre grandeurs a, b, c, d , forment deux rapports Géométriques égaux.

140. Comme $\frac{1}{4}$, ou $\frac{a}{b}$, representent également des rapports Géométriques des divisions & des fractions, on remarquera que lorsqu'il s'agira de rapport, on appellera le terme qui est au dessus de la ligne, *Antecedent*, & celui qui est au dessous, *Consequent*, & que quand il s'agira de division, le premier sera appelé *Dividende*, & le second *Diviseur*; & que quand on parlera de fractions, le premier sera appelé le *Numérateur*, & l'autre le *Dénominateur*.

141. On appelle *Raison d'égalité* celle où l'antecedent est égal au consequent, & on l'appelle *Raison d'inégalité*, lorsque l'un est plus grand que l'autre; ce qui peut arriver en deux manieres. La premiere, quand l'antecedent est plus grand que le consequent, pour lors on la nomme *Raison de plus grande inégalité*; la seconde, quand l'antecedent est moindre que le consequent, on l'appelle *Raison de moindre inégalité*.

142. Si quatre grandeurs sont disposées de telle sorte que la premiere surpasse ou soit surpassée par la seconde, comme la troisième surpasse ou est surpassée par la quatrième, elles composeront une Proportion qu'on appelle *Arithmétique*. Ainsi 2, 4, 6, 8, ou bien 8, 6, 4, 2, composent une Proportion Arithmétique.

143. S'il se trouve plus de quatre grandeurs, qui soient en Proportion, c'est-à-dire, qui se surpassent chacune de la même quantité, on les appelle *Progression Arithmétique*, comme les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

144. Si quatre grandeurs sont disposées de telle sorte que la premiere contienne autant de fois, ou autant de parties de la seconde, que la troisième contient de fois la quatrième, ou de ses parties, elles composent une Proportion qu'on appelle *Géométrique*: ainsi 15. 5 :: 12. 4. composent cette Proportion, puisque 15 est à 5 comme

12 est à 4, c'est-à-dire, puisque 15 contient autant de fois-5 que 12 contient de fois 4.

Mais si au lieu de nombre l'on prend des lettres pour exprimer une Proportion Géométrique, l'on voit que si on nomme e , ou toute autre lettre, le rapport du premier terme au second, il faudra aussi nommer e le rapport du troisième terme au quatrième : ainsi supposant que de quatre grandeurs a, b, c, d , il y ait même raison du premier terme au second, que du troisième au quatrième, nommant e le rapport des antécédens aux conséquens ; l'on aura donc $\frac{a}{b} = e$, & $\frac{c}{d} = e$; & comme ces deux rapports sont égaux, l'on pourra marquer si l'on veut $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

145. Pour distinguer la Proportion *Géométrique* d'avec la Proportion *Arithmétique*, lorsqu'elles sont exprimées par des lettres, l'on marque quatre petits points entre le second & le troisième terme de la Proportion Géométrique, qui signifient *comme*, & l'on n'en marque que deux entre le second & le troisième terme de la Proportion Arithmétique, qui signifient la même chose ; ainsi $a.b::c.d$. marque que a est à b , comme c est à d ; c'est-à-dire, que $a.b.c.d$. sont en Proportion Géométrique ; & quand on verra $a.b:c.d$. cela voudra dire que $a.b.c.d$. sont en Proportion Arithmétique.

146. S'il se trouve plus de quatre grandeurs qui soient en Proportion Géométrique, c'est-à-dire, dont les termes se contiennent également, on les appelle *Progression Géométrique*, comme 2. 4. 8. 16. 32. &c.

147. La Proportion tant *Arithmétique* que *Géométrique*, est *discrete* ou *continue* : la continue est composée de trois termes, que l'on nommera *Proportion Arithmétique continue*, quand le premier terme est autant surpassé par le second, que le second est surpassé par le troisième, comme 2. 4. 6. & la *Proportion Géométrique continue*, est celle dont le premier terme a même rapport avec le second, que le second avec le troisième ; de même que 4. 6. 9. Quant à la *Proportion discrete*, elle n'est autre

chose qu'une Proportion Arithmétique ou Géométrique, composée de quatre termes, comme celles que l'on a vu ci-devant.

148. La Proportion continue Arithmétique se marque ainsi $\div 2. 4. 6.$ ou $\div a. b. c.$ & la Géométrique se marque $\ddot{::} 4. 6. 9.$ ou bien $\ddot{::} a. b. c.$ & quelquefois $a. b :: b. c.$ parce que le conséquent de la première raison peut servir d'antécédent à la seconde.

149. Les quantitez qui forment une Proportion, sont nommées *proportionnelles* : ainsi $a. b :: c. d.$ renferme les quatre proportionnelles $a. b. c. d.$ & la Proportion continue $\ddot{::} a. b. c.$ n'en renferme que trois, dont celle du milieu est nommée *moyenne proportionnelle*, *Arithmétique*, ou *Géométrique*, selon que la Proportion est Arithmétique ou Géométrique; & dans l'une & dans l'autre Proportion le premier terme & le dernier sont nommez *extrêmes*, & les deux du milieu sont appelez *moyens*.

AVERTISSEMENT.

Je crois devoir avertir ici ceux qui commencent la Géométrie, qu'il est de la dernière importance de s'appliquer à bien sçavoir les Propositions de ce second Livre, particulièrement la première, puisque c'est presque par elle seule que sont démontrées toutes les Propositions où il s'agit de rapport & de proportion.

PROPOSITION PREMIERE.

Théoreme.

Si quatre grandeurs sont en proportion Géométrique, le produit des extrêmes sera égal à celui des moyens, c'est-à-dire, que si $a, b :: c, d$, on aura $ad = bc$.

DEMONSTRATION.

150. Comme dans la proportion $a. b :: c. d.$ le rapport de a à b doit être le même que celui de c à d , l'on aura

donc $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ * ; & si l'on fait évanouir la fraction du pre- * Art. 139.

mier membre, l'on aura $a = \frac{bc}{d}$ * ; & faisant évanouir aussi * Art. 112.

la fraction du second membre, l'on voit que $ad = bc$; ce qui prouve que le produit des extrêmes a & d est égal à celui des moyens b & c . C. Q. F. D.

Quoique cette démonstration soit fort naturelle , en voici une autre qui paroîtra peut-être moins abstraite.

151. Ayant $a. b :: c. d$. si l'on suppose que $\frac{a}{b} = f$, * Art. 144.

l'on aura aussi $\frac{c}{d} = f$ * ; & en faisant évanouir les fractions,

l'on aura $bf = a$, & $df = c$ * : & si au lieu des antecédens * Art. 112.

a & c de la proportion, on met à leurs places leurs valeurs bf & df , on aura $bf, b :: df, d$, où le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, puisque l'un & l'autre donnent $bdf = bdf$, qui est la même chose que $ad = bc$.

COROLLAIRE I.

152. Il suit de cette proposition que dans une proportion Géométrique continue, le produit des extrêmes est égal au carré de la moyenne ; car si l'on a $a :: b. c$. ou bien $a. b :: b. c$. l'on aura $ac = bb$.

COROLLAIRE II.

153. Il suit encore que connoissant trois termes a, b, c , d'une proportion, on pourra toujours trouver le quatrième ; car si l'on nomme x ce quatrième, l'on aura $a, b :: c, x$; par conséquent $ax = bc$, ou bien $x = \frac{bc}{a}$ * , qui * Art. 109. fait voir que pour trouver ce quatrième terme, il faut multiplier le second par le troisième, & diviser le produit par le premier.

COROLLAIRE III.

154. Il suit encore qu'on peut toujours prendre le produit du second & du troisième terme d'une propor-

tion divisez par le premier pour le quatrième terme de la même proportion ; car comme x est égal à $\frac{bc}{a}$, l'on pourra donc avec les trois termes a, b, c , écrire $a.b :: c.\frac{bc}{a}$; l'on voit que la règle de trois est fondée sur le Théorème précédent, puisqu'on ne fait autre chose dans l'opération de cette règle, que de chercher un quatrième terme proportionnel aux trois premiers.

155. De même dans la proportion continue connoissant les deux premiers termes a & b , l'on trouvera le troisième terme x en quarrant la moyenne b , & divisant le carré bb par a , puisqu'ayant $a.b.x$ l'on aura $bb = ax$, par conséquent $\frac{bb}{a} = x$.

156. Mais si l'on avoit le premier terme a & le troisième c , & que l'on voulût trouver la moyenne, que nous appellerons x , il faudroit multiplier ce premier terme par le troisième, & extraire la racine carrée du produit, cette racine seroit la moyenne que l'on cherche ; car ayant $a.x.c$ l'on aura $ac = xx$, par conséquent $\sqrt{ac} = x$.

PROPOSITION II.

Théoreme.

157. Si quatre grandeurs sont disposées de telle sorte que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre grandeurs seront proportionnelles.

DEMONSTRATION.

Si les quatre grandeurs a, b, c, d , donnent $ad = bc$, je dis que $a, b :: c, d$, ou bien $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ * ; pour le prouver, il n'y a qu'à diviser les deux produits égaux ad & bc chacun par la même grandeur bd , l'on aura les exposans nouveaux $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$; car $\frac{ad}{bd}$ est égal à $\frac{a}{b}$, en effaçant d dans

le numérateur & dans le dénominateur. Par la même raison $\frac{bc}{ba}$ est égal à $\frac{c}{a}$, en effaçant aussi b dans le numérateur & dans le dénominateur. Or comme on a divisé deux grandeurs égales par une même grandeur, les quotiens doivent être égaux ; par conséquent $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, qui donne $a, b :: c, d$. C. Q. F. D.

158. Il est à remarquer que selon ce Théoreme, l'on pourra toujours prouver que quatre grandeurs sont proportionnelles, lorsqu'on fera voir que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens ; c'est pourquoi il est à propos d'être bien prévenu de ce principe, parce qu'il va être le fondement de toutes les démonstrations que nous ferons par l'Algebre.

COROLLAIRE I.

159. Il suit de cette proposition qu'une équation peut toujours être regardée comme ayant un de ses membres formé par le produit des extrêmes, & l'autre par celui des moyens d'une proportion, & que l'on peut même former une proportion avec les racines des produits qui forment chaque membre d'une équation, comme on le verra ailleurs.

COROLLAIRE II.

160. Il suit encore du Théoreme précédent que si quatre grandeurs sont en proportion Géométrique, elles le seront encore dans les quatre variations suivantes : premièrement, en *raison inverse* ; secondement, en *raison alterne* ; troisièmement, en *composant* ; quatrièmement, en *divisant*.

161. Pour changer en *raison inverse*, l'on fait servir les conséquens d'antecedens, & les antecedens de conséquens, c'est-à-dire, que si $a, b :: c, d$, que $b, a :: d, c$; ce qui est bien évident, puisqu'on vient de voir que les quatre termes d'une proportion peuvent toujours former une équation ; & comme la proportion inverse, aussi-bien

que la directe, donne $bc = ad$, il s'ensuit qu'en renversant les termes, cela n'empêche pas qu'ils ne forment toujours une proportion.

162. Pour changer en *raison alterne*, l'on compare les antecedens avec les antecedens, & les consequens avec les consequens, c'est-à-dire, que si $a, b :: c, d$, on peut dire $a, c :: b, d$; ce qui est bien évident, puisque l'un & l'autre donnent $ad = bc$.

163. En *composant* l'on se fait des antecedens de la somme de l'antecedent & du consequent, pour les comparer avec les mêmes consequens, c'est-à-dire, que si $a, b :: c, d$, on aura $a + b, b :: c + d, d$; ce qui sera évident, si l'on fait voir que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, c'est-à-dire, si $ad + bd$ est égal à $bc + bd$. Or comme l'on a $bc = ad$, si à la place de bc dans le produit des extrêmes, l'on met ad , qui lui est égal, l'on aura $ad + bd = ad + bd$.

164. En *divisant* on se fait des antecedens de la différence qu'il y a de l'antecedent au consequent; ainsi si $a, b :: c, d$, on en fait $a - b, b :: c - d, d$; ce que l'on prouvera encore en faisant voir que le produit des extrêmes $ad - bd$ est égal à celui des moyens $bc - bd$, pour cela comme on a toujours $bc = ad$, il ne faut que mettre bc à la place de ad dans le produit des extrêmes, & l'on aura $bc - bd = bc - bd$.

PROPOSITION III.

Théoreme.

165. Lorsque quatre grandeurs sont en proportion Arithmétique, la somme des deux extrêmes est égale à la somme des deux moyens, c'est-à-dire, que si l'on a a, b, c, d , il faut prouver que $a + d = b + c$.

DEMONSTRATION.

Comme ces quatre grandeurs doivent se surpasser également, * nous supposons que la première a est surpassée par la seconde d'une quantité e : cela étant, l'on

* Art. 142.

aura $b = a + e$; & comme c doit aussi surpasser b de la même quantité e , l'on aura $b + e = c$, ou bien $a + 2e = c$, & par la même raison l'on aura $a + 3e = d$: or si au lieu de $\div a. b. c. d.$ l'on écrit $a, a + e, a + 2e, a + 3e$, l'on aura $2a + 3e = 2a + 3e$, pour la somme des extrêmes & celle des moyens C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

166. Il suit de cette Proposition que dans une proportion continue Arithmétique la somme des deux extrêmes est égal au double de la moyenne ; car si à la place de $\div a. b. c.$ l'on écrit $a, a + e, a + 2e$, l'on aura pour la somme des extrêmes $2a + 2e$, qui est double de la moyenne $a + e$.

Ainsi pour trouver une moyenne Arithmétique entre deux nombres 4 & 10, il faut les ajouter ensemble pour avoir 14, & en prendre la moitié pour la moyenne ; car 4 est à 7, comme 7 est à 10, puisque ces nombres se surpassent également.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

167. Lorsque plusieurs grandeurs sont en proportion Géométrique, ou qu'elles forment des rapports égaux, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme celui des antécédens que l'on voudra est à son conséquent, c'est-à-dire, que si des grandeurs comme $a. b. c. d. e. f.$ forment les rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, on aura $a + c + e, b + d + f :: a. b.$ ou comme c est à d .

DEMONSTRATION.

Pour le prouver, nous ferons voir que le produit des extrêmes, & celui des moyens, donnent $ab + cb + be = ab + ad + af$; ce qui est bien évident, si l'on considère que

selon l'hypothese $a, b :: c, d$, & $a, b :: e, f$, qui donne $ad=bc$, & $be=af$, qui font voir que dans le premier membre de la premiere équation cb est égal à ad dans le second, & que be du premier est égal à af du second. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

Théoreme.

168. Lorsque deux raisons ont même rapport à une troisième, ces deux raisons sont égales entr'elles, c'est-à-dire, que si l'on a $a, b :: e, f$, & $c, d :: e, f$, on aura $a, b :: c, d$.

DEMONSTRATION.

Si l'on divise l'antecedent a par son consequent b , & que le quotient soit g , divisant de même les autres antecedens par leurs consequens, le quotient sera encore g ;

ainsi l'on aura $\frac{a}{b}=g$, $\frac{c}{d}=g$, $\frac{e}{f}=g$, qui donne $bg=a$,

*Art. 113. $fg=e$, $dg=c$. * Or pour faire voir que $a, b :: c, d$, il n'y a qu'à mettre bg à la place de a , & dg à la place de c pour avoir $bg, b :: dg, d$, d'où l'on tire $bdg=bdg$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

Théoreme.

169. Deux grandeurs demeurent en même raison, quoique l'on ajoute à l'un & à l'autre, pourvu que ce que l'on ajoute à la premiere soit à ce que l'on ajoute à la seconde comme la premiere est à la seconde.

DEMONSTRATION.

Si aux deux grandeurs a & b l'on ajoute les deux grandeurs c & d , & que a soit à b comme c est à d , je dis que $a+c, b+d :: a, b$, & pour le prouver nous ferons

Art. 158. voir que $ab+cb=ab+ad$ formé par le produit des extrêmes & celui des moyens ; pour cela considerez que l'on

l'on a $a, b :: c, d$; par conséquent $cb = ad$, & que si à la place de ad l'on met cb dans le second membre de la première équation, on aura $ab + cb = ab + cb$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

Théoreme.

170. Deux grandeurs demeurent en même raison, quoique l'on retranche à l'une & à l'autre, pourvu que ce qu'on retranche à la première soit à ce que l'on retranche à la seconde comme la première est à la seconde.

DEMONSTRATION.

Si l'on a deux grandeurs a & b , & deux autres c & d , de manière que a soit à b , comme c est à d , je dis que $a - c, b - d :: a, b$; & pour le prouver, nous ferons voir * que $ab - ad = ab - bc$: pour cela considérez que selon la supposition $a, b :: c, d$, par conséquent $ad = bc$, & que si à la place de bc l'on met ad dans le second membre de la première équation, on aura $ab - ad = ab - ad$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

Théoreme.

171. Si l'on multiplie les deux termes d'une raison par une même quantité, les produits seront dans la même raison que ces termes étoient avant d'être multipliés.

DEMONSTRATION.

Pour prouver que si l'on multiplie deux grandeurs comme a & b par une autre grandeur c , l'on a $ac, bc :: a, b$, considérez que * le produit des extrêmes, & celui des * Art. 158. moyens donnent $abc = abc$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

172. Comme les rapports ou les divisions indiquées sont des fractions, il s'ensuit par cette proposition qu'on peut

K

multiplier le numérateur & le dénominateur d'une fraction par une grandeur quelconque, sans changer la valeur de cette fraction ; ainsi multipliant $\frac{a}{b}$ par c , on aura toujours $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

PROPOSITION IX.

Théoreme.

173. Si l'on divise les deux termes d'une raison par une même quantité, les quotiens seront dans la même raison que les grandeurs que l'on a divisé.

DEMONSTRATION.

Pour démontrer que si l'on divise deux grandeurs a & b par une même quantité c , les quotiens seront dans la même raison que ces grandeurs, nous supposons que * Art. 113. $\frac{a}{c} = d$, & que $\frac{b}{c} = f$. Cela posé, considérez que * $a = cd$ & $b = cf$, & que pour prouver que $a, b :: d, f$, on n'a qu'à mettre à la place de a & de b (dans la proportion) leur valeur cd & cf , pour avoir $cd, cf :: d, f$, qui donnera $cdf = cdf$ pour le produit des extrêmes & celui des moyens. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

174. Il suit de cette proposition que l'on peut diviser le numérateur & le dénominateur d'une fraction par une même quantité, sans changer la valeur de la fraction : Car si l'on divise, par exemple, $\frac{abc}{dc}$ par c , l'on aura toujours $\frac{abc}{dc} = \frac{ab}{d}$. Ce qui est bien évident ; car si l'on forme une proportion comme $abc, dc :: ab, d$ avec ces deux rapports l'on verra qu'elle est juste, puisque * le produit des extrêmes & celui des moyens donnent $abcd = abcd$: ainsi dans la suite quand on aura des fractions qui con-

* Art. 150.

tiendront des lettres semblables dans le numérateur & le dénominateur, on pourra les effacer, pourvu que l'on en efface autant dans le numérateur que dans le dénominateur, ce qui s'appelle réduire une fraction en moindre dénomination.

PROPOSITION X.

Théoreme.

175. Dans toutes équations les racines des produits qui forment chaque membre, sont réciproquement proportionnelles, c'est-à-dire, qu'en prenant les racines d'un des membres pour les extrêmes, & les racines de l'autre pour les moyens, on formera une proportion Géométrique.

DEMONSTRATION.

Si l'on a formé, par exemple, l'équation $aad = bbc$, il faut prouver que $aa, bb :: c, d$; pour cela je divise chaque membre par dc , qui me donne $\frac{aad}{dc} = \frac{bbc}{dc}$, ou $\frac{aa}{c} = \frac{bb}{d}$ * Art. 174; en effaçant les lettres semblables; d'où l'on tire $aa, bb :: c, d$. * C. Q. F. D. * Art. 159.

176. Comme on ne peut réduire une équation en proportion, sans que les produits de chaque membre se puissent séparer par la division, l'on est souvent obligé, quand les membres contiennent plusieurs termes, de faire passer un terme d'un membre dans l'autre, pour la réduire en proportion: par exemple, comme on ne peut réduire en proportion cette équation $bbcc = aadd + ccxx$, à cause que le second membre ne peut être divisé par aucune quantité, je fais passer $ccxx$ du second membre dans le premier pour avoir $bbcc - ccxx = aadd$, dont le premier membre peut être divisé par cc , & le second par dd ; mais si on les divise l'un & l'autre par $ccdd$, l'on aura

$\frac{bbcc - ccxx}{ccdd} = \frac{aadd}{ccdd}$, ou $\frac{bb - xx}{dd} = \frac{aa}{cc}$ *, d'où l'on tire $bb - xx, aa :: cc, dd$ * Art. 174; $dd :: aa, cc$.

Kij

De même pour réduire en proportion l'équation $axy - b^4 = aabb$, l'on voit qu'il faut faire passer b^4 du premier membre dans le second pour avoir $axy = aabb + b^4$. D'où l'on tire $aa + bb$, $xy : aa, bb$. Il en fera ainsi des autres.

AVERTISSEMENT.

Comme les rapports sont presque toujours exprimez en fractions, & que ces rapports ou fractions se trouvent souvent dans le calcul Algebrique, il nous reste à faire voir comme on soustrait, comme on multiplie, & comme on divise les fractions, afin de n'être point arrêté aux endroits où il s'en rencontrera.

MANIERE DE REDUIRE LES FRACTIONS en même dénomination.

177. Pour réduire deux fractions en même dénomination, comme $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$, ou autrement leur donner un dénominateur commun, il faut multiplier le numérateur & le dénominateur de la seconde fraction par le dénominateur de la première, c'est-à-dire, $\frac{3}{4}$ par 3 pour avoir $\frac{9}{12}$. * & puis multiplier le numérateur & le dénominateur de la première fraction par le dénominateur de la seconde, c'est-à-dire, $\frac{2}{3}$ par 4 pour avoir $\frac{8}{12}$. * & l'on aura les deux fractions $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$, qui auront 12 pour dénominateur commun.

Pour réduire en même dénomination $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, je multiplie encore $\frac{c}{d}$ par b , & $\frac{a}{b}$ par d , pour avoir $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{bd}$, dont le dénominateur commun est bd .

Mais si l'on avoit plusieurs fractions, comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, à réduire en même dénomination, il faudroit commencer par multiplier les deux dénominateurs 3 & 2 l'un par l'autre, & multiplier $\frac{3}{5}$ par le produit 6 pour avoir $\frac{6}{5}$.

ensuite multiplier le premier dénominateur par le troisième, c'est-à-dire, 3. par 5, & multiplier le produit 15 par $\frac{1}{2}$ pour avoir $\frac{15}{2}$, il faut multiplier $\frac{2}{3}$ par 10 produit du second & du troisième dénominateur pour avoir $\frac{20}{3}$, $\frac{15}{2}$, & $\frac{20}{3}$, réduits en même dénomination, puisque le dénominateur commun est 30.

En agissant de même on verra que les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, pour avoir un dénominateur commun, seront changées en celles-ci $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$.

Il est évident qu'on ne change aucunement la valeur des fractions, en les réduisant en même dénomination, puisque l'on ne fait que multiplier les deux termes d'une raison par une même grandeur.

ADDITION DES FRACTIONS.

178. Pour additionner $\frac{2}{3}$ avec $\frac{2}{5}$, il faut les réduire en même dénomination pour avoir $\frac{4}{15}$ & $\frac{8}{15}$; ensuite ajouter les deux numérateurs pour faire de leur somme le numérateur d'une nouvelle fraction, dont le dénominateur sera le commun que l'on a trouvé: ainsi la somme de ces deux fractions est $\frac{4+8}{15}$, ou bien $\frac{12}{15}$.

Pour ajouter $\frac{ab}{c}$ avec $\frac{df}{g}$, on les réduira en même dénomination pour avoir $\frac{abg}{cg}$ & $\frac{cdf}{cg}$, & additionnant les deux numérateurs, on aura $\frac{abg+cdf}{cg}$ pour la somme des deux fractions $\frac{ab}{c}$ & $\frac{df}{g}$.

SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

179. Pour soustraire une fraction d'une autre, il faut les réduire toutes deux en même dénomination, soustraire le numérateur de la première de celui de la secon-

de, & donner à la difference le dénominateur commun.

Ainsi pour soustraire $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, je les réduis en même dénomination pour avoir $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$, je soustrais 8 de 9, & je marque pour la difference $\frac{9-8}{12}$, ou $\frac{1}{12}$.

Pour soustraire $\frac{c}{a}$ de $\frac{a}{b}$, je les réduis en même dénomination pour avoir $\frac{ba}{ba}$ & $\frac{ad}{bd}$, après quoi je soustrais le numérateur bc du numérateur ad , & j'écris $\frac{ad-bc}{bd}$ pour la difference.

180. Mais si l'on vouloit soustraire $a - \frac{cx}{d}$ de $2y + \frac{bb}{f}$, composez d'entiers & de fractions, il faudra réduire les entiers de chaque quantité en fraction, en multipliant les entiers par le dénominateur de la fraction à laquelle ils sont liez par les signes $+$ ou $-$: ainsi pour que $a - \frac{cx}{d}$ soit tout en fraction, il faut multiplier a par d , & écrire $\frac{ad-cx}{d}$, & pour ne faire aussi qu'une seule fraction de $2y + \frac{bb}{f}$, l'on multipliera $2y$ par f pour avoir $\frac{2yf+bb}{f}$; mais comme $\frac{ad-cx}{d}$ ne peut être soustrait de $\frac{2yf+bb}{f}$, sans qu'ils ne soient réduits en même dénomination, il faut donc leur donner un dénominateur commun *, & l'on aura $\frac{adf-cfx}{df}$, & $\frac{2yfd+bbd}{df}$; d'où soustrayant la quantité précédente, l'on aura $\frac{2yfd+bbd-adf+cfx}{df}$ pour la difference.

Art. 177.

MULTIPLICATION DES FRACTIONS.

181. Pour multiplier une fraction par une autre, on multiplie premierement les deux numérateurs l'un par l'autre, ensuite les deux dénominateurs, & l'on fait une nouvelle fraction avec les deux produits.

Ainsi pour multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{7}$, je multiplie les deux nu-

numérateurs l'un par l'autre, qui donnent 12, & les dénominateurs aussi l'un par l'autre, qui donnent 35, & j'écris $\frac{12}{35}$ pour le produit.

182. Pour multiplier $5\frac{3}{4}$ par $7\frac{5}{6}$, c'est-à-dire, cinq entiers & trois quarts, par sept entiers & cinq sixièmes, je réduis les entiers en fractions, en disant 4 fois 5 font 20, & 3 font 23, que je divise par 4 pour avoir $\frac{23}{4}$; je multiplie aussi 7 par 6 pour avoir 42, qui ajoutés avec 5 font $\frac{47}{6}$; & puis multipliant ces deux dernières fractions l'une par l'autre, il vient $\frac{1081}{24}$, qui étant réduits, c'est-à-dire, divisés par 24, donne $45\frac{1}{24}$ pour le produit.

Pour multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, je multiplie les deux numérateurs a & c , ensuite les deux dénominateurs b & d , & j'écris $\frac{ac}{bd}$ pour le produit.

Pour démontrer que $\frac{ac}{bd}$ est le produit de $\frac{a}{b}$ multiplié par $\frac{c}{d}$, nous supposons que $\frac{a}{b} = f$, & que $\frac{c}{d} = g$, & nous ferons voir que $\frac{ac}{bd} = fg$, ou que $ac = bdfg$, qui est la même chose. Pour cela je considère que $\frac{a}{b} = f$, donne $a = bf$, & que $\frac{c}{d} = g$ donne $c = dg$, & qu'en multipliant les deux membres $a = bf$ par les deux membres de $c = dg$, il vient $ac = bdfg$. C. Q. F. D.

183. Pour multiplier $\frac{bx-ay}{a}$ par $\frac{bx+ay}{a}$, je réduis les entiers en fractions, en les multipliant par le dénominateur de la fraction à laquelle ils sont liés avec les signes $+$ ou $-$, & il vient $\frac{bx-ay}{a}$ & $\frac{bx+ay}{a}$, & multipliant les deux numérateurs l'un par l'autre, c'est-à-dire, $bx-ay$ par $bx+ay$, il vient $bbxx - b x a y + b x a y - a a y y$, ou bien $bbxx - a a y y$, à qui il faut donner pour dénominateur le produit des dénominateurs des deux fractions, qui sera aa .

& l'on écrira $\frac{bbxx-aa\gamma\gamma}{aa}$ pour le produit de la multiplication, ou bien $\frac{bbxx}{aa} - \gamma\gamma$.

184. Quand on a une quantité composée d'entiers & de fractions, ou seulement de fractions à multiplier par un entier, il faut donner à l'entier l'unité pour dénominateur, & faire la multiplication comme ci-devant : ainsi pour multiplier $\frac{ac}{d}$ par une grandeur b , il faut réduire b en fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur, & au lieu de b , l'on aura $\frac{b}{1}$, qui étant multiplié par $\frac{ac}{d}$, le produit sera $\frac{abc}{d}$.

DIVISION DES FRACTIONS.

185. Pour diviser une fraction par une autre, il faut multiplier le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, & le produit sera le numérateur du quotient ; ensuite multiplier le dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur, & le produit sera le dénominateur du quotient.

Par exemple, pour diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{9}$, je multiplie 3 numérateur du dividende par 9 dénominateur du diviseur, & le produit 27 sera le numérateur du quotient : ensuite je multiplie le numérateur 2 du diviseur par le dénominateur 4 du dividende, & le produit 8 sera le dénominateur du quotient ; par conséquent $\frac{27}{8}$ sera le quotient, ou bien $3\frac{3}{8}$, parce que le numérateur 27. vaut trois entiers & trois huitièmes.

186. Pour diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, je multiplie a par d pour avoir ad , qui sera le numérateur du quotient, & b par c , qui en fera le dénominateur : ainsi $\frac{ad}{bc}$ sera le quotient que l'on cherche.

De

De même, si l'on vouloit diviser $\frac{ab-cc}{d}$ par $\frac{aa}{c}$, l'on multipliera $ab-cc$ par c , & aa par d , & l'on écrira $\frac{abc-ccc}{aad}$ pour le quotient.

187. Enfin si l'on avoit des entiers & des fractions à diviser par des entiers & des fractions, on réduira les entiers du dividende & du diviseur en fractions, comme on a fait pour la multiplication, & l'on fera la multiplication comme ci-devant.

Mais pour prouver que $\frac{a}{b}$ divisé par $\frac{c}{d}$ donne au quotient $\frac{ad}{bc}$ nous supposerons que $\frac{a}{b} = f$ & que $\frac{c}{d} = g$, & nous ferons voir que $\frac{ad}{bc} = \frac{f}{g}$: pour cela considérez que $a = bf$, & $c = dg$; & que si dans la fraction $\frac{ad}{bc}$ l'on met dans le numérateur bf à la place de a , qui lui est égal, & dg à la place de c dans le dénominateur, l'on aura $\frac{ad-bdf}{bc-bdg} = \frac{f}{g}$ en effaçant bd dans le numérateur & le dénominateur, donc $\frac{ad}{bc}$ est égal à $\frac{f}{g}$.

REGLE DE PROPORTION DES FRACTIONS.

188. Pour avoir un quatrième terme proportionnel aux trois fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$, & $\frac{8}{9}$, il faut multiplier la seconde fraction par la troisième, & le produit sera $\frac{24}{63}$, qu'il faut diviser par $\frac{2}{3}$, & le quotient sera $\frac{72}{126}$, ou bien $\frac{36}{63}$, & l'on aura $\frac{2}{3}, \frac{3}{7} :: \frac{8}{9}, \frac{36}{63}$.

189. Pour trouver un quatrième terme proportionnel aux grandeurs $\frac{ay}{b}$, $\frac{bx}{a}$, & a , il faudra, à cause que le troisième terme est un entier, le réduire en fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur, & multiplier le second terme $\frac{bx}{a}$ par le troisième $\frac{a}{1}$, & le produit sera

L

$\frac{abx}{a}$, qui étant réduit, donne bx , que je réduis en fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur. Ainsi je divise $\frac{bx}{1}$ par $\frac{ay}{b}$, & le quotient $\frac{bbx}{ay}$ est le quatrième terme que je cherche: par conséquent l'on aura $\frac{ay}{b}$, $\frac{bx}{a}$:: $\frac{a}{1}$, $\frac{bbx}{ay}$.

Si quelqu'un des termes étoit accompagné d'entiers, il faudroit les réduire en fractions, & faire la Regle comme ci-devant.

EXTRACTION DES RACINES DES QUANTITEZ

Fractionnaires.

190. Pour extraire la racine d'une fraction, il faut extraire la racine du numérateur pour en faire le numérateur d'une autre fraction, & extraire aussi la racine du dénominateur pour en faire le dénominateur de cette autre fraction, & cette nouvelle fraction sera la racine que l'on cherche. Ainsi la racine de $\frac{aa}{bb}$ sera $\frac{a}{b}$; la racine de $\frac{aacc}{aadyy}$ sera $\frac{ac}{ay}$. Il en fera de même des autres.

AVERTISSEMENT.

Nous n'avons considéré jusqu'ici en parlant des raisons que le rapport qu'une grandeur peut avoir avec une autre de même genre, & nous n'avons rien dit des raisons composées, parce que ces dernières étant formées par le produit de plusieurs raisons, il falloit être prévenu des opérations des quatre Regles des Fractions, parce que les fractions étant, comme nous l'avons dit *, des rapports; il falloit faire voir que ces rapports pouvoient être ajoutez, soustraits, multipliez & divisez: mais comme les raisons composées ont de la peine à être entendues par les Com-

* Art. 140.

mençans , & que d'ailleurs nous ne nous en servirons pas beaucoup dans la suite de cet Ouvrage , il suffira seulement de bien comprendre les Définitions que voici.

DEFINITIONS.

191. Si l'on multiplie plusieurs rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, le produit des numérateurs a, c, e , que l'on peut prendre pour des antécédens, & le produit des dénominateurs b, d, f , que l'on peut prendre pour des conséquens, formeront une *raison composée* $\frac{ace}{bdf}$, à cause qu'elle est composée des rapports simples $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, que l'on appelle aussi *Rapports composans*.

192. Une raison composée de deux raisons égales s'appelle *raison doublée* de chacune de ces raisons. Ainsi ayant $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si l'on multiplie les deux antécédens a & c l'un par l'autre, ^{ou les deux conséquens aussi l'un par l'autre} on aura $\frac{ac}{bd}$, qui est un *rapport doublé*, parce qu'il est composé de deux rapports égaux $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$.

193. Une raison composée de trois raisons égales, s'appelle *Raison triplée* de chacune de ces raisons ; c'est pourquoi si l'on a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, multipliant les trois antécédens a, c, e , l'un par l'autre, & les trois conséquens b, d, f , leur produit fera $\frac{ace}{bdf}$, qui est une *Raison triplée*, puisqu'elle est composée de trois raisons égales $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, & $\frac{e}{f}$.

Il faut prendre garde de ne point confondre la raison doublée avec la raison double, ni la raison triplée avec la raison triple ; car la raison double est une raison simple, parce qu'elle ne peut être que la raison d'une chose

Lij

qui feroit double d'une autre, au lieu que la raison doublée est composée de deux raisons, & même de deux raisons égales : ainsi quand je considère le rapport de 2 à 8, je vois qu'il peut être composé de celui de la raison de 2 à 4, & de celle de 4 à 8 ; mais comme ces deux raisons sont égales, elles composent ensemble une raison doublée : par conséquent la raison de 2 à 8 est doublée.

194. De même, il faut faire une différence de la raison triple à la raison triplée, parce que la raison triple est une raison simple, qui fait voir qu'une chose est triple d'une autre, au lieu que la raison triplée est, comme nous l'avons dit, une raison composée de trois raisons qui doivent être égales ; par exemple, la raison de 2 à 16 est triplée en la considérant composée de 2 à 4, de 4 à 8, & de 8 à 16.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE

LIVRE TROISIÈME.

Où l'on considère les différentes positions des Lignes droites.

DEFINITIONS.

I.

195. **L**ES Lignes parallèles sont celles qui étant prolongées comme l'on voudra, sont toujours également éloignées entr'elles, & dont les extrémités ne se rencontrent jamais comme AB & CD.

PLAN-
CHE I.
Fig. 7.

II.

196. L'Angle est un espace indéfini, causé par l'inclination d'une ligne sur une autre, lequel on appelle *Angle rectiligne*, quand ses deux lignes sont droites, comme ABC; *Angle curviligne*, quand les deux lignes sont courbes, comme DEF; & *Angle mixtiligne*, quand l'une des lignes est droite, & l'autre courbe, comme GHI.

Fig. 8. 9.
& 10.

III.

197. L'Angle droit est celui dont les deux lignes sont perpendiculaires entr'elles, comme CDB ou CDA.

Fig. 11.

IV.

198. L'Angle oblique est celui qui se fait par la rencontre de deux lignes obliques, c'est-à-dire, par la ren-

Fig. 12.

L iij

contre de deux lignes qui ne sont pas perpendiculaires entr'elles, ou qui se coupent à angles inégaux, comme LK & HI.

V.

199. L'*Angle obtus* est celui qui est plus ouvert ou plus grand qu'un droit, comme HIK.

VI.

200. L'*Angle aigu* est celui qui est plus petit ou moins ouvert qu'un droit, comme LIH.

VII.

201. L'on emploie ordinairement trois lettres pour nommer un Angle, & celle qui se trouve la seconde est toujours au point où les côtes de l'Angle se rencontrent, qui est nommé *Point angulaire*, ou *Sommet de l'Angle*.

VIII.

Fig. 13.

202. Le *Cercle* est une Surface plane bornée par une seule ligne courbe, qu'on nomme *Circonférence de Cercle*, au dedans de laquelle il y a un point appelé *Centre du Cercle*, duquel toutes lignes droites tirées jusqu'à la circonférence, que l'on nomme *Rayons du Cercle*, sont égales entr'elles, comme AB, AC, AD.

IX.

Fig. 14.

203. Le *Diamètre d'un Cercle* est une ligne droite qui passe par le centre, & dont les extrémités vont aboutir à la circonférence, comme ED, qui divise le cercle & la circonférence en deux parties égales, que l'on appelle indifféremment *demi-Cercle*, dont la moitié se nomme par conséquent *quart de Cercle*.

X.

204. *Arc de Cercle* est une partie de la circonférence, plus petite ou plus grande qu'un demi-cercle.

XI.

205. Les Mathématiciens ont divisé la circonférence du cercle en 360 parties égales, qu'ils ont appelées *Degrez*, & chaque Degré en 60 autres parties égales, qu'on appelle *Minutes*, dont chacune a été divisée en 60 autres parties égales, appelées *Secondes*. Ces divisions ont été faites particulièrement pour déterminer la mesure des angles.

XII.

206. La *Mesure* d'un angle est un arc de cercle décrit à volonté de sa pointe, & terminé par ses deux côtes. Ainsi l'on connoît que la mesure de l'angle ABC est l'arc AC; de sorte qu'autant de degrez & de minutes que contiendra AC, autant l'angle ABC vaudra de degrez & de minutes. On peut remarquer que la mesure d'un angle droit est toujours le quart de la circonférence d'un cercle, c'est-à-dire, de 90 degrez; car si l'on considère les deux diamètres AB, CD, qui se coupent à angles droits, on verra qu'ils divisent la circonférence du cercle en quatre parties égales, & que chacune est la mesure de l'angle droit qui lui correspond: par conséquent on peut dire encore qu'un demi-cercle est la mesure de deux angles droits.

Fig. 14.

Fig. 15.

PROPOSITION PREMIERE.

Problème. *

* Art. 5.

207. *D'un point donné hors d'une ligne donnée, tirer une perpendiculaire sur cette ligne.*

Pour tirer du point donné A une perpendiculaire sur la ligne BC, décrivez du point A comme centre un arc de cercle, qui vienne couper la ligne donnée aux points B & C: ensuite décrivez des points B & C deux arcs de cercle avec une même ouverture de compas plus petite que celle du rayon AC, pour avoir le point E, par lequel

Fig. 17.

faisant passer la ligne AD, je dis qu'elle sera perpendiculaire sur BC.

208. Pour le prouver, considérez que par la construction les lignes AB & BC sont égales, étant rayons d'un même cercle *, & que les lignes EB & EC sont aussi égales; ce qui fait voir que la ligne AD n'étant pas plus inclinée du côté B que du côté C, il s'ensuit * qu'elle est perpendiculaire sur BC.

* Art. 202.

* Art. 16.

PROPOSITION II.

Problème.

209. *D'un point donné dans une ligne donnée, élever une perpendiculaire.*

Fig. 18.

Pour élever une perpendiculaire sur la ligne BC au point donné A, prenez deux points B & C, également éloignés de A & de ces points comme centre, décrivez avec la même ouverture de compas deux arcs de cercle, qui se coupent en un point comme D; puis tirez du point D au point A la ligne DA: elle sera perpendiculaire sur BC.

Il est naturel que la ligne DA soit perpendiculaire sur BC; car comme les points B & C sont également éloignés du point A, & que par la construction le rayon BD est égal au rayon CD, il s'ensuit que la ligne DA est perpendiculaire sur BC, puisqu'elle n'est pas plus inclinée d'un côté que de l'autre.

PROPOSITION III.

Problème.

Fig. 19.

210. *Diviser une lignée donnée en deux parties égales.*

Pour diviser une ligne telle que AB en deux parties égales, décrivez des extrémités A & B comme centres, avec une même ouverture de compas deux arcs de cercle qui se coupent aux points C & D, & tirez par ces deux points la ligne CD, qui la coupera en deux également au point E.

Puisque

Puisque les points D & C sont également éloignés des extrémités A & B, l'on voit que la ligne CD est perpendiculaire sur le milieu de AB* : par conséquent elle divise la ligne AB en deux également, puisque le point E en est le milieu. *Art. 209.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

211. *On ne peut élever à un même point dans une ligne donnée plus d'une perpendiculaire.*

DEMONSTRATION.

Si on a élevé au point C de la ligne AB une perpendiculaire CE, il est visible que si on vouloit en élever une autre telle que CD sur le même point C, on ne le pourroit faire sans que cette ligne ne fût plus inclinée d'un côté que de l'autre, comme ici, plus vers A que vers B ; & comme ce feroit agir contre la définition des lignes perpendiculaires *, il s'ensuit qu'on n'en peut élever qu'une sur un même point dans une ligne. *Art. 197.

PROPOSITION V.

Théoreme.

212. *D'un point donné hors d'une ligne on ne peut faire tomber du même point qu'une seule perpendiculaire sur cette ligne.*

DEMONSTRATION.

Si du point A l'on a mené à la ligne DE la perpendiculaire AB, & que les points D, E, soient également éloignés de A, il est certain que le point de la ligne DE où tombera la perpendiculaire tirée de A, sera également éloignée des points D & E, tel que se trouve, par exemple, le point B : mais comme on ne peut tirer du point A une

M

autre ligne AC, sans que le point C ne soit à droite ou à gauche du point B, il s'ensuit que les points D & E ne seront pas également éloignés du point C, & que par conséquent la ligne AC ne sera point perpendiculaire sur DE.

PROPOSITION VI.

Théoreme.

213. *Une ligne perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes que l'on peut mener d'un point à une ligne.*

DEMONSTRATION.

Fig. 22. Si l'on a mené du point D la ligne DC perpendiculaire sur AB, je dis que cette ligne DC sera la plus courte de toutes celles que l'on peut mener du point D à la même ligne AB, & par conséquent plus courte que DF.

Art. 13. Pour le prouver, prolongez la ligne DC jusqu'en E, en sorte que CE soit égal à CD, tirez la ligne FE, & considérez que la ligne DE est plus petite que la ligne DFE, puisque, selon la définition de la ligne droite *, elle est la plus courte de toutes celles qu'on peut tirer du point D au point E. Or comme FC est perpendiculaire sur le milieu de DE, FD sera égal à FE : ainsi la ligne DC, moitié de DE, sera plus courte que DE, moitié de DFE. C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

Théoreme.

214. *Quand une ligne tombe obliquement sur une autre, elle forme deux angles, qui pris ensemble, valent deux droits.*

DEMONSTRATION.

Fig. 23. Pour prouver que les deux angles ABC & CBD pris ensemble, valent deux droits, décrivez du point B comme centre un demi-cercle, & considérez que l'angle ABC a pour mesure l'arc AC, & que l'angle CBD a pour mesure CD * : or comme ces deux arcs pris ensemble va-

lent le demi-cercle, & que le demi-cercle est la mesure de deux angles droits * ; il s'enfuit donc que ces angles **Art. 206;* ABC & CBD valent deux droits.

PROPOSITION VIII.

Théoreme.

215. Lorsque deux lignes droites se coupent, elles forment les angles opposés au sommet égaux.

DEMONSTRATION.

Pour démontrer que les lignes AB & CD, qui se cou- *Fig. 24;* pent au point E, forment les angles AEC & DEB au sommet égaux : du point E décrivez l'arc de cercle CADB, & considérez que si l'on retranche des deux demi-cercles CAD & ADB, l'arc AD, qui leur est commun, il restera l'arc AC égal à DB * ; ce qui prouve que l'angle **Art. 105;* AEC est égal à l'angle DEB, puisqu'ils ont pour mesure des arcs égaux. C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

Théoreme.

216. Lorsque deux lignes droites & parallèles viennent aboutir sur une troisième, elles forment des angles égaux du même côté.

DEMONSTRATION.

Pour démontrer que les deux parallèles AB & CD, *Fig. 25;* qui viennent tomber sur la ligne EF, forment les angles ABF & CDF du même côté égaux : considérez que l'angle n'étant autre chose que l'inclinaison d'une ligne sur une autre *, l'égalité de ces inclinaisons fera l'égalité des **Art. 196;* angles, & que les deux lignes AB & CD ne peuvent être parallèles, sans qu'elles soient également inclinées sur la ligne EF, vous verrez que l'angle ABF est égal à l'angle CDE. C. Q. F. D.

M ij

PROPOSITION X.

Théoreme.

217. *Lorsque deux lignes parallèles sont coupées par une troisième ligne, elles forment les angles alternes égaux.*

DEMONSTRATION.

Fig. 26. Si les lignes AB & CD sont parallèles, & qu'elles soient coupées par la ligne EF, l'angle AGF sera égal à l'angle EHD. Pour le prouver considérez que les angles AGF & CHF sont égaux entr'eux par le Théoreme précédent, & que les angles CHF & EHD sont aussi égaux par le Théoreme 8. D'où il s'enfuit que l'angle AGF est égal à l'angle EHD. C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

Problème.

218. *D'un point donné mener une parallèle à une ligne donnée.*

Fig. 27. Pour mener du point donné C une parallèle à la ligne AB, tirez du point C une ligne CB, qui aille rencontrer la ligne donnée a un point à volonté comme B, puis faites l'angle BCD égal à l'angle ABC, & vous aurez la ligne CD, qui sera parallèle à AB; ce qui est évident par le Théoreme précédent, puisque les angles alternes ABC & BCD sont égaux.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE QUATRIÈME.

Qui traite des propriétés des Triangles, & des Parallélogrammes

DEFINITIONS.

219. **F**igure rectiligne est une surface plane terminée par des lignes droites, appelées *Côtés*, qu'on nomme *Triangle*, quand elle est bornée par trois droites, *Quadrilatère*, quand elle est bornée par quatre lignes droites, & *Poligone*, quand elle est bornée par plus de quatre lignes droites.

220. L'on distingue de six sortes de Triangles ; le Triangle *équilateral*, le Triangle *isoscelle*, le Triangle *scalène*, le Triangle *rectangle*, le Triangle *oxigone* ou *acutangle*, & le Triangle *amblygone*, ou *obtus-angle*.

221. Le Triangle *équilateral* a ses trois angles & ses trois côtés égaux, l'*isoscelle* a deux angles & deux côtés égaux, le *scalène* a ses trois angles & ses trois côtés inégaux, le *rectangle* a un angle droit, l'*oxigone* a ses trois angles aigus, l'*amblygone* a un angle obtus.

222. La *base* d'un Triangle est le côté d'un Triangle, sur lequel on a tiré de l'angle opposé une perpendiculaire, qu'on appelle *hauteur* du Triangle : ainsi on connoît que la base du Triangle ABC est le côté AB à l'égard de sa hauteur ou perpendiculaire CD, soit qu'elle

Fig. 28

M ii

divise, comme ici, la base AB en deux parties AB, BD, qu'on appelle *segments* de la base, soit qu'elle tombe en dehors : ce qui arrivera, lorsqu'un des angles de la base fera obtus. On appelle aussi *base* le côté opposé à l'angle droit dans le Triangle rectangle, ou bien on le nomme *hypoténuse*.

Fig. 29. 2 2 3. *Trapeze* est un quadrilatere, comme G, qui n'a aucuns de ses côtez paralleles.

Fig. 30. 2 2 4. *Trapezoïde* est un quadrilatere qui a deux de ses côtez opposez paralleles, comme la figure H.

Fig. 31. 2 2 5. *Parallelogramme* est une figure quadrilatere, dont les côtez opposez sont paralleles & égaux, comme EF.

2 2 6. *Diagonale* est une ligne, comme CD, tirée dans un parallelogramme ou un rectangle d'un angle opposé à l'autre.

2 2 7. Si l'on mene par un point quelconque A de la diagonale CD une ligne BG parallele à ED, & une autre HI parallele à DF, l'on aura deux parallelogrammes AE & AF, qui seront dits *complementens* du parallelogramme EF.

2 2 8. *Figures semblables* sont celles qui ayant un même nombre de côtez, ont leurs angles égaux avec les côtez en proportion autour des mêmes angles

PROPOSITION PREMIERE.

Théoreme.

2 2 9. *L'angle extérieur d'un Triangle est égal aux deux intérieurs opposez, & les trois angles d'un Triangle valent deux droits.*

DEMONSTRATION.

Fig. 33. Pour prouver que l'angle extérieur BDC est égal aux deux autres intérieurs opposez A & B, tirez du point D la ligne DE parallele à AB, & considerez que l'angle A est égal à l'angle EDC par la neuvième du Liv. 3. & que

l'angle ABD est égal à l'angle BDE par la dixième du même Liv. & que par conséquent l'angle BDC est égal aux angles A & B pris ensemble.

Or comme il manque à l'angle BDC pour valoir deux droits, le troisième angle BDA du triangle ABD, je conclus que les trois angles de ce triangle sont égaux à deux droits. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

230. Il suit de cette proposition que connoissant deux angles dans un triangle, on pourra connoître le troisième en soustrayant la somme des deux angles connus de la valeur de deux droits, pour avoir la différence qui sera la valeur de l'angle que l'on cherche : ainsi connoissant dans le triangle EDF l'angle E de 50. degrez, & l'angle D de 70. pour avoir la valeur de l'angle F, on ajoutera ensemble 50. & 70. qui font 120. qu'il faut soustraire de 180. degrez, & la différence 60. degrez sera la valeur de l'angle F. Fig. 325

COROLLAIRE II.

231. Il suit encore que si deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, que le troisième du premier triangle sera égal au troisième du second : car si l'angle A est égal à l'angle D, l'angle C à l'angle F, il est certain qu'il manquera autant de degrez à la somme des deux angles A & C pour valoir deux droits, qu'à la somme des deux angles D & F, pour valoir aussi deux droits. Or comme cette différence n'est autre chose que la valeur du troisième angle, il s'ensuit que l'angle B sera égal à l'angle E.

PROPOSITION II.

Théoreme.

232. Deux Triangles sont égaux ; lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun avec l'angle compris égal.

DEMONSTRATION.

Fig. 34. Pour démontrer que le Triangle G sera égal au triangle H, si le côté BA est égal au côté ED, le côté BC au côté EF, & l'angle B à l'angle E, imaginons que l'angle B est appliqué sur l'angle E, comme ils sont supposés égaux, aussi-bien que leur côté les extrémités A & D aboutiront à un même point, aussi-bien que les extrémités C & F; par conséquent les côtés de ces triangles conviendront parfaitement les uns sur les autres; d'où il suit qu'ils sont égaux.

PROPOSITION III

Théoreme.

233. Deux Triangles sont égaux, quand ils ont un côté égal, & que les angles sur le côté égal sont égaux chacun à chacun.

DEMONSTRATION.

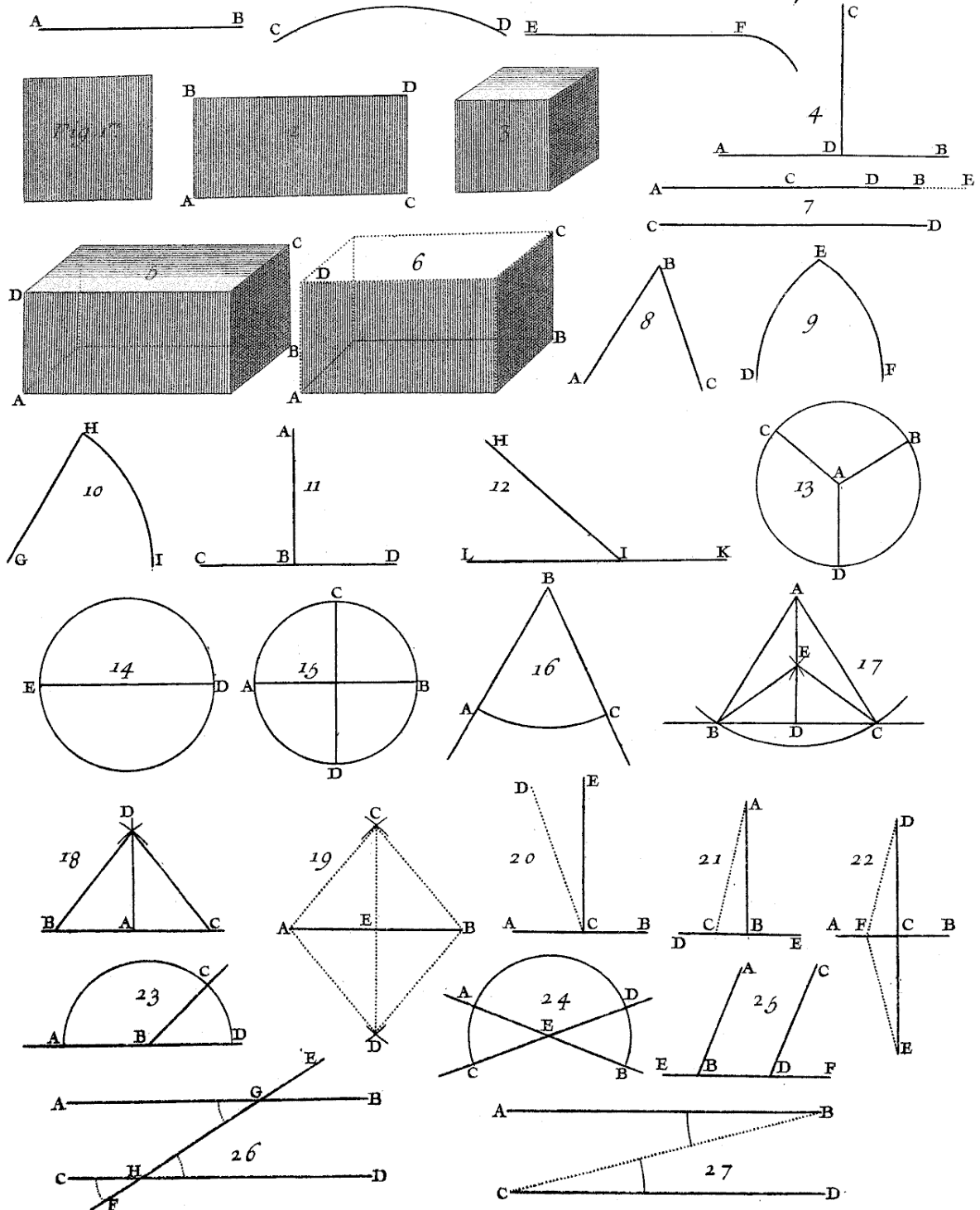
Fig. 34. Si le côté AC du triangle G est égal au côté DF du triangle H, & que l'angle A soit égal à l'angle D, l'angle C à l'angle F, il est certain que les triangles G & H seront égaux; car si l'on suppose le côté AC posé sur le côté DF, ils conviendront parfaitement, aussi-bien que les angles qui sont à l'extrémité. Or comme par le Corollaire précédent l'angle B sera égal à l'angle E, il s'ensuit que ces deux angles conviendront aussi l'un sur l'autre, ou bien ils ne feroient pas égaux entr'eux; par conséquent les côtés BA & ED seront égaux, aussi-bien que les côtés BC & EF; ce qui prouve que le triangle G est égal au triangle H. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

234. Les parallelogrammes qui ont la même base, & qui sont renfermez entre les mêmes paralleles, sont égaux.

DEMONSTR.



D É M O N S T R A T I O N .

Je dis que le parallélogramme AD sera égal au parallélogramme BF, s'ils ont la même base BD, & s'ils sont renfermez entre les mêmes parallèles AF & BH. Fig. 35.

Pour le démontrer, remarquez que les angles ABH & CDH sont égaux *, aussi-bien que les angles EBH & FDH, les uns & les autres étant formez par des parallèles qui aboutissent sur la ligne BH, & que si on retranche ces deux derniers angles des deux premiers, il restera l'angle ABE égal à l'angle CDF. * Or comme les côtes qui renferment les angles ABE & CDF sont égaux les uns aux autres, étant des côtes oppozés de parallélogramme, on aura le triangle ABE égal au triangle CDF par la proposition 2. & si de ces deux triangles on retranche le triangle CGE, qui leur est commun, il restera le Trapezoïde ABGC égal au trapezoïde DGEF *, auxquels ajoutant le triangle GBD, on verra que le parallélogramme AD est égal au parallélogramme BF. * C. Q. F. D. * Art. 216.
* Art. 105.
* Art. 105.
* Art. 104.

C O R O L L A I R E .

235. Il suit de la proposition précédente que les parallélogrammes qui ont des bases égales, & qui sont renfermez entre les mêmes parallèles, sont égaux; car pour prouver que le parallélogramme AD est égal au parallélogramme GF, si les bases CD & EF sont égales, il n'y a qu'à tirer les lignes CG & DH, qui formeront le parallélogramme CH, & considérer que ce parallélogramme est égal au parallélogramme AD, parce qu'ils ont la même base CD, & que le même parallélogramme CH est égal au parallélogramme GF, puisqu'ils ont aussi la même GH, & que par conséquent les parallélogrammes AD & GF sont égaux, puisqu'ils sont chacun égal à un troisième. Fig. 36.

N

PROPOSITION V.

Théoreme.

Fig. 37. 236. *Les triangles sont égaux, lorsqu'ayant la même base, ils sont renfermez entre les mêmes parallèles.*

DEMONSTRATION.

L'on entendra aisément que les triangles CBD & FBD sont égaux, s'ils ont la même base BD, & s'ils sont renfermez entre les mêmes parallèles : car si on considère qu'ils sont les moitiés des parallelogrammes égaux BA & BE, on verra que les tous étant égaux, les moitiés seront égales.

COROLLAIRE I.

Fig. 38. 237. Il suit de cette proposition que si un parallelogramme AD, & un triangle AEC, renfermez entre les mêmes parallèles, ont la même base AC, que le triangle AEC est la moitié du parallelogramme, parce que le triangle BAC, qui lui est égal, est aussi la moitié du parallelogramme AD.

COROLLAIRE II.

Fig. 38. 238. Comme le triangle BAC est égal au triangle AEC, il est constant qu'ayant la même base, ils doivent avoir la même hauteur. Or comme la hauteur du premier est la perpendiculaire BA, la hauteur du second sera donc la perpendiculaire EF, qui est égale à BA : ce qui fait voir que la hauteur d'un triangle incliné sur sa base est une ligne perpendiculaire, tirée du sommet du triangle sur le prolongement de sa base. Ce fera la même chose pour les parallelogrammes inclinez.

COROLLAIRE III.

Fig. 39. 239. Un triangle ABC étant la moitié d'un parallelogramme AG, il sera égal au parallelogramme ADEC, dont la hauteur HF est supposée la moitié de la perpen-

diculaire BF, qui sert de hauteur commune au triangle & au parallélogramme : or comme pour trouver la superficie du parallélogramme ADEC, il faut multiplier la base AC par sa hauteur HF, moitié de la perpendiculaire BF : il s'enfuit que *multipliant la base d'un triangle par la moitié de la perpendiculaire, ou, ce qui revient au même, toute la perpendiculaire par la moitié de la base, le produit donnera la superficie du triangle.*

COROLLAIRE IV.

240. Si l'on considère qu'un triangle ABC est composé Fig. 49.
d'une infinité de lignes parallèles, qui en sont les éléments, & que toutes les lignes étant également éloignées, se surpassent de la même quantité, on verra qu'elles composent une progression Arithmétique d'une quantité infinie de termes, qui commencent par 0, & dont la somme est exprimée par la perpendiculaire BD. Or comme l'on trouve la valeur d'un triangle, ou autrement la somme de toutes ces parallèles, en multipliant la plus grande, qui est la base par la moitié de la grandeur, qui en exprime la quantité, c'est-à-dire, par la moitié de la perpendiculaire BD, il s'enfuit qu'on peut tirer de ce raisonnement le principe suivant, qui est que *la somme des termes des quantités infinies en progression Arithmétique, en commençant depuis 0, est égal au produit du plus grand terme par la moitié de la grandeur qui exprime la quantité des termes.*

Il faut s'attacher à bien comprendre ce Corollaire, parce que nous nous en servirons utilement dans la suite.

PROPOSITION VI.

Théoreme.

241. Les complemens des parallélogrammes sont égaux.

DEMONSTRATION.

Pour prouver que les complemens AE & AF du parallélogramme EF sont égaux, considérez que le parallé- Fig. 31.
logramme EF
N ij

gramme EF est divisé en deux triangles égaux CED & CDF, de même que les parallelogrammes BI & HG : or si l'on retranche du triangle CED les deux triangles CBA & AHD, il restera le complement EA ; & si du triangle CDF on retranche pareillement les deux triangles CAI & ADG, qui sont égaux aux deux précédens, il restera le complement AF, égal au complement AE, puisque si de grandeurs égales on en retranche d'égales, les restans sont égaux. C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

Théoreme.

242. *Les parallelogrammes qui ont la même hauteur, sont dans la même raison que leurs bases.*

DEMONSTRATION.

Fig. 41.

Je dis que si les parallelogrammes E & F ont la même hauteur, ils seront dans la même raison que leurs bases.

Pour le prouver, je nomme a la base du premier ; b , celle du second, & c , la hauteur de chacun : je conclus que $ac, bc :: a, b$, puisque $abc = abc$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Fig. 42.

243. Il suit de cette proposition que si l'on a deux triangles ABC & CDB, qui ont la même hauteur BE, puisque leur sommet aboutit au même point B, qu'ils seront dans la même raison que leurs bases AC & CD ; car les triangles étant les moitiés des parallelogrammes, il en sera des moitiés comme de leurs tous.

PROPOSITION VIII.

Théoreme.

244. *Si l'on coupe les deux côtes d'un triangle par une ligne parallele à la base, les côtes du triangle seront coupez proportionnellement.*

DEMONSTRATION.

Je dis que les côtes AB & AC, qui sont coupez par la ligne DE, parallèle à la base BC du triangle ABC, sont divisées proportionnellement, c'est-à-dire, qu'il faut faire voir que $AD : DB :: AE : EC$. Pour cela tirez les lignes BE & DC, qui donneront les triangles égaux BDE & DEC, puisqu'ils ont la même base DE, & qu'ils sont renfermez entre les mêmes parallèles. Cela posé, je nomme chacun de ces triangles égaux *g*, & le triangle ADE, *f*; comme les triangles ADE & DEB ont la même hauteur, ayant tous deux leur sommet au point E, ils sont dans la même raison que leurs bases*, & par conséquent $AD : DB :: f : g$. de même les triangles ADE & EDC ayant la même hauteur, ils seront encore dans la même raison que leurs bases, c'est-à-dire, que $AE : EC :: f : g$. ainsi comme on a deux raisons qui sont égales à une troisième raison, il s'ensuit que $AD : DB :: AE : EC$. C. Q. F. D.

Fig. 43.

*Art. 243.

DEFINITION.

245. L'on nomme côtes *proportionnels* dans les triangles semblables, aussi-bien que dans toutes les autres figures, les côtes qui sont opposez aux angles égaux; par exemple, pour dire que le côté AB est au côté DE comme le côté AC est au côté DF, il faut que l'angle C soit égal à l'angle F, & que l'angle B soit égal à l'angle E.

Fig. 44.

PROPOSITION IX.

Théoreme.

246. Les triangles semblables ont leurs côtes proportionnels.

DEMONSTRATION.

Si le triangle ABC est semblable au triangle CED, je dis que le côté AB est au côté AC, comme le côté CE est

Fig. 45.

102. NOUVEAU COURS

au côté CD, pour le prouver il faut joindre les deux bases des triangles sur un même alignement, & prolonger les côtés AB & ED jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au point F. Cela posé, remarquez que la figure CBFE est un parallélogramme, & que les côtés AF & AD du triangle AFD sont coupés par la ligne BC, parallèle au côté FD, & que par la proposition précédente on aura $AB : BF :: AC : CD$. Et si on met à la place de BF, CE, qui lui est égal, on aura $AB : CE :: AC : CD$. & en raison alterne, $AB : AC :: CE : CD$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 44. 247. Si on a deux triangles semblables M & N, on aura par la proposition précédente $a, b :: c, d$, par conséquent $bc = ad$, qui fait voir que deux côtés pris dans deux triangles semblables, & deux autres côtés pris dans les mêmes triangles, peuvent toujours former deux rectangles égaux.

COROLLAIRE II.

Fig. 44. 248. Il suit encore que si l'on a deux triangles semblables, dont on conçoit deux côtés dans l'un & un côté dans l'autre, qu'on pourra trouver le second côté de l'autre : car supposant, par exemple, que dans les triangles M & N le côté a soit de 12 pieds, le côté b de 8, & le côté c de 9, & qu'on veuille connoître le côté d , il n'y aura qu'à faire une Règle de trois, & dire : Si 12 m'a donné 8, combien me donneront 9 ? On trouvera 6 pour la valeur du côté d . Il en sera ainsi des autres.

AVERTISSEMENT.

La proposition précédente est une des plus plus considérables de la Géométrie ; car elle en est comme la base ; c'est pourquoi il faut s'appliquer à la bien entendre pour pouvoir comprendre toutes celles qui suivent dès la première lecture, puisqu'elles sont presque toutes démontrées par celle-ci.

PROPOSITION X.

Théoreme.

249. Si l'on abaisse de l'angle droit d'un triangle rectangle une perpendiculaire sur le côté opposé, elle divisera ce triangle en deux autres triangles, qui lui seront semblables.

DEMONSTRATION.

Pour démontrer que la perpendiculaire BD tirée de l'angle droit ABC, forme les deux triangles ABD & BDC semblables au grand ABC, remarquez que les triangles ABC & ABD ont chacun un angle droit, & l'angle A, qui leur est commun, & que par conséquent ils sont semblables: de même que les triangles ABC & BDC, qui ont aussi chacun un angle droit, & l'angle C leur est commun. C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

Théoreme.

250. Dans un triangle rectangle le carré du côté opposé à l'angle droit, est égal aux carrés des deux autres côtés pris ensemble.

Si l'on abaisse de l'angle droit B la perpendiculaire BD sur le côté AC, & qu'on nomme AC. a . BA. b . BC. c . AD. x . DC fera $a-x$. Cela posé, nous ferons voir que $\overline{AC}^2(aa) = \overline{AB}^2(bb) + \overline{BC}^2(cc)$

DEMONSTRATION.

Comme la perpendiculaire BD divise le rectangle ABC en deux triangles semblables BAD & DBC, l'on aura $AC(a), AB(b) :: AB(b), AD(x)$; & $AC(a), CB(c) :: CB(c), DC(a-x)$ qui donne ces deux équations $ax = bb$, & $ax - ax = cc$: or si on ajoute ensemble ces deux équations, on aura $aa - ax + ax = cc + bb$, d'où effaçant

ce qui se détruit, l'on voit que $\overline{AC}^2(aa) = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2(bb + cc)$ C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

251. Cette proposition est la fameuse quarante-septième du premier Livre d'Euclide, pour laquelle Pythagore sacrifia cent bœufs aux Muses, après en avoir fait la découverte, pour les remercier de la faveur qu'il croyoit en avoir reçu : & pour être prévenu de l'usage que nous en ferons dans la suite, il faut remarquer que connoissant les quarrés de deux côtez d'un triangle rectangle, on pourra toujours connoître celui du troisième; car si l'on a $\overline{AC}^2(aa)$ & $\overline{AB}^2(bb)$ on voit qu'on aura toujours $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2(aa - bb) = \overline{BC}^2(cc)$ qui donne la valeur du quarré du côté de BC : on voit de plus que connoissant les deux côtez qui comprennent l'angle droit d'un triangle rectangle, on pourra connoître l'hypoténuse, en quarrant ces deux côtez, & en extrayant la racine des membres de l'équation $aa = bb + cc$, on aura $a = \sqrt{bb + cc}$; & si connoissant l'hypoténuse avec un autre côté, on vouloit trouver le troisième côté, on n'auroit qu'à soustraire du quarré de l'hypoténuse le quarré du second côté que l'on connoît, & la racine quarrée de la différence donnera la valeur du côté qu'on cherche: ainsi connoissant les deux côtez BC & AC, on voit que $\sqrt{aa - cc} = AB$.

COROLLAIRE II.

252. Il suit encore de cette proposition que la perpendiculaire tirée de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les parties de l'hypoténuse; car comme la perpendiculaire BD divise le triangle ABC en deux autres triangles semblables; on aura par conséquent $AD \cdot DB :: DB \cdot DC$. C. Q. F. D.
PROP.

PROPOSITION XII.

Théoreme.

253. Dans un triangle obtus-angle ABC le carré du côté AC , opposé à l'angle obtus, est égal au carré des deux autres côtés AB & BC pris ensemble, si on leur ajoute deux rectangles compris sous le côté BC qui a été prolongé pour la perpendiculaire, & sous la partie BD qui est entre la perpendiculaire & l'angle obtus. Fig. 48.

Nous nommerons AC, a ; AB, c ; BC, b ; BD, x ; AD, e ; & nous ferons voir que $\overline{AC}^2 (aa) = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2DB \times BC$ ($cc + bb + 2bx$.)

DEMONSTRATION.

Comme le triangle rectangle ADC donne $\overline{AC}^2 (aa) = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 (ee + xx + 2bx + bb)$ & que le triangle rectangle ABD donne encore $\overline{AB}^2 (cc) = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 (ee + xx)$ l'on voit que si on met dans le second membre de la première équation cc à la place de $ee + xx$, on aura $\overline{AC}^2 (aa) = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2DB \times BC (cc + bb + 2bx)$ C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

254. Si l'on avoit un triangle ABC , dont on connût les trois côtés, on pourroit par cette proposition trouver la perpendiculaire AD qui détermine la hauteur du triangle; car comme l'on a $aa = cc + bb + 2bx$, si l'on fait passer $cc + bb$ du second membre dans le premier, il viendra $aa - cc - bb = 2bx$, qui étant divisé par $2b$, vient

$$\frac{aa - cc - bb}{2b} = x, \text{ qui fait voir qu'on trouvera la valeur de}$$

la ligne DB , en soustrayant du carré AC opposé à l'angle obtus les carrés des côtés AB & BC , & en divisant

Ω

le restant par le double de la valeur du côté BC. Or comme on a le triangle ADB, qui donne $cc = ee + xx$, si l'on fait passer xx dans le premier membre, on aura $cc - xx$

Art. 251. $= ee$, dont ayant extrait la racine, il viendra $\sqrt{cc - xx} = e^$, qui fait voir que pour trouver la perpendiculaire AD, il faut ôter le quarré DB du quarré AB, & extraire la racine du restant.

PROPOSITION XIII.

Théoreme.

Fig. 49. 255. Dans tous triangles comme ABC, le quarré du côté AB opposé à un angle aigu C avec deux rectangles compris sous le côté AC où tombe la perpendiculaire, & sous le segment DC entre la perpendiculaire & l'angle aigu, est égal aux quarrés des deux autres côtés AC & BC pris ensemble.

Ayant nommé AB, a ; BC, b ; AC, c ; BD, e ; DC, x ; AD, fera $c - x$. Cela posé, nous ferons voir que $\overline{AB}^2 + 2 AC \times DC$
 $(aa + 2cx) = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 (cc + bb)$

DEMONSTRATION.

Comme les triangles rectangles BAD & BDC donnent $\overline{AB}^2 (aa) = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 (ee + cc - 2cx + xx)$ & $\overline{BC}^2 (bb) = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 (ee + xx)$ si dans cette équation $aa + 2cx = cc + bb$, l'on met à la place de aa sa valeur $ee + cc - 2cx + xx$, & à la place de bb sa valeur $ee + xx$, l'on aura $ee + cc - 2cx + xx + 2cx = ee + xx + cc$, ou bien $ee + cc + xx = ee + cc + xx$, qui prouve que ce qu'on a avancé est démontré.

COROLLAIRE.

Fig. 49. 256. Comme cette proposition donne $aa + 2cx = cc + bb$, si l'on fait passer aa du premier membre dans le

second, l'on aura $2cx = cc + bb - aa$, ou bien $x = \frac{cc + bb - aa}{2c}$, en divisant chaque membre par $2c$, qui fait

voir que pour avoir la valeur du segment DC, il faut ôter de la somme des deux quarrés des deux côtez AC & BC, le quarré du côté opposé à l'angle aigu, & diviser le restant par le double de la valeur du côté AC. Or si l'on veut connoître la valeur de la perpendiculaire BD, on n'aura qu'à ôter du quarré BC le quarré du côté DC, & extraire la racine du reste.



Oij



NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE CINQUIÈME.

Où l'on traite des propriétés du Cercle.

DEFINITIONS.

I.

PLAN-
CHE 3.
Fig. 50.

257. **L'**ON nomme Cercles *concentriques*, ceux qui ayant été décrits du même centre, ont leurs circonférences parallèles. Tels sont les deux Cercles qui ont pour centre commun le point A.

II.

Fig. 51. 258. Les Cercles *excentriques* sont ceux qui ayant été décrits par des centres différens, n'ont pas leurs circonférences parallèles, comme B & C.

III.

Fig. 50. 259. L'on nomme *Couronne* l'espace renfermé entre les circonférences de deux Cercles concentriques, comme est l'espace BB, terminé par les circonférences E & F.

IV.

Fig. 52. 260. *Segment* de Cercle est la partie d'un Cercle terminée par une ligne droite & par une partie de circonférence du même Cercle, comme ABC ou ADC.

V.

Fig. 53. 261. *Secteur* de Cercle est une partie de Cercle termi-

née par deux rayons, & par une partie de la circonférence du Cercle. Telle est la partie du Cercle CDE.

V I.

262. *Arc* de Cercle est une partie de circonférence plus grande ou plus petite qu'un demi-Cercle. Fig. 52.

V II.

263. L'on nomme *Cordes* toutes lignes droites, comme AC, terminées par la circonférence d'un Cercle ou d'une partie de Cercle. Fig. 52.

V III.

264. Quand une ligne touche la circonférence d'un Cercle sans la couper, cette ligne est nommée *tangente*; ainsi la ligne AB qui ne touche la circonférence du Cercle D qu'au point D, est dite *tangente* à ce Cercle. Fig. 54.

I X.

Si on a une ligne qui au lieu de toucher un Cercle, le coupe, comme la ligne BE, cette ligne est nommée *secante*.

PROPOSITION PREMIERE.

Théoreme.

265. Si du centre d'un Cercle on abaisse une perpendiculaire BD sur une corde AC, elle la divisera en deux également au point D. Fig. 55.

DEMONSTRATION.

Pour le démontrer, considérez qu'ayant tiré les rayons BA & BC, l'on aura deux triangles rectangles BAD & BDC, & que l'angle A étant égal à l'angle C, l'angle ABD sera égal à l'angle CBD. Or comme les côtes qui comprennent ces angles sont égaux, le côté BD étant commun, & les autres BA & BC étant des rayons, ils'enfuit par l'art. 232. que la ligne AD est égale à la ligne DC.
Q. E. D.

Où

COROLLAIRE.

266. Il suit de cette proposition, que si l'on prolonge la perpendiculaire BD jusqu'à la circonférence E, qu'elle divisera l'arc AEC en deux également ; car les angles ABE & EBC étant égaux, les arcs AE & EC le seront aussi.

PROPOSITION II.

Théoreme.

Fig. 56. 267. Si du centre d'un Cercle on mene une ligne DC au point où une tangente AB touche le Cercle, je dis que cette ligne sera perpendiculaire sur la tangente.

DEMONSTRATION.

Pour prouver que la ligne DC est perpendiculaire sur la ligne AB, si elle vient rencontrer cette ligne au point où elle touche le Cercle, remarquez que la ligne DC est la plus courte de toutes celles qu'on peut tirer du centre D sur la tangente AB à droite ou à gauche du point C, parce que toute autre ligne sortira du Cercle, & sera par conséquent plus grande que le rayon. Or puisque la ligne DC est la plus courte de toutes celles que l'on peut tirer du centre D sur la ligne AB, elle est perpendiculaire sur cette ligne par l'art. 213.

PROPOSITION III.

Théoreme.

Fig. 57. 268. L'angle qui est à la circonférence d'un Cercle a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il s'appuye.

DEMONSTRATION.

Pour prouver que l'angle ABC, qui touche la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc AEC, tirez la ligne BE par le centre D, & les rayons DA & DC ; ensuite faites attention que le triangle DBA est isoscèle,

& que l'angle extérieur ADE valant les deux autres intérieurs opposés *, qui sont égaux entr'eux, il sera double de l'angle ABE, & que par la même raison CDE sera double de l'angle CBE; d'où il s'ensuit que la mesure de l'angle ABC n'est que la moitié de l'arc AEC.
C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Il suit de cette proposition plusieurs conséquences.

269. 1°. Qu'un angle tel que ABC, qui est renfermé dans un demi-cercle, est droit; ce qui est bien évident, puisqu'il a pour mesure la moitié de l'arc AOC, qui est un quart de cercle. Fig. 59.

270. 2°. Qu'un angle comme DEF, qui est renfermé dans un segment plus petit qu'un demi-cercle, est obtus, parce qu'il a pour mesure la moitié de l'arc DOF, qui est plus grande qu'un quart de cercle. Fig. 60.

271. 3°. Qu'un angle comme GHI, qui est renfermé dans un segment plus grand qu'un demi-cercle, est aigu, puisqu'il a pour mesure la moitié de l'arc GOI, qui est plus petite qu'un quart de cercle. Fig. 61.

272. 4°. Que les angles comme ABC & ADC, qui sont renfermez dans le même segment, sont égaux, puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié de l'arc AOC. Fig. 62.

273. 5°. L'on pourroit encore faire voir quelle est la mesure des angles qui ne sont ni au centre, ni à la circonférence, dont la pointe seroit dedans ou dehors le cercle : mais je laisse aux Comménçans le plaisir de la chercher eux-mêmes.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

274. Si l'on a un angle BAD, formé par une tangente AB & une corde AD, cet angle aura pour mesure la moitié de l'arc AFD. Fig. 58.

Tirez du centre E le rayon EA au point d'attache-

Art. 267. ment A, qui sera perpendiculaire sur la tangente AB,
& tirez la ligne FG perpendiculaire sur AD, qui sera di-
visée en deux également, aussi-bien que l'arc AFD.*
*Art. 265.
& 266.

DEMONSTRATION.

Comme l'angle BAD ne peut valoir un droit sans l'angle GAE, & que l'angle AEG ne peut aussi valoir un droit sans le même angle GAE; il s'ensuit donc que l'angle BAD est égal à l'angle AEG: mais comme l'angle AEG a pour mesure l'arc AF, moitié de AFD, l'angle BAD aura donc aussi pour mesure l'arc AF, moitié de AFD. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

Théoreme.

Fig. 63. 275. Si l'on a deux lignes AB & CD qui se coupent indifféremment dans un cercle, je dis que le rectangle compris sous les parties AE & EB de l'une est égal au rectangle compris sous les parties CE & ED de l'autre.

DEMONSTRATION.

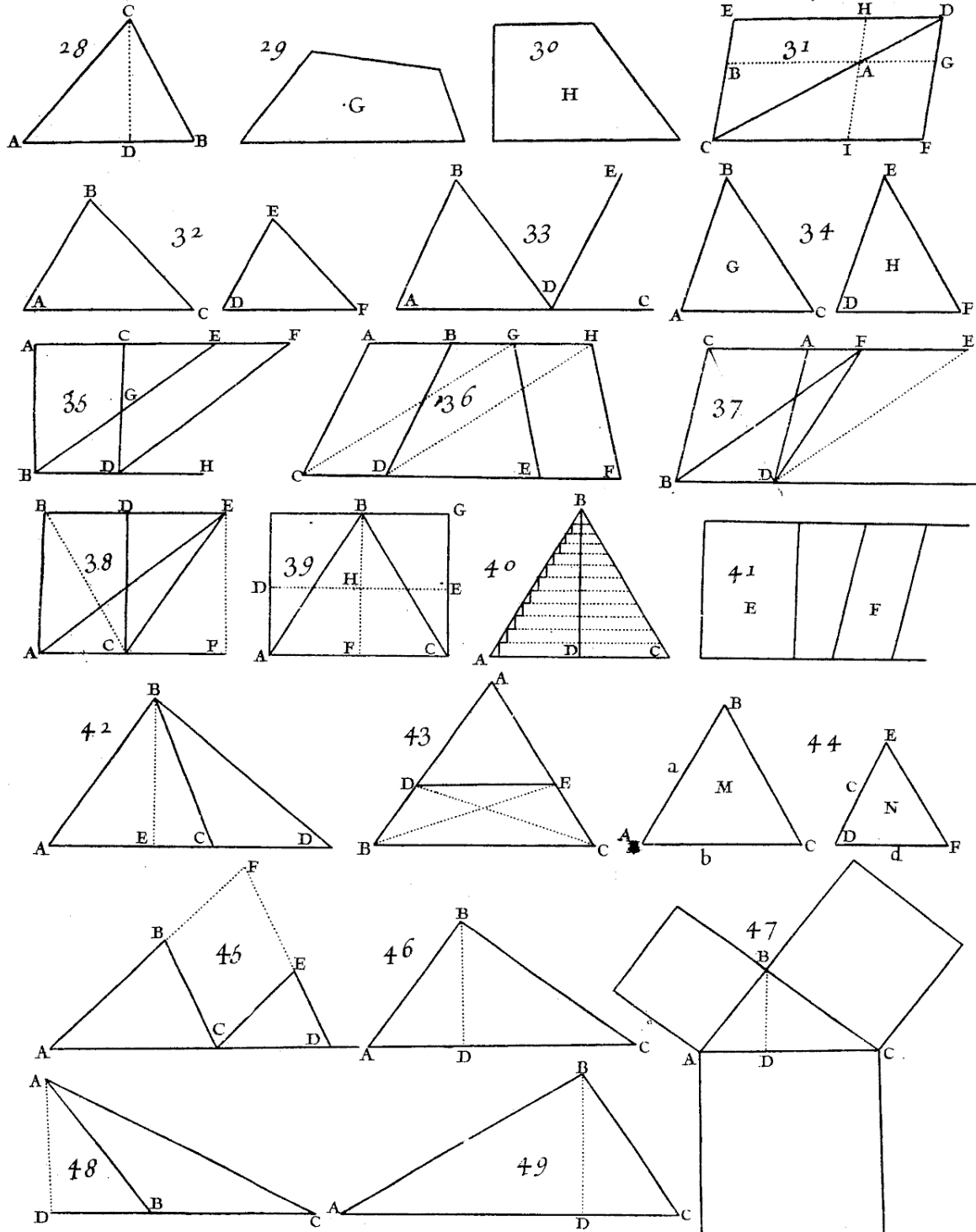
Ayant tiré les lignes AC & DB, considérez que les triangles ACE & EBD sont semblables, puisqu'ils ont les angles au point E égaux, & que l'angle C est égal à l'angle B, ayant chacun pour mesure la moitié de l'arc AD*.
*Art. 268. Cela posé, l'on aura donc *EB. EC::ED. EA. Par conséquent *EC×ED=EB×EA. C. Q. F. D.
*Art. 246.
& 247.
*Art. 150.

PROPOSITION VI.

Théoreme.

Fig. 64. 276. Si d'un point comme A pris hors d'un cercle, l'on tire deux lignes AB & AC, qui aillent se terminer à la circonférence concave, je dis que le rectangle compris sous une des lignes AB & sous sa partie extérieure AD au cercle, est égal au rectangle compris sous l'autre ligne AC, & sous sa partie extérieure AE.

DEMONSTRATION.



DEMONSTRATION.

Si l'on tire les lignes BE & CD, l'on aura deux triangles semblables ABE & ACD ; car l'angle A leur est commun, & les angles B & C ont chacun pour mesure la moitié de l'arc DE : ainsi on aura * AE. AB :: AD. AC. Par conséquent * $AB \times AD = AC \times AE$. C. Q. F. D.

* Art. 246.

& 247.

* Art. 150.

PROPOSITION VII.

Théoreme.

277. Si l'on élève une perpendiculaire BD à tel point que l'on voudra du diamètre AC, le quarré de la perpendiculaire sera égal au rectangle compris sous les parties AD & DC du diamètre. Fig. 65.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire les lignes AB & BC, on aura l'angle droit ABC* ; & comme la perpendiculaire BD divise le triangle rectangle ABC en deux triangles semblables * ABD & BCD, l'on aura * AD. DB :: DB. DC. Par conséquent * $DB^2 = AD \times DC$. C. Q. F. D.

* Art. 269.

* Art. 249.

* Art. 246.

& 247.

* Art. 152.

COROLLAIRE.

278. Il suit de cette proposition qu'à quel point du diamètre d'un demi-cercle, on élève une perpendiculaire, qu'elle est toujours moyenne proportionnelle entre les parties du diamètre, & c'est ce que nous appellerons dans la suite la propriété du Cercle.

PROPOSITION VIII.

Problème.

279. Mener une tangente à un cercle par un point donné. Fig. 66.
Pour mener une tangente du point donné D au cercle C, tirez du centre C au point D une ligne DC, que vous diviserez en deux également au point E, & puis de ce point E

114. NOUVEAU COURS

point comme centre, décrivez un demi-cercle CBD, je dis que la ligne qui sera menée de D en B, où ces deux circonferences se coupent, sera tangente au cercle.

Pour le prouver, tirez le rayon CB, & considérez que l'angle CBD est droit, puisqu'il est renfermé dans un demi-cercle, & par conséquent la ligne BD sera tangente, puisqu'elle est perpendiculaire sur le rayon CB*.
C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

Théoreme.

Fig. 67. 280. Si d'un point B hors d'un cercle l'on mène une tangente BA, & une sécante BC, je dis que le carré de la tangente AB sera égal au rectangle compris sous la ligne BC, & sa partie extérieure DB.

DEMONSTRATION.

Pour le prouver, tirez les lignes AC & AD, & faites attention que les triangles CAB & ABD sont semblables ; car ils ont l'angle B de commun, & les angles BAD & ACD ont chacun pour mesure la moitié de l'arc AD : cela étant, nous aurons* BC. BA :: BA. BD. Par conséquent* $\overline{BA}^2 = BC \times BD$. C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

Théoreme.

Fig. 68. 281. Si l'on a une tangente CD perpendiculaire sur le diamètre AB, je dis que si l'on tire autant de lignes qu'on voudra du point A à la tangente, comme est, par exemple, la ligne AC, que le carré du diamètre AB, sera égal au rectangle compris sous une ligne telle que AC, & sous la partie intérieure AE au Cercle.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire la ligne BE, on aura deux triangles sembla-

bles ABC & AEB, puisqu'ils ont chacun un angle droit, & l'angle CAB qui leur est commun : ainsi $* AC. AB :: AB. AE$. Par conséquent $* AC \times AE = AB^2$. C. Q. F. D. * Art. 246, * Art. 152

DEFINITION.

282. L'on dit qu'une ligne est divisée en moyenne & extrême raison, quand elle est coupée en deux parties, de manière que toute la ligne est à la plus grande partie comme la plus grande partie est à la plus petite ; & pour lors la plus grande partie est appelée la *mediane*.

PROPOSITION XI.

Problème.

283. Diviser une ligne en moyenne & extrême raison. Fig. 69

Pour diviser la ligne AB en moyenne & extrême raison, tirez sur l'extrémité B la perpendiculaire BD égale à la moitié de la ligne donnée AB, du point D & de l'intervalle DB, décrivez un cercle, & tirez par le centre la ligne AC : puis faites AF égal à AE ; je dis que la ligne AB sera divisée en moyenne & extrême raison au point F.

Ayant nommé AF ou AE, x ; AB, a ; CE sera aussi a , AC, $a + x$; & FB, $a - x$; nous ferons voir que $AB (a) : AF (x) :: AF (x) : FB (a - x)$

DEMONSTRATION.

Par la proposition 9. l'on a $AC (a + x) : AB (a) :: AB (a) : AE (x)$ qui donne $* aa = xa + xx$. Or si l'on fait passer xa * Art. 152 du second membre dans le premier, on aura $aa - ax = xx$; d'où l'on tire $* cette proportion $a. x :: x. a - x$. C. Q. F. D. * Art. 176$





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE

LIVRE SIXIÈME.

*Qui traite des Poligones réguliers inscrits & circonscrits
au Cercle.*

DEFINITIONS.

I.

284. **O** On dit qu'un Poligone régulier ou irrégulier est *inscrit* au cercle, quand les sommets de tous les angles du Poligone touchent le cercle.

II.

285. On dit qu'une figure rectiligne est *circonscrite* à un cercle, quand chacun de ses côtés touche la circonférence du cercle, ou autrement quand chaque côté devient tangente au cercle.

III.

286. *Poligone régulier* est une figure dont tous les angles & côtés sont égaux entr'eux.

IV.

287. Un Poligone régulier se nomme *pentagone* quand il a cinq côtés ; *hexagone* quand il a six côtés ; *eptagone* quand il a sept côtés ; *octogone* quand il a huit côtés ; *enneagone* quand il a neuf côtés ; *decagone* quand il a dix

côtés ; *ondécagone* quand il a onze côtés ; *dodécagone* quand il a douze côtés.

V.

288. Dans un Poligone régulier il y a l'angle du centre & l'angle du Poligone.

VI.

289. L'angle du centre est un angle comme BAC, formé par deux rayons AB & AC, tirés du centre aux extrémités d'un des côtés du Poligone. PLANCHE 4.
Fig. 70.

VII.

290. L'angle du Poligone est un angle comme BCD, formé par la rencontre de deux côtés BC & CD.

COROLLAIRE.

291. Comme l'angle du centre d'un Poligone a pour mesure l'arc dont un des côtés du poligone est la corde, l'on trouvera toujours la valeur de cet angle, en divisant 360, qui est le nombre de degrés du cercle par la quantité de côtés, dont le Poligone est composé : ainsi pour trouver l'angle du centre d'un exagone, je divise 360 par 6, & je trouve 60 degrés pour la mesure de l'angle que je cherche. Or comme l'angle du Poligone BCD est double de l'angle ABC, & que par conséquent il est égal aux deux angles de la base du triangle isocèle ABC, il s'ensuit qu'il est égal à la différence qu'il y a de l'angle du centre à deux droits : ainsi on trouvera la valeur de l'angle du Poligone de tel nombre de côtés qu'on voudra, en prenant la différence de l'angle du centre à 180 degrés.

PROPOSITION PREMIERE.

Problème.

292. *Inscrire un exagone dans un cercle.*

Pour inscrire un exagone dans un cercle, il faut prendre le rayon du cercle avec le compas, & le porter fix

Fig. 70.

P ii j

fois sur la circonférence, & l'on aura les points qui serviront à tracer l'exagone.

D E M O N S T R A T I O N .

Art. 221. Confidérez que le côté BC de l'exagone est égal au rayon AB ; car comme l'angle du centre BAC de l'exagone est de 60 degrez, l'on verra que la somme des deux angles de la base du triangle isoscèle BAC est de 120 degrez, & que par conséquent ils seront chacun de 60. Or comme cela prouve que le triangle ABC est équilateral*, il s'ensuit que le côté BC est égal au rayon AB.
C. Q. F. D.

P R O P O S I T I O N II.

Problème.

293. *Décrire un dodecagone dans un cercle.*

Fig. 71. Pour décrire un dodecagone dans un cercle, il faut porter le rayon AC sur la circonférence pour avoir l'arc CD de soixante degrez, ou autrement égal à la sixième partie du cercle ; & puis diviser cet arc en deux également au point E, la corde DE fera le côté du dodecagone, puisqu'elle est la corde d'un angle de 30 degrez, c'est-à-dire, de l'angle du centre du dodecagone.

L E M M E.

Fig. 72. 294. *Si l'on a un triangle isoscèle ABC, dont chaque angle de la base soit double de celui du sommet, je dis que divisant l'un des angles de la base comme BAC en deux également par une ligne AD qui aille rencontrer le côté opposé, qu'elle divisera ce côté en moyenne & extrême raison au point D, c'est-à-dire, que l'on aura BC. BD :: BD. DC.*

D E M O N S T R A T I O N .

Confidérez que les triangles ABC & ADC sont semblables, puisqu'ils ont l'angle C commun, & que l'angle DAC est égal à l'angle B par la supposition ; de plus que

les lignes DB, DA & AC, sont égales ; car le triangle BDA est isoscèle, les angles DBA & BAD étant égaux. Cela posé, l'on aura $BC.CA :: CA.CD.$ & si à la place de CA on prend BD qui lui est égal, on aura $BC.BD :: BD.DC.$ *C. Q. F. D.* *Art. 246.

COROLLAIRE I.

295. Ceci fournit un moyen pour faire un triangle isoscèle, dont les angles de la base soient chacun double de celui du sommet ; car pour faire, par exemple, un triangle comme ABC, l'on n'aura qu'à diviser le côté BC en moyenne & extrême raison * ; & sur la plus petite DC comme base, faire un triangle isoscèle par le moyen de deux sections avec une ouverture de compas de la grandeur de la médiane BD, & l'on aura le point A, qui servira à former le triangle ABC. *Art. 283.

COROLLAIRE II.

296. Il suit encore que si du point B comme centre, l'on décrit un cercle dont le rayon soit BA ou BC, la base AC du triangle isoscèle ABC fera le côté du décagone inscrit dans ce cercle ; car par la nature du triangle ABC l'angle B fera de 36. degrez, puisque ceux de la base doivent être chacun de 72 ; par conséquent l'angle B sera égal à l'angle du centre du décagone ; car divisant 360 par 10, il vient 36. Fig. 72.

PROPOSITION III.

Problème.

297. *Inscrire un décagone dans un cercle.*

Pour inscrire un décagone dans un cercle, il faut en diviser le rayon en moyenne & extrême raison, & la médiane fera le côté du décagone, qu'on n'aura qu'à porter dix fois sur la circonférence pour avoir les points qui serviront à le tracer ; ce qui est bien évident, puisque par le Corollaire précédent la médiane BD est égale au côté AC du décagone. Fig. 73.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

298. Si l'on a une ligne droite composée du côté de l'exagone & du décagone inscrits dans le même cercle, elle sera divisée en moyenne & extrême raison au point où se joignent les deux lignes.

Fig. 74.

Supposant que la ligne CB soit le côté du décagone inscrit dans le cercle A, & qu'on l'ait prolongée de la longueur CD égal au rayon AC côté de l'exagone, je dis que la composée des deux DB sera coupée en moyenne & extrême raison au point C.

DEMONSTRATION.

Tirez la ligne DA, & considérez que le triangle BDA est semblable au triangle BAC; car ils ont l'angle B de commun, & l'angle BDA est égal à l'angle CAD, puisqu'à cause du triangle isoscelle CDA, l'angle extérieur BCA est double de l'intérieur BDA; & par le Corollaire précédent le même angle BCA est double de l'angle CAB: ainsi l'on aura * DB. BA :: BA. BC. & prenant CD à la place de AB, l'on aura DB. DC :: DC. CB. C. Q. F. D.

* Art. 246.

PROPOSITION V.

Théoreme.

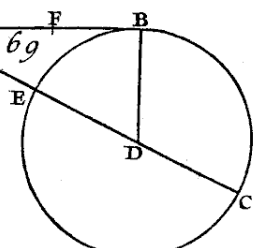
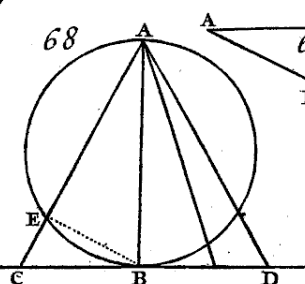
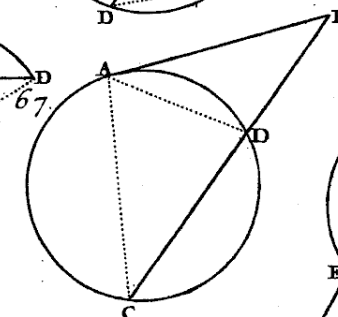
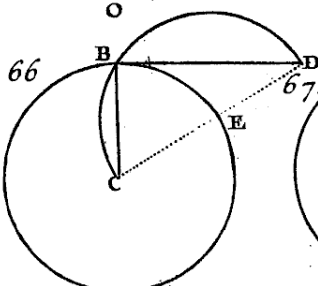
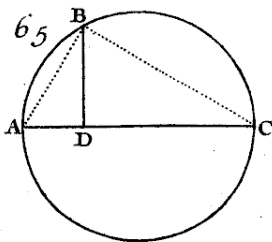
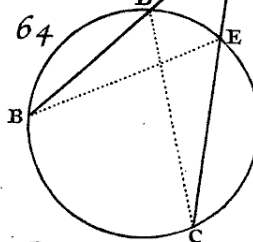
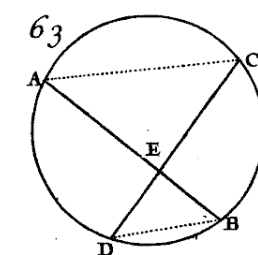
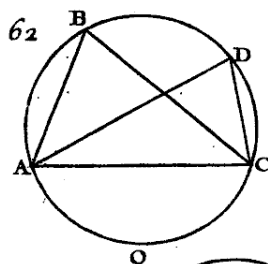
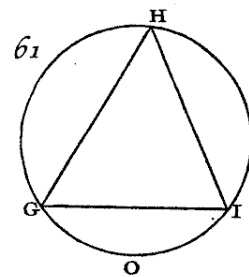
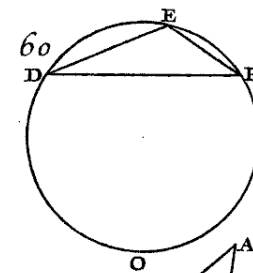
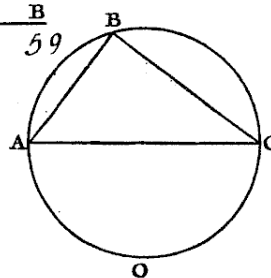
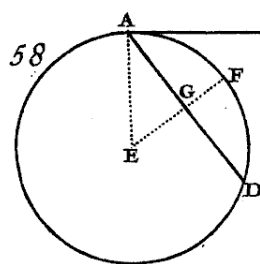
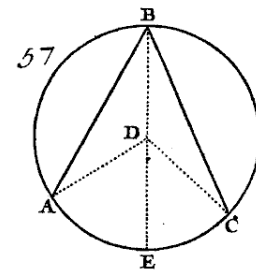
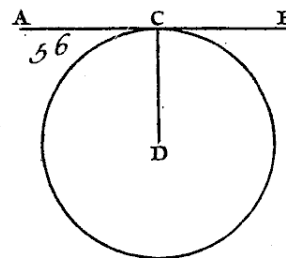
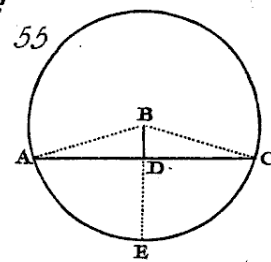
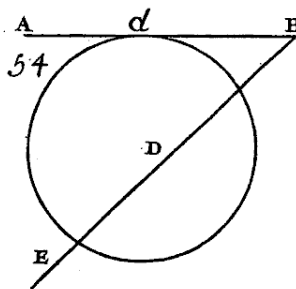
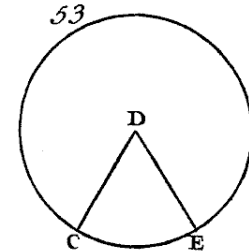
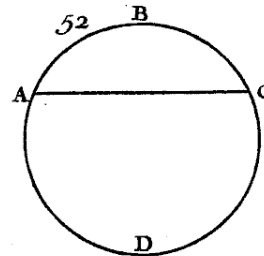
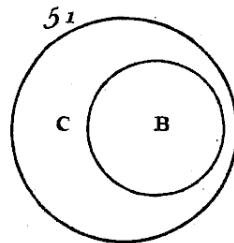
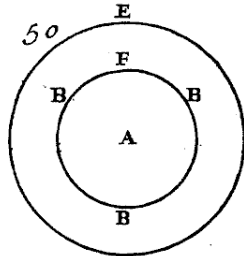
299. Le quarré du côté du Pentagone inscrit dans un cercle est égal au quarré du côté de l'Exagone, plus celui du côté du Décagone inscrits dans le même cercle.

Fig. 75.

Si l'on a dans un cercle le côté AB du pentagone, & que l'on divise en deux également au point C l'arc AB, la corde AC ou CB sera le côté du décagone, & le rayon DB celui de l'exagone. Cela posé, je dis que

$$\overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{AC}^2$$

DEMONSTR.



DEMONSTRATION.

Divisez l'arc AC en deux également par le rayon DF, tirez la ligne EC, & considérez que le triangle AEC étant isoscèle, il sera semblable au triangle ACB, puisqu'ils ont l'angle CAB de la base commun, & que par conséquent on aura $AB : AC :: AC : AE$, qui donne $\overline{AC}^2 = AB \times AE$. Or si vous faites attention que l'angle du centre ADB du pentagone est de 72 degrés, vous verrez que les angles ABD & BAD sont chacun de 54 degrés, c'est-à-dire, qu'ils sont les trois quarts de celui du centre; & comme l'angle FDB est aussi les trois quarts de l'angle ~~ADB~~^{ADB}, puisqu'il a pour mesure l'arc FB, il s'ensuit que les deux triangles ADB & DEB sont semblables, & qu'on a encore $AB : BD :: BD : BE$, qui donne $\overline{DB}^2 = AB \times BE$; mais comme $AB \times AE + AB \times BE = \overline{AB}^2$, il s'ensuit que $\overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{AC}^2$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

Problème.

300. *Inscrire un Pentagone dans un cercle.*

Pour inscrire un pentagone dans un cercle, tirez le Fig. 76.
rayon CF perpendiculaire sur le diamètre AB, & divisez le demi-diamètre CB en deux également au point E, & de ce point comme centre, & de l'intervalle EF, décrivez l'arc FD, & la corde FD sera le côté du pentagone.

Pour le prouver, considérez que le triangle DFC est rectangle, & que le côté CF étant celui de l'exagone, il suffira de faire voir que le côté DC est celui du décagone; car pour que le côté FD soit celui du pentagone, on sçait par l'art. 299. qu'il faut que son carré soit égal à celui de l'exagone & du décagone pris ensemble: pour cela nous nommerons CF ou CB, a ; par conséquent $CE \frac{1}{2} a$, & l'inconnue DC, x ; ainsi DB sera $a + x$. Cela posé,

Q

- Comme EF est égal à ED, l'on aura à cause du triangle rectangle EFC $aa + \frac{1}{4}aa = xx + ax + \frac{1}{4}aa$, ou bien $aa = xx + ax$, après avoir effacé $\frac{1}{4}aa$, qui donne cette proportion $x + a. a :: a. x$. qui fait voir que la ligne DB est divisée en moyenne & extrême raison au point C*,
- *Art. 175. par conséquent la ligne DC est le côté du décagone.*
- *Art. 282. C. Q. F. D.
- *Art. 297.

PROPOSITION VII.

Problème.

- Fig. 77. 301. *Inscrire un Quarré dans un cercle.*
 Pour inscrire un Quarré dans le cercle E, tirez le diamètre AB, & divisez chaque demi-cercle en deux également aux points C & D, & puis tirez les quatre lignes AC, CB, BD & DA, qui formeront un Quarré; car toutes ces lignes sont égales, puisqu'elles sont les cordes d'arcs égaux, & ces quatre angles A, B, C, D, sont droits, puisqu'ils sont renfermez dans des demi-cercles.

PROPOSITION VIII.

Problème.

- Fig. 77. 302. *Inscrire un Octogone dans un cercle.*
 Pour inscrire un Octogone dans un cercle il faut d'abord en diviser la circonference, comme si on vouloit y inscrire un quarré, & puis diviser en deux également chaque quart de cercle, tel que CB, & la corde CF ou FB sera le côté de l'Octogone.

A V E R T I S S E M E N T.

Nous n'avons point parlé de la maniere d'inscrire dans un cercle l'*Eptagone*, l'*Ennéagone*, ni l'*Ondecagone*, parce que l'on n'a pas encore trouvé le moyen de tracer géométriquement ces trois polygones simplement avec la Regle & le Compas, étant obligé d'avoir recours à la Géomé-

trie composée, c'est-à-dire, à la Géométrie des Courbes; ce qui rend ces Problèmes très-difficiles, aussi-bien que celui de la Trisection de l'angle, c'est-à-dire, de diviser un angle en trois, en cinq, en sept parties égales, qui est un Problème solide, aussi-bien que les précédens, que l'on nomme ainsi, parce qu'ils se réduisent à des équations du troisième degré: & comme nous ne parlons point de ces sortes d'équations dans ce Traité, nous allons donner la manière de tracer une courbe, que l'on nomme la *Quadratrice de Dinostrate*, par le moyen de laquelle on pourra diviser les angles & les circonferences des cercles en autant de parties égales que l'on voudra; mais auparavant il faut être prévenu des deux Problèmes suivans.

PROBLÈME PREMIER.

303. *Diviser une Ligne droite en autant de parties égales que l'on voudra.* Fig. 80.

Pour diviser une Ligne AB, par exemple, en neuf parties égales, tirez la ligne AC, qui fasse avec AB un angle à volonté: ensuite du point A comme centre, & d'un intervalle quelconque comme AB, décrivez l'arc BC, qui sera la mesure de l'angle CAB. Ensuite avec la même ouverture de compas, & du point B décrivez l'arc AD égal à BC, & tirez la ligne BD, qui donnera l'angle ABD égal à l'angle CAB. Cela posé, marquez sur le côté AC avec une ouverture de compas à volonté un nombre de parties égales, tel que celui dans lequel on veut que la ligne AB soit divisée, c'est-à-dire, qu'en commençant du point A, il faut marquer neuf parties égales sur la ligne AC; après quoi il en faut faire autant sur la ligne BD, en commençant du point B: après cela, si l'on tire les lignes 9B, 81, 72, &c. elles diviseront la Ligne AB en neuf parties égales; ce qui est bien évident: car comme les lignes que l'on a tirées sont parallèles entr'elles, elles donneront les triangles semblables A1E, A9B, &c. qui font voir que puisque A1 est la neuvième partie de A9, AE sera la neuvième partie de AB. Ainsi des autres.

Q ij

PROBLEME II.

Fig. 81. 304. *Diviser un Arc de cercle en un nombre de parties égales pairement paires.*

Si l'on veut diviser, par exemple, le quart de cercle ABC en seize parties égales, il faut des points A & C décrire avec la même ouverture de compas la section D, & tirer la ligne BD, qui divisera l'arc AC en deux également au point E, & diviser de la même manière l'arc EC en deux également au point F, l'arc FC en deux également au point G, & l'arc GC en deux également au point H, pour avoir l'arc HC, qui sera la seizième partie de AC; ainsi des autres.

C'est ainsi qu'on pourra diviser géométriquement un arc de cercle en un nombre infini de parties égales, pourvu que l'on divise le tout & ses parties toujours de deux en deux.

MANIERE DE DECRIRE LA QUADRATRICE.

Fig. 82. 305. Pour décrire cette courbe, il faut diviser le rayon AB en un grand nombre de parties égales; de manière que le quart de cercle AT puisse être divisé en un même nombre de parties égales: ainsi nous supposons que l'on a divisé le quart de cercle en seize parties, aussi bien que le rayon AB. Cela posé, après avoir tiré les rayons BC, BD, BE, BF, &c. l'on tirera par les points G, H, I, K, &c. des parallèles au demi-diamètre BT, qui allant rencontrer les rayons qui divisent le quart de cercle, donneront les points L, M, N, O, &c. avec lesquels on tracera la courbe AS, que l'on pourra faire beaucoup plus juste, en divisant le quart de cercle & le rayon BA en un plus grand nombre de parties égales, que l'on n'a fait ici, afin d'avoir les points L, M, N, O, beaucoup plus près les uns des autres, & que le point R formé par la rencontre du dernier rayon BP, & la paral-

lele QR , approche le plus près qu'il est possible du demi-diamètre BT , pour rendre insensible l'erreur que l'on pourroit faire en continuant mécaniquement la courbe AR jusqu'à la rencontre du demi-diamètre.

Il faut bien remarquer que, par la generation de cette courbe, si l'on mene des paralleles HM & KO , qui aillent rencontrer la courbe aux points M & O , que si l'on tire par ces points des rayons BD & BF , qu'il y aura même raison de l'arc AD à l'arc DF , que de la ligne AH à la ligne HK . Fig. 82.

PROPOSITION IX.

Problème.

306. *Diviser un Angle en trois parties égales.*

Supposant que l'on ait tracé sur un morceau de corne ou de carton bien uni, la courbe AD de la façon qu'on vient de l'enseigner, on propose de diviser l'Angle OPQ en trois parties égales. Fig. 83. & 85.

Pour résoudre ce Problème, supposant que la courbe soit accompagnée de son quart de cercle AC , je fais l'angle ABE égal à l'angle donné, & au point F , où le rayon BE coupe la courbe AD , j'abaisse la perpendiculaire FG sur le demi-diamètre AB , qui me donne la partie AG , que je divise en autant de parties égales qu'on veut que l'angle donné soit divisé: ainsi je la partage en trois parties égales aux points H & K , desquels je mene les paralleles KL & HI , qui me coupent la courbe aux points L & I , par lesquels je mene les rayons BM & BN , qui divisent l'arc AE en trois parties égales aux points M & N ; puisque par la propriété de la courbe *, il y a même raison de AK à AG , que de AM à AE ; & comme AK est la troisième partie de AG , l'arc AM sera donc la troisième partie de l'arc AE . * Art. 305.

Mais si l'on proposoit de diviser en trois parties égales un Angle obtus, comme RST , il semble que cela souffre

Q. iij

roit quelque difficulté, parce que l'arc RT ne peut pas être contenu dans l'arc AC, puisqu'il est supposé plus grand que lui. Or en ce cas il faut diviser l'Angle obtus en deux également pour avoir l'angle aigu RSV, que nous supposerons être le même que l'angle ABE : ainsi divisant l'angle aigu en trois parties égales aux points M & N, l'on n'aura qu'à en prendre l'arc AN, qui étant double de la sixième partie de l'arc RT, fera par conséquent le tiers du même arc RT.

PROPOSITION X.

Problème.

Fig. 78. 307. *Décrire un Ennéagone dans un cercle.*

Pour décrire un Ennéagone dans le cercle A, il faut porter le rayon du cercle six fois sur la circonférence pour avoir les points B, C, D, E, F, G, qui la diviseront en six parties égales; & tirant des lignes du premier point au troisième, du troisième au cinquième, & du cinquième au premier, on aura un triangle équilatéral BDF, qui divisera la circonférence en trois parties égales. Or si on divise après cela un de ses arcs, comme BCD, en trois parties égales par le Problème précédent, l'on aura la neuvième partie de la circonférence du cercle dont la corde sera le côté de l'Ennéagone.

PROPOSITION XI.

Problème.

308. *Décrire un Eptagone dans un cercle.*

Pour décrire un Eptagone dans un cercle, il faut diviser le quart de la circonférence du cercle en sept parties égales : ainsi chacune de ces parties sera la vingt-huitième partie de toute la circonférence. Or prenant un arc égal aux quatre septièmes du quart de cercle, il sera égal

à la septième partie de la circonférence du cercle : par conséquent la corde de cet arc fera le côté de l'Éptagone.

PROPOSITION XII.

Problème.

309. *Décrire un Ondecagone dans un cercle.*

Pour décrire un Ondecagone dans un cercle, il faut diviser le quart de la circonférence en onze parties égales, & si l'on prend la corde d'un arc qui seroit les quatre onzièmes du quart de cercle, elle fera le côté de l'Ondecagone.

REMARQUE.

L'on nomme *Quadratrice* la courbe AFD, parce qu'elle contribue à la quadrature mécanique du cercle ; car supposant que l'on ait trouvé le point D en traçant la courbe, il est démontré dans Pappus, & dans Clavius, & dans plusieurs autres Auteurs, que le demi-diamètre BC est moyenne proportionnelle entre la base BD de la quadratrice, & la circonférence AEC du quart de cercle, tellement qu'il y a même raison de BD à BC que du même BC au quart de la circonférence AEC du cercle du rayon BC.

Fig. 83

PROPOSITION XIII.

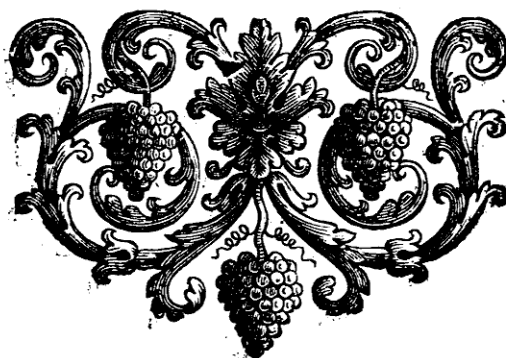
Problème.

310. *Circonscrire un Poligone autour d'un cercle.*

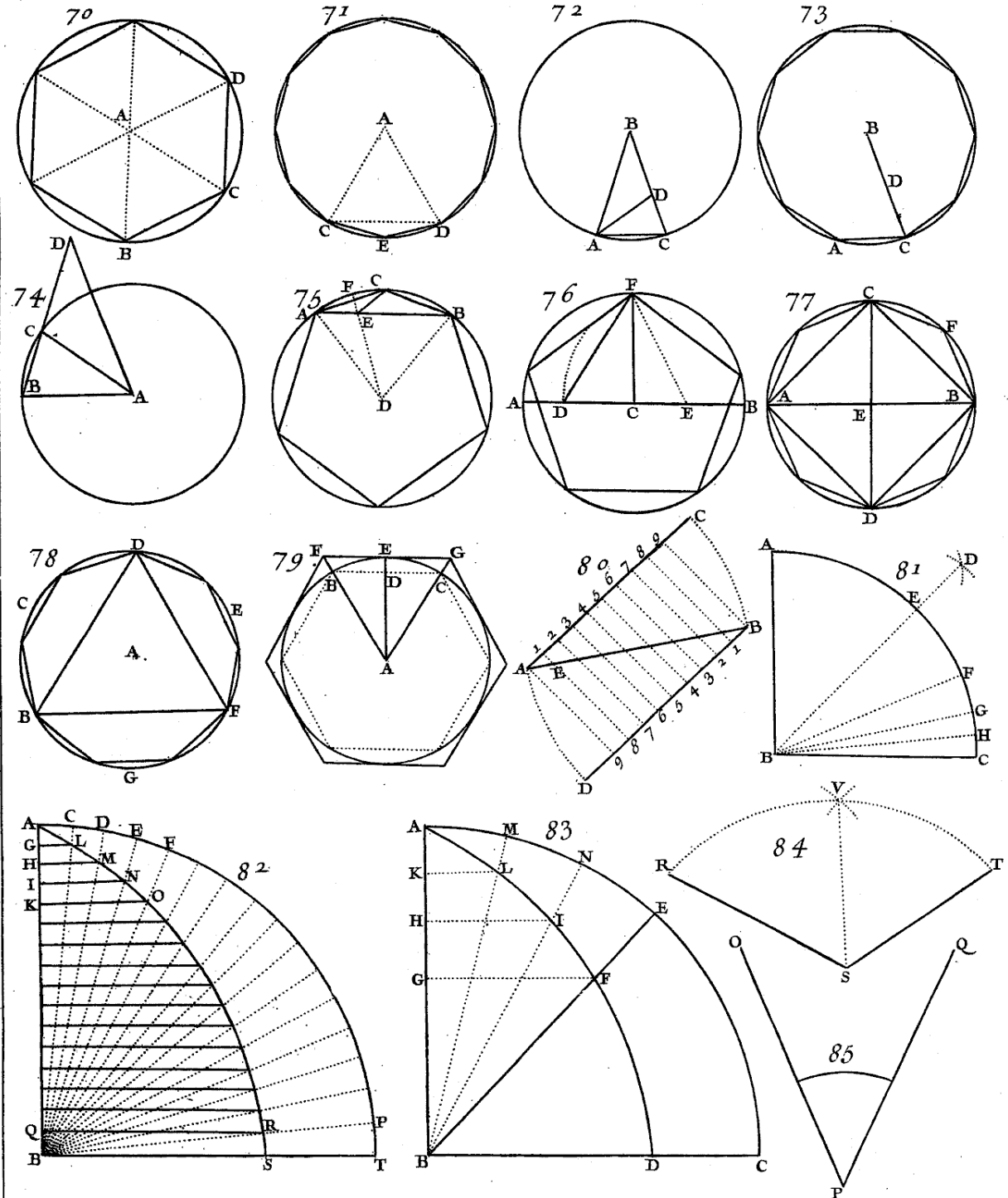
Quand on veut circonscrire un Poligone autour d'un cercle, il faut commencer par en inscrire un semblable dans le même cercle : ainsi voulant, par exemple, circonscrire un exagone autour du cercle A, il faut commencer par en tracer un dans le cercle, & diviser un de ses côtés, tel que BC, en deux également par un

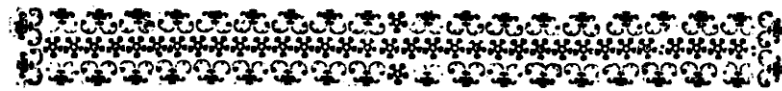
Fig. 79

rayon AE, & à l'extrémité E mener la tangente FG, qu'il faut terminer par les rayons prolongez AB & AC jusqu'à la rencontre de la tangente, & l'on aura le côté FG de l'exagone circonscrit : ainsi on trouvera tous les autres en faisant la même chose ; mais pour avoir plutôt fait, il vaut mieux, après que l'on a trouvé les points F, E, G, décrire un cercle du centre A, & de l'intervalle AG, sur la circonférence duquel on pourra marquer les points qui serviront à tracer le poligone, en y portant avec le compas la longueur du côté FG.



NOUVEAU





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE SEPTIÈME.

Où l'on considère le rapport qu'ont les circuits des figures semblables, & la proportion de leurs superficies.

DEFINITIONS.

I.

3.11. **O**N appelle côtes homologues les côtes des figures semblables, qui sont opposées aux angles égaux.

II.

3.12. On dit que deux quadrilatères ont leurs bases & leurs hauteurs *reciproques*, quand la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du second est à la hauteur du premier.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Théoreme.

3.13. Si l'on a deux polygones réguliers & semblables A & B, je dis que le circuit du polygone A est au circuit du polygone B, comme le rayon AC est au rayon BF.

PLANCHE 5.

Fig. 86.

& 87.

Nous nommerons CD, *a*; FG, *b*; AC, *c*; & BF, *d*. Or si chaque polygone a, par exemple, six côtes, le circuit du polygone A fera $6a$, & le circuit du polygone B fera $6b$. Ainsi il faut prouver que $6a. 6b :: c. d$.

R

DEMONSTRATION.

Comme les triangles ACD & BFG sont semblables, on aura $a. b :: c. d.$ & multipliant les deux premiers termes a & b par 6, l'on aura encore * $6a. 6b :: c. d.$ qui fait voir que ce que l'on a avancé est démontré.

COROLLAIRE.

Fig. 88.
& 89.

314. Il suit de cette proposition que les circonférences des cercles sont dans la même raison que leurs rayons ; car si l'on considère les cercles X & Y comme étant des polygones d'une infinité de côtes ; nommant a la circonférence du premier ; c , le rayon ; b , la circonférence du second ; & d , le rayon, l'on aura encore $a. b :: c. d.$

PROPOSITION II.

Théoreme.

Fig. 86.
& 90.

315. Si du centre d'un polygone régulier l'on abaisse une perpendiculaire AE sur l'un de ses côtes, je dis que la superficie de ce polygone sera égal à un triangle rectangle IKL , qui auroit pour hauteur la ligne IK , égale à la perpendiculaire AE , & pour base une ligne KL égale au circuit du polygone.

DEMONSTRATION.

Si le polygone est, par exemple, un exagone, & que l'on tire du centre des rayons dans tous les angles, l'on aura autant de triangles égaux que le polygone a de côtes : ainsi le polygone A sera composé de six triangles, tels que CAD ; mais comme les triangles CAD & KIL ont la même hauteur, ils seront dans la même raison que leurs bases * ; & comme la base KL est sextuple de la base CD , le triangle KIL sera donc le sextuple du triangle CAD , par conséquent égal au polygone. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

316. Il suit de cette proposition que pour trouver la

superficie d'un polygone régulier, il faut multiplier la moitié de son circuit par la perpendiculaire tirée sur un de ses côtes, puisque pour trouver la valeur du triangle IKL, qui est la même chose, il faut multiplier la moitié de la base KL par la perpendiculaire IK *.

*Art. 239.

PROPOSITION III.

Théoreme.

317. La superficie d'un cercle est égale à un triangle qui Fig. 31.
auroit pour hauteur le rayon du cercle, & pour base la circon-
ference.

DEMONSTRATION.

Comme un cercle est un polygone d'une infinité de côtes, si l'on prend la circonference pour la somme de ces côtes, & le rayon pour la perpendiculaire, il s'ensuit qu'il sera égal à un triangle qui auroit pour hauteur le rayon MN, & pour base une ligne NO, égale à la circonference *. C. Q. F. D.

*Art. 315.

COROLLAIRE.

318. Puisque le triangle MNO est égal au cercle, & qu'il est aussi égal à un rectangle qui auroit pour base la moitié de la base NO, & pour hauteur la ligne MN *, il s'ensuit qu'un cercle est égal à un rectangle qui auroit pour base la moitié de la circonference, & pour hauteur le rayon; & que pour en trouver la superficie, il faut multiplier la moitié du diamètre par la moitié de la circonference.

*Art. 239.

REMARQUE I.

319. Si l'on considère la superficie d'un cercle comme Fig. 32.
étant composé d'une infinité de circonferences concentriques, dont les rayons se surpassent également, toutes ces circonferences composeront une progression infinie Arithmétique, dont le centre sera le plus petit terme, & la

R ij

circonférence le plus grand. Or comme le demi-diamètre AB exprime la quantité des termes de la progression, il s'ensuit qu'on en trouvera la somme, en multipliant le plus grand terme, qui est la circonférence par la moitié du demi-diamètre AB *.

* Art. 240.

REMARQUE II.

Il semble d'abord que la proposition précédente donne la Quadrature du Cercle, parce qu'elle prouve qu'un cercle est égal à un triangle qui auroit pour base la circonférence du cercle, & pour hauteur le rayon ; mais comme on n'a pas encore trouvé géométriquement une ligne droite parfaitement égale à la circonférence d'un cercle, l'on n'a pu par conséquent trouver un triangle parfaitement égal au cercle. Quand je dis un triangle, l'on peut entendre un quarré égal au cercle, parce qu'on peut faire géométriquement un quarré égal à un triangle, comme on le verra ailleurs. Mais pour ne point rendre le mot de *Quadrature de Cercle* équivoque, il est bon que les Comménçans sçachent que la Quadrature du cercle consiste à trouver une proposition qui donne le moyen de faire un quarré égal à un cercle, & qui démontre que le quarré est parfaitement égal au cercle.

Quoique les Géomètres n'aient pas encore trouvé une ligne droite parfaitement égale à la circonférence d'un cercle, cela n'empêche pas que dans la Pratique l'on ne suppose que cela se puisse faire, en se servant de quelques Regles, qui sont des approximations de la Quadrature du Cercle, comme on le va voir.

320. Archimede ayant cherché avec assez d'exactitude le rapport du diamètre du cercle à sa circonférence, il a trouvé qu'il s'en falloit peu qu'il ne fût celui de 7 à 22. Ainsi supposant que le diamètre soit 7, la circonférence vaudra trois fois le diamètre, & la septième partie du même diamètre : or comme les diamètres des cercles sont dans la même raison que leurs circonférences * si l'on avoit un cercle dont le diamètre fut, par exemple, de

* Art. 314.

28 pieds, pour en trouver la circonférence, l'on diroit ; si 7, diamètre d'un cercle, donne 22 pour la circonférence du même cercle, combien donneront 28, diamètre d'un autre cercle, pour sa circonférence, que l'on trouvera de 88 pieds.

Mais si l'on avoit un cercle dont on connût seulement la circonférence, que nous supposons de 66 pieds, pour en trouver le diamètre, il faudroit faire encore une Règle de trois, en disant : Si la circonférence d'un cercle qui auroit 22 pieds, donne 7 pour son diamètre, combien donnera la circonférence d'un autre cercle qui seroit de 66 pieds pour le diamètre du même cercle, l'on trouvera 21 pieds pour le diamètre qu'on cherche.

P R O P O S I T I O N I V.

Théoreme.

321. Si l'on a deux polygones A & B semblables, la superficie du premier sera à celle du second comme le carré de la perpendiculaire AE sera au carré de la perpendiculaire BH, ou comme le carré du rayon AC au carré du rayon BF.

Fig. 85,
& 87.

Si l'on nomme le côté CD, a ; la perpendiculaire AE, b ; le côté FG, c ; la perpendiculaire BH, d ; le circuit du premier polygone sera $6a$; & celui du second sera $6c$, & multipliant les moitiés de ces circuits par leur perpendiculaire, l'on aura $3ab$ pour le polygone A, & $3cd$ pour le polygone B* ; ainsi il faut faire voir que $3ab.3cd :: bb.dd.$ *Art. 315.

D E M O N S T R A T I O N.

Pour prouver que $3ab.3cd :: bb.dd.$ nous ferons voir que de cette proportion le produit des extrêmes, & celui des moyens donnent $3abdd = 3cbdd$; pour cela considérez qu'à cause des triangles semblables ACD & BFG, $a.c :: b.d.$ d'où l'on tire $ad = bc$. Or si à la place de bc l'on met ad dans la première équation, l'on aura $3abdd = 3abdd$. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

Théoreme.

Fig. 88. 322. Les superficies des cercles sont dans la même raison
& 89. que les quarrés de leurs rayons.

Si l'on a deux cercles X & Y, & que l'on nomme a la circonference du cercle X, c le rayon, b la circonference du cercle Y, & d le rayon, la superficie du premier cercle fera $\frac{ac}{2}$, & celle du second fera $\frac{bd}{2}$. Cela posé, il faut prouver que $\frac{ac}{2} \cdot \frac{bd}{2} :: cc. dd.$

DEMONSTRATION.

Pour prouver que $\frac{ac}{2} \cdot \frac{bd}{2} :: cc. dd.$ nous ferons voir que le produit des extrêmes, & celui des moyens donnent $\frac{acdd}{2} = \frac{bdcc}{2}$. Pour cela considérez que ces circonférences de cercles étant dans la même raison que leurs rayons, l'on aura * $a. b :: c. d.$ d'où l'on tire $ad = bc$. Or si à la place de bc l'on met ad dans le second membre de la première équation, l'on aura $\frac{acdd}{2} = \frac{acdd}{2}$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

Théoreme.

Fig. 92. 323. Les triangles semblables sont dans la même raison
& 93. que les quarrés de leurs côtes homologues.

Ayant les deux triangles E & F, si l'on nomme a la base du premier, b sa perpendiculaire, c la base du second, d sa perpendiculaire la valeur du premier sera $\frac{ab}{2}$, & celle du

* Art. 239. second sera $\frac{cd}{2}$ * : ainsi il faut faire voir que $\frac{ab}{2} \cdot \frac{cd}{2} ::$
ou 237. $aa. cc.$

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer que $\frac{ab}{2} \cdot \frac{cd}{2} :: aa. cc.$ nous ferons voir que le produit des extrêmes, & celui des moyens, donnent $\frac{abcc}{2} = \frac{cdan}{2}$. Pour cela considérez que les deux triangles étant semblables, l'on aura $a. b :: c. d.$ par conséquent $ad = bc$; & que si à la place de ad dans le second membre de la première équation, l'on met bc , l'on aura $\frac{abcc}{2} = \frac{abcc}{2}$.
C. Q. F. D.

REMARQUE.

L'on peut par cette proposition démontrer par la voye la plus courte que dans un triangle rectangle, comme ABC, le carré du côté AC opposé à l'angle droit, est égal au carré des deux autres côtés pris ensemble AB & BC; car abaissant de l'angle droit la perpendiculaire BD, l'on aura trois triangles semblables ABC, ABD, BDC. * Or prenant pour côtés homologues de ces triangles les côtés AC, AB, BC, qui sont opposés aux angles droits, l'on verra que puisque le grand triangle ABC est égal aux deux petits pris ensemble, que le carré du côté AC est égal aux carrés des deux autres côtés AB & BC pris ensemble.

Fig. 94.

* Art. 242.

PROPOSITION VII.

Théorème.

324. Les quadrilatères qui ont leurs bases & leurs hauteurs réciproques, sont égaux.

DÉMONSTRATION.

Si l'on a deux quadrilatères E & F, & qu'on nomme a la base du premier, b la base du second, c la hauteur du second, & d la hauteur du premier, selon la supposition, l'on aura * $a. b :: c. d.$ qui donne par conséquent $ad = bc$.
C. Q. F. D.

Fig. 95.
& 96.

* Art. 312.

COROLLAIRE.

325. Les triangles étant la moitié des parallélogrammes de même base & de même hauteur, il s'ensuit que lorsqu'ils auront leurs bases & leurs hauteurs reciproques, qu'ils seront égaux de même que les parallélogrammes.

PROPOSITION VIII.

Théoreme.

Fig. 97. 326. Les parallélogrammes sont dans la raison composée
& 98. de leurs bases & de leurs hauteurs.

DEMONSTRATION.

Ayant les deux parallélogrammes G & H, si l'on nomme a la base du premier, b celle du second, c la hauteur du premier, d celle du second, $\frac{a}{b}$ fera la raison de la base du premier à celle du second, & $\frac{c}{d}$ fera la raison de la hauteur du premier à celle du second. Or multipliant ces deux raisons l'une par l'autre, l'on aura $\frac{ac}{bd}$ pour la raison * du parallélogramme G au parallélogramme H, qui est composé des raisons de a à b , & de celle de c à d . C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

327. Les triangles étant les moitiés des parallélogrammes, il s'ensuit qu'ils seront aussi dans la raison composée de leurs bases & de leurs hauteurs.

COROLLAIRE II.

Il suit encore que les triangles & les parallélogrammes semblables sont dans la raison doublée de celle de leurs bases & de leurs hauteurs; car s'ils sont semblables, la raison de la base de l'un à la base de l'autre, sera la même que

que celle de la hauteur de l'un à celle de l'autre : or étant dans la raison composée de raisons égales, ils seront donc dans la raison doublée * de leur base ou de leur hauteur. *Art. 192.

PROPOSITION IX.

Théoreme.

328. Si l'on a trois lignes en proportion continue, je dis que le carré fait sur la première, est au carré fait sur la seconde, comme la première ligne est à la troisième ; ainsi il faut prouver qu'ayant $\therefore a. b. c.$ que $aa. bb.:: a. c.$

DEMONSTRATION.

Pour prouver que $aa. bb.:: a. c.$ nous ferons voir que le produit des extrêmes, & celui des moyens, donnent $aac = bba$. Pour cela faites attention que $\therefore a, b, c$, donne $ac = bb$, & que mettant ac à la place de bb dans le second membre de l'équation précédente, l'on a $aac = aac$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

329. Il suit de cette proposition que si l'on a trois lignes proportionnelles, non seulement le carré fait sur la première est au carré fait sur la seconde comme la première est à la troisième ; mais que tous polygones semblables qui seront faits sur la première & la seconde ligne, seront dans la même raison que la première ligne est à la troisième : car comme les polygones semblables sont dans la même raison que les carrés de leurs rayons * : si à la place des rayons l'on prend leurs côtes homologues, qui sont dans la même raison, les polygones seront dans la raison des carrés de leurs côtes : ainsi la première & la seconde ligne servant de côtes à ces polygones, leurs superficies seront dans la raison de la première ligne à la troisième. *Art. 321.

S

PROPOSITION X.

Théoreme.

330. Si l'on a deux lignes droites, que nous nommerons a & b , je dis que le rectangle compris sous ces deux lignes, est moyenne proportionnelle entre le quarré de chacune de ces lignes, c'est-à-dire, que $aa.ab :: ab.bb$.

DEMONSTRATION.

Il est certain que $aa.ab :: ab.bb$ puisque le produit des extrêmes & celui des moyens donnent $aabb = aabb$.

PROPOSITION XI.

Théoreme.

331. Si l'on a quatre grandeurs en proportion géométrique, il y aura même raison du quarré de la première au quarré de la seconde, que du quarré de la troisième au quarré de la quatrième.

DEMONSTRATION.

Pour prouver que si $a.b :: c.d$ l'on a aussi $aa.bb :: cc.dd$ nous ferons voir que le produit des extrêmes & celui des moyens donnent cette égalité $bbcc = aadd$. Pour cela considérez que la première proportion donne $bc = ad$, & que si dans l'équation précédente l'on met ad à la place de bc dans le premier membre, & bc à la place de ad dans le second, l'on aura $abcd = abcd$. C. Q. F. D.

PROPOSITION XII.

Problème.

Fig. 99. 332. Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

Pour trouver une moyenne proportionnelle entre les deux lignes A & B, il faut joindre ces deux lignes en

forte qu'elles n'en fassent qu'une seule CD, observant de marquer un point à l'endroit E, où elles se joignent : ensuite il faut diviser toute la ligne CD en deux également au point F, & de ce point comme centre, décrire un demi-cercle. Presentement si au point E, où les deux lignes se joignent, on élève une perpendiculaire EH, qui aille se terminer à la circonférence, elle sera la moyenne que l'on cherche. Ce qui est bien évident, puisque par la propriété du Cercle, toute * perpendiculaire comme HE, * Art. 278. est moyenne proportionnelle entre les parties CE & ED du diamètre : ainsi supposant que la ligne K soit égale à HE, l'on aura les trois lignes proportionnelles A, K, B.

333. Si l'on vouloit avoir une moyenne proportionnelle entre deux nombres donnez, comme entre 4 & 9, il faudroit multiplier ces deux nombres l'un par l'autre, & extraire la racine quarrée du produit 36, que l'on trouvera être 6, & ce nombre sera la moyenne proportionnelle que l'on cherche ; car comme le quarré de cette moyenne (c'est-à-dire, de 6) donne 36, qui est égal au produit des deux extrêmes 4 & 9, l'on a donc $\therefore 4. 6. 9.$

Si le produit des deux extrêmes n'est pas un nombre quarré, on se servira de décimales * pour approcher le * Art. 91. plus près que l'on pourra de la racine, qui est la moyenne qu'on cherche.

PROPOSITION XIII.

Problème.

334. *Trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données.* Fig. 100.

Si l'on veut trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données M & N, en sorte que la première ligne M soit à la seconde N, comme la seconde N est à celle que l'on cherche, il faut faire à volonté un angle ABC, & prendre sur le côté BC la partie BD égale à la première ligne M, & la partie DF égale à la seconde N ;

Si j

sur le côté BA la partie BE égale encore à la seconde N, & tirez la ligne ED.

Presentement si du point F l'on tire la ligne FG parallèle à ED, l'on aura la ligne EG, qui sera la troisième proportionnelle que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Art. 244. Confiderez que le triangle BGF a ses deux côtes BG & BF coupez proportionnellement par la ligne DE parallèle à la base FG, & que par conséquent l'on a * BD. DF :: BE. EG. & que BE étant égal à DF, par la construction l'on aura BD. DF :: DF. EG. Ainsi faisant la ligne O égale à EG, l'on aura les trois lignes proportionnelles M, N, O.

335. Pour trouver une troisième proportionnelle à deux nombres, comme à 2 & à 8, il faut quarrer le second nombre, diviser le produit par le premier, & le quotient sera la troisième proportionnelle que l'on cherche. Ainsi divisant le quarré de 8, qui est 64 par 2, il viendra 32 pour le nombre qu'on cherche; puisque le produit des deux extrêmes 2 & 32 est égal au quarré de la moyenne 8.

PROPOSITION XIV.

Problème.

Fig. 101. 336. Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes
8c. 102. données.

Pour trouver une quatrième proportionnelle aux trois lignes P, Q, R, il faut, comme dans la proposition précédente, faire un angle à volonté XSC, & prendre sur le côté SC la partie SV égale à la ligne P, la partie VZ égale à la ligne Q; & sur l'autre côté SX la partie ST égale à la ligne R; après quoi tirer la ligne TV, à laquelle on menera du point Z la parallèle ZX, qui donnera la ligne TX, qui est la quatrième proportionnelle que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Le triangle SXZ étant coupé par la ligne TV parallèle à la base XZ, l'on aura *SV. VZ :: ST. TX. : ainsi *Art. 24. faisant la ligne Y égale à TX, l'on aura les quatre lignes proportionnelles P, Q, R, Y.

337. Pour trouver une quatrième proportionnelle à trois nombres donnez, il n'y a qu'à faire la Règle de trois ordinaire, puisque la Règle de trois n'est autre chose que de trouver un quatrième terme qui ait même raison au troisième que le second au premier.

L'on va voir dans les Problèmes suivans l'usage qu'on peut faire des proportionnelles.

PROPOSITION XV.

Problème.

338. *Faire un Quarré égal à un Rectangle.*

Pour faire un Quarré égal au Rectangle AC, il faut Fig. 103. chercher une moyenne proportionnelle entre les côtez & 104. inégaux AB & BC du rectangle, & le quarré de cette moyenne sera égal au rectangle.

Si la ligne DE est moyenne proportionnelle entre AB & BC, il est certain que son quarré DF sera égal au rectangle AC, puisque ce rectangle est compris sous les extrêmes AB & BC.

COROLLAIRE.

339. Comme nous avons prouvé * qu'un cercle étoit égal à un rectangle compris sous la moitié de la circonférence, & la moitié du diamètre, il s'ensuit donc que le quarré d'une ligne qui seroit moyenne proportionnelle entre la moitié du diamètre, & la moitié de la circonférence, seroit égale au cercle. *Art. 138.

S.iii.

PROPOSITION XVI.

Problème.

Fig. 105.
& 106.340. *Trouver un Quarré qui soit à un autre selon une raison donnée.*

Pour trouver un Quarré qui soit au Quarré CB dans la raison, par exemple, de 3 à 5, je fais une ligne GH égale aux trois cinquièmes du côté AB, & entre les lignes AB & GH, je cherche une moyenne proportionnelle EF, sur laquelle je fais le Quarré IF, qui sera les trois cinquièmes du Quarré CB; car comme les trois lignes AB, EF, GH, sont proportionnelles, il y aura même raison de GH à AB, que du Quarré IF au Quarré CB *. Or GH étant les trois cinquièmes de AB, le Quarré

*Art. 328.

IF sera donc les trois cinquièmes du Quarré CB.

Cette proposition nous fournit un moyen pour réduire de grand en petit, ou de petit en grand toutes les figures semblables.

PROPOSITION XVII.

Problème.

Fig. 107.
& 108.341. *Trouver le Rapport de deux Figures semblables.*

Pour trouver le Rapport de deux Poligones semblables A & B, il faut chercher une troisième proportionnelle telle que GH à leurs côtes homologues CD & EF, & le Rapport de la ligne CD à la ligne GH fera le même que celui du Poligone A au Poligone B.

Pour le prouver, considérez que les trois lignes CD, EF, & GH, étant proportionnelles, il y aura même raison de la figure faite sur la première CD à une autre semblable faite sur la ligne EF, que de la première CD à la troisième GH, & que par conséquent le Poligone A est au Poligone B comme la ligne CD est à la ligne GH.

PROPOSITION XVIII.

Problème.

342. *Faire un Rectangle égal à un autre, qui ait un côté déterminé.* Fig. 109 & 110.

L'on demande de faire un Rectangle égal au Rectangle BC, en sorte qu'il ait un de ses côtés égal à la ligne donnée DE.

Pour cela il faut chercher une quatrième proportionnelle à la ligne donnée DE *, & aux deux côtés AC & AB du Rectangle; ensuite si l'on fait un Rectangle sous la ligne donnée DE, & sous la quatrième que l'on aura trouvée, il sera égal au Rectangle BC. * Art. 336.

Pour le prouver, considérez que si l'on a fait le Rectangle GH compris sous le côté FG (que je suppose être la quatrième proportionnelle, que l'on a trouvée) & sous la ligne FH égale à DE, l'on aura $FG : AC :: AB : FH$. Par conséquent $FG \times FH = AC \times AB$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

343. Il suit de cette proposition que si l'on a plusieurs Rectangles, dont les bases & les hauteurs soient inégales, on pourra les réduire tous à la même hauteur; & après cela si l'on veut n'en faire qu'un seul égal à tous les autres pris ensemble, en lui donnant pour base une ligne égale à la somme de toutes les bases, & pour hauteur la hauteur commune.

COROLLAIRE II.

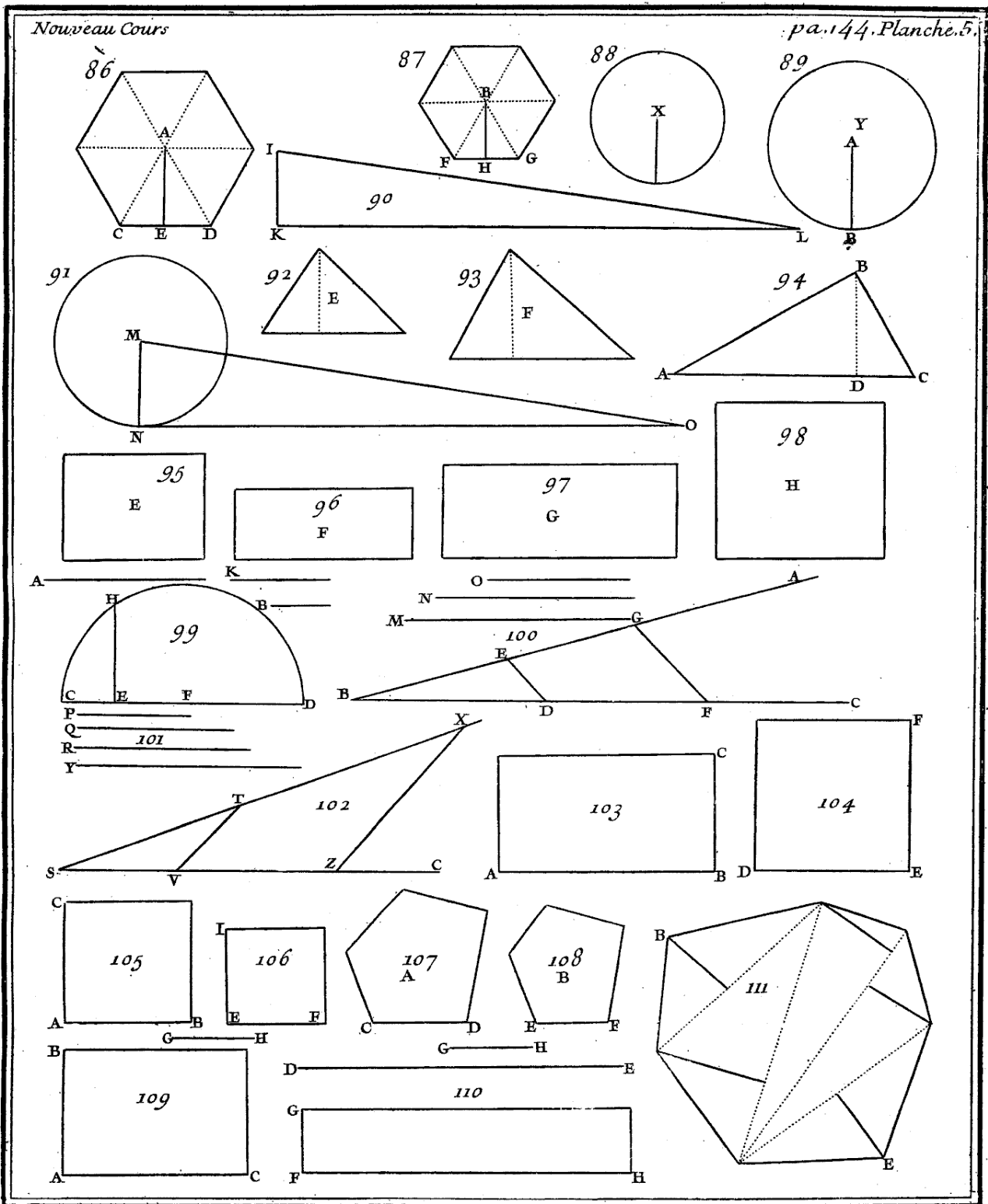
344. Comme on peut réduire toutes figures rectilignes, telle que BE en triangles, & que de chaque triangle on en peut faire un Rectangle, il suit encore que si

144 NOUVEAU COURS

l'on donne aux Rectangles provenans des triangles la même hauteur, on pourra en les réduisant tous dans un seul, faire un Quarré égal à une figure rectiligne composée d'un grand nombre de côtez, puisque l'on n'aura qu'à chercher une moyenne proportionnelle * entre les côtez inégaux du Rectangle qui vaudra tous les autres.



NOUVEAU





NOUVEAU COURS DE MATHEMATIQUE.

LIVRE HUITIEME.

Qui traite des Corps, & de leurs Surfaces.

DEFINITIONS.

I.

345. **P** *Prisme* est un solide terminé par plusieurs plans, dont il y en a un qui lui sert de base, & un autre qui le couronne, qui est égal & parallèle à celui de la base, & les autres sont autant de rectangles qu'il y a de côtés à la base, qui est presque toujours un Polygone : voyez la figure A, qui est un Prisme droit, que l'on nomme ainsi, pour le distinguer de ceux qui sont inclinez.

PLAN :

CHE 6.

Fig. 112.

II.

346. *Cylindre* est un solide qui est produit par la circonvolution entière d'un parallélogramme autour de l'un de ses côtés, lequel, à cause de cela, est appelé *axe du Cylindre*, qui passe par le centre des deux bases opposées & parallèles, qui sont deux cercles égaux.

Fig. 113.

LII.

347. *Pyramide* est un solide qui va se terminer en pointe, & qui a pour base un Carré ou un Polygone.

Fig. 114.

& 115.

IV.

348. *Cone droit* est un solide terminé en pointe, qu'on

Fig. 116.

T

246 NOUVEAU COURS

appelle *sommet du Cone*, qui est produit par la circonvolution entière d'un triangle rectangle, autour d'un de ses côtes, lequel à cause de cela est appelé *axe du Cone*, qui passe par le centre de la base, qui est un cercle, comme si autour du côté immobile CD on fait mouvoir par pensée le triangle CDB, ce triangle décrira le Cone ACB, dont l'axe est le côté immobile CD.

V.

Fig. 117.
& 118.

349. *Cone tronqué droit* est un solide formé par la révolution d'un trapezoïde, tel que FGH I autour d'un de ses côtes GF, qui soutient les deux angles droits, ou bien l'on peut dire qu'un Cone tronqué est ce qui reste d'un Cone tel que ABC, après en avoir ôté le petit Cone DBE, séparé par la section du plan DE parallèle à la base AC.

V.I.

Fig. 119.

350. La *Sphere* est un solide terminé par une seule surface courbe, qu'on appelle surface *sphérique*, comme ADBC, au dedans de laquelle il y a un point, qu'on appelle *centre de la Sphere*, duquel toutes lignes droites tirées jusqu'à la surface, sont égales.

V.II.

351. La *generation* de la Sphere est la révolution d'un demi-cercle autour du diamètre.

V.III.

Fig. 119.

Segment ou *portion* de Sphere; est l'une des deux parties inégales ABC & ADC d'une Sphere coupée par un plan AC, qui ne passe pas par son centre, autrement au lieu d'une portion de Sphere on auroit la moitié d'une Sphere, qu'on nomme *Hemisphère*.

IX.

Fig. 120.

352. La *Zone* est une partie ABCD de la surface d'une Sphere terminée par deux cercles BC & AD de la même

Sphere, qui sont paralleles entr'eux, c'est-à-dire, qui ont deux mêmes points pour Poles.

X.

353. Le *Secteur* de Sphere est un solide terminé en pointe au centre de la Sphere, qui a pour base la surface d'un segment de Sphere, comme COGH. Fig. 121.

XI.

354. *Orbe* est un corps spherique terminé par deux superficies spheriques, l'une concave, & l'autre convexe, comme le corps qui est borné par les deux superficies spheriques BCDE, qui est convexe, & FGHI, qui est concave : ainsi vous voyez que l'Orbe est ce qui reste, lorsque d'une grande Sphere, comme BCDE, on en a ôté une plus petite qui est en dedans, comme FGHI. Fig. 122.

XII.

355. Comme l'on peut concevoir un Orbe d'une épaisseur infiniment petite, il s'ensuit qu'une Sphere peut être considérée comme composée d'une infinité d'Orbes, dont le plus grand est la surface de la Sphere, & dont le plus petit est celui qui va se terminer à 0, au centre de la Sphere.

XIII.

356. *Angle solide* est celui qui est renfermé par plusieurs plans ; tel est, par exemple, l'angle E qui est composé des plans BEA, AED, DEC ; & BEC. Pour mieux entendre cette Définition, on peut considérer le sommet des pyramides, les coins des cubes & des parallelepipèdes comme des angles solides. Fig. 123.

PROPOSITION PREMIERE.

Théoreme.

357. La surface de tout Prisme, sans y comprendre les bases, est égale à celle d'un Rectangle, qui auroit pour base une Fig. 124. & 125.

Tij

ligne FG égale à la somme de tous les côtes du Poligone AC, & pour hauteur une ligne HG égale à la hauteur AE du Prisme.

DEMONSTRATION.

Si le Prisme droit a pour base un Exagone regulier, il fera renfermé par six rectangles tels que DE. Or si la ligne FG est égale aux côtes du Poligone pris ensemble, elle fera sextuple du côté AD ; & comme les rectangles ED & FH, ont la même hauteur, le rectangle FH sera donc sextuple du rectangle ED ; par conséquent égal à la surface du Prisme. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

358. Le Cylindre ayant pour base un cercle qu'on peut regarder comme un Poligone d'une infinité de côtes, il s'ensuit que le rectangle qui aura pour base une ligne droite égale à la circonference du cercle du Cylindre, & pour hauteur celle du Cylindre sera égal à la surface du Cylindre.

PROPOSITION II.

Théoreme.

Fig. 125. & 126. 359. La surface d'une Pyramide droite, comme ABC, est égale à celle d'un triangle qui auroit pour base une ligne GI, égale à la somme des côtes du Poligone regulier, qui sert de base à la Pyramide, & pour hauteur une ligne HG égale à une perpendiculaire BE, tirée du sommet B de la Pyramide sur un des côtes DE.

DEMONSTRATION.

Si la Pyramide a pour base, par exemple, un Exagone, elle sera renfermée par six triangles tels que DBE, & la base GI fera sextuple de la base DE. Or les triangles DBE & GHI ayant la même hauteur, le triangle GHI sera sextuple* du triangle DBE ; par conséquent égal à la surface de la pyramide. C. Q. F. D.

* Art. 243.

COROLLAIRE.

360. Un Cone droit pouvant être regardé comme une pyramide droite d'une infinité de côtes, il s'ensuit que sa surface sera égale à un triangle qui auroit pour base une ligne égale à la circonférence du cercle de la base du Cone, & pour hauteur le côté du Cone.

PROPOSITION III.

Théoreme.

361. *Les Parallelepipedes & les Prismes droits sont en raison composée des raisons de leurs trois dimensions.*

DEMONSTRATION.

Nous avons vû * que pour trouver la solidité des Parallelepipedes, il falloit multiplier le produit des deux dimensions de leurs bases par leurs hauteurs; ce qui fait voir que leur solidité dépend de la multiplication de leurs dimensions: ainsi par la Définition des raisons composées*, l'on peut donc dire que la raison qui est entre les Parallelepipedes, est composée de celle de leurs trois dimensions. C. Q. F. D. * Art. 261 * Art. 191

COROLLAIRE I.

362. Les Prismes & les Cylindres étant composés d'un nombre infini de plans égaux & semblables à ceux de leur base, l'on peut dire que puisque la quantité de ces plans est exprimée par la hauteur de ces solides, qu'il faudra donc pour en trouver la valeur multiplier la base par la hauteur. Or puisque la solidité des Prismes & des Cylindres dépend de la multiplication de leurs trois dimensions, il s'ensuit qu'ils seront dans la raison composée de celles des mêmes dimensions.

COROLLAIRE II.

363. Il suit encore qu'on trouvera toujours le rapport
T.iii.

des solides de même espèce, en multipliant leur base par leurs hauteurs : quand je dis de même espèce, j'entens, par exemple, les Pyramides comparées ensemble, les Cones, les Parallelepipedes, &c. car quoique nous n'ayons pas encore donné la maniere de trouver la solidité des Pyramides & des Cones, cela n'empêche pas que l'on ne soit convaincu qu'elles dépendent de leurs trois dimensions ; car si pour trouver la solidité d'une Pyramide il faut multiplier la base par le tiers ou la moitié de la hauteur, il est certain que pour trouver la solidité d'une autre Pyramide, il faudra aussi multiplier sa base par le tiers ou la moitié de sa hauteur. Ainsi en multipliant de la même façon les trois dimensions d'une Pyramide, & les trois dimensions d'une autre, si ces produits n'en donnent pas la solidité, ils donneront au moins le rapport que ces Pyramides ont entr'elles.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

Fig. 128. 364. *Toute Pyramide, comme ABCDE, est le tiers d'un Prisme AKID de même base & de même hauteur.*

Supposant que la base AC soit un quarré, nous nommerons AD ou DC, a ; HA ou EF, b ; & la perpendiculaire EG $\frac{1}{2} a$, puisqu'elle est moitié de IK ou de AD.

DEMONSTRATION.

Considérez que si du Prisme AK on retranche la Pyramide ABCDE, il restera quatre autres Pyramides telles que AHIEB, qui sont toutes égales entr'elles, ayant chacune pour base un des rectangles AHIB de la surface du Prisme, & pour hauteur une perpendiculaire EG. Or si l'on multiplie aa , qui est la base AC de la Pyramide AEC par son axe EF (b), l'on aura aab pour le produit des trois dimensions de cette Pyramide, & multipliant aussi ab , qui est la base de la Pyramide AHIEB par sa hauteur EG

($\frac{1}{2}a$), l'on aura $\frac{aab}{2}$ pour le produit des trois dimensions de cette autre Pyramide ; & comme il y a quatre Pyramides égales à celle-ci , le produit de leurs trois dimensions ensemble , sera donc $\frac{4aab}{2}$, ou bien $2aab$, qui étant double de aab , produit des trois dimensions de la Pyramide AEC , il s'ensuit que cette Pyramide est le tiers du Prisme.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

365. Il suit de cette proposition que pour trouver la solidité d'une Pyramide , telle que ABCDE , qui a pour base un quarré , il faut multiplier la base , c'est-à-dire , le quarré AD par le tiers de la hauteur de la Pyramide , qui est la perpendiculaire EF , ou bien multiplier la base par toute la hauteur , & prendre le tiers du produit.

Fig. 1294

COROLLAIRE II.

366. Si l'on coupe la Pyramide droite ACD par un plan , qui passant par l'axe , soit parallèle à un des côtez de la base , la section donnera un triangle isoscèle FCG , dont tous les élémens tels que IK sont en progression arithmétique*. Mais comme tous ces élémens sont autant de lignes égales aux côtez des quarrés qui composent la Pyramide , il s'ensuit que la Pyramide est composée d'un nombre infini de quarrés , dont tous les côtez sont en progression arithmétique. Or comme pour trouver la somme de tous ces quarrés , c'est-à-dire , la solidité de la Pyramide , il faut multiplier le quarré AD par le tiers de la perpendiculaire CH , l'on pourra tirer de ce raisonnement un principe general , qui est que si l'on a une progression arithmétique infinie composée de lignes , dont la plus petite va se terminer à 0 , l'on trouvera la somme des quarrés de toutes ces lignes , en multipliant le quarré de la plus grande ligne par le tiers de la grandeur , qui exprime la quantité des lignes ou des quarrés.

Fig. 1295

* Art. 240.

Il est important de bien entendre ce Corollaire, parce que nous nous en servirons dans les démonstrations suivantes.

COROLLAIRE III.

Fig. 130. 367. Il suit encore pour trouver la solidité d'une Pyramide droite ABC, qui a pour base un Poligone AC, qu'il faut multiplier la base par le tiers de l'axe BD; car comme cette Pyramide est composée d'une infinité de Poligones semblables à celui de la base, tous ces Poligones semblables étant dans la même raison que les quarrés de leurs rayons *, & leurs rayons, tels que EF & AD étant les mêmes que les élémens du triangle ABD, on peut dire que ces Poligones sont dans la raison des quarrés des lignes d'une progression infinie arithmétique, & que par conséquent pour en trouver la valeur, il faudra multiplier le plus grand Poligone AC par le tiers de la perpendiculaire BD.*

Art. 321.

Art. 366.

COROLLAIRE IV.

Fig. 132. 368. Comme le Cone ABC est composé d'une infinité de cercles, qui ont pour rayons les élémens tels que EF & AD du triangle ABD, il s'ensuit que les cercles étant dans la même raison que les quarrés de leurs rayons *, il faudra pour trouver la valeur de tous les cercles dont le Cone est composé, multiplier le plus grand cercle AC par le tiers de la perpendiculaire BD, qui en exprime la quantité.

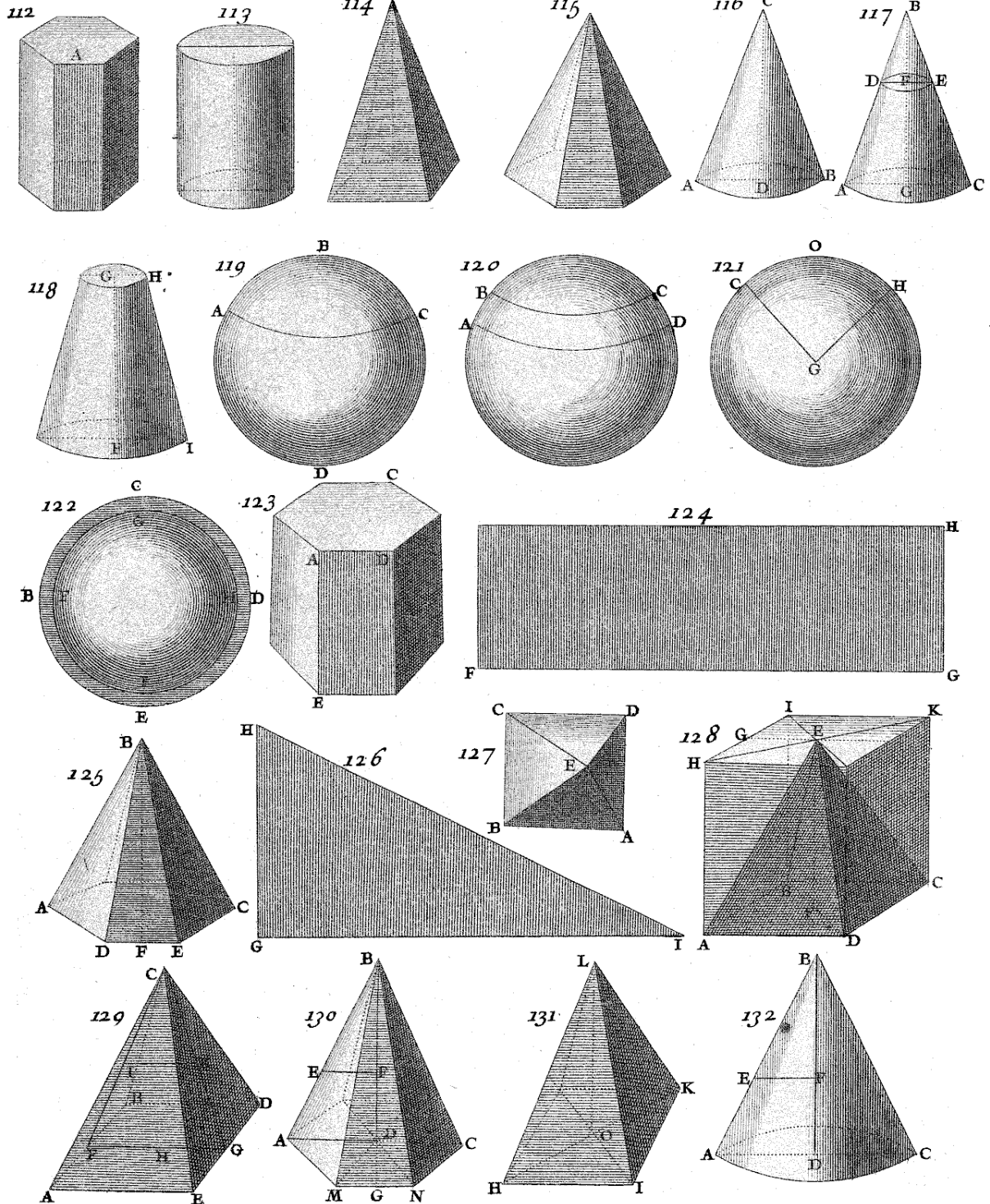
Art. 322.

PROPOSITION V.

Théoreme.

Fig. 130. & 131. 369. Si l'on a deux Pyramides ABC & HLK, dont la hauteur BD de la première soit égale à la hauteur LO de la seconde, je dis qu'elles seront dans la même raison de la base AC à la base HK.

Supposant que la base AC soit un Exagone regulier, & la base HK un quarré, nous nommerons le côté MN a la



Lucas sculp.

DE MATHÉMATIQUE.

§ 53

la perpendiculaire DG, b ; le côté HI ou IK, c ; & la hauteur BD ou LO, d . Cela posé, la base AC fera $\frac{6ab}{2}$, ou bien $3ab$, & la base HK fera cc , & multipliant les deux bases par le tiers* de la hauteur commune, c'est-à-dire, par $\frac{d}{3}$, l'on aura $\frac{3abd}{3}$, ou bien abd pour la valeur de la Pyramide ABC, & $\frac{ccd}{3}$ pour la valeur de la Pyramide HLK. Ainsi il faut démontrer que $abd. \frac{ccd}{3} :: 3ab. cc$. *Art. 367.

DEMONSTRATION.

Pour prouver que $abd. \frac{ccd}{3} :: 3ab. cc$. considérez que le produit des extrêmes & celui des moyens, donnent $abccd = abccd$, en faisant évanouir la fraction. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

370. Les Cones étant des Pyramides d'une infinité de côtes, il s'ensuit que lorsqu'ils auront la même hauteur, ils feront dans la même raison que leurs bases. Il en sera aussi de même pour les Prismes & les Cylindres.

PROPOSITION VI.

Théoreme.

371. Si l'on a deux Prismes X & Y, dont les bases & les hauteurs soient reciproques, je dis qu'ils sont égaux.

PLANCHE 7.

DEMONSTRATION.

Fig. 133 & 134.

Pour le prouver nous supposons que ab est la base du Prisme X, & cd celle du Prisme Y, e la hauteur du Prisme Y, & f la hauteur du Prisme X. Cela étant, nous aurons par la supposition $ab. cd :: e. f$. Par conséquent $abf = cde$. Or comme le premier membre de cette équation est le produit des trois dimensions du Prisme X, & le second le produit des trois dimensions du Prisme Y, il s'ensuit que les Prismes X & Y sont égaux. C. Q. F. D.

V

COROLLAIRE.

372. Il suit de cette proposition que les Cylindres, les Pyramides & les Cones qui ont leurs bases & leurs hauteurs reciproques, sont égaux. *La démonstration en est la même que la précédente.*

PROPOSITION VII.

Théoreme.

Fig. 135. 373. Une Pyramide tronquée comme ABDE est égale à
& 136. une Pyramide qui auroit pour base un plan égal aux deux
quarrez BE & AH pris ensemble, plus un plan qui seroit
moyenne géométrique entre ces deux quarrez, & pour hauteur
l'axe FG.

Considerant la Figure HKLI comme étant la coupe de
la Pyramide tronquée, & le triangle HMI comme la coupe
de la Pyramide entiere, nous nommerons le côté HI ou
AD, a ; KL ou BC, b ; tout l'axe MG, c ; le petit axe MF
de la Pyramide KML, d : ainsi l'axe FG de la Pyramide
tronquée sera $c-d$, & l'on aura $aa+bb+ab$ pour la base
de la Pyramide égale à la Pyramide tronquée; car ab est
*Art. 330. moyenne proportionnelle entre aa & bb *: ainsi il faut

prouver que $aa+bb+ab$, multiplié par $\frac{c-d}{3}$, qui est
 $\frac{aac+bbc+abc-aad-bbd-abd}{3}$ est égal à la Pyramide tronquée.

DEMONSTRATION.

Faites attention que la Pyramide entiere HMI est $\frac{aac}{3}$,
*Art. 365. & que la petite Pyramide KML est $\frac{bbd}{3}$ *, & que si l'on ôte
la petite Pyramide de la grande, la difference fera la
valeur de la Pyramide tronquée, qui est par consequent
 $\frac{aac-bbd}{3}$, qui donnera avec $\frac{aac+bbc+abc-aad-bbd-abd}{3}$ cette
équation, $\frac{aac-bbd}{3} = \frac{aac+bbc+abc-aad-bbd-abd}{3}$. Pour le

prouver, considérez qu'à cause des triangles semblables HMI & KLM, l'on a $a. b :: c. d.$ d'où l'on tire $bc=ad$. Or si à la place de ad l'on met bc dans le quatrième & le sixième terme du second membre de cette équation, l'on aura $\frac{aac-bbd}{3} = \frac{aac+bbc+abc-abc-bbd-bbc}{3}$. D'où effaçant ce qui se détruit dans le second membre, il vient $\frac{aac-bbd}{3} = \frac{aac-bbd}{3}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

374. Il suit de cette proposition que pour trouver la valeur d'une Pyramide tronquée, il faut multiplier les deux plans BE & AH l'un par l'autre; extraire la racine quarrée du produit pour avoir le plan moyen *; ajouter *Art. 333; ce plan moyen avec les deux autres BE & AH, & multiplier le tout par le tiers de la perpendiculaire FG.

COROLLAIRE II.

375. Comme un Cone tronqué est composé d'une quantité de cercles, qui sont tous dans la même raison que les quarrés qui composent une Pyramide tronquée, il s'en suit que pour en trouver la solidité, il faut chercher un cercle moyen entre les deux cercles opposés; ajouter ce cercle avec les deux, & multiplier la somme de ces trois cercles par le tiers de l'axe.

LEMME.

376. La Ligne qui sera moyenne proportionnelle entre les parties EG & GF du diamètre EF sera le rayon du cercle égal à la couronne. X. Fig. 137.

DEMONSTRATION.

Considérez que la ligne HG est moyenne proportionnelle entre EG & GF par la propriété du cercle *, & qu'à cause du triangle rectangle HGD il manque au cercle du rayon DG le cercle du rayon GH pour valoir le ser-

V ij

*Art. 250.
& 322.

cle du rayon DH^* , & que puisqu'il manque aussi au même cercle du rayon DG la couronne X pour valoir le cercle du rayon DH . Il s'ensuit que cette couronne est égale au cercle du rayon GH .

PROPOSITION VIII.

Théoreme.

Fig. 338.

377. Si l'on a une demi-Sphere AED inscrite dans un Cylindre $ABCD$, je dis que la demi-Sphere est égale aux deux tiers du Cylindre.

Prolongez le diamètre BC jusqu'en F , en sorte que BF soit égal à BA , & tirez la ligne FA , qui donnera le triangle isoscèle ABF .

DEMONSTRATION.

*Art. 278.

Si l'on suppose que la demi-Sphere & le Cylindre sont coupez par un plan GL parallèle à la base AD , cette section formera la couronne GH , & si l'on abaisse du point H la perpendiculaire HI sur le diamètre AD , elle sera par le Lemme précédent le rayon du cercle égal à la couronne GH , puisqu'elle est moyenne proportionnelle * entre les parties AI & ID , ou bien GH & HL , qui sont les mêmes. Or comme les lignes HI , GA , GK , sont égales, il s'ensuit que la couronne GH sera égale au cercle qui auroit pour rayon la ligne correspondante GK , qui est un des élémens du triangle ABF ; & comme le triangle est composé d'autant d'élémens qu'il y a de couronnes dans l'espace qui est entre la demi-Sphere & le Cylindre, la somme des élémens & des couronnes étant exprimée par la ligne BA , il s'ensuit que tous les cercles qui auront pour rayons les élémens du triangle, vaudront pris ensemble toutes les couronnes: & comme pour trouver la valeur de tous ces cercles, il faut multiplier le cercle du plus grand élément FB par le tiers de la ligne BA^* , il faudra donc pour trouver la somme de toutes les couronnes, multiplier la plus grande couronne BC , qui est

*Art. 368.

le cercle du Cylindre par le tiers de la ligne AB hauteur du Cylindre : ce qui fait voir que toutes les couronnes prises ensemble, sont égales au tiers du Cylindre, & que par conséquent la demi-Sphere en est les deux tiers.
C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

378. Puisqu'une demi-Sphere est les deux tiers du Cylindre où elle seroit inscrite, c'est-à-dire, de même base & de même hauteur, il s'ensuit que pour en trouver la solidité, il faut multiplier son plus grand cercle AD par les deux tiers du rayon ME.

COROLLAIRE II.

379. Une demi-Sphere étant les deux tiers d'un Cylindre de même base & de même hauteur, une Sphere fera par conséquent les deux tiers du Cylindre qui auroit pour base le grand cercle de la Sphere, & pour hauteur le diamètre : ainsi il faut donc pour trouver la solidité d'une Sphere, multiplier son grand cercle par les deux tiers du diamètre, ou bien multiplier le grand cercle par tout le diamètre, & prendre les deux tiers du produit.

COROLLAIRE III.

380. Si l'on considère qu'un quart de cercle est composé d'une quantité infinie d'éléments tels que DE, l'on verra que si le quart de cercle fait une circonvolution autour du rayon AB, il décrira une demi-Sphere telle que X, qui sera composée d'une infinité de cercles, dont tous les éléments du quart de cercle AC feront les rayons. Or comme les cercles sont dans la même raison que les quarrés de leurs rayons, & que pour trouver la valeur de tous les cercles qui ont pour rayons les éléments du quart de cercle AC, il faut multiplier le cercle du plus grand rayon BC par les deux tiers du demi-diamètre AB ; il s'en

Fig. 1399

Fig. 1420

V iii

Il suit que pour trouver tous les quarrés des élémens du quart de cercle AC, il faut multiplier le quarré du plus grand élément BC par les deux tiers de la ligne AB, & que l'on peut tirer de ce raisonnement un principe general.

Qui est que *dans une progression qui seroit composée des élémens infinis d'un quart de cercle, la somme des quarrés de tous ces élémens seroit égale au produit du quarré du plus grand élément, c'est-à-dire, du rayon par les deux tiers du demi-diamètre.*

PROPOSITION IX.

Théoreme.

Fig. 143.

381. *Les soliditez des Spheres sont dans la même raison que les cubes de leurs diamètres.*

* Art. 318.

Si l'on nomme le diamètre AB, a ; la circonference b ; le diamètre CD, c ; & la circonference d , la superficie

* Art. 379.

du grand cercle de la premiere Sphere fera $\frac{ab}{4} *$, & celle du grand cercle de la seconde fera $\frac{cd}{4}$, & multipliant l'un & l'autre cercle par les deux tiers de leur diamètre *, l'on aura $\frac{2aab}{12}$ ou $\frac{aab}{6}$ pour la solidité d'une des Spheres, & $\frac{2ccd}{12}$ ou $\frac{ccd}{6}$ pour la solidité de l'autre Sphere: ainsi il faut démontrer que $\frac{aab}{6} \cdot \frac{ccd}{6} :: aaa. ccc.$

DEMONSTRATION.

Pour prouver que $\frac{aab}{6} \cdot \frac{ccd}{6} :: aaa. ccc.$ nous ferons voir

* Art. 314.

que le produit des extrêmes & celui des moyens donnent cette égalité $aabccc = aaaccd$. Pour cela considérez que les diamètres des cercles étant dans la même raison que leurs circonférences, l'on a $a. b :: c. d$. d'où l'on tire $ad = bc$, & que si l'on met ad à la place de bc dans le pre-

mier membre de l'équation précédente, l'on aura $aaadcc = aaadcc$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

382. De la façon qu'on a démontré cette proposition, l'on pourra prouver aussi que les Pyramides, les Cones, les Prismes & les Cylindres semblables sont dans la même raison que les cubes de leurs axes, & que par conséquent ils sont dans la raison triplée de leurs trois dimensions.

PROPOSITION X.

Théoreme.

383. La surface d'une demi-Sphere AED, est égale à celle d'un Cylindre ABCD, où elle est inscrite. Fig. 140
& 141.

Supposant que le Cylindre AC & le Cone GHI ont la même base & la même hauteur, nous nommerons a les lignes égales FE, FD, KH, KI, & b les circonferences AD & GI. Cela posé, l'on aura $\frac{ab}{2}$ pour la valeur du cercle AD ou GI, qui étant multiplié par les deux tiers de EF ($\frac{2a}{3}$) donnera $\frac{2aab}{6}$ ou bien $\frac{aab}{3}$ pour la valeur de la demi-Sphere *, & multipliant $\frac{ab}{2}$ par le tiers de HK ($\frac{a}{3}$), il vient $\frac{aab}{6}$ pour la solidité du Cone GHI. *Art. 37.
& 378.

DEMONSTRATION.

Si l'on imagine la demi-Sphere AED comme étant composée d'une infinité de petits Cones, qui ont leurs bases dans la surface de la Sphere, & dont toutes les pointes venant aboutir au centre F, ont pour hauteur commune le rayon, l'on pourra dire que tous ces petits Cones sont égaux pris ensemble à un seul qui auroit pour base la surface de la Sphere, & pour hauteur le rayon. Or comme la valeur de ce Cone est ici $\frac{aab}{3}$, & que celle du Cone

GHI est $\frac{aab}{6}$, ces deux Cones ayant la même hauteur; il s'ensuit qu'ils seront dans la même raison que leurs bases, c'est-à-dire, comme le cercle Gf est à la surface de la Sphere, que l'on trouvera en disant * comme $\frac{aab}{6}$ valeur du Cone GHI, est à $\frac{aab}{3}$ valeur du Cone égal à la demi-Sphere: ainsi $\frac{ab}{2}$ base du Cone GHI, est à la base du second Cone, ou autrement à la surface de la demi-Sphere que l'on trouvera $\frac{6aaaab}{6aab}$, qui étant réduit, donne ab , qui est un rectangle égal à la surface du Cylindre, puisqu'il est compris sous la hauteur a , & la circonference b .
C. Q. F. D.

AUTRE DEMONSTRATION.

Considérez que si du Cylindre AC l'on retranche le Cone BFC, qui en est le tiers, le solide ABFCD qui restera, que nous nommerons *Entonnoir*, en fera les deux tiers. Or comme la demi-Sphere inscrite est aussi les deux tiers du Cylindre, elle sera par conséquent égale à l'entonnoir: mais si l'on imagine l'entonnoir composé d'une infinité de petites Pyramides, dont toutes les bases sont dans la surface du Cylindre, & dont la hauteur commune est le rayon FD, comme la demi-Sphere est aussi composée de petits Cones, ou de petites Pyramides, qui ont leurs bases dans la surface de la demi-Sphere, & dont la hauteur commune est encore le rayon FD, il s'ensuit que toutes les Pyramides de la demi-Sphere étant égales à toutes celles de l'entonnoir, toutes les bases des unes prises ensemble, feront égales à toutes les bases des autres, puisque ces Pyramides ont la même hauteur: mais toutes les bases des unes valent la surface de la Sphere, & toutes les bases des autres, la surface du Cylindre; la surface de la Sphere est donc égale à celle du Cylindre.
C. Q. F. D.

COROL.

COROLLAIRE I.

384. La surface du Cylindre AC ayant pour base la circonférence du grand cercle de la Sphere, & pour hauteur le rayon, il s'ensuit que la surface d'une demi-Sphere est égale au rectangle compris sous une ligne droite égale à la circonférence de son grand cercle, & sous le rayon, & que par conséquent la surface d'une Sphere est égale au rectangle compris sous une ligne égale à la circonférence de son grand cercle, & sous son axe : ainsi pour trouver la surface d'une Sphere, il faut multiplier le diamètre de son grand cercle par sa circonférence.

COROLLAIRE II.

385. Le grand cercle d'une demi-Sphere étant la moitié du rectangle compris sous la circonférence & sous le rayon *, il s'ensuit que la surface d'une demi-Sphere est double de celle de son grand cercle, & que par conséquent la surface de toute la Sphere est quadruple de celle de son grand cercle. * Art. 325.

COROLLAIRE III.

386. Comme ces cercles sont dans la même raison que les quarrés de leurs rayons *, il s'ensuit qu'un cercle qui aura un rayon double d'un autre, aura une surface quadruple *: par conséquent la surface d'une Sphere est égale à celle d'un cercle qui auroit pour rayon l'axe de la même Sphere. * Art. 69.

COROLLAIRE IV.

387. Comme les surfaces de Sphere sont égales à des cercles qui auroient pour rayons le diamètre des Spheres, & les cercles étant comme les quarrés de leurs rayons, qui sont ici les mêmes que les diamètres des Spheres, il s'ensuit que les surfaces des Spheres sont comme les quarrés de leur diamètre.

X

PROPOSITION XI.

Théoreme.

Fig. 144. 388. La solidité d'une Zone $ABCD$ est égale aux deux tiers du Cylindre $AEFD$ du grand cercle AD , plus au tiers du Cylindre $GBCH$ du plus petit cercle BC .

DEMONSTRATION.

Comme l'on trouve la valeur de toutes les couronnes qui sont entre la Zone & le Cylindre $AEFD$, en multipliant la plus grande couronne EB par le tiers de la ligne EA ou OL^* , il s'ensuit que ce produit est égal au tiers de l'espace EG ou FH , qui regne entre les deux Cylindres $AEFD$ & $GBCH$, & que par conséquent la partie ABG de la Zone qui regne autour du Cylindre $GBCH$ en est les deux tiers : or si l'on retranche de ce Cylindre le Cone IBC , qui en est le tiers, il restera l'entonnoir $GBICH$, qui en fera les deux tiers ; ainsi la partie $ABICD$ de la Zone vaudra les deux tiers du Cylindre $AEFD$. Mais comme le Cone BIC , qui fait aussi partie de la Zone, est le tiers du Cylindre $GBCH$, il s'ensuit que la solidité de la Zone $ABCD$ est égale aux deux tiers du Cylindre $AEFD$, plus au tiers du Cylindre $GBCH$.
C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Fig. 145. 389. Il suit de cette proposition que si l'on coupe une demi-Sphere inscrite dans un Cylindre par un plan FG parallèle à la base AE que la partie $ABCDE$ (qui est la différence de la demi-Sphere au secteur $CBHD$) est égale à l'entonnoir $AFCGE$ du Cylindre correspondant AG , puisque l'un & l'autre sont les deux tiers du Cylindre AG .

PROPOSITION XII.

Théoreme.

390. Si l'on coupe une demi-Sphere inscrite dans un Cylindre par un plan FG parallele à la base AE , je dis que la surface de la Zone $ABDE$ est égale à celle du Cylindre correspondant AG . Fig. 145.

DEMONSTRATION.

L'entonnoir $AFCGE$ étant égal à la partie $ABCDE$ de la Zone *, si l'on imagine l'entonnoir, comme étant composé d'une infinité de petites Pyramides, qui ont toutes leurs bases dans la surface du Cylindre AG , & pour hauteur le rayon CE , & la partie $ABCDE$ de la demi-Sphere, comme étant aussi composée de petites Pyramides, dont les bases sont dans la surface de la Zone, & qui ont pour hauteur commune le rayon CE ; il s'en suivra (toutes les Pyramides d'une part étant égales à toutes celles de l'autre, ayant toutes la même hauteur) que nécessairement toutes les bases d'une part seront égales à toutes les bases de l'autre, & qu'ainsi la surface de la Zone $ABDE$ sera égale à celle du Cylindre $AFGE$. $C. Q. F. D.$ *Art. 389.

COROLLAIRE I.

391. Comme la surface de la demi-Sphere AHE est égale à celle du Cylindre AI , & que la surface de la Zone $ABDE$ est égale à celle du Cylindre AG , il s'en suit que la surface du segment BHD de la Sphere est égale à celle du Cylindre correspondant FI , ou bien au rectangle compris sous une ligne égale à la circonference du grand cercle de la Sphere, & sous la partie HK .

COROLLAIRE II.

392. Il suit encore que si l'on coupe une demi-Sphere inscrite dans un Cylindre par un plan parallele à la base

X ij

164 NOUVEAU COURS
que les parties de la surface de la demi-Sphere seront
égales aux parties correspondantes du Cylindre.

COROLLAIRE III.

393. Les surfaces des Cylindres FI & AG ayant des
bases égales, seront dans la même raison que leur hauteur
HK & KC; & comme le premier Cylindre est égal à la par-
tie de la surface BHD de la demi-Sphere, & le second à la
partie ABDE, il s'en suit que les parties de la surface sont
dans la même raison que les parties HK & KC du demi-
diamètre, la demi-Sphere étant coupée par un plan BD,
parallèle à son grand cercle.

394. L'on peut dire encore que si on coupe une Sphè-
re par un plan perpendiculaire à l'axe que les parties de
la surface de la Sphere, seront dans la même raison que
les parties de l'axe.

PROPOSITION XIII.

Théoreme.

395. Lorsque trois lignes a, b, c , sont en proportion con-
tinue, le parallelepède fait sur ces trois lignes est égal au
cube fait sur la moyenne; ainsi il faut prouver que $abc = bbb$.

DEMONSTRATION.

Si l'on a $a :: b, c$, l'on aura par conséquent $ac = bb^*$:
*Art. 152. ainsi en mettant dans l'équation $abc = bbb$, ac à la place
de bb , l'on aura $abc = abc$. C. Q. F. D.

PROPOSITION XIV.

Théoreme.

396. Lorsque quatre lignes sont en progression géométri-
que, le Cube fait sur la première, est au Cube fait sur la
seconde, comme la première ligne est à la quatrième, c'est-à-
dire, que si l'on a $a :: b, c, d$, il faut prouver que aaa .
 $bbb :: a. d$.

D E M O N S T R A T I O N .

Confiderez que dans la proportion $\therefore a, b, c, d$, les trois premiers termes donnent $ac=bb$ *, & que tous quatre ensemble donnent $ad=bc$ * : or pour prouver que $aaa.bbb::a.d$. nous ferons voir que le produit des extrêmes & celui des moyens donnent $aaad=bbba$. pour cela il n'y a qu'à mettre ac à la place de bb dans le second membre, & bc à la place de ad dans le premier, l'on aura $aabc=aabc$. C. Q. F. D.

*Art. 152.

*Art. 150.

P R O P O S I T I O N X V .

Problème.

397. Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux Lignes données. Fig. 146.

Pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données AB & CD, il faut faire un rectangle sous ces deux lignes, tel que EH; de sorte que EF soit égal à CD, & EG égal à AB: ensuite prolonger indéfiniment les côtes EF & EG, & du centre I du rectangle décrire un cercle de manière que la circonférence venant couper les lignes prolongées GK & FL, l'on puisse mener du point K au point L une ligne KL, qui ne fasse que toucher l'angle H, & l'on aura les lignes GK & FL, qui seront moyennes proportionnelles entre GE & EF, c'est-à-dire, entre les données AB & CD.

D E M O N S T R A T I O N .

Confiderez que si l'on abaisse les perpendiculaires IM & IN, que la corde OL sera divisée en deux également au point M *, aussi-bien que la ligne EF, & que par conséquent OE est égal à FL, & que KP étant divisé en deux également au point N, aussi-bien que GE; GK sera égal à EP. Cela posé, comme les triangles OEP, HFL, KGH, sont semblables, l'on aura HF. FL :: EO. EP. mais comme OE est égal à FL, l'on aura HF. FL :: FL. EP. or comme

*Art. 263.

X ii j.

les deux triangles EOP & GKH donnent encore OE. EP :: GK. GH. si à la place de EP l'on met GK, qui lui est égal, l'on aura OE. GK :: GK. GH. ce qui prouve qu'il y a même raison de HF à FL, que de FL à GK, & que de GK à GH, & que par conséquent les lignes FL & GK sont moyennes proportionnelles entre GE & EF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

R E M A R Q U E.

Le Problème précédent est celui qu'on appelle communément *la Duplication du Cube*, parce qu'il sert à faire un cube double d'un autre, ou selon une raison donnée; il feroit à souhaiter qu'on pût le résoudre géométriquement, sans être obligé de tâtonner: car il est à remarquer qu'il faut décrire plusieurs cercles avant d'en trouver un dont la circonférence venant à couper aux points K & L les lignes prolongées, l'on puisse tirer la ligne KL, qui ne fasse que toucher l'angle H. Il est vrai qu'on peut le résoudre encore d'une autre façon, comme on le verra après les Sections Coniques; mais quoiqu'elle soit plus géométrique que celle-ci, elle n'a pas moins ses difficultés: cependant comment l'on se sert plus volontiers des nombres que des lignes dans la pratique, l'on va voir dans le Problème suivant comment on peut trouver deux nombres moyennes proportionnelles entre deux autres.

P R O P O S I T I O N X V I.

Problème.

398. *Trouver entre deux nombres donnez deux Moyennes proportionnelles.*

Pour trouver entre deux nombres deux moyennes proportionnelles, il faut cuber le premier nombre, & faire une Règle de trois, dont les deux premiers termes soient le premier & le second nombre donnez, & le troisième le cube du premier nombre, & le quatrième terme étant trouvé, l'on en extraira la racine cube, qui donnera la

première des deux moyennes, & si l'on cherche entre cette première des deux moyennes; & le second nombre donné une moyenne proportionnelle, elle sera la seconde des deux que l'on cherche.

Ainsi pour trouver deux moyennes propositionnelles entre 2 & 16, je cube le premier nombre 2, qui donne 8, & je dis: Si 2 m'a donné 16, combien donneront 8; je trouve 64, dont la racine cube est 4, qui est la première des deux moyennes que je cherche: ensuite je multiplie cette première des deux moyennes par le second nombre donné 16, pour avoir 64, dont j'extrais la racine quarrée, qui est 8; & qui est moyenne proportionnelle entre 4 & 16: ainsi 4 & 8 sont les deux moyennes entre 2 & 16; ce qui est bien évident, puisque les quatre nombres sont en progression géométrique.

Si les nombres donnez étoient tels que l'on ne pût pas dans les opérations extraire les racines cubes & quarrées exactement; dans ce cas il faudroit se servir des décimales*, * Art. 391. afin d'approcher le plus près qu'il est possible des racines, & consequent des moyennes que l'on cherche. Comme les Commencans pourroient ne pas d'eux-mêmes comprendre la raison des opérations que nous venons d'enseigner pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux nombres donnez, en voici la démonstration.

L'on a vû * que lorsque quatre lignes étoient en progression géométrique, que le cube fait sur la première étoit au cube fait sur la seconde, comme la première ligne étoit à la quatrième: ainsi l'on peut dire que la première ligne est à la quatrième comme le cube de la première est au cube de la seconde. Or connoissant la première ligne, la quatrième, & le cube de la première, l'on pourra trouver * le cube de la seconde; dont la racine fera la seconde même*: mais quand on aura une fois la seconde, l'on voit qu'il n'y a plus qu'à chercher une moyenne proportionnelle entre cette seconde & la quatrième* (qui n'est autre chose que le second nombre donné) pour avoir la troisième proportionnelle des qua- * Art. 396. * Art. 152. * Art. 396. * Art. 156.

tre, qui sera en même tems la seconde des deux moyennes que l'on cherche. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION XVII.

Problème.

Fig. 147. 399. *Faire un Cube qui soit à un autre dans une raison*
& 148. *donnée.*

Pour faire un Cube qui soit au cube C dans la raison de 2 à 3, c'est-à-dire, qui soit les deux tiers du Cube C, il faut diviser le côté AB du Cube en trois parties égales, & faire une ligne DE égale à deux de ces parties; ensuite chercher entre AB & DE deux moyennes proportionnelles, telles que FG & HI, & le cube qui aura pour côté la ligne FG, qui est la première des deux moyennes, sera celui que l'on demande; car nous allons prouver qu'il est les deux tiers du Cube C.

DEMONSTRATION.

Les quatre lignes AB, FG, HI, DE, étant en proportion continue, il y aura même raison du Cube de la ligne AB au Cube de la ligne FG que de la ligne AB à la ligne DE*: ainsi la ligne DE étant les deux tiers de AB, le Cube K sera les deux tiers du Cube C. *C. Q. F. D.*

Art. 396. Si le côté du Cube C étoit exprimé par nombre, il faudroit de même en prendre les deux tiers, & puis chercher entre le tout & les deux tiers deux moyennes proportionnelles, & le Cube du premier nombre moyen
*Art. 398. sera celui qu'on demande.

COROLLAIRE.

Art. 381. 400. Comme les Spheres sont dans la même raison que les Cubes de leurs diamètres, de même que les Cylindres, les Prismes, les Cones, & les Pyramides semblables, il s'ensuit que pour trouver quelque'un de ces solides, qui soit à leur semblable dans des raisons données il faut agir à l'égard de leurs axes, comme l'on vient de faire à l'égard

l'égard des côtes des Cubes, & après que l'on aura trouvé l'axe, l'on n'aura plus qu'à le faire convenir à un solide qui ait les mêmes angles, que celui auquel il doit être comparé.

PROPOSITION XVIII.

Problème.

401. *Faire un Cube égal à un Parallelepède.*

Fig. 149
& 150.

Pour faire un Cube qui soit égal au Parallelepède AE, il faut, si les trois dimensions du Parallelepède sont inégales, comme cela est supposé ici, chercher une moyenne proportionnelle entre les deux plus petites AB & BC*, qui sera, par exemple, FG, & faire sur cette ligne un quarré FH, qui doit servir de base à un Parallelepède FI, qui doit avoir pour hauteur la même hauteur que celle du Parallelepède AE: ainsi le Parallelepède AE sera égal au Parallelepède FI, puisqu'ayant la même hauteur, le rectangle AC, qui sert de base au premier, est égal au quarré FH, qui sert de base au second. Cela posé, il faut chercher deux moyennes proportionnelles entre FG & GK*, qui seront, par exemple, NO & PQ, & je dis que le Cube fait sur la première NO sera égal au Parallelepède FI ou AE.

*Art. 332.

*Art. 397.

Pour le prouver, nous prendrons GD égal à FG pour avoir le Cube GO, nous nommerons FG, ou GH, ou GD, a ; GK, b ; & NO, c ; ainsi le Parallelepède FI sera aab , & le Cube FM sera aaa , & le Cube de NO ccc : il faut donc faire voir que $aab = ccc$.

DEMONSTRATION.

Le Cube FM & le Parallelepède FI ayant la même base FH, seront dans la raison de leur hauteur GD & GK, d'où l'on tire $aaa. aab :: a. b$. & à cause des quatre proportionnelles, l'on verra que le Cube fait sur la première est au Cube fait sur la seconde, comme la première

Y

est à la quatrième, qui donne $aaa. ccc. :: a. b.$ mais dans cette proportion, aussi-bien que dans la précédente, les antecedens & les consequens de la seconde raison sont égaux, de même que les antecedens de la premiere: ainsi les consequens de la premiere le seront aussi; ce qui fait voir que $aab = ccc.$ C. Q. F. D.

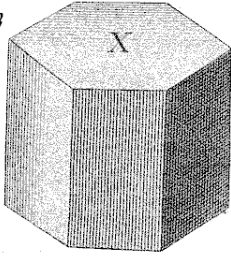
Si les dimensions du Parallelepipedé donné étoient exprimées en nombre, on n'auroit (pour trouver un Cube égal au Parallelepipedé) qu'à multiplier les trois dimensions l'une par l'autre pour avoir la valeur du Parallelepipedé, dont on n'aura qu'à extraire la racine cube, qui donnera le côté du cube que l'on demande.

COROLLAIRE.

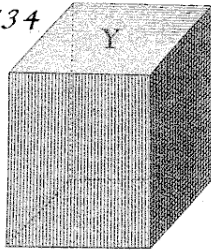
402. L'on voit par cette proposition qu'il n'y a point de Solides qu'on ne puisse réduire en Cubes; car les Cones & les Spheres pouvant se réduire en Cylindres, & les Pyramides en Prismes, si on change la base des Cylindres & des Prismes en Quarrez, qui leur soit égaux, on aura des Parallelepipedes, qu'on n'aura plus qu'à réduire en Cube.



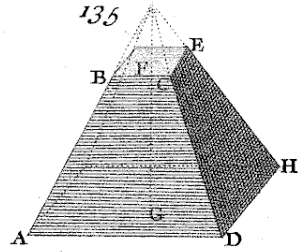
133



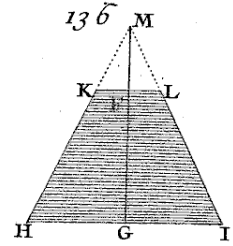
134



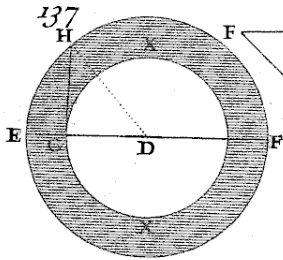
135



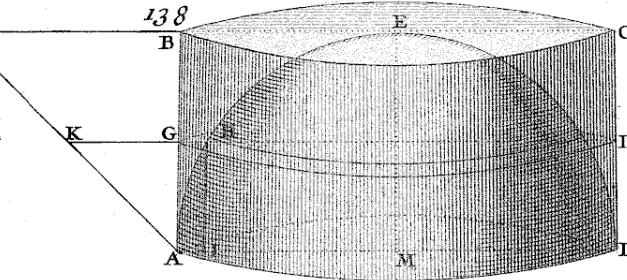
136



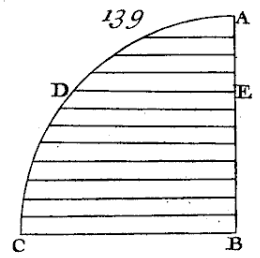
137



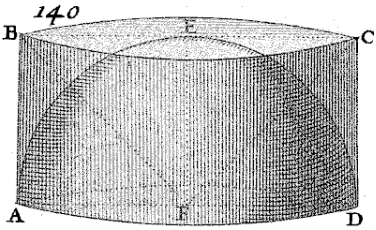
138



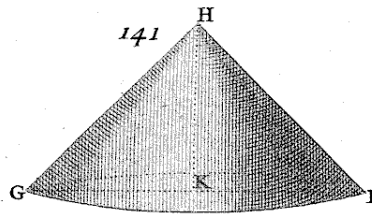
139



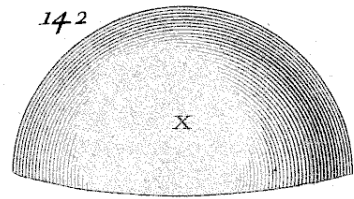
140



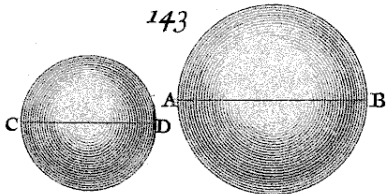
141



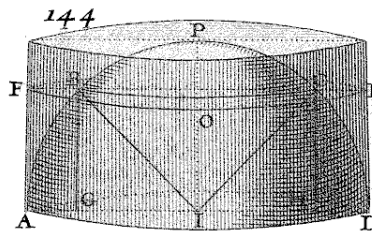
142



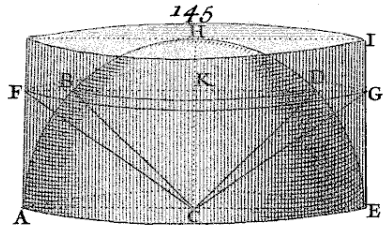
143



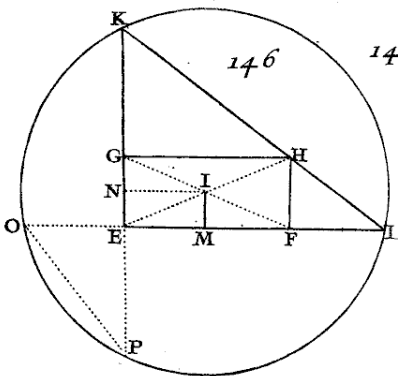
144



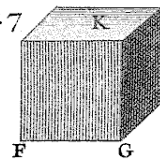
145



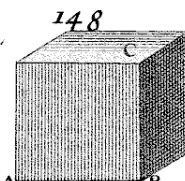
146



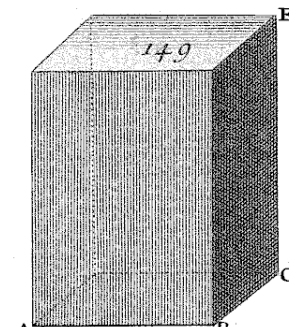
147



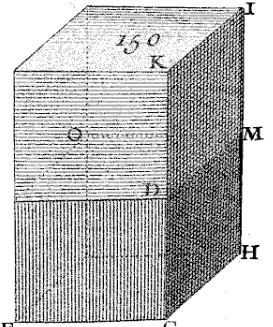
148



149



150



A — B
F — L
G — K
C — D

A — B
F — G
H — I
D — E

A — B
F — G
N — O
P — Q
G — K



DISCOURS

SUR LES SECTIONS CONIQUES.

Comme tous les Livres qui traitent des Elemens de Géométrie ne parlent point des Sections Coniques, la plupart de ceux qui étudient ces Elemens s'en tiennent là, sans s'embarasser de les chercher ailleurs, dans la pensée que cette étude est plus curieuse que nécessaire, & ne convient qu'aux personnes qui veulent se donner toutes entières aux Mathématiques : cependant il est si utile de les sçavoir, que si on les ignore, il n'est pas possible de résoudre les Problèmes les plus communs de la Géométrie pratique, particulièrement de cette Géométrie pratique qui convient à l'Ingenieur & à l'Officier d'Artillerie. Car si le premier veut toiser des Voûtes surbaissées, il faut qu'il sçache comme on trouve la superficie d'une Ellipse, que l'on appelle communément Ovale, & qui est une des Sections Coniques. Si le second veut sçavoir l'art de jetter les Bombes, il ne le peut encore sans connoître les propriétés de la Parabole, qui est aussi une des Sections Coniques. Enfin si un Mineur, pour changer un Fourneau, est obligé de mesurer la quantité des terres qu'il veut enlever, il faut qu'il ait aussi recours aux principes des Sections Coniques, parce que l'excavation des terres qu'enleve la Poudre dans une Mine, n'est point un Cone comme la plupart l'ont crû, & moins encore un Cone tronqué, mais bien un Paraboloïde, qui est un corps formé par la generation d'une Parabole qui a fait une révolution sur son axe. Et pour être bien convaincu de la nécessité de sçavoir au moins les principales propriétés des Sections Coniques, il ne faut que lire l'Application de la Géométrie à la Pratique, l'on verra que les plus belles opérations en dépendent absolument. Cependant malgré cela les Sections Coniques seroient bien peu de chose, si elles n'avoient d'autres usages que ceux que l'on trouvera ici : elles sont

Y ij

si nécessaires à un homme qui sans vouloir devenir grand Géomètre, veut seulement sçavoir cette Science passablement, qu'il ne peut pas les perdre de vûe d'un moment : car s'il veut résoudre un Problème un peu composé, il trouvera des Equations qui lui indiqueront les Courbes dont il faudra qu'il se serve pour construire les Egalitez, c'est-à-dire, pour construire une Figure qui donne la solution du Problème.

Je ne parle point de ceci dans cet Ouvrage, parce que je ne donne que les principales proprietéz des Sections Coniques, ayant eu seulement pour objet de les faire connoître à ceux qui ont du goût pour la Géométrie, afin de leur inspirer l'envie d'aller plus loin : & d'ailleurs pour m'en servir dans les endroits où je ne pourrois m'en passer. Mais s'il se trouvoit de ces personnes dont je viens de parler, qui ne se bornent point à voir un Livre de Géométrie, je leur conseille d'étudier l'excellent Traité des Sections Coniques de M. le Marquis de l'Hôpital, qui est ce que nous avons de meilleur dans ce genre. Et comme je me suis servi dans ce que je donne ici d'une façon de démontrer fort approchante de la sienne, je ne doute pas qu'on n'ait une grande facilité à comprendre cet Auteur, si l'on entend bien ce qui suit, qui en est en quelque sorte l'introduction.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

LIVRE DES SECTIONS CONIQUES.

CHAPITRE I.

Qui traite des propriétés de la Parabole.

DEFINITIONS.

I.

403. **S**I l'on a une ligne droite AB, dans laquelle on aura pris les parties AC & CD égales entr'elles, & que depuis C en venant vers B, l'on tire à la ligne OP (perpendiculaire à AB) une quantité de parallèles EF & GH, & que l'on fasse DE ou DF égal à AK, & DG, ou DH égal à AI, & que l'on continue à trouver une quantité de points tels que E, G, M, en faisant toujours DM égal à AL, la ligne que l'on fera passer par ces points sera une courbe nommée *Parabole*.

PLANS
CHE 82
Fig. 191d

II.

404. La ligne CB est nommée *l'axe* de la Parabole.

III.

405. Le point A est appelé *générateur*; la ligne OP, *directrice*; le point D, le *foyer*.

IV.

Et le point C l'*origine de l'axe* ou de la Parabole, parce que c'est de ce point qu'on a commencé à mener des parallèles pour la former.

Viii.

V.

406. Chaque perpendiculaire comme KE ou IG est nommée *Ordonnée*.

VI.

407. Les parties CK , CI , de l'axe CB prises depuis l'origine C jusqu'au point K ou I , où l'on a tiré des Ordonnées, sont appelées *Abcisses*.

VII.

408. Si sur le point C de la ligne AB l'on élève la perpendiculaire CN , quadruple de AC ou de CD , elle sera appelée *Paramètre* de la Parabole.

VIII.

409. Une ligne droite qui ne rencontre la Parabole qu'à un seul point, & qui étant continué de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appelée *Tangente*.

PROPOSITION PREMIERE.

Théoreme.

Fig. 151. 410. Dans la Parabole le Rectangle compris sous l'Abcisse CI & le Paramètre CN , est égal au Quarré de l'ordonnée GI .

Ayant nommé les données AC ou CD , a ; & les indéterminées CI , x ; & GI , y ; AI ou DG fera $x - a$; & DI fera $x + a$; & NC fera $4a$; il faut prouver que $CI \times CN (4ax) = GI^2 (yy)$.

DEMONSTRATION.

Considérez qu'à cause du triangle rectangle GDI le
 * Art. 63. quarré de DG ou de $AI (xx - 2ax + aa)$ * moins $\overline{DI}$
 * Art. 251. $(xx - 2ax + aa)$ fera égal à $\overline{GI}^2 (yy)$. D'où l'on tire

$$\overline{DG} - \overline{DI} (xx + 2ax + aa - xx + 2ax - aa) = \overline{GI} (yy),$$

qui étant réduit donne $CI \times CN (4ax) = \overline{GI} (yy)$ Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

Théoreme.

411. Dans la Parabole, je dis qu'il y a même raison du Quarré de l'ordonnée EK au Quarré de l'ordonnée GI, que de l'Abcisse CK à l'Abcisse CI.

DEMONSTRATION.

Les quarez des ordonnées étant égaux aux rectangles compris sous les Abcisses & sous le Paramètre, il s'ensuit que les quarez des ordonnées sont comme les rectangles qui leur sont égaux; mais comme les rectangles ont la même hauteur, qui est le Paramètre, ils seront dans la même raison de leurs bases*, c'est-à-dire, que les Abcisses *Art. 242.

CK & CI; par consequent $\overline{EK} : \overline{GI} :: GK : CI$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

412. Si à l'origine de l'axe CB l'on mène une perpendiculaire SC, & que des points E, G, M, de la Parabole l'on tire des perpendiculaires sur la ligne SC, il s'ensuit qu'il y aura même raison du quarré CQ au quarré CR, que de la ligne QE à la ligne RG, puisque les lignes CQ & CR sont égales aux ordonnées KE & IG, & que les lignes QE & RG sont égales aux Abcisses CK & CI.

Nous nous servirons de ce Corollaire dans la suite pour faire voir que les Boulets & les Bombes décrivent des Paraboles dans l'espace qu'ils parcourent depuis le lieu d'où ils sont poussés, jusqu'à l'endroit où ils vont se terminer.

PROPOSITION III.

Problème.

Fig. 152. 413. *Mener une Tangente à une Parabole par un point donné.*

Pour mener une Tangente à une Parabole par un point donné E, tirez de ce point au foyer C la ligne EC, & du même point la ligne ED parallèle à l'axe BK, qui aille rencontrer la directrice HA au point D. Tirez la ligne DC; & si vous menez la ligne EG qui passe par le milieu I de la ligne DC, je dis qu'elle sera tangente à la Parabole, & qu'elle ne la touchera qu'au seul point E; tirez les lignes FD & FC, & les parallèles FH à l'axe BK.

DEMONSTRATION.

Art. 403. Confiderez que les lignes EC & ED sont égales, & qu'ainsi le triangle DEC étant isoscèle, la ligne EI sera perpendiculaire sur DC, puisqu'elle la divise en deux également: de plus l'angle DHF étant droit, la ligne FD sera plus grande que FH. D'où il s'ensuit que FC, qui est égale à FD, sera aussi plus grande que FH; & que par conséquent le point F n'est point dans la Parabole, puisqu'il faudroit que FC fût égale à FH. Ainsi je conclus que la tangente FG ne touche la Parabole qu'au point E.
C. Q. F. D.

DEFINITION.

Fig. 152. 414. Si du point d'attouchement E l'on mène l'ordonnée EK à l'axe de la Parabole, la ligne GK sera nommée *sous-Tangente*.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

Fig. 153. 415. Si l'on élève une perpendiculaire EM sur la Tangente GL au point où elle touche la Parabole, & que de ce même point

point l'on tire une ordonnée EK à l'axe BM , je dis que la partie KM de l'axe sera égale à la moitié du Paramètre de cette Parabole, c'est-à-dire à $2a$.

DÉMONSTRATION.

Comme les lignes DC & EM sont parallèles, étant perpendiculaires sur LG , & que les lignes DA & EK sont égales, il s'ensuit que les triangles DAC & EKM sont égaux & semblables, & que les lignes AC & KM sont égales: donc la ligne KM vaut la moitié du Paramètre, puisque AC est égal à $2a$. * *C. Q. F. D.* *Art. 410.

PROPOSITION V.

Théoreme.

416. Nous servant de la même figure, je dis que la Sous-tangente GK est double de l'Abcisse BK .

DÉMONSTRATION.

Le Paramètre de cette Parabole étant $4a$ * KM fera $2a$, *Art. 410. & à cause des triangles semblables EGK & EKM *, l'on *Art. 249. aura $KM (2a), KE (y) :: KE (y), \frac{KE}{KM} \left(\frac{y}{2a} \right) = KG$. Or si dans l'équation $\frac{y^2}{2a} = KG$, l'on met $4ax$ à la place de yy , qui lui est égal, * l'on aura $\frac{4ax}{2a} = KG$, & par conséquent *Art. 410. $2x = KG$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

417. L'on tire de cette proposition un moyen fort aisé pour mener une Tangente à une Parabole; car, par exemple, pour mener la ligne LG par le point E , Tangente à la Parabole, vous voyez qu'il n'y a qu'à abaisser du point E la perpendiculaire EK sur l'axe BM , faire la ligne BG égale à l'Abcisse BK , & par les points G & E mener la ligne LG .

Z

DEFINITION.

Fig. 154. 418. Si du point A où la Tangente touche la Parabole, l'on tire une ligne AO parallèle à l'axe ML, cette ligne sera nommée un *Diamètre* à la Parabole.

PROPOSITION VI.

Théoreme.

419. Si l'on tire une ligne CD parallèle à la Tangente NB, je dis qu'elle sera divisée en deux également au point E par le diamètre AO.

Du point A menez l'ordonnée AG, & des points C, E, D, les lignes HI, EF, DL, parallèles à l'ordonnée AG, & prolongez le diamètre OA jusqu'à la rencontre de la ligne HC. Cela posé, nous nommerons MF, m ; IF ou HE, t ; FL ou EK, u ; ainsi MI sera $m-t$; & ML, $m+u$; GF, $m-x$; parce que nous nommerons toujours MG, x ; & AG, y . Ainsi il faut prouver que EC est égal à ED, ou bien que $HE(t) = EK(u)$: ce qui est la même chose; car si HK est divisé en deux également au point E, CD le sera aussi au même point, à cause des parallèles HI & DL.

DEMONSTRATION.

Remarquez que les triangles BGA, ECH, EDK, sont semblables, & qu'ils donnent ces deux proportions BG

Art. 416. $(2x)^$, $GA(y) :: EK(u), KD(\frac{yu}{2x})^*$, & $BG(2x), GA$

*Art. 154. $(y) :: EH(t) HC(\frac{yt}{2x})$. De plus que $CI = y - \frac{yt}{2x}$, & que $DL = y + \frac{yt}{2x}$; & si l'on multiplie chacune de ces grandeurs

2 Art. 183. par elle-même*, l'on aura $yy - \frac{y^2t}{x} + \frac{y^2t^2}{4xx}$ pour le carré de la première (après en avoir fait la réduction,) & $yy + \frac{y^2t}{x} + \frac{y^2t^2}{4xx}$ pour le carré de la seconde. Or par la

Art. 410. propriété de la Parabole, l'on a les deux proportions

suivantes $MG(x)$, $ML(m+u) :: \overline{AG}^2(yy)$ $\overline{LD}^2(yy + \frac{yyu}{x} + \frac{yyuu}{4xx})$, & $MG(x)$, $MI(m-t) :: \overline{GA}^2(yy)$ $\overline{CI}^2(yy - \frac{yyt}{x} + \frac{yytt}{4xx})$, d'où l'on tire ces deux équations avec le produit des extrêmes, & celui des moyens $myy + uyy = xyy + yyu + \frac{yyuu}{4x}$, & $myy - tyy = xyy - yyt + \frac{yytt}{4x}$ (après les avoir réduit). Présentement si l'on retranche la seconde équation de la première, c'est-à-dire, le premier membre de la seconde du premier membre de la première, & le second membre de la seconde, du second membre de la première, il restera après la réduction $0 = \frac{yyuu}{4x} - \frac{yytt}{4x}$. D'où faisant passer $\frac{yytt}{4x}$ du second membre dans le premier, il viendra $yytt = yyuu$, en effaçant les dénominateurs égaux; & si l'on divise cette dernière équation par yy , il viendra $tt = uu$, ou bien * HE (t) = EK (u). *Ce qu'il* * Art. 108 *falloit démontrer.*

DEFINITIONS.

I.

420. Toute ligne comme EC ou ED menée parallèle à la Tangente AB, est nommée *ordonnée* au diamètre AO. Fig. 154.

II.

421. Si l'on cherche une troisième proportionnelle à la ligne MB, & à la Tangente AB, cette ligne sera appelée le *Paramètre* du diamètre AO.

COROLLAIRE.

422. Il suit de la définition précédente que si l'on tire une ligne du foyer P au point d'attouchement A qu'une ligne quadruple de AP sera égale au Paramètre du diamètre AO.

Z ij

Pour le prouver nous supposons que le point S est le point generateur, par consequent SG sera égal à PA * ; & si l'on nomme SM ou MP, a ; MG, x ; GA (y) ; nous aurons SG ou AP $= x + a$, & par la proportion premiere $4ax = yy$. Cela posé, si l'on nomme p le Parametre du diamètre AO, l'on aura par la définition precedente * MB (x), AB :: AB. p . par consequent $px = AB$: mais à cause du triangle rectangle ABG, l'on aura $AB (px) = BG + GA (4xx + yy)$, & si à la place de yy dans le second membre de cette équation l'on met $4ax$, l'on aura $px = 4xx + 4ax$, & divisant le tout par x , vient $p = 4AP (4x + 4a)$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

Théoreme.

Fig. 154. 423. Le Quarré d'une ordonnée quelconque EC au diamètre AO est égal au Rectangle compris sous l'Abcisse AE & sous le Parametre du diamètre AO (ou, ce qui est la même chose, sous une ligne quadruple de AP) les choses demeurant les mêmes que dans la proposition, les lignes de la figure seront nommées avec les mêmes lettres, excepté la ligne AE, que nous nommerons z , qui étant égale à FG, l'on aura $z = m - x$.

DEMONSTRATION.

Il faut ajouter d'abord les deux équations $myy + uyy = xyy + yyn + \frac{yyu}{4x}$, & $myy - tyy = xyy - yyt + \frac{yyt}{4x}$, ensemble, & mettre auparavant t à la place de u dans la premiere équation, puisque l'on a trouvé $t = u$, la réduction étant faite, il viendra $2myy = 2xyy + \frac{yyt}{2x}$, & en faisant * Art. 113. évanouir la fraction $4xmyy = 4xxyy + yyt$, qui étant divisé par yy , reste $4xm = 4xx + tt$, & faisant passer $4xx$ du second membre dans la premiere, vient $4xm - 4xx$

$\equiv tt$. Or comme $m-x$ dans le premier membre de cette dernière équation est multiplié par $4x$, on pourra à la place de $m-x$ mettre z , qui lui est égal, & qui donnera $4xz \equiv tt$: mais à cause du triangle rectangle EHC, l'on aura $\overline{EC}^2 = \overline{HE}^2 + \overline{HC}^2 \left(tt + \frac{yyt}{4xx} \right)$ & mettant $4xz$ à la place de tt , & $4xa$ à la place de yy , qui lui est égal par la proposition première, l'on aura $\overline{EC}^2 = 4xz + \frac{4xx \cdot 4az}{4xx}$, ou bien $\overline{EC}^2 = 4AP \times AE (4xz + 4az) C. Q. F. D.$

COROLLAIRE.

424. L'on voit par ce Théoreme que la proposition première devient générale, puisque non seulement le carré d'une ordonnée à l'axe est égal au rectangle compris sous le Parametre de l'axe, & sous l'Abcisse, mais que le carré de toutes ordonnées à un diamètre, est aussi égal au rectangle compris sous l'Abcisse correspondante, & sous le Parametre de ce diamètre. Mais pour mieux faire entendre ceci, considérez que si la ligne RT est tangente au point M, extrémité de l'axe, toutes les ordonnées à l'axe seront parallèles à cette tangente, & par la proposition première, le carré de chacune de ces ordonnées sera égal au rectangle compris sous l'Abcisse correspondante, & sous une ligne quadruple de PM, qui est la distance du foyer au point d'attouchement. Or si l'on imagine que l'axe ML se soit mû parallèlement à lui-même jusqu'au point A, où il tient lieu de diamètre AO, & que la Tangente RT ait glissé sur la Parabole, ne la touchant toujours qu'à un seul point, jusqu'à ce que le point M devienne le point A : pour lors la Tangente RT deviendra la Tangente NB, & la ligne PM deviendra la ligne PA, & par conséquent elle sera encore la quatrième partie du Parametre de l'axe devenu le diamètre AO, & les ordonnées que l'on auroit menées parallèles à la Tangente RT, telle que VX, seront toujours parallèles à

Z iij

la Tangente, s'ils ont accompagné l'axe, & si l'Abcisse MV est égal à l'Abcisse AE, l'ordonnée VX deviendra l'ordonnée EC, & l'on aura toujours le quarré de EC égal au rectangle compris sous l'Abcisse AE, & sous une ligne quadruple de la distance du point d'attouchement A au foyer P, comme on l'a démontré dans la proposition précédente.

On peut remarquer que si le point A approchoit plus du point M, il pourroit arriver que le point C tomberoit au-delà de l'axe ML: mais cela n'empêcheroit pas que tout ce que nous avons démontré ne subsistât de même, de quelque façon que la ligne DC puisse se trouver dans la Parabole, puisqu'elle sera toujours divisée en deux également par le diamètre, lorsqu'elle sera parallèle à la Tangente.

PROPOSITION VIII.

Théoreme.

Fig. 155. 425. Si l'on coupe un Cone par un plan parallele à un de ses côtez, la section sera une Parabole.

Si l'on a coupé le Cone ABC par un plan parallele à un de ses côtez BC, je dis que la section, qui sera, par exemple, DEI, aura formé sur la surface du Cone une courbe DHEKI, qui sera une Parabole. Supposant que le Cone a été coupé par un plan LM, parallele à sa base, la section sera un cercle dont les lignes FK & FH seront des perpendiculaires au diamètre LM, & en même tems des ordonnées à la courbe. Cela posé, prenez sur le côté BC la partie BO égale à FM, & du point O menez à FM la parallele ON, qui sera le Parametre de la Parabole; car nous démontrerons que le rectangle compris sous NO & l'Abcisse EF, est égal au quarré de l'ordonnée FK, après avoir nommé BO ou FM, a ; NO, p ; EF, x ; & FK, y .

DEMONSTRATION.

Considérez que les triangles NBO & LEF étant sem-

blables donnent $BO(a)$, $NO(p) :: EF(x)$, $LF\left(\frac{px}{a}\right)$

D'où l'on tire $NO \times EF(px) = LF \times FM$ ou $BO\left(\frac{apx}{a}\right)$, & si

à la place de $FL \times FM$ ou $BO\left(\frac{apx}{a}\right)$ dans le second mem-

bre de l'équation, l'on met $\overline{FK}^2(yy)$, qui lui est égal * par *Art. 278

la propriété du cercle, l'on aura $NO \times EF(px) = \overline{FK}^2(yy)$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

Problème.

426. *Décrire une Parabole, le Parametre étant donné.*

Fig. 156

Pour décrire une Parabole dont la ligne AB soit le parametre, prenez dans une ligne telle que EK les parties CE & CF chacune égales au quart de la ligne AB: ensuite tirez une quantité de perpendiculaires telles que GH à la ligne EK, comme dans l'art. 363. & faites les lignes FG & FH chacune égales à la ligne EI. Après cela, si l'on fait passer une ligne courbe par les extrémités d'une quantité d'ordonnées, telles que GI, cette courbe fera une Parabole.

DEMONSTRATION.

La démonstration de ce Problème est la même que celle de la proposition première.

PROPOSITION X.

Problème.

427. *Trouver l'axe d'une Parabole donnée.*

Fig. 157

Pour trouver l'axe d'une Parabole donnée CLI, on n'a qu'à tirer à quelque endroit que l'on voudra de la Parabole deux lignes AB & CD parallèles entr'elles; diviser chacune de ces lignes en deux également aux points E & F, & tirer par ces points la ligne GH, qui fera un dia-

184 NOUVEAU COURS

Art. 419. mètre de la Parabole : ensuite du point C tirez la ligne CI, en sorte qu'elle coupe à angle droit la ligne GH. Divisez cette ligne en deux également au point K ; & si sur ce point vous élevez la perpendiculaire KL, elle fera l'axe de la Parabole.

D E M O N S T R A T I O N.

Les lignes AB & CD étant des ordonnées au diamètre GH, la ligne CI perpendiculaire à ce diamètre, sera une ordonnée à l'axe de la Parabole. Or comme l'axe d'une Parabole divise en deux également ses ordonnées, & qu'il les coupe toutes à angles droits, la ligne KL sera donc l'axe de la Parabole.

P R O P O S I T I O N X I.

Problème.

Fig. 157. 428. *Trouver le Parametre d'une Parabole donnée.*

Pour trouver le parametre d'une Parabole donnée, il ne faut que chercher à une Abcisse quelconque LM & à l'ordonnée correspondante MN une troisième proportionnelle*, qui fera, par exemple, OP, & cette ligne OP fera le parametre que l'on demande, puisque le rectangle compris sous LM & OP, sera égal au quarré de l'ordonnée MN.*

*Art. 410.

P R O P O S I T I O N X I I.

Problème.

429. *Trouver le foyer d'une Parabole, dont on connoît le Parametre.*

Pour trouver le foyer d'une Parabole, il faut prendre dans l'axe LK une partie LQ égale au quart du parametre OP, & le point Q fera le foyer qu'on demande : ce qui est bien évident, puisque par la generation de la Parabole*, le parametre est quadruple de la distance du foyer Q au sommet L de la Parabole.

*Art. 403.

CHAP.



CHAPITRE II.

Qui traite de l'Ellipse.

DEFINITIONS.

430. **A**yant tiré sur un plan deux lignes droites & PLAN-
 inégales AB, CD, qui se coupent par le mi- CHE 9.
 lieu à angle droit au point E, si l'on décrit un demi-cer- Fig. 158
 cle, dont le diamètre soit la plus grande AB, & que l'on
 élève sur ce diamètre une quantité de perpendiculaires,
 comme FG & IK, & qu'ensuite l'on fasse EH quatrième
 proportionnelle aux lignes AB, CD, FG, & de même IL
 quatrième proportionnelle à AB, CD, IK, & que l'on
 continue à trouver une quantité de points tels que H &
 L, la courbe que l'on fera passer par tous ces points sera
 nommée une *Ellipse*.

431. La ligne AB est nommée *grand Axe* de l'Ellipse, Fig. 158.
 & la ligne CD qu'on suppose perpendiculaire sur le mi-
 lieu de la ligne AB est dite *petit Axe*, ou bien la ligne
 CD est dite *Axe conjugué à l'Axe AB*, & de même l'Axe
 AB est dit *Axe conjugué à l'Axe CD*.

432. Toutes lignes telles que FH ou IL, menées per-
 pendiculairement au premier axe AB, & terminées par
 l'Ellipse, sont appelées *Ordonnées* à cet axe.

433. Si l'on cherche une troisième proportionnelle aux
 axes AB & CD, telle que MN, cette ligne est nommée
Parametre de l'Axe, qui fait le premier terme de la pro-
 portion.

434. Le point E où les axes se coupent à angles droits,
 est appelé *Centre* de l'Ellipse.

435. Si dans le grand axe AB d'une Ellipse l'on prend Fig. 159.
 les points K, chacun éloigné des extrémités C ou D
 du petit axe de la moitié du grand, ces points seront
 nommez *Foyers* de l'Ellipse.

A 2

PROPOSITION PREMIERE.

Théoreme.

Fig. 158. 436. Dans l'Ellipse si l'on mene une ordonnée FH au premier axe, je dis que le rectangle des parties AF & FB de cet axe est au carré de l'ordonnée correspondante FH, comme le carré du premier Axe AB est au carré de son conjugué CD : ou, ce qui est la même chose, comme le carré AE est au carré ED.

Ayant nommé les données AE ou EB, a ; CE ou ED, b ; & les indéterminées EF, x ; FH, y ; FG, f ; AF sera $a-x$, & FB $a+x$. Cela posé, il faut démontrer que $AF \times FB : FH^2 :: AB^2 : CD^2$.

DEMONSTRATION.

Considérez que par la définition première l'on a AB
 *Art. 334. $(2a) \cdot CD(2b) :: FG(f) \cdot FH(y)$, par conséquent * AB^2
 $(4aa) \cdot CD^2(4bb) :: FG^2(ff) \cdot FH^2(yy)$. Or si à la place
 du carré de FG dans cette proposition, l'on met le re-
 *Art. 277. ctangle AF×FB $(aa-xx)$ * qui lui est égal par la proprié-
 té du cercle, l'on aura $AB^2(4aa) \cdot CD^2(4bb) :: AF \times FB$
 $(4aa-xx) \cdot FH^2(yy)$, ou bien $AF \times FB (aa-xx) \cdot FH^2$
 $(yy) :: AB^2(4aa) \cdot CD^2(4bb)$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 158. 437. Si l'on a deux ordonnées EH & IL, l'on aura par la proposition précédente $AF \times FB : FH^2 :: AB^2 : CD^2$, &

*Art. 168. $AI \times IB : IL^2 :: AB^2 : CD^2$; ce qui fait voir * que $AF \times FB : FH^2 :: AI \times IB : IL^2$.

COROLLAIRE II.

438. Il suit encore que si du point H l'on mene l'or-

donnée HI au second axe CD, que le rectangle compris sous les parties ID & IC de cet axe, est au quarré de l'ordonnée correspondante IH, comme le quarré du même axe CD est au quarré de son conjugué AB.

Pour le prouver considérez que FH étant égal à EI, l'on aura $EI = y$, & que FE étant égal à HI, l'on aura encore $HI = x$; ainsi ID sera $b - y$, & CI $b - y$. Cela posé, faites attention à la proposition précédente $aa - xx. yy :: aa. bb.$ dont le produit des extrêmes & celui des moyens donne $*bbaa - xxbb = yyaa$. Or si l'on fait passer $yyaa$ du second membre dans le premier, & $xxbb$ du premier dans le second, l'on aura $bbaa - yyaa = xxbb$, d'où l'on tire $*ID \times IC (bb - yy) \cdot HI (xx) :: ED (bb) \cdot EB (aa)$. *Art. 176. Ainsi l'on voit que si l'on mène des ordonnées au grand axe ou au petit, la propriété de l'Ellipse demeurera toujours la même.

Fig. 159.

COROLLAIRE III.

439. Si l'on nomme a le premier axe d'une Ellipse, & b le second, p , le parametre, l'on aura $*a.b :: b.p.$ par conséquent $*aa.bb :: a.p.$ mais comme la propriété de l'Ellipse donne $aa - xx. yy :: aa. bb.$ il s'ensuit qu'on aura aussi $aa - xx. yy :: a.p.$ *Art. 433. *Art. 328.

REMARQUE I.

440. Il est à remarquer que puisque l'on a $*AF \times FB. FH :: AI \times IB. IL.$ que si à la place des antécédens l'on met les quarrés de FG & IK, qui leur sont égaux par la propriété du Cercle, l'on aura $FG. FH :: IK. IL.$ par conséquent $*FG. FH :: IK. IL.$ & en raison alterne $*FG. IK :: FH. IL.$ qui fait voir que si l'on prend les lignes FH & IL pour des élémens de la superficie du quart d'Ellipse EAD, & les lignes FG & IK pour des élémens du quart de cercle EAM, que les élémens du quart de l'Ellipse sont dans la même raison que les élémens du quart de cercle.

Fig. 458.

*Art. 331.

*Art. 162.

A a ij

Art. 380. 441. L'on a vû * que dans une progression qui seroit composée des élémens infinis , tels que FG & IK d'un quart de cercle , la somme des quarrés de tous ces élémens seroit égale au produit du quarré du plus grand élément EM par les deux tiers de la ligne AE , qui en exprime la quantité. Or comme les élémens de l'Ellipse sont dans la même raison que ceux du cercle , il s'ensuit qu'ils auront la même propriété que ceux du cercle ; & que par conséquent si l'on a une progression composée des termes infinis des élémens d'un quart d'Ellipse EAD , la somme des quarrés de tous les élémens , tels que FH & IL , est égale au produit du quarré du plus grand élément ED par les deux tiers de la grandeur qui en exprime la quantité , c'est-à-dire , par les deux tiers de la ligne AE.

Comme ces deux remarques nous servent beaucoup dans la Geometrie Pratique , il faut s'attacher à les bien comprendre.

AVERTISSEMENT.

Comme les art. depuis 4¹2. jusqu'à 4⁵³4. n'ont rapport qu'à la troisième proposition , & que cette proposition , malgré l'attention que j'ai eu de la démontrer le plus clairement qu'il m'a été possible , pourroit peut-être rebuter les Commencans , leur paroissant trop difficile , ils pourront passer ces articles , aussi-bien que la proposition , & ne s'attacher qu'au reste de ce Chapitre , qui suffira pour entendre dans la Geometrie Pratique les choses qui ont rapport à l'Ellipse.

DEFINITIONS.

I.

Fig. 160. 442. L'on nomme *Diamètres* d'une Ellipse deux lignes comme CD & EF , qui passent par le centre G , & qui sont terminées par l'Ellipse.

II.

443. Ayant mené d'un point quelconque G un diamètre CD , & une ordonnée CK à l'axe AB , si l'on fait GO troisième proportionnelle à GK & GA , le diamètre EF , que l'on aura mené parallèle à CO , est appelé diamètre *conjugué* du diamètre CD ; & de même le diamètre CD est dit *conjugué* du diamètre EF .

III.

444. Toute ligne comme HI , menée d'un point quelconque H , pris dans le diamètre CD , parallèle à son *conjugué* EF , est appelée *ordonnée* du diamètre CD .

IV.

445. Si l'on cherche une troisième proportionnelle aux diamètres conjugués CD , EF , elle sera nommée le *Paramètre du diamètre*, qui fait le premier terme de la proportion.

COROLLAIRE.

446. Par l'article 152. il s'ensuit que si l'on nomme GA , a ; GK , x ; KO , z , l'on aura $GK(x)$. $GA(a)$:: $GA(a)$. $GO(x+z)$. D'où l'on tire $xx+xz=aa$; & en faisant passer xx du premier membre dans le second, l'on aura $xz=aa-xx$, c'est-à-dire, que $OK \times KG = AK \times KB$. Nous nous servons de ce que nous enseignons ce Corollaire, pour démontrer les propositions suivantes: c'est pourquoi il est à propos de le bien retenir.

PROPOSITION II.

Théorème.

447. Si des extrémités C & E des deux diamètres CD , EF , l'on mène à l'axe AB les ordonnées CK & EP , je dis que le carré de la partie GP sera égal au rectangle de AK par KB .

Aa iii

Ayant nommé GA, a ; GP, f ; GK, x ; KO, z ; GO sera $x \rightarrow z$. Cela posé, nous ferons voir que $AK \times KB (aa - xx$

*Art. 446. ou bien $xz) = GP (ff$.

DEMONSTRATION.

*Art. 437. Considérez que l'on tire de la propriété de l'Ellipse * $AK \times KB (xz)$. $AP \times PB (aa - ff) :: KC. PE$, & que si au lieu de aa dans le second terme de cette proportion l'on met $xx \rightarrow xz$, qui est la même chose* par le Corollaire précédent, & au lieu de KC & PE l'on met $KO (zz)$ & $PG (ff)$, qui sont dans la même raison, à cause des triangles semblables OCK, GEP , l'on aura $AK \times KB (xz)$. $AP \times PB (xx \rightarrow xz - ff) :: KO (zz). GP (ff)$, dont le produit des extrêmes & celui des moyens forment cette équation $xxzz \rightarrow xzzz - ffzz = ffxz$; d'où transposant $ffzz$ du premier membre dans le second, vient $xxzz \rightarrow xzzz = ffxz \rightarrow fffz$, d'où effaçant z de part & d'autre, reste $xx \rightarrow xz = ffx \rightarrow fffz$, qui étant divisé par $x \rightarrow z$, donne $AK \times KB (xz) = GP (ff)$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

*Art. 446. 448. Comme l'on a * $xx \rightarrow xz = aa$, il suit de cette proposition que si l'on met ff à la place de xz dans l'équation précédente, l'on aura $xx \rightarrow ff = aa$; d'où faisant passer ff du premier membre dans le second, l'on aura $GK (xx) = AP \times PB (aa - ff)$.

PROPOSITION III.

Théoreme.

Fig. 160. 449. Le Rectangle fait des parties de CH par HD du diamètre CD , est au carré d'une ordonnée HI à ce diamètre, comme le carré du même diamètre est à celui de son conjugué EF .

Après avoir tiré les lignes IN, HL, parallèles à CK, & la ligne HM parallèle à BA, nous nommerons GK, x ; CK, y ; GA, a ; KO, z ; HM ou LN, c ; GL, g ; GC, f .

DEMONSTRATION.

Remarquez que les triangles semblables GKC, GLH, donnent GK (x). KC (y) :: GL (g). LH ($\frac{yg}{x}$), & que les deux autres COK, IHM, qui sont aussi semblables, donnent encore KO (z). KC (y) :: HM (c). IM ($\frac{yc}{z}$) d'où l'on tire IM + HL ou MN ($\frac{yc}{z} + \frac{yg}{x}$) = IN, dont le carré est $\frac{yycc}{zz} + \frac{2yycg}{zx} + \frac{yygg}{xx}$. De plus considérez encore que LN = LG ($c - g$) = GN. Dont le carré est $cc - 2cg + gg$. Cela posé, il faut chercher une seconde valeur de $\overline{IN}^2$, que l'on trouvera par la propriété de l'Ellipse*; car AK x KB ($aa - xx$). AN x NB, ou $\overline{GB}^2 - \overline{GN}^2$ * (Art. 437. & 446.) ($aa - cc + 2cg - gg$) :: $\overline{CK}^2$ (yy). $\overline{NI}^2$ ($\frac{aayy - ccyy + 2cggy - gggy}{aa - xx}$). Présentement si l'on forme une égalité avec les deux valeurs de $\overline{IN}^2$, l'on aura $\frac{yycc}{zz} + \frac{2yycg}{zx} + \frac{yygg}{xx} = \frac{aayy - ccyy + 2cggy - gggy}{aa - xx}$. Mais comme l'on sçait que $xx = aa - xx$ *, l'on voit qu'en effaçant $2yycg$ (qui est divisé par des quantitez égales dans l'un & l'autre membre) & divisant ce qui reste par yy , il viendra $\frac{cc}{zz} + \frac{gg}{xx} = \frac{aa - cc - gg}{aa - xx}$. * Art. 446. Présentement il faut multiplier par xx , afin de n'avoir plus gg en fraction*, & l'on aura $\frac{xxcc}{zz} + gg = \frac{xxaa - xxcc - xxgg}{aa - xx}$. * Art. 112. l'on fera passer gg du premier membre dans le second, & on le réduira en fractions, afin d'avoir $\frac{xxcc}{zz}$ ou $\frac{ccx^4}{zzxx} = \frac{xxaa - ccxx - gxxx - aagg + xggg}{aa - xx}$.

faisant attention que $\frac{ccx^4}{xxxx}$ est la même chose que $\frac{ccxx}{xx}$, puisque, le numérateur & le dénominateur ont été multipliés par xx . Or comme le premier membre de cette équation est divisé par le carré de la grandeur qui divise le second, il s'ensuit qu'on fera évanouir les fractions, en multipliant le second membre par $aa-xx$; & après avoir réduit & fait passer $ccxxaa$ du second membre dans le premier, on aura $ccaa-xx-xxa^4-gga^4-aa-xx+ggaa-xx$, qu'il faut diviser par $aa-xx$; d'où l'on tire LN ou HM

$aa-xx+gg-\frac{ggaa}{xx}$. Cela posé, considérez que les triangles semblables GKC, GLH, donnent GK (x). GC (f)

* Art. 66. :: GL (g). GH ($\frac{fg}{x}$). Par conséquent $\overline{CG}^2 - \overline{GH}^2$, ou $CH \times HD = ff - \frac{fgg}{xx}$. Mais, comme il arrive que les quatre

grandeurs $CH \times HD$ ($\frac{ffxx - fgg}{xx}$). HM ($aa-xx+gg-\frac{ggaa}{xx}$).

$\overline{CG}^2$ (ff), $\overline{GP}^2$ ($aa-xx$), sont proportionnelles,

le produit des extrêmes, aussi-bien que celui des moyens, étant égaux, il s'ensuit que si à la place des conséquens

HM & GP, l'on met HI & GE, qui sont dans la même raison, à cause des triangles semblables HIM, GPE, l'on aura $CH \times HD. \overline{HI}^2 :: \overline{CG}^2. \overline{GE}^2$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 161. 450. L'on voit que ce qui a été démontré dans la proposition première par rapport aux deux axes, s'étend par le moyen de celle-ci à deux diamètres quelconques; car si l'on fait le même raisonnement pour l'Ellipse, que l'on a fait pour la Parabole*, l'on verra que la Tangente HI à l'extrémité A de l'axe AB, ayant glissé le long de la courbe pour prendre la situation QR, & l'axe AB ayant tourné

sur le centre E pour prendre la situation FG, l'ordonnée KL, qui l'aura accompagné toujours parallèlement à la tangente HI, deviendra l'ordonnée OP; & comme l'axe conjugué CD aura aussi tourné parallèlement à la tangente HI, il deviendra le diamètre conjugué MN, & par conséquent toutes ces lignes demeurant les mêmes les unes par rapport aux autres, comme elles étoient auparavant, il s'ensuit que le rectangle compris sous les parties OF & OG du diamètre FG est au carré de l'ordonnée OP comme le carré du diamètre FG est au carré de son conjugué MN.

COROLLAIRE II.

451. De-là il suit * que pour mener du point F une tangente QR à une Ellipse, il faut du point F abaisser une perpendiculaire FS sur l'axe AB, & faire la ligne EQ troisième proportionnelle aux lignes ES & EA pour avoir le point Q, duquel l'on n'aura qu'à mener la tangente par le point donné. * Art. 443.

COROLLAIRE III.

452. Il suit encore que toute ligne, comme TP, menée parallèle à la tangente RQ, est divisée en deux également par le diamètre FG; car le rectangle de FO par OG est au carré OP, comme le carré FG est au carré NM, & le même rectangle de FO par OG est encore au carré OT comme le carré FG est au carré NM; il s'ensuit donc que le carré OP est égal au carré OT, & que par conséquent OP est égal à OT.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

453. La somme des carrés des deux axes AB & QR Fig. 160 d'une Ellipse, est égal à la somme des carrés des deux diamètres quelconques CD & EF.

R h

DEMONSTRATION.

Les choses étant supposées les mêmes que ci-devant ;
 nous aurons toujours $\overline{GP}^2 = aa - xx$, & $\overline{GA}^2 = \overline{GP}^2$, ou
 *Art. 447. $\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{GK}^2 (xx)$. Or par la propriété de l'Ellipse, l'on
 *Art. 448. aura $\overline{GA}^2 (aa) \cdot \overline{GR}^2 (bb) :: \overline{AP} \times \overline{BP} (xx) \cdot \overline{PE}^2 \left(\frac{bbxx}{aa} \right)$. &
 d'une autre part $\overline{GA}^2 (aa) \cdot \overline{GR}^2 (bb) :: \overline{AK} \times \overline{KB} (aa - xx) \cdot \overline{KC}^2 \left(\frac{aabb - xxbb}{aa} \right)$. Or les triangles rectangles GPE, GKC,
 donnent $\overline{GP}^2 + \overline{PE}^2 \left(aa - xx + \frac{bbxx}{aa} \right) = \overline{EG}^2$, & $\overline{GK}^2 + \overline{CK}^2 \left(xx + \frac{aabb - xxbb}{aa} \right) = \overline{GC}^2$. Et si l'on ajoute ensem-
 *Art. 178. ble ces deux équations *, l'on aura $\overline{EG}^2 + \overline{GC}^2 = \frac{aa^2 - xxxa - xxbb + xxaa + bbaa - xxbb}{aa}$, qui étant réduit & divi-
 fé par aa , donne $\overline{GE}^2 + \overline{GC}^2 = aa + bb$, ou bien $\overline{AB}^2 + \overline{QR}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{EF}^2$. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

Théoreme.

Fig. 162. 454. Si par l'extrémité A de l'axe AB l'on mene une tan-
 gente qui aille rencontrer aux points N & F les deux dia-
 mètres MG & IH prolongez, je dis que le rectangle des par-
 ties NA par AF est égal au carré de la moitié de l'axe CD.

Ainsi il faut prouver que $\overline{AN} \times \overline{AF} = \overline{CE}^2$.

Ayant mené des points I & M les perpendiculaires IK
 & ML, nous nommerons AE, a ; CE, b ; EK, x ; & IK, y .

DEMONSTRATION.

*Art. 448. Confiderez que l'on a $\overline{AL} \times \overline{LB}$ égal au carré de EK,

qui est xx , & que par conséquent $\overline{AE}^2(aa) \cdot \overline{EC}^2(bb) :: AL \times LB(xx) \cdot \overline{LM}^2\left(\frac{bbxx}{aa}\right)$. D'où extrayant la racine quarrée de $\frac{bbxx}{aa}$ *, l'on aura la ligne LM, c'est-à-dire, $LM = \frac{bx}{a}$. * Art. 90.

Mais comme l'on a aussi * $AK \times KB = \overline{LE}^2$, l'on aura en- * Art. 44.
core $\overline{CE}^2(bb) \cdot \overline{AE}^2(aa) :: \overline{IK}^2(yy) \cdot AL \times LB\left(\frac{aayy}{bb}\right)$. Or comme $\frac{aayy}{bb}$ est aussi égal au quarré de la ligne EL, si l'on extrait la racine quarrée de cette quantité, l'on aura $EL = \frac{ay}{b}$. L'on pourra donc, à cause des triangles semblables EAF & ELM former cette proportion $EL\left(\frac{ay}{b}\right) : LM\left(\frac{bx}{a}\right) :: EA(a) : AF\left(\frac{abbx}{aay}\right)$, ou bien $\frac{bbx}{ay}$; & à cause des triangles semblables EAN & EKI, l'on aura encore $EK(x) : KI(y) :: EA(a) : AN\left(\frac{ya}{x}\right)$. Or si l'on multiplie $AF\left(\frac{bbx}{ay}\right)$ par $AN\left(\frac{ya}{x}\right)$, l'on aura $\frac{bbayx}{ayx}$, qui étant réduit, donne $\overline{CE}^2(bb) = AN \times NF$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

Théoreme.

445. Si l'on coupe un Cone par un plan obliquement à la base, la section sera une Ellipse. Fig. 164.

Si l'on coupe le Cone X par un plan AB obliquement à sa base, la section BEAF sera une Ellipse. Nous supposons que le Cone a été coupé parallèlement à la base par un plan CM, qui passe par le milieu de Bbij

l'axe AB, & par un autre plan LD, aussi parallèle à la base qui passera par un point quelconque I de l'axe AB. Comme ces deux sections formeront des cercles, nous tirerons les lignes EF & HK, qui couperont les diamètres LD & CM à angles droits aux points I & G : ainsi la ligne EF deviendra le petit axe de l'Ellipse, & les lignes IK & IH des ordonnées. Nous nommerons AG ou GB, a ; GF ou GE, b ; GM, c ; CG, d ; GI, x ; IK, y : ainsi IB fera $a+x$, & AI $a-x$, & nous ferons voir que $AI \times IB (aa-xx) \cdot \overline{IK}^2 (yy) :: \overline{AG}^2 (aa) \cdot \overline{GF}^2 (bb)$.

DEMONSTRATION.

Les triangles semblables BGM & BID donnent BG (a). GM (c) :: BI ($a+x$). ID ($\frac{ac+xc}{a}$). & les triangles CAG & LAI étant aussi semblables, donneront encore AG (a). GC (d) :: AI ($a-x$). LI ($\frac{ad-xd}{a}$). & multipliant LI ($\frac{ad-xd}{a}$) par ID ($\frac{ac+xc}{a}$), l'on aura $\frac{acd-xxcd}{aa}$ pour le produit, qui est égal au quarré de IK par la propriété du cercle ; d'où l'on tire cette équation $\frac{acd-xxcd}{aa} = yy$: & si à la place de CG $\times$ GM (cd) l'on met $\overline{GF}^2 (bb)$ dans le premier membre de l'équation, l'on aura $\frac{abb-xxbb}{aa} = yy$, en faisant évanouir la fraction ; c'est-à-dire, multipliant yy par aa , l'on aura cette dernière équation $aabb-xxbb =$
 Art. 175. $aa yy$; d'où l'on tire cette proportion * $AI \times IB (aa-xx) \cdot \overline{IK}^2 (yy) :: \overline{AG}^2 (aa) \cdot \overline{GF}^2 (bb)$. C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

Théoreme.

456. *Si l'on coupe un Cylindre par un plan obliquement à la base, je dis que la section sera une Ellipse.* Fig. 165.

Pour être convaincu que la section BEAF du Cylindre Y est une Ellipse, il ne faut que lire la démonstration du Théoreme précédent, & par tout où il y aura le nom de Cone, il faudra y supposer celui de Cylindre, la démonstration étant la même.

PROPOSITION VIII.

Problème.

457. *Deux axes conjugués AB & CD d'une Ellipse étant donnez, la décrire par un mouvement continu.* Fig. 166.

Il faut du point C comme centre, & d'un intervalle égal à la moitié du plus grand axe AI, décrire un arc de cercle qui vienne couper l'axe AB aux points E & F, que l'on nomme foyers. Ensuite il faut avoir un fil de la longueur du même axe AB, dont on attachera les extrémités aux points E & F, en se servant d'un stile G pour tenir le fil tendu, l'on ira du point A au point D, & du point D au point B, pour décrire avec le bout du stile la demi-Ellipse ADB; & faisant passer le stile de l'autre côté de l'axe AB, l'on décrira de la même façon avec le stile G l'autre moitié de l'Ellipse ACB.

L'Ellipse, de la manière qu'on vient de la tracer, a les mêmes propriétés que celles que nous avons vû ci-devant; mais comme la démonstration dépend de plusieurs choses, dont nous n'avons pas parlé dans ce Chapitre. Si on desiré la sçavoir, on la trouvera dans le second Livre des Sections Coniques de M. le Marquis de l'Hôpital.

PROPOSITION IX.

Problème.

Fig. 163. 458. *Trouver le centre & les deux axes conjugués d'une Ellipse donnée.*

*Art. 452. Tirez les lignes AB & CD parallèles, que vous diviserez chacune en deux également aux points E & F, pour avoir les ordonnées du diamètre GH *, qui passant par les points E & F, passera aussi par le centre de l'Ellipse: ainsi en divisant la ligne GH en deux également au point I, ce point sera le centre de l'Ellipse, duquel décrivant l'arc GL, on aura deux points G & L également éloignés du centre, qui serviront pour faire la section M, par laquelle, aussi-bien que par le point I, tirant une ligne, on aura le grand axe NO.

Pour trouver le petit axe, il n'y a qu'à faire passer par le point I une ligne droite, qui fasse avec NO quatre angles droits.



CHAPITRE III.

Qui traite de l'Hyperbole.

D E F I N I T I O N S.

459. **A**Yant tiré sur un plan deux lignes inégales AB & DE, en sorte qu'elles se coupent à angles droits par le milieu au point C, l'on élèvera la perpendiculaire BS à l'extrémité B ; & après avoir prolongé AB par cette extrémité vers O & P, l'on prendra dans la ligne BO une quantité de parties égales, telles que BG, GL. pour du point C comme centre décrire les demi-cercles GQI, LRK, &c. Ensuite l'on cherchera aux lignes AB, DE, BF, une quatrième proportionnelle GH, que l'on élèvera perpendiculaire sur le point G, & aux lignes AB, DE, BN, l'on cherchera encore une quatrième proportionnelle LM, qu'on élèvera perpendiculaire au point L. Et si l'on continue de même à trouver une quantité de points, tels que H, M, la courbe que l'on fera passer par tous ces points sera nommée *Hyperbole*.

PLANS
CHE I. 0
Fig. 167.

460. Si dans le même tems l'on décrit deux Hyperboles, l'une à l'extrémité A, & l'autre à l'extrémité B, elles seront nommées *Hyperboles opposées*.

461. La ligne AB est nommée *premier Axe*, & la ligne DE *second Axe* de chacune des deux Hyperboles opposées.

Les deux axes AB & DE sont appelez ensemble *conjuguez*, de sorte que le premier axe AB est dit *conjugué* au second DE, & reciproquement le second DE *conjugué* au premier AB.

462. Le point C, où se coupent les deux axes à angles droits, est nommé *Centre*.

Toutes lignes comme GH ou LM perpendiculaires au premier axe prolongé AB, sont appellées *Ordonnées* au

premier axe AB ; & toute ligne comme TV , menée perpendiculaire au second axe DE , & terminée par l'Hyperbole , est nommée *ordonnée* au second axe.

463. La ligne que l'on aura cherchée troisième proportionnelle aux deux axes , est nommée le *Parametre de l'axe* , qui fait le premier terme de la proportion.

PROPOSITION PREMIERE.

Théoreme.

Fig. 167. 464. Dans l'Hyperbole le rectangle des parties AG par BG de l'axe AB prolongé , est au carré de l'ordonnée GH comme le carré du grand axe AB est au carré de son conjugué DE.

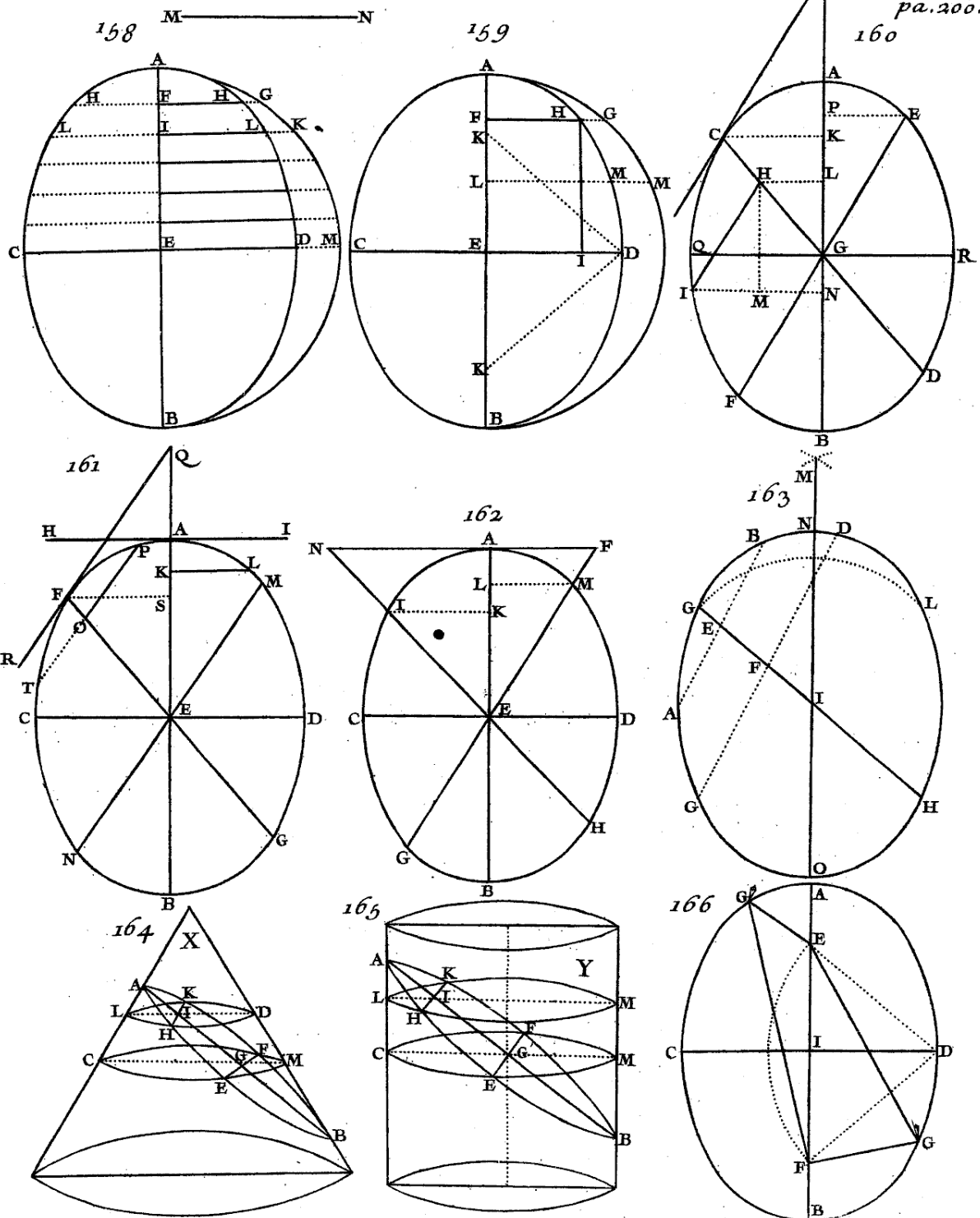
Ayant nommé CA ou CB, a ; CD ou CE, b ; BF, c ; les indéterminées CG ou CI , x ; GH, y ; BI sera $x-a$, & BG, $x-a$.

DEMONSTRATION.

Par la construction de l'Hyperbole l'on a AB (2a). DE (2b) :: BF (c). GH (y). par conséquent * 4aa. 4bb :: cc. yy. Or si à la place de BF (cc) l'on met sa valeur IB×BG ou # Art. 68. AG×BG (xx-aa) *, l'on aura 4aa. 4bb :: xx-aa. yy. ou bien AG×BG (xx-aa). GH² (yy) :: AB² (4aa). DE² (4bb). C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

465. Il suit de cette proposition que si l'on mène une ordonnée TV au second axe DE , que le carré de cette ordonnée est au carré TC , joint au carré DC , moitié du second axe , comme le carré de son conjugué AB est au carré du même axe DE. Pour le prouver , considérez que TV=GC (x) , & que TC=VG (y) : or comme la proposition précédente donne xx-aa. yy :: 4aa. 4bb. nous en pouvons tirer cette équation 4aayy=4bbxx-4bbaa ; & faisant passer 4bbaa du second membre dans le premier ;



premier, l'on aura $4aayy + 4bbaa = 4bbxx$; d'où l'on tire cette proportion * $\overline{TV}^2 (xx) . \overline{CT}^2 + \overline{CD}^2 (yy + bb) : \overline{AB}^2 (4aa) . \overline{DE}^2 (4bb)$. * Art. 176.

REMARQUE.

466. Comme l'on a trouvé dans le Corollaire précédent cette équation $4aayy = 4bbxx - 4bbaa$, l'on voit qu'en effaçant 4, & divisant par aa , l'on aura $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$, qui est une équation dont nous aurons besoin dans la suite.

DEFINITION.

467. Si par l'extrémité B l'on mène une ligne droite FG parallèle au second axe DE, en sorte que BF ou BG soient chacune égales à la moitié du même axe, & que du centre C l'on tire par les extrémités F & G les lignes CF & CG, prolongées indéfiniment, ces lignes seront nommées les *assymptotes* de l'Hyperbole LBM, & si on les prolonge indéfiniment de l'autre côté du centre, elles deviendront *assymptotes* de l'autre Hyperbole opposée. Fig. 168.

PROPOSITION II.

Théoreme.

468. Si l'on mène une ligne droite HI parallèle au second axe DE, en sorte qu'elle coupe une des Hyperboles, & qu'elle soit terminée par les *assymptotes*, je dis que le rectangle de HK par KI sera égal au carré de DG ou FB, moitié du second axe DE. Fig. 168.

Ayant nommé CB, a ; CD ou BF, b ; les indéterminées CP, x ; PK, y ; il faut prouver que $\overline{DC}^2$ ou $\overline{FB}^2 = \overline{KH} \times \overline{KI}$.

Cc

D E M O N S T R A T I O N .

Considérez que les triangles semblables CBF & CPH donnent CB (a). BF (b) :: CP (x). PH ($\frac{bx}{a}$). Ainsi l'on aura HP—KP ($\frac{bx}{a} - y$) = KH, & PI—PK ($\frac{bx}{a} - y$) = KI. Or multipliant KH par KI, il viendra $\frac{bbxx}{aa} - yy = KH \times KI$; *Art. 466. & mettant à la place de yy sa valeur, qui est $\frac{bbxx}{aa} - bb$, l'on aura $\frac{bbxx}{aa} - \frac{bbxx}{aa} + bb = KH \times KI$, ou bien $\overline{FB}^2 (bb) = KH \times KI$.

C O R O L L A I R E .

469. Il s'ensuit que si l'on mène des lignes TS & QR parallèles au second axe DE, & terminées par les asymptotes que les rectangles TO×OS, HK×KI, & QL×LR, sont égaux entr'eux; puisque chacun est égal au carré de FB. D'où l'on peut conclure que OS.HK :: KI.OT. & que HK.QL :: LR.KI.

P R O P O S I T I O N I I I .

Théoreme.

Fig. 168. 470. Si l'on mène par deux points quelconques K & O de deux Hyperboles opposées deux lignes droites VX & TZ parallèles entr'elles, & terminées par les asymptotes, je dis que le rectangle de VO par OX sera égal à celui de TK par KZ.

D E M O N S T R A T I O N .

Pour le démontrer, tirez par les points O & K les lignes TS & HI parallèles au second axe DE pour avoir les triangles semblables OSX, YHK, OTV, & KZI; d'où l'on tire OS.KH :: OX.KY. & KI.OT :: KZ.OV. mais *Art. 469. les deux premiers termes OS, KH & KI, OT, donnent

OS. KH :: KI. OT. les deux derniers donneront OX. KY :: KZ. OV. par conséquent $OX \times OV = KI \times KZ$. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

471. Si l'on mène par deux points quelconques A & C d'une Hyperbole, ou des Hyperboles opposées, deux lignes droites AB & CD parallèles entr'elles, & deux autres AE & CF aussi parallèles, & terminées par les asymptotes, je dis que le rectangle AE par AB sera égal à celui de CF par CD. Fig. 169.

DEMONSTRATION.

Pour le prouver, menez par les points A & C les lignes GH & IK parallèles entr'elles, & considérez que les triangles semblables GEA, IFC, & ABH, CDK donnent GA. IC :: EA. FC. & CK. AH :: CD. AB. Mais nous avons aussi * GA. IC :: CK. AH. Donc EA. FC :: CD. AB. Par conséquent $AE \times AB = FC \times CD$. C. Q. F. D. * Art. 469

COROLLAIRE I.

472. Il suit de cette proposition que si l'on mène par des points quelconques A, C, pris sur une Hyperbole, ou des Hyperboles opposées des lignes AP, CO, & AE, CF, parallèles aux asymptotes opposées, que les rectangles $AE \times AP$, & $CF \times CO$ seront égaux entr'eux. Fig. 169.

COROLLAIRE II.

473. Comme le point L est un des points de l'Hyperbole, il s'ensuit que menant les lignes LM & LN parallèles aux asymptotes opposées, l'on aura encore $LM \times LN = AE \times AP$, ou $LM \times LN = CF \times CO$. Mais comme $LM \times LN$ n'est autre chose que le carré de LM, on voit que nommant LM, a ; AP, x ; AE, y ; on aura toujours $AP \times AE$, ou $CF \times CO$ (xy) $= \overline{LM}^2$ (aa), qui est une équation qui fait Cc ij

voir parfaitement la propriété de l'Hyperbole avec ses asymptotes, & qui en détermine tous les points.

PROPOSITION V.

Problème.

Fig. 171. 474. *Par un point donné mener une Tangente à une Hyperbole, dont les asymptotes sont données.*

Pour mener une Tangente à une Hyperbole par le point donné A, il faut de ce point mener la ligne AB parallèle à l'asymptote opposée EF, faire la partie BD égale à BE ; & tirer la ligne DAC, qui sera tangente, puisqu'elle ne touche l'Hyperbole qu'au seul point A ; car à cause des triangles semblables DCE, DAB, l'on voit que AC est égal à AD ; par conséquent si l'on vouloit qu'elle la touchât encore au point H. Cela ne se pourroit sans que HD ne soit égal à AC ou à AD. Or comme cela est impossible, puisque, selon cette supposition, il faudroit que la partie HD fût aussi grande que son tout AD : il s'ensuit donc que DAC ne touche l'Hyperbole qu'au seul point A. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

475. Comme il n'y a que la seule ligne CD qui étant terminée par les asymptotes, soit coupée en deux également au point A, il s'ensuit que si une ligne droite CD, terminée par les asymptotes d'une Hyperbole est tangente au point A, où elle seroit coupée par une ligne IK, que cette ligne la divisera en deux parties égales AC & AD.

DEFINITIONS.

Fig. 170. 476. Si l'on a deux diamètres AB & CD, dont l'un, tel que CD, soit parallèle à la tangente FG, qui passe par l'extrémité A ou B, & de plus terminé en C & en D par les lignes BD & BC, menées par le point d'attouchement B, parallèle aux asymptotes opposées : ces deux diamètres AB & CD sont appelez ensemble *conjuguez*.

477. Si du point H d'une Hyperbole l'on mène une ligne HK parallèle au diamètre CD, & terminée par l'autre AB, elle sera nommée *ordonnée* au diamètre AB.

PROPOSITION VI.

Théoreme.

478. Le *Quarré* d'une ordonnée quelconque HK mené parallèle à une Tangente FG, est au rectangle de AK par KB, comme le *Quarré* du diamètre CD est au *Quarré* de son conjugué AB. Fig. 170.

Ayant mené par l'une des extrémités B du diamètre AB une parallèle FG au diamètre CD terminé par les asymptotes, elle sera tangente au point B, & par conséquent divisée en deux également par le Corollaire précédent : c'est pourquoi si l'on prolonge la ligne HI jusqu'aux asymptotes, les points L & M seront également éloignés du point K. Cela posé, nous nommerons EB ou EA, a ; EC, ou DE, ou BF, ou BG, b ; les indéterminées EK, x ; & KH ou KI, y ; par conséquent BK fera $x - a$, & AK fera $x + a$.

DEMONSTRATION.

Considérez que les triangles semblables EBF ou EKL, donnent EB (a). BF (b) :: EK (x). KL ($\frac{bx}{a}$). Ainsi LH, ou autrement LK - HK fera $\frac{bx}{a} - y$, & HM fera $\frac{bx}{a} + y$. Or si l'on multiplie LH par HM l'on aura LH x HM

$(\frac{bbxx}{aa} - yy) = \overline{FB}^2 (bb)^*$, qui étant délivré de fractions, *Art. 468. donne $bbxx - aayy = aabb$; & faisant passer $aayy$ du premier membre dans le second, & $aabb$ du second dans le premier, l'on aura $bbxx - aabb = aayy$; d'où l'on tire cette proportion *xx - az. yy :: aa. bb. c'est-à-dire, que AK x KB :: KH :: EB. CE. ou :: AB. CD. C. Q. F. D. *Art. 468.

C c iij

COROLLAIRE.

479. Il suit que ce que l'on a démontré dans la première proposition à l'égard des deux axes d'une Hyperbole s'étend par celle-ci, à deux diamètres conjugués quelconques AB & CD, aussi-bien que toutes les autres propriétés que l'on a démontrées d'une Hyperbole avec ses asymptotes ; car pour s'en convaincre, il ne faut que lire de nouveau les art. précédens, & mettre diamètre par tout où il y aura axe ; car tout subsistera également, soit que l'angle CEB soit droit, ou non.

PROPOSITION VII.

Théoreme.

Fig. 172.

480. Si l'on coupe un Cone droit ABC par un plan parallèle à l'axe BQ, je dis que la courbe FHDKG sera une Hyperbole.

Ayant prolongé les côtes CB du Cone jusqu'en P, en sorte que BP soit égal à BD, la ligne PD sera le premier axe de l'Hyperbole, & la ligne BN tirée du point B perpendiculaire sur le milieu de la ligne PD, sera la moitié du second axe ; tellement que faisant $NO = NB$, OB sera le second axe. Ayant nommé les données NP ou ND, a ; NO ou NB, b ; les indéterminées NI, x ; IK, y ; DI sera $x - a$; & PI $x + a$: nous ferons voir que $PI \times DI (xx - aa)$, $\overline{IK}^2 (yy) :: \overline{PD}^2 (4aa) . \overline{OB}^2 (4bb)$.

DEMONSTRATION.

Considérez que les triangles semblables PNB, PIM, & DNB, DIL, donnent $PN (a) . NB (b) :: PI (x + a) IM (\frac{bx + ba}{a})$. & $DN (a) . NB (b) :: DI (x - a) . IL (\frac{bx - ba}{a})$. Or si l'on multiplie les valeurs de IM & IL l'une par l'autre,

tré, le produit sera égal à $\overline{IK}^2$ par la propriété du cercle. Ainsi on pourra en former cette équation $IM \times IL$

$(\frac{bbxx - bbaa}{aa}) = \overline{IK}^2 (yy)$; & si l'on multiplie le second mem-

bre par le diviseur du premier, pour faire évanouir la fraction, l'on aura cette équation $bbxx - bbaa = yyaa$, laquelle étant réduite en proportion *, donnera $xx - aa$. * Art. 176.

$yy :: aa, bb$. ou bien $PI \times DI (xx - aa) \cdot \overline{IK}^2 (yy) :: \overline{PD}^2 (4aa)$.

$\overline{OP}^2 (4bb)$. C. Q. F. D.

AVERTISSEMENT.

Nous ne parlerons point des différentes manières de tracer l'Hyperbole, parce que cette courbe n'a gueres lieu dans la Geometrie Pratique: c'est pourquoi l'on pourra passer légèrement sur ce Chapitre, pour s'attacher au Problème suivant, dont nous avons déjà fait mention dans la Remarque qui suit l'art. 397.

PROPOSITION VIII.

Problème.

481. *Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données.* PLATE
CHE 17

Pour trouver entre deux lignes données M & N deux moyennes proportionnelles, je regarde la ligne AB comme étant la ligne M, & la ligne AD comme étant la ligne N. Cela posé, je divise en deux également la ligne AD, & j'éleve sur le point du milieu la perpendiculaire GH égale à la moitié de la plus grande AB, & de l'extrémité G je décris un cercle de l'intervalle GA, & puis je décris une Parabole avec la ligne AD, qui doit servir de parametre, & la Parabole ayant rencontré la circonférence du cercle au point C; j'abaisse une perpendiculaire du point C sur la ligne AB, & je dis que les lignes CE & AE

Fig. 173

sont moyennes proportionnelles entre les deux données AB & AD.

Nous nommerons AD, a ; CE, y ; AE, x ; FE, z ; ainsi DE sera $x - a$: or comme l'on voit qu'ayant abaissé la perpendiculaire GI, l'on a $CE + EF (y + z) = AB$. Il faut donc prouver que $a.y :: y, x :: x, y + z$.

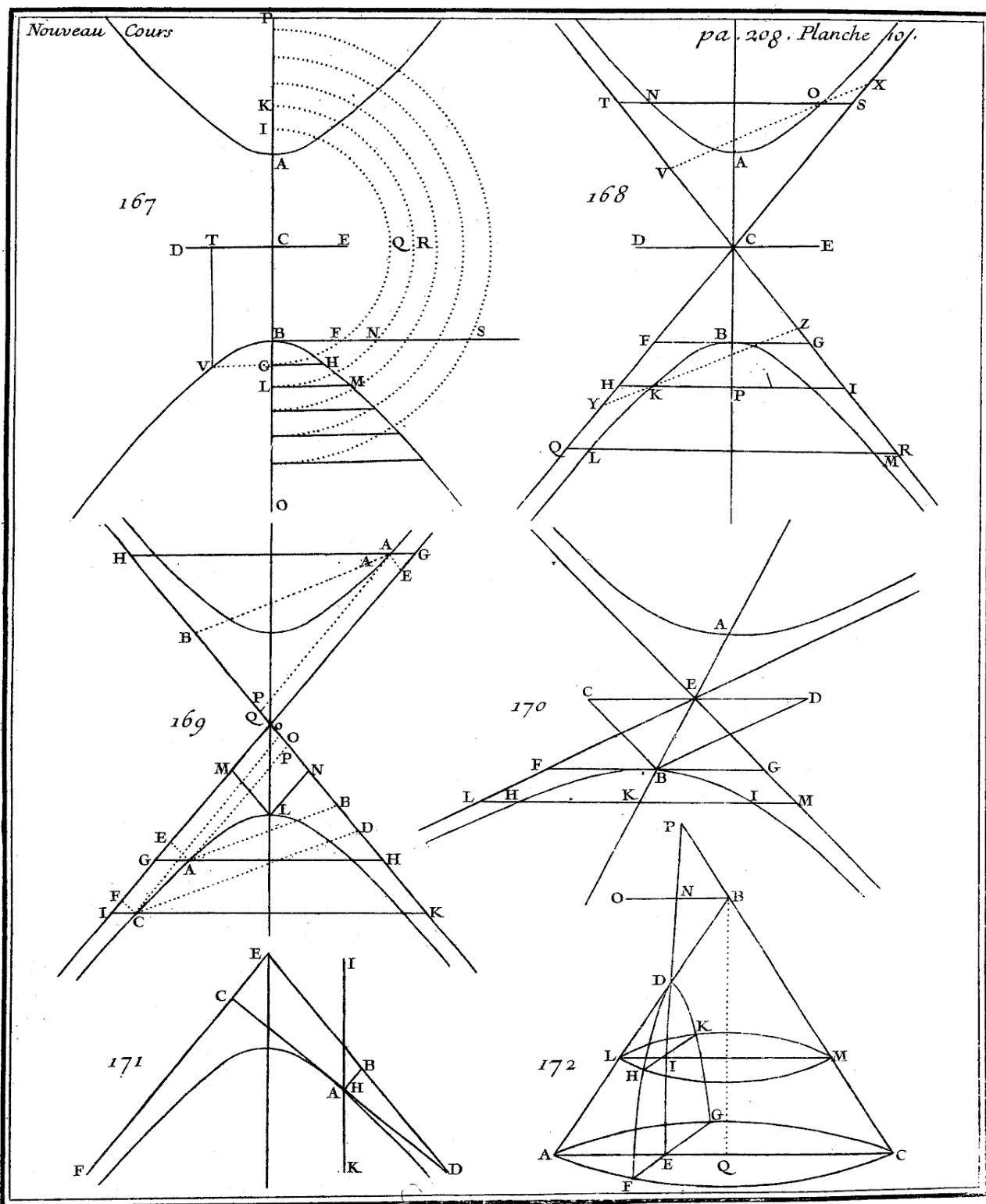
D E M O N S T R A T I O N.

Art. 410. La propriété de la Parabole donne $a.y :: y, x$. & celle du

Art. 286. Cercle $x.y :: z, x - a$. d'où l'on tire ces deux équations $yy = ax$, & $xx - xa = yz$, ou bien $xx = yz + xa$, & mettant yy à la place de ax , l'on aura $xx = yz + yy$; d'où l'on tire cette proportion $y, x :: x, y + z$. Or si l'on joint les deux derniers termes de cette proportion aux deux derniers de la suivante $a.y :: y, x$. l'on aura $a.y :: y, x :: x, y + z$.
C. Q. F. D.

Fin de la première Partie.

NOUVEAU



Addition à la premiere Partie.

AVERTISSEMENT.

QUand on est né avec le goût des Mathématiques, l'on ne s'en tient gueres à la lecture des simples Elemens; il suffit qu'ils nous ayent montré qu'on peut aller beaucoup plus loin pour desirer des Livres qui nous apprennent des choses nouvelles; car ceux qui ont l'esprit geometre, cherchent à se le nourrir des veritez d'une Science qu'il est difficile de connoître sans l'aimer. L'on cherche, l'on s'informe quels sont les bons Livres des Mathématiques qu'on n'a pas vûs; mais souvent à qui s'en informer? Sera-ce à ces personnes qui se contentant de la simple Pratique, & qui n'ayant point, ou très-peu de Theorie, méprisent tout ce qu'ils ne sçavent pas, détournent même les autres d'aller trop avant, crainte qu'on ne vienne à découvrir leur ignorance. Comme c'est ordinairement la situation de la plupart des personnes qui s'appliquent aux Mathématiques dans les Provinces, où souvent elles ne peuvent être secondées, je leur ferai peut-être plaisir de rapporter ici une liste des meilleurs Ouvrages de Mathématique qu'ils pourront étudier. Au reste, je ne prétends parler que des principaux Livres qui ont été imprimez à Paris; car s'il falloit citer tous les bons qu'on a faits chez les Etrangers, & particulièrement en Angleterre, il faudroit un Volume entier pour en faire le denombrement.

Comme ce que j'ai donné d'Algebre dans mes Elemens de Geometrie, ne suffit pas pour en sçavoir parfaitement toutes les operations, l'on pourra avoir recours au Livre de *la Science du Calcul* du R.P.Reyneau. Cet Ouvrage sert d'introduction à un autre du même Auteur, qui a pour titre: *L'Analyse démontrée*, qui est ce que nous avons de meilleur sur l'Algebre; ce Livre est en deux Vol. in 4°. Dans le premier on enseigne la resolution des Problèmes qui se réduisent à des équations simples & composées; ce qui est uniquement l'objet de l'Analyse; & dans le second l'on trouve les nouveaux Calculs, c'est-à-dire, le Calcul

D d

différentiel, & le Calcul *integral*, qui est une autre sorte d'Algebre, & ces Calculs sont ensuite appliquez à la resolution d'un grand nombre de Problèmes des Physico-Mathematiques, qui font voir la beauté de ces Calculs, & une partie des belles découvertes qu'on a faites dans ces derniers tems ; & c'est dans cet Ouvrage que l'on connoît mieux que dans tout autre la fécondité des Mathematiques.

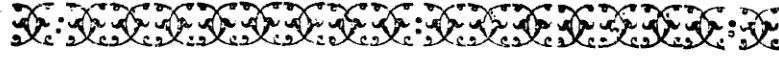
L'on peut voir après cela l'excellent Livre des *Infiniment petits* de M. le Marquis de l'Hôpital, qui traite uniquement du Calcul *différentiel* appliqué à la Geometrie des *Courbes*. Cet Ouvrage est le plus beau morceau que nous ayons en France sur les Mathematiques ; & comme il est un peu abstrait, on pourra avoir recours au *Commentaire* qu'en a donné depuis peu M. de Croufat, qui servira beaucoup à soulager les Comménçans.

Quoique j'aye déjà parlé du *Traité des Sections Coniques* de M. de l'Hôpital, je crois devoir recommander encore une fois aux Comménçans d'étudier serieusement cet Ouvrage, s'ils ont envie de faire du progrès, & de le lire même immédiatement après qu'ils auront étudié le premier Tome de l'Analyse démontrée, parce qu'ils s'y fortifieront, & auront l'esprit plus disposé à voir ensuite le second Tome de l'Analyse.

Il y a aussi un Livre de M. Carré sur le *Calcul integral*, qui est une application de ce Calcul à la mesure des surfaces, des solides, & à la maniere de trouver leur centre de gravité, &c. qu'il est bon aussi de sçavoir, pour connoître l'usage de ce Calcul.

Quoique je n'ai eu dessein que de parler des meilleurs Livres d'Algebre, en voici cependant encore deux qu'on ne peut guères se dispenser d'avoir ; c'est la *Nouvelle Mécanique* de M. Varignon : Ouvrage dont le nom de l'Auteur suffit pour en juger favorablement ; & les *Oeuvres de M. de Mariotte*, de l'Edition de Hollande, in 4^o.

Si aux Livres precedens l'on joint les *Memoires de l'Academie des Sciences*, l'on aura de quoi s'appliquer utilement.



DISCOURS

SUR LA TRIGONOMÉTRIE & le Nivellement.

DE toutes les Parties des Mathématiques , il n'y en a point que les Commencans étudient plus volontiers que la Trigonometrie , parce qu'elle presente à l'esprit des Problèmes fort curieux , dont la solution est aisée , n'ayant besoin que du simple Calcul de l'Arithmetique. Cependant il faut se rendre bien familières les analogies de ce Calcul , afin d'en placer les termes à propos ; car la Trigonometrie est d'un si grand usage dans le métier de la Guerre , qu'un homme qui est chargé des moindres choses dans le Genie , ou dans l'Artillerie , ne peut absolument ignorer ; puisque si l'on veut conduire quelque galerie de Mines , jeter des Bombes avec regle , calculer les parties d'une Fortification reguliere pour la tracer sur le terrain , lever un Camp , une Carte , le Plan d'une Tranchée , orienter des Batteries , il faut necessairement avoir recours à la Trigonometrie.

Et pour dire un mot du Traité que j'en donne ici , l'on sçaura que je ne parle que des Triangles rectilignes , parce que ceux qu'on nomme Spheriques , à cause qu'ils sont formez par des cercles de la Sphere , ne sont d'aucune utilité à un homme de Guerre , auquel il ne faut apprendre que les choses necessaires , crainte de le rebuter , en voulant lui fatiguer la memoire par celles qui sont purement curieuses , ou dont l'usage ne se rencontre point dans les choses de son ministere. J'ai fait en sorte d'éviter ce défaut , particulierement dans ce petit Traité , que j'ai tâché de rendre le plus clair & le plus interessant qu'il m'a été possible , en appliquant la Trigonometrie à quantité d'operations , qui feront plaisir à ceux qui n'aiment point à s'appliquer , sans voir dans le moment l'usage des Propositions qu'ils apprennent.

Comme en mesurant la distance d'un lieu à un autre , il ar-

D d ij

212 DISCOURS SUR LA TRIGONOMETRIE.

rive quelquefois qu'on est obligé d'en connoître aussi les différentes hauteurs par rapport au centre de la Terre, il semble que le Nivellement est une partie de Mathématique qui doit suivre immédiatement la Trigonometrie : aussi ai-je observé cet ordre, puisqu'après la Trigonometrie l'on trouvera un Traité du Nivellement, où l'on fait voir l'usage du Niveau d'eau, & celui d'un autre Niveau, pour niveler des grandes distances : ces Instrumens sont d'un si grand usage dans la Pratique, qu'on ne sauroit trop engager ceux qui peuvent se trouver dans le cas de s'en servir, de s'appliquer à ce que l'on verra dans la suite sur ce sujet. Tout le monde sçait que quand on veut faire un Canal de navigation, joindre une Rivière avec une autre, conduire des Eaux aux endroits où il en manque, les projets de ces sortes de choses ne peuvent avoir lieu, sans avoir fait auparavant des Nivellemens fort exacts ; & c'est-là particulièrement où la Théorie & la Pratique doivent travailler de concert. Combien de grands ouvrages n'a-t-on pas exécutés depuis qu'on a sçu réduire à des principes l'Art du Nivellement ? Auroit-on osé tenter autrefois un travail aussi admirable que celui de la jonction des deux Mers ? Toute la magnificence des Anciens a-t-elle jamais été jusqu'à faire naître des Jets d'eau dans des lieux fort éloignés de tous réservoirs ? Et si cela s'est fait, étoit-on sûr de la réussite avant l'exécution ? Combien est-il arrivé de fois qu'après avoir commencé un grand projet, on s'est aperçu trop tard, & après de grandes dépenses, de l'impossibilité du dessein, au lieu qu'à présent on trouve avec toute l'exactitude possible la différence du Niveau de plusieurs endroits, lorsqu'on entend bien le Nivellement, & l'on sçait si le projet qu'on a en vue, est possible, ou non ; s'il faut des Ecluses, à quelle distance il faut les construire ; enfin on est en état de ne rien craindre du succès d'une grande entreprise, si après en avoir fait le Nivellement, l'on a reconnu le projet possible.



NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

SECONDE PARTIE.

Qui traite de la Trigonométrie rectiligne.

DEFINITIONS.

I.

482. **L**A *Trigonometrie* est une partie de la Géométrie, par le moyen de laquelle trois choses étant données ou connues dans un triangle, l'on vient à la connoissance du reste.

II.

483. Comme l'on ne parvient à trouver ce que l'on cherche dans la Trigonometrie que par le Calcul ordinaire de l'Arithmétique, l'on se sert de certaines Tables dressées pour ce sujet, qu'on appelle *Table des Sinus, Tangentes, Secantes*, dont je donnerai l'usage seulement, sans en enseigner la construction, que l'on trouvera dans plusieurs Livres, ne voulant parler que des choses qu'il faut absolument sçavoir.

III.

484. Nous avons six choses à considérer dans un triangle; sçavoir, les trois côtes & les trois angles, sans s'embarasser de la superficie: & comme il y a trois de ces six termes, qui peuvent être donnez pour arriver à

Ddij

la connoissance des autres, il faut toujours que ce soit deux angles & un côté, ou un angle & deux côtés, ou bien enfin les trois côtés; car les trois angles ne suffisent pas pour connoître la valeur des trois côtés, parce qu'on peut former deux triangles, tels que les angles de l'un soient égaux aux angles de l'autre, chacun à son correspondant, sans que pour cela les côtés du premier soient égaux à ceux du second. Il est bien vrai qu'on peut trouver la proportion de ces côtés, mais non pas leur juste valeur.

IV.

485. Nous avons déjà dit que la mesure d'un angle n'étoit autre chose que la quantité de degrez, ou de degrez & de minutes, que l'arc terminé par les lignes qui forment cet angle peut contenir. Mais comme cette mesure est relative dans la Trigonometrie à certaines lignes, qui en font le principal objet, voici leurs noms.

V.

PLAN-
CHE 31.
Fig. 174.

486. *Sinus droit* d'un arc, ou d'un angle dont cet arc est la mesure, est une ligne droite, qui étant tirée d'une extrémité de l'arc, où est rencontré un des côtés, vient tomber perpendiculairement sur l'autre côté. Ainsi la ligne FH tirée de l'extrémité F de l'arc FB perpendiculaire sur le côté BC, est le sinus de l'angle FCB.

COROLLAIRE I.

487. Si l'on prolonge la ligne FH jusqu'en G, le rayon CB étant perpendiculaire sur la ligne FG, la divisera en deux également au point H *, aussi-bien que l'arc FBG; & comme la ligne FG est la corde de cet arc, & que la ligne FH est le sinus de l'arc FB, il s'ensuit que le sinus d'un arc est la moitié de la corde d'un arc double.

*Art. 265.

COROLLAIRE II.

488. Comme plus l'angle FCB fera ouvert, & plus le sinus FH fera grand; il s'ensuit que lorsque le rayon CF fera perpendiculaire sur AB, comme est le côté CI le sinus FH, & le côté CF, se joindront pour ne faire qu'une seule ligne CI, & que dans ce cas le sinus de l'angle droit ICH fera le rayon même du cercle: ce qui fait voir que l'angle droit a le plus grand de tous les sinus, que l'on nomme à cause de cela *Sinus total*.

REMARQUE.

489. Le sinus de l'angle droit n'étant autre chose que le rayon du cercle dont l'angle tire sa mesure, nous nommerons dans la suite le rayon CB *Sinus total*.

VI.

490. *Sinus verse* d'un arc ou de l'angle dont cet arc est la mesure, est la partie du rayon comprise entre le sinus droit & l'extrémité de cet axe; ainsi la ligne droite, ou partie BH de rayon, est sinus verse de l'arc FB ou de l'angle FCB, dont cet arc est la mesure.

VII.

491. *Tangente* d'un arc, ou d'un angle dont cet arc est la mesure, est une ligne perpendiculaire sur l'extrémité d'un des côtes de l'angle, & terminée par l'autre côté prolongé; ainsi la ligne BE perpendiculaire à l'extrémité B du côté CB, & terminée par la rencontre du côté CF prolongé jusqu'en E, est la tangente de l'angle FCB.

VIII.

492. *Secante* d'un arc ou d'un angle, dont cet arc est la mesure, n'est autre chose que le côté de l'angle prolongé, qui termine la Tangente; ainsi la ligne CE est secante de l'angle FCB.

493. Quand on a construit les Tables des Sinus, l'on a supposé le rayon CB, ou autrement le sinus total divisé en 10000000 parties, & l'on a cherché combien le sinus de chaque angle depuis une minute jusqu'à 90 degrez, pouvoit contenir de parties du sinus total, afin de connoître les sinus en nombre; & c'est ainsi que l'on a trouvé que le sinus d'un angle de 20 degrez, par exemple, contenoit 3420202 de ces parties, que le sinus de 55 degrez 10 minutes en contenoit 8208170; ainsi des autres qui en contiennent plus ou moins, selon que l'angle approche plus ou moins de la valeur d'un droit; & ce sont tous ces differens sinus que l'on trouve dans la seconde colonne des Tables sur chacun des feuillets.

494. Comme une tangente telle que BE, augmente ou diminue, selon que l'angle ECB approche ou s'éloigne plus ou moins de l'angle droit, l'on a cherché aussi la valeur des tangentes de tous les angles depuis celle d'une minute jusqu'à celle de 90 degrez, en considerant combien elle contenoit de parties du sinus total, c'est-à-dire, de 10000000, & l'on en a composé la troisième colonne des Tables, qui suit immédiatement celle des sinus; de sorte que l'on a trouvé à côté des sinus de chaque angle la valeur de la tangente du même angle. Ainsi l'on verra que la tangente de 20 degrez est de 3639702, & que la tangente de 55 degrez 10 minutes est 14370268 parties du sinus total divisé en 10000000.

495. Enfin l'on a cherché aussi la valeur de la secante de chaque angle que l'on a trouvé par le moyen du sinus total & de la tangente; car comme une secante telle que CE, n'est autre chose que l'hypotenuse d'un triangle rectangle CBE, dont l'angle droit est compris par le sinus total CB, & la tangente BE de l'angle, l'on a quarré le sinus total CP, & la tangente BE pour avoir la racine quarrée de la somme de ces deux produits, qui donne la valeur de la secante; & c'est ainsi que l'on a trouvé les secantes de tous les angles depuis une minute jusqu'à 90 degrez,

degrez, dont on a composé la troisième colonne qui se trouve dans les Tables.

496. Or quand l'on veut sçavoir quel est le Sinus, la Tangente, la Secante d'un angle, l'on considère d'abord combien la mesure de l'angle contient de degrez, ou de degrez & de minutes, & l'on cherche dans la Table le feuillet, où il y a marqué en haut le nombre de degrez de cet angle; par exemple, si l'angle est de 15 degrez, je cherche la page où est le nombre 15 en haut, & je trouve dans la première ligne que le Sinus de 15 degrez est 2588190, que la Tangente est 2679492, & que la Secante est 10352762.

497. Mais comme les degrez de chaque page sont accompagnés d'un nombre de minutes, qui sont en progression Arithmétique depuis 1 jusqu'à 60, qui se trouvent dans une petite colonne, où il y a au commencement ce mot *Minute*, si l'on vouloit sçavoir le Sinus de 15 degrez 24 minutes, je cherche d'abord, comme ci-devant, la page où il y a 15 degrez en haut, & je descends jusqu'à l'endroit de la colonne des minutes, où 24 se trouve marqué, & je prends le Sinus qui lui correspond, qui est de 2655561.

498. Comme le Sinus total, ou autrement le côté CB, Fig. 175: devient le côté commun de tous les angles, puisqu'il n'y a que l'autre côté CF qui varie pour faire l'angle plus ou moins ouvert: il est à remarquer que le Sinus total, la Tangente & la Secante d'un angle peuvent toujours former les côtés d'un triangle rectangle, dont la grandeur est indéterminée, parce qu'il n'est question que de la proportion de ces côtés avec ceux d'un autre triangle qui lui seroit semblable; & pour faire voir ceci plus clairement, considérez le triangle rectangle CEF, si du point C l'on décrit l'arc BD, qui fera, par exemple, de 35 degrez, & qu'on élève au point B la perpendiculaire BA, l'on aura le triangle rectangle CBA, dont le côté CB pourra être pris pour le Sinus total, le côté AB pour la Tangente de l'angle C, & le côté CA pour la Secante du

F.

même angle ; mais tous les côtez de ce triangle sont connus : car le côté CB étant le Sinus total, sera de 10000000, le côté BA étant la Tangente d'un angle de 35 degrez, sera de 7002075, & le côté CA étant la Secante, sera par conséquent 12207746, & c'est par le moyen de ces triangles qu'on va résoudre les Problèmes suivans.

REMARQUE.

499. L'on a divisé, pour construire les Tables, le Sinus total en un grand nombre de parties, afin que dans les divisions que les operations demandent, l'on puisse négliger les restes, quand ils sont composez de ces petites parties ; mais comme dans la pratique ordinaire de la Géométrie l'on peut se dispenser d'entrer dans une si grande exactitude, l'on pourra, au lieu de supposer que le Sinus total est divisé en 10000000, le supposer seulement en 100000 ; & pour lors il faudra, au lieu de prendre toutes les figures qui sont dans les colonnes des Sinus, des Tangentes & Secantes, prendre seulement les premieres, & négliger les deux dernières, que l'on voit séparées à droite par un petit point, c'est-à-dire, que pour la Tangente de 30 degrez, au lieu de prendre 57735:03, on ne prendra que 57735 ; & c'est de cette façon que seront faits tous les Calculs que l'on verra dans la suite.

CALCUL DES TRIANGLES

Rectangles.

PROPOSITION PREMIERE.

Problème.

Fig. 176. 500. Dans un Triangle rectangle ADE, dont on connoît un angle aigu A, & le côté AD, trouver le côté DE opposé à l'angle aigu.

Supposant que l'angle A soit de 30 degrez, & le côté AD de 20 toises, il faut chercher dans la Table la Tan-

gente de 30 degrez., que l'on trouvera de 57735, & confiderer que les triangles ABC & ADE étant semblables, l'on a $AB. BC :: AD. DE$. qui nous fournit cette Regle, si AB, qui est le Sinus total de 100000, donne la Tangente BC de 57735, que donnera le côté AD de 20 toises pour le côté DE, que l'on trouvera de 11 toises 3 pieds & quelques pouces.

PROPOSITION II.

Problème.

501. Connoissant dans un Triangle rectangle ADE, un angle aigu A de 30 degrez., & le côté AD de 20 toises, trouver l'hypotenuse AE. Fig. 176.

Il faut chercher la Secante de 30 degrez., qui est 115470, & confiderer que le triangle ABC étant semblable au triangle ADE, $AB. AC :: AD. AE$. d'où l'on tire cette Regle, si AB, qui est le Sinus total de 100000, m'a donné 115470 pour la Secante AC, qui me donnera le côté AD de 20 toises pour le côté AE, que l'on trouvera de 23 toises & quelques pouces.

PROPOSITION III.

Problème.

502. Dans un Triangle rectangle ABC dont on connoît un angle aigu A, & le côté BC opposé à cet angle, trouver le côté AB opposé à l'autre angle aigu C. Fig. 177.

Si l'angle aigu A est de 40 degrez., & le côté CB de 25 toises, il faut chercher la Tangente de 40 degrez., qui est 83909, & confiderer que les triangles AED & ABC étant semblables, l'on a $DE. EA :: CB. BA$. d'où l'on tire cette Regle, comme la Tangente DE de 83909 est au côté EA Sinus total de 100000; ainsi le côté CB de 25 toises est au côté BA, que l'on trouvera de 29 toises & quelque chose.

503. Autrement comme l'angle A est de 40 degrez., Fig. 178.
Ee ij

si l'on retranche ce nombre de 90, l'on aura 50 degrés pour l'angle C ; & comme les triangles CED & CBA sont semblables , l'on pourra , en cherchant la Tangente de l'angle C, dire , comme le côté CE, qui est le sinus total, est au côté ED, qui est la Tangente ; ainsi le côté CB de 2.5 toises, est au côté BA , que l'on trouvera encore de 2.9 toises & quelque chose.

PROPOSITION IV.

Problème.

Fig. 179. 504. Dans un Triangle rectangle ABC, dont on connoît les deux côtes AB & BC, qui comprennent l'angle droit, trouver l'angle aigu A.

Supposant que le côté AB soit de 16 toises , & le côté BC de 14 , remarquez que les triangles ADE & ABC étant semblables , AB. BC :: AD. DE. d'où l'on tire cette Regle, si le côté AB de 16 toises, donne le côté BC de 14, que donnera 100000, qui est le côté AD pour le côté DE, qui est la Tangente de l'angle A, que l'on trouvera de 875000 ; & cherchant le nombre le plus approchant de celui-là dans la colonne des Tangentes, l'on trouvera qu'il correspond à 41 degrés & 12 minutes, qui est la valeur de l'angle A.

PROPOSITION V.

Problème.

Fig. 180. 505. Dans un Triangle rectangle ABC, où l'on connoît deux côtes AB & AC, qui comprennent un angle aigu A, trouver la valeur de cet angle.

Supposant le côté AB de 35 toises, & le côté AC de 40, l'on aura, à cause des triangles semblables ADE & ABC, AB. AC :: AD. AE. d'où l'on tire cette Regle, si le côté AB de 35 toises donne 40 toises pour le côté AC que donnera le Sinus total AD de 100000 pour la Secante AE de l'angle A, que l'on trouvera de 114285 ; &

ayant recours à la Table pour y chercher dans la colonne des Secantes le nombre qui approche le plus de celui-ci, on trouvera qu'il correspond à 28 degrés 57 minutes, qui est la valeur de l'angle A.

PROPOSITION VI.

Théoreme.

506. Dans tous Triangles les Sinus des angles sont dans la même raison que leurs côtes opposés. *Fig. 181.*

Je dis que dans un triangle ABC il y a même raison du Sinus de l'angle A à son côté opposé BC, que du Sinus de l'angle B à son côté opposé AC.

DEMONSTRATION.

Ayant circonscrit un cercle autour de ce triangle, on voit que l'angle A ayant pour mesure la moitié de l'arc BDC, la ligne BC fera la corde d'un arc double de celui qui mesure l'angle A, par conséquent la moitié de la ligne BC fera le Sinus de l'angle A *; & par la même raison le Sinus de l'angle B fera la moitié de la ligne AC, comme le Sinus de l'angle C est la moitié du côté AB; ainsi l'on aura donc $\frac{BC}{2} : BC :: \frac{AC}{2} : AC$. ou bien $\frac{AC}{2} : AC :: \frac{AB}{2} : AB$. C. Q. F. D. **Art. 487.*

PROPOSITION VII.

Théoreme.

507. Dans un Triangle obtus-angle, le Sinus de l'angle obtus est le même que celui de son supplément. *Fig. 182.*

Ayant abaissé la perpendiculaire CD sur la base prolongée BD, & décrit les arcs FE & HG avec une même ouverture de compas AF & BH, l'on abaissera les perpendiculaires FI & HL. Cela posé, comme AF est égal à BH, l'un & l'autre sera nommé *a*; AC, *b*; CD, *c*; FI, *e*; HL, *iij*.

d ; HL, e ; CB, f ; & nous ferons voir que FI (d). CB (f)
 $::$ HL (e). AC (b).

DEMONSTRATION.

Les triangles CAD & FAI étant semblables, l'on aura
 CD (c). CA (b) $::$ FI (d). AF (a). Et comme les triangles
 CBD & HBL sont aussi semblables, l'on aura encore
 CD (c). HL (e) $::$ CB (f). HB (a). d'où l'on tire ces deux
 équations $ac=bd$, & $ac=ef$. Donc les premiers membres
 étant égaux, l'on aura par conséquent $bd=ef$, d'où l'on
 tire FI (d). CB (f) $::$ HL (e). AC (b). qui fait voir que le
 Sinus HL du supplément de l'angle ABC a même raison
 au côté AC que le Sinus FI au côté BC, & que par con-
 séquent le Sinus d'un angle obtus est toujours celui de
 son supplément. C. Q. F. D.

Ces deux Théoremes nous fournissent le moyen de con-
 noître les angles & les côtes de la plupart des triangles
 qui ne sont pas rectangles, comme on le va voir dans les
 Problèmes suivans.

PROPOSITION VIII.

Problème.

Fig. 182.

508. Dans un Triangle ABC, dont on connoît deux angles
 & un côté; on demande de trouver les deux autres côtes.

Le côté BC étant supposé de 15 toises, l'angle A de 40
 degrez, & l'angle B de 60, l'on connoîtra le troisième
 angle, en soustrayant de la valeur de deux droits, c'est-à-
 dire, de 180 degrez, la somme des angles A & B, & l'on
 trouvera 80 degrez pour l'angle C. Cela posé, pour con-
 noître le côté AC, je cherche dans les Tables le Sinus de
 l'angle A, c'est-à-dire, le Sinus de 40 degrez, qui sera
 celui de l'angle opposé au côté que je connois, & je trou-
 ve qu'il est 642.78; & cherchant aussi celui de l'angle B
 opposé au côté que je cherche, je trouve qu'il est de
 866.02, presentement je dis: Si 642.78, qui est le Sinus
 de l'angle A, donne 15 toises pour le côté BC que don-

nera 86602, qui est le Sinus de l'angle B, pour le côté AC, que l'on trouvera de 20 toises & quelque chose, pour trouver la valeur du côté AB, il faut chercher le Sinus de l'angle C, qui est de 98480; & dire encore: Si le Sinus de l'angle A, qui est 64278, donne 15 toises pour le côté BC, que donnera le Sinus de l'angle C, qui est 98480 pour le côté AB, que l'on trouvera de 23 toises & quelque chose.

PROPOSITION IX.

Problème.

569. Dans un Triangle ABC, dont on connoît deux côtés AC & BC avec un angle A; trouver les deux autres angles. Fig. 183.

Pour trouver d'abord l'angle B, supposant que le côté AC soit de 26 toises, le côté BC de 20, & l'angle A de 50 degrez, il faut chercher le Sinus de cet angle, qui est de 76604, & dire: Si le côté BC de 20 toises donne 76604 pour le Sinus de l'angle A, que donnera le côté AC de 26 toises pour le Sinus de l'angle B, que l'on trouvera de 99585; & cherchant dans la colonne des Sinus le nombre qui approche le plus de celui-ci, l'on verra qu'il correspond à 84 degrez 45 minutes, qui est la valeur de l'angle B.

Comme l'on connoît les angles A & B, l'on n'aura qu'à soustraire la somme de 130, le reste sera la difference 45 degrez 15 minutes pour l'angle C.

510. Mais si l'angle donné étoit plus ouvert qu'un droit, comme dans le triangle ABC, où l'angle B est de 120 degrez, le côté AC de 18 toises, & le côté BC de 12, il faudra, pour connoître l'angle A, chercher le Sinus du supplément de l'angle obtus, c'est-à-dire, le Sinus de 60 degrez, qui est 86602, & dire: Si le côté AC de 18 toises donne 86602 pour le Sinus du supplément de l'angle obtus, que donnera le côté BC de 12 toises pour le Sinus de l'angle A, que l'on trouvera de 57734, qui correspond à 35 degrez 16 minutes. Fig. 185.

PROPOSITION X.

Théoreme.

Fig. 186.

511. Dans tous Triangles comme ABC , dont on connoît deux côtez BA & BC avec l'angle compris ABC , la somme des deux côtez connus est à leur difference comme la Tangente de la moitié de la somme des deux angles inconnus BAC , & BCA est la Tangente de la moitié de leur difference.

DEMONSTRATION.

Si du point angulaire B l'on décrit un cercle dont le rayon soit le côté BC , & que l'on prolonge le côté AB jusqu'à la circonference D & E , la ligne AD sera la somme des deux côtez connus, puisque BD est égal à BC , & la ligne AE sera la difference de ces deux côtez, puisque BA est plus petit que BD de toute la ligne AE . Cela posé, comme l'angle DBC est extérieur au triangle ABC , il sera égal aux deux intérieurs BAC & BCA ; ainsi il vaudra la somme des deux angles inconnus: & si l'on tire la ligne EC , l'angle DEC , qui est à la circonference, sera moitié de celui du centre DBC ; ainsi il vaudra la moitié de la somme des deux angles inconnus: & si l'on tire la ligne DC , qui se trouve perpendiculaire sur EC , à cause que l'angle ECD est renfermé dans un demi-cercle, cette ligne sera la tangente de l'angle DEC , c'est-à-dire, de la moitié de la somme des deux angles inconnus. Presentement considerez que le triangle EBC est isoscelle, & que les angles BEC & BCE de la base sont égaux; par conséquent l'angle BEC sera plus grand que l'angle BCA de tout l'angle FCE : & comme l'angle extérieur BAC du triangle EAC est plus grand que l'angle BEC de tout l'angle ACE , il s'ensuit donc que l'angle BAC est plus grand que BCA de deux fois l'angle ACE ; ce qui fait voir que l'angle ACE est la moitié de la difference des deux angles inconnus BAC & BCA . Or si la ligne EF est perpendiculaire sur EC , elle sera la tangente de la moi-

tié

tié de la différence des deux angles inconnus étant tangente de l'angle FCE; mais les lignes DC & FE sont parallèles, puisqu'elles sont perpendiculaires sur EC: par conséquent l'angle FEA sera égal à son alterne EDC. Et comme les angles FAE & DAC sont aussi égaux, il s'en suit que les triangles AFE & ADC sont semblables; d'où l'on tire $AD : AE :: DC : FE$. qui fait voir que la somme des deux côtes AD est à leur différence AE comme la ligne DC tangente de la moitié de la somme des deux angles inconnus, est à la ligne FE tangente de la moitié de leur différence. C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

Problème.

512. Dans un Triangle ABC, dont on connaît deux côtes AC & BC avec l'angle compris C: trouver les angles A & B. Fig. 187.

Comme ce Problème est une application du Théoreme précédent, il faut, pour le résoudre, ajouter les deux côtes CB & CA ensemble, c'est-à-dire, 25, & 20 pour avoir la somme des deux côtes connus, & soustraire le plus petit côté du grand pour en avoir la différence, qui sera 5; & comme l'angle C est supposé de 40 degrez, l'on cherchera sa différence avec deux droits, que l'on trouvera de 140, dont la moitié 70 sera la moitié de la somme des deux angles inconnus A & B. Or cherchant la tangente de cet angle, qui est 274747, l'on dira: Si 45, somme des deux côtes connus, donne 5 pour leur différence, que donnera 274747, tangente de la moitié de la somme des deux angles inconnus pour la tangente de la moitié de la différence des deux angles inconnus, que l'on trouvera 305,27.

Présentement si l'on cherche dans la colonne des Tangentes le nombre le plus approchant de celui-ci, l'on verra qu'il correspond à 16 degrez & 59 minutes: & comme cette quantité n'est que la moitié de la différence, il

Il f

faut la doubler pour avoir la différence entière, qui sera 33 degréz 58 minutes, qu'il faut soustraire de la somme des deux angles inconnus, c'est-à-dire, de 140 degréz, & l'on trouvera pour la différence 106 degréz 2 minutes, dont on n'a plus qu'à prendre la moitié pour avoir la valeur de l'angle opposé au plus petit côté, c'est-à-dire, de l'angle B, qui sera de 53 degréz une minute.

Pour avoir l'angle A, on n'a qu'à ajouter la différence 33 degréz 58 minutes à la valeur de l'angle B, & l'on trouvera qu'il est de 86 degréz 59 minutes.

Si l'on veut connoître le côté AB, il sera facile de le trouver par la septième proposition.

PROPOSITION XII.

Théoreme.

Fig. 133. 513: Dans tous Triangles comme ABC, dont on connoît les trois côtez, la base AC est à la somme des deux autres côtez AB & BC, comme la différence de ces deux mêmes côtez est à la différence des Segmens AG & GC de la base.

DEMONSTRATION.

Si du point B l'on décrit un cercle dont le rayon soit le côté BC plus grand que BA, & que l'on prolonge le côté AB jusqu'à la circonférence, BD étant égal à BC, AD, sera la somme des deux côtez AB & BC, & AF en sera la différence: & comme la ligne EC est divisée en deux également par la perpendiculaire BG, EA sera la différence des deux segmens AG & GC. Or si l'on tire les lignes DC & EF, l'on aura les deux triangles semblables AEF & ADC, qui donnent cette proportion, AC qui est la base, est à AD, qui est la somme des deux côtez, comme AF, qui est la différence de ces deux côtez, est à AE, qui est la différence des segmens de la base. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce Théoreme nous donne un moyen de connoître les trois angles d'un triangle dont on connoît les trois côtez,

comme on le va voir dans le Problème suivant, qui en est une application.

PROPOSITION XIII.

Problème.

514. Connoissant les trois côtes d'un Triangle ABC , l'on demande de trouver la valeur d'un des Segmens de la base. Fig. 189.

Supposant que la base AC soit de 15 toises, le côté AB de 8, & le côté BC de 12, il faut dire: Comme la base AC de 15 est à la somme des deux autres côtes, qui est 20; ainsi la différence de ces deux côtes, qui est 4, est à la différence des deux segmens, que l'on trouvera de 5 toises 2 pieds. Presentement si l'on ajoute cette quantité à la valeur de la base AC , l'on aura 20 toises 2 pieds, qui sera la valeur d'une ligne telle que EC : par conséquent si on en prend la moitié, on connoitra le plus grand segment DC , qui est ici de 10 toises 1 pied: mais comme l'on connoît dans le triangle rectangle DBC , les côtes BC & DC ; l'on pourra donc connoître aussi l'angle C , & ensuite les angles A & B .

USAGE DES LOGARITHMES POUR LE CALCUL
des Triangles.

515. L'on a pû voir dans les Tables qu'il y a deux colonnes sur la droite de celles dont nous nous sommes servis jusqu'à présent, au sommet desquelles l'on trouve ces mots, *Logarithmes sinus*, *Logarithmes tangentes*, parce que ce sont les nombres logarithmes des sinus & des tangentes qui sont à côté. Outre cela l'on a pû voir encore une Table particulière dans le Livre des Sinus, où il y a à la tête, *Table des Logarithmes pour les nombres naturels depuis l'unité jusqu'à 100000*. Or pour sçavoir à quoi servent ces Logarithmes. Je dirai qu'ils ont une propriété, qui est que par leur moyen, l'on peut résoudre tous les Problèmes de Trigonométrie, sans être obligé de faire

F.ij

de multiplication ni de division, à cause que quand ils composent les termes d'une Regle de trois : ces termes au lieu d'être en proportion géométrique, sont en proportion arithmétique. Ainsi lorsqu'on en connoît les trois premiers, l'on ajoute le second avec le troisième, pour soustraire de la somme le premier, & la difference devient le quatrième que l'on cherche. Mais voici quelques exemples pour mieux entendre ceci.

PREMIER EXEMPLE.

Fig. 176. 516. *Ayant un Triangle ADE, dont on connoît l'angle A de 30 degrez, & le côté AD de 20 toises ; l'on demande de trouver le côté DE, en se servant des Logarithmes.*

Pour le trouver, je cherche dans la Table la page au sommet de laquelle il y'a 30 degrez ; & au lieu de prendre la Tangente de la troisième colonne, je prends celle de la cinquième, qui est 976 143 94. Et comme j'ai aussi besoin du Sinus total, au lieu de prendre celui qui est divisé en 10000000 parties, je prends celui des Logarithmes, qui est divisé en 100000000 parties : & comme il faut faire une Regle pour trouver le côté DE, dont le premier terme doit être le sinus total dont je viens de parler, le second la tangente que nous venons de trouver, & le troisième la valeur du côté AD. Il faut aussi, au lieu de mettre simplement 20 toises au troisième terme, mettre à sa place le Logarithme de ce nombre, que l'on trouvera dans le premier feüillet de la Table des Logarithmes des nombres naturels à côté du nombre 20, dont le Logarithme est 13010300. Presentement il faut dire : Si le sinus total 100000000 donne 976 143 94 pour le Logarithme de la tangente de 30 degrez, combien donneront 13010300 Logarithme de 20 toises, pour le Logarithme du nombre que je cherche ; & pour le trouver j'additionne le second & le troisième terme, & de la somme j'en soustrais le premier pour avoir 10624694, qui est le Logarithme du nombre que je cherche : &

pour ſçavoir quel eſt ce nombre, j'ai recourſ à la Table des Logarithmes des nombres naturels pour chercher un Logarithme qui approche le plus de celui-ci, & j'en trouve un qui eſt un peu trop petit, qui correſpond au nombre 11, & un autre qui eſt un peu trop grand, qui correſpond au nombre 12. C'eſt pourquoi j'en cherche un qui ſoit à peu près moyen entre ces deux-là, comme eſt, par exemple, $11\frac{1}{2}$; ce qui fait voir que le côté DE eſt à peu près de 11 toiſes 3 pieds.

SECOND EXEMPLE.

§ 17. Si l'on a un triangle rectangle ABC, dont on connoît le côté AB de 16 toiſes, & le côté BC de 14, pour connoître l'angle A, il faut chercher dans la ſeconde Table le Logarithme de 16, qui eſt 12041200, & le Logarithme de 14, qui eſt 11461280; & à cauſe des triangles ſemblables ABC & ADE, l'on dira: Si 12041200 Logarithme du côté AB, donne 11461280 pour le Logarithme du côté BC, que donnera le Logarithme du côté AD, qui eſt 10000000 pour le Logarithme de la tangente DE, l'on trouvera (après avoir ajouté le ſecond & le troiſième terme, & ſouſtrait de leur ſomme le premier) que la différence eſt 99420080 pour le Logarithme de la tangente, lequel correſpond dans les Tables, à 41 degrez 12 minutes, qui eſt la valeur de l'angle A. Fig. 179.

TROISIEME EXEMPLE.

§ 18. Ayant un triangle ABC, dont on connoît l'angle A de 40 degrez, & l'angle B de 60, & le côté BC de 15 toiſes, l'on demande la valeur du côté AC. Fig. 180.

Je cherche le Logarithme du ſinus de 40 degrez, qui eſt 98080675, & le Logarithme de 60 degrez, qui eſt 99375306; & enfin dans la ſeconde Table le Logarithme du nombre 15, qui eſt 11760913: & faiſant l'analogie ordinaire, je diſ: Si le Logarithme du ſinus de

Ff iij.

l'angle A, qui est 98080675, donne 11760913 pour le Logarithme du côté BC, que donnera le Logarithme du sinus de l'angle B, qui est 99375306, pour le Logarithme du côté AC, que je trouve de 13055544; & cherchant dans la seconde Table le Logarithme qui approche le plus de celui-ci, je trouve qu'il correspond au nombre 20; ce qui fait voir que le côté AC est de 20 toises.

APPLICATION DE LA TRIGONOMETRIE
à la Pratique.

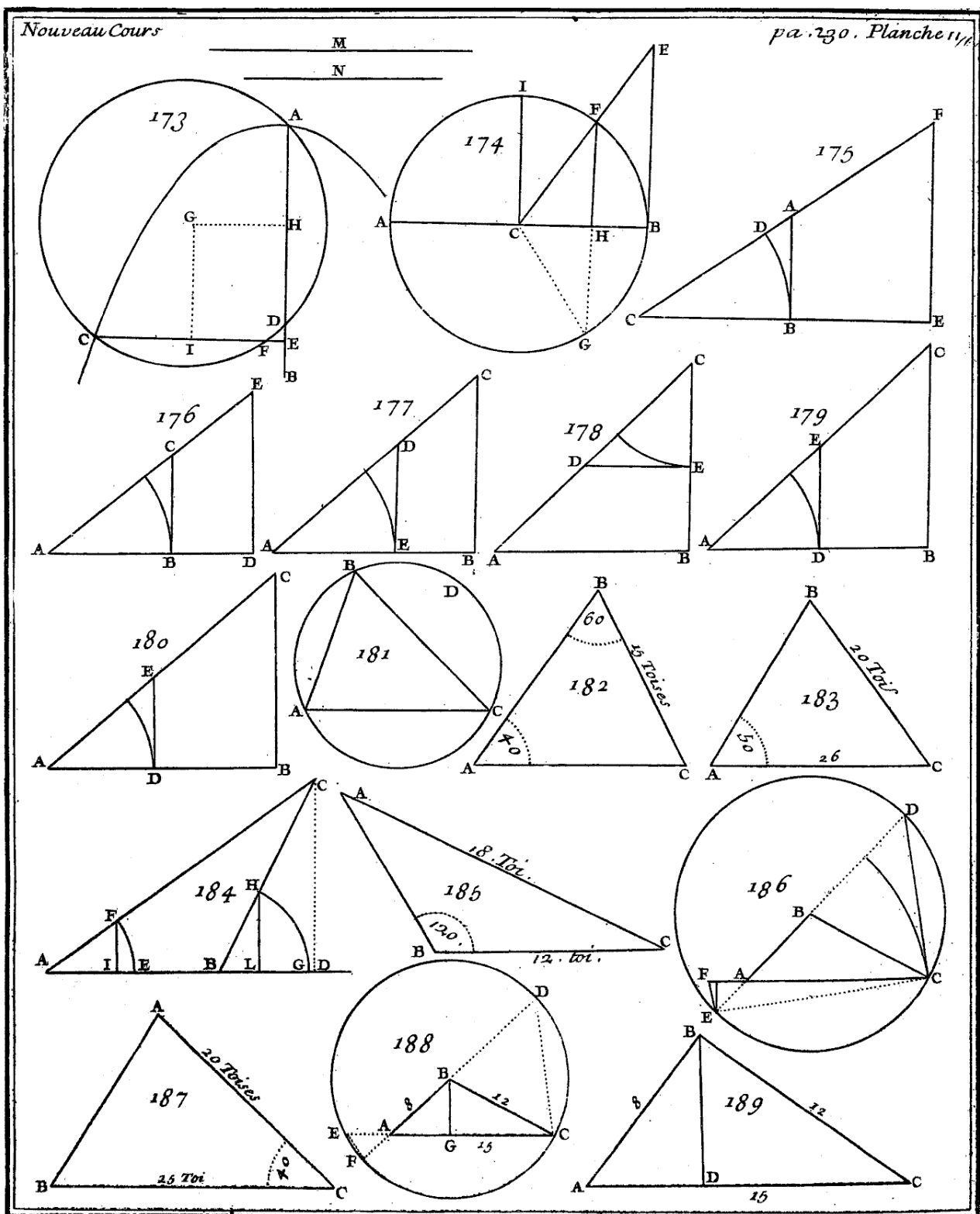
PROPOSITION XIV.

Problème.

PLAN-
CHE 12.
Fig. 190.

519. *Trouver une distance inaccessible.*

Une distance étant donnée telle que C, qui est un objet duquel on suppose qu'on ne peut pas approcher, on demande la quantité de toises qu'il peut y avoir de cet objet à l'endroit D. Pour la trouver, il faut envoyer une personne avec un jalon à l'endroit A, éloigné d'une distance proportionnée à l'intervalle qu'il peut y avoir du point D au point C. Cette distance sera, par exemple, ici de 20 toises, qui est une quantité qui doit servir de base pour faire l'opération. Après cela vous prendrez l'ouverture de l'angle formé par la base DA, & le rayon visuel DC; & pour bien prendre cet angle, il faut commencer par mettre les deux pinulles du graphometre, qui sont immobiles d'alignement avec les points D & A: après quoi vous faites trouver l'alidade de manière que vous puissiez appercevoir par les fentes des pinulles (qui sont à ses extrémités) l'objet C. Après quoi vous comptez la quantité de degrez que contient l'angle marqué sur le graphometre, c'est-à-dire, l'angle compris par le côté du graphometre, qui est d'alignement avec les points D & A, & le rayon visuel qui apperçoit l'objet C; & je suppose que c'est ici de 70 degrez. Cela étant fait, il faut poser



un autre jalon à l'endroit où étoit posé le pied du graphometre, c'est-à-dire, au point D, & puis venir à l'endroit A, pour y prendre la valeur de l'angle DAC, j'entends l'angle formé par la base, & par un second rayon visuel, qui doit observer l'objet C, & je suppose que cet angle est de 80 degrez. Cela posé, il ne s'agit plus que de connoître l'angle C, que l'on trouvera aisément en soustrayant la somme des deux angles A & D de la valeur de deux droits, & vous trouverez que cet angle est de 30 degrez. Or pour connoître le côté CD, il n'y a qu'à dire : Si le sinus de 30 degrez m'a donné 20 toises pour le côté AD, que me donnera le sinus de l'angle A de 80 degrez pour la valeur du côté CD : l'on trouvera 39 toises deux pieds pour la distance que l'on cherche.

REMARQUE.

520. Il arrive quelquefois qu'on est embarrassé de trouver une distance inaccessible, lorsqu'elle est extrêmement éloignée, comme si elle avoit deux ou trois lieues. La difficulté pour lors est d'avoir une base assez grande, qu'il faut dans ce cas-là au moins de 1000 toises. Comme il seroit fort pénible de mesurer une si longue distance, jointe à l'inégalité du terrain, & aux obstacles qu'on peut rencontrer, le parti qu'il faut prendre, c'est de se donner d'abord une petite base, par le moyen de laquelle vous pouvez en avoir une, trois ou quatre fois plus grande ; & avec cette seconde une troisième plus grande, & suffisante pour faire votre operation.

Les operations précédentes sont très-utiles pour lever des Cartes, afin de se donner des points capitaux, pour y rapporter tous les lieux qui y ont rapport ; ou bien si l'on veut lever la campagne qu'occupe une Armée, pour y marquer les Quartiers, les Lignes de circonvallation, les Postes de conséquence, enfin tout ce qui peut devenir intéressant en pareil cas.

Si on assiege une Place, & que l'on soit obligé de faire

232 NOUVEAU COURS

quelque Galerie pour établir des Fourneaux sous les angles du Chemin couvert, ou sous quelque ouvrage avancé, il faut absolument avoir recours à cette opération, afin qu'étant prévenu de la distance de l'entrée de la Galerie à l'objet vers lequel on chemine, on sçache donner à cette Galerie la longueur qu'il lui faut pour être positivement sous l'objet qu'on veut faire sauter.

PROPOSITION XV.

Problème.

Fig. 191. 521. *Trouver la distance inaccessible d'un lieu à un autre, comme de l'endroit D à l'endroit C.*

Pour faire cette opération, il faut commencer par se donner une base telle que AB, que je suppose ici de 100 toises, & de l'extrémité B prendre avec l'instrument l'ouverture de l'angle ABC, formé par la base AB, & le rayon visuel BC; & supposant cet angle de 92 degrez, du même endroit B il faut prendre aussi l'ouverture de l'angle ABD, qui sera, par exemple, de 45 degrez: & cette opération étant faite, il faut venir à l'autre extrémité A de la base AB pour y prendre l'ouverture de l'angle DAB, que je suppose ici de 98 degrez; & du même endroit prendre encore l'ouverture de l'angle DAC, qui sera, par exemple, de 50 degrez. Les angles étant connus, aussi-bien que la base AB, l'on n'aura aucune difficulté de trouver la distance DC, non plus que celle de D en A, & celle de B en C: car considérez qu'il est facile de trouver la valeur des côtes AC & BC du triangle CAB, parce que l'on connoît le côté AB de 100 toises, & l'angle B de 92 degrez, & l'angle CAB de 48; & par conséquent l'angle ACB de 40 degrez. Ces choses étant posées, pour trouver la valeur du côté CB, il n'y a qu'à dire: Si le sinus de l'angle ACB m'a donné le côté AB de 100 toises, que me donnera le sinus de l'angle CAB pour la valeur du côté CB que je cherche; & pour trouver le côté AC, il faut dire encore: Si le sinus de l'angle ACB m'a donné la

la valeur du côté AB, que me donnera le sinus de l'angle du complément de 92 degrez, qui sera celui de 88 degrez pour la valeur du côté AC, parce que l'angle ABC est obtus.

Comme on ne peut connoître la valeur du côté DC sans celle du côté DA, pour le trouver il faut dire: Si le sinus de l'angle ADB de 37 degrez m'a donné la valeur du côté AB de 100 toises, que me donnera le sinus de 45 degrez pour la valeur du côté DA, lequel étant connu, aussi-bien que le côté AC, & l'angle DAC, nous aurons deux côtés connus, & l'angle compris dans un triangle, qui pourra nous donner les deux angles inconnus; & en suivant ce qui est dit dans la prop. 11. art. 512. l'on trouvera le côté DC, qui est la distance que l'on demande.

Comme il arrive presque toujours que la campagne n'est pas marquée sur le plan des Villes que l'on assiege, & que si elle y est figurée, l'on ne peut, sans faire de grandes erreurs, se fier à la précision de ceux qui les ont levez ou copieez; l'operation précédente nous donne un excellent moyen pour orienter sur le plan par rapport à la place, la queue de la Tranchée de chaque attaque, afin de pouvoir ensuite projeter les travaux que l'on a envie de faire d'une nuit à l'autre, ou seulement les y marquer à mesure qu'on les avance, parce qu'ayant une fois un bout de parallele, l'on peut de dedans la Tranchée mesurer les Boyaux, & prendre l'ouverture des angles qui sont les retours; marquer la position des Batteries: enfin lever le plan de la Tranchée avec autant d'exatitute que s'il n'y avoit aucun obstacle.

PROPOSITION XVI.

Problème.

522. Tirer une Ligne parallele à une autre inaccessible. Fig. 192.

On demande de tirer par le point C une parallele à une ligne inaccessible AB.

Pour résoudre ce Problème, il faut commencer par se

G g

donner une base telle que CD , qui doit être, comme nous l'avons dit ailleurs, proportionnée à la distance de l'objet, afin que l'opération en soit plus juste, & nous supposons que 150 toises est la longueur qui lui convient.

Nous savons que deux lignes parallèles étant coupées par une troisième, forment les angles alternes égaux, & que par conséquent lorsque les angles alternes seront égaux, les lignes seront parallèles; d'où il s'ensuit que si l'on connoît l'angle ABC , formé par la parallèle AB , & le rayon visuel CB on n'aura qu'à faire l'angle DCE égal au précédent, pour que la ligne CE soit parallèle à la ligne AB : ainsi toute la question est réduite à trouver la valeur de l'angle ABC . Afin de la connoître, je commence du point C par prendre l'ouverture de l'angle ACB , que je trouve de 40 degréz: ensuite je viens au point D pour y prendre l'ouverture de l'angle CDB , qui est de 86 degréz; & je prends aussi l'ouverture de l'angle ADB , qui sera, par exemple, de 60 degréz. Ces choses étant connues, je fais en sorte de trouver par leur moyen la valeur des lignes CA & CB . Pour cela je cherche dans le triangle CDB la valeur du côté CB . Pour le trouver, je considère que l'angle BCD est de 80 degréz, & que l'angle CDB est de 86. D'où il s'ensuit que l'angle CBD est de 14 degréz. Cela posé, il faut dire: Si le sinus de l'angle de 14 degréz m'a donné 150, que me donnera le sinus de 86 pour la valeur du côté opposé CB .

Pour trouver le côté CA , je fais attention que l'angle CDA est de 26 degréz, & que l'angle ACD étant de 120 degréz, l'angle CAD doit être de 34 degréz. Cela étant, je dis encore: Si le sinus de l'angle CAD de 34 degréz m'a donné 150 toises pour le côté CD , que me donnera le sinus de l'angle CDA de 26 degréz pour la valeur du côté CA . Or comme nous avons dans le triangle ACB les deux côtés AC & CB de connus avec l'angle compris ACB , il s'ensuit que l'on trouvera aisément

par la proposition I. R. la valeur de l'angle ABC, dont la connoissance est la solution du Problème.

L'on est souvent obligé de mener une parallèle à une ligne inaccessible dans une infinité d'occasions, soit qu'on veuille percer des routes dans un Bois avec certaines précautions, ou soit dans les Sieges, quand on veut faire une Batterie qui soit parallèle à la face de l'ouvrage que l'on veut battre, ou quand on en veut faire un autre en écharpe, dont les feux aillent se diriger selon un angle donné avec la face.

PROPOSITION X VII.

Problème.

523. *Mesurer une hauteur inaccessible.*

Fig. 193

Pour mesurer la hauteur AB d'une Tour, il faut se donner une base telle que EB, qu'il faut mesurer exactement depuis le point du milieu B de la Tour jusqu'à l'endroit E, qui est le lieu où l'on aura planté le graphomètre; & supposant que cette base soit de 25 toises, l'on prendra l'ouverture de l'angle ACD formée par deux rayons visuels, dont le premier CD doit être parallèle à l'horison, & le second CA doit aboutir au sommet de la Tour; & supposant que l'angle soit de 35 degrés, l'on cherchera dans le triangle ACD le côté AD, en disant: Comme le sinus total est à la tangente de l'angle C, ainsi le côté CD de 25 toises est au côté DA, que l'on trouvera de 17 toises 3 pieds: à quoi ajoutant la hauteur DB ou CE du pied de l'instrument, qui est ordinairement de 4 pieds, on trouvera que la hauteur AB de la Tour est de 18 toises 1 pied.

Mais si l'on avoit à prendre la hauteur d'une Tour ou d'une éminence qui fût inaccessible, comme on le voit dans la Fig. 194. il faudroit de l'endroit F prendre l'ouverture de l'angle ADG, formée par deux rayons; & supposant qu'on a trouvé cet angle de 50 degrés, il faudra se reculer sur l'alignement des points D & G jusqu'à l'endroit C, pour avoir une base EF d'une longueur suffi-

Gg ij

fante, pour que l'angle CAD ne soit pas trop aigu; & cette base ayant été trouvée de 40 toises, l'on prendra encore l'ouverture de l'angle ACG, qui sera, par exemple, de 30 degrez. Or comme l'angle ADG est égal aux deux autres intérieurs opposés du triangle CAD, la différence de cet angle, qui est de 50 degrez à l'angle ACD, qui est de 30 degrez, sera la valeur de l'angle CAD, que l'on trouvera de 20 degrez. Or comme dans le triangle rectangle ADG nous avons besoin de connoître le côté DA pour connoître le côté AG, l'on dira: Si le sinus de l'angle CAD de 20 degrez m'a donné 40 toises pour le côté CD, que donnera le sinus de l'angle ACD de 30 degrez pour le côté AD, que l'on trouvera de 63 toises 2 pieds.

Pour donc trouver le côté AG, je dis: Comme la Secante de l'angle ADG est à sa tangente, ainsi le côté DA de 63 toises 2 pieds est au côté AG, que l'on trouvera de 48 toises 3 pieds: à quoi il ne faut plus qu'ajouter la hauteur du pied de l'instrument, pour avoir la ligne AB.

*MANIERE DE LEVER UNE CARTE
par le moyen de la Trigonométrie.*

Fig. 195.

§ 24. L'on doit distinguer deux sortes de Cartes, les unes sont des Cartes generales, & les autres des Cartes particulieres; les dernieres sont celles que l'on leve avec beaucoup d'attention, n'oubliant rien de tout ce qui peut avoir lieu dans la Carte, tel que la grandeur & la figure des Villages, des Bourgs & des Villes, les Bois, les Ponts, les Rivières, les Chemins, les Fontaines, les Croix, Chapelles, Justices, &c.

Pour les Cartes generales, l'on ne prend que la position des lieux les plus considerables, & la figure des grands Chemins, omettant quantité de choses, qui ne pourroient se placer sur ces sortes de Cartes, parce qu'elles sont ordinairement dressées sur de petites échelles. Telles sont les Cartes des Royaumes & des grandes Provinces. Cependant l'on peut dire que l'on s'y prend de

la même façon pour lever les Cartes particulieres & generales, parce que pour les unes & les autres l'on commence par faire un Caneva, qui n'est autre chose que la grandeur de la Carte déterminée avec les principales positions, après quoi l'on entre dans le détail de chaque chose, comme nous le ferons voir après avoir enseigné la maniere de prendre les positions qui doivent faire les principaux points de la Carte.

Si l'on vouloit, par exemple, lever la Carte des lieux marquez par les lettres de cette figure, l'on voit que l'objet qu'on se propose n'est autre chose que de placer sur le papier les différens endroits qui sont ici; en sorte que la distance qu'il y a d'un lieu à un autre ait le même rapport sur la Carte que sur le Terrain: ce qui est proprement faire une réduction de grand en petit. Or comme ces réductions ne peuvent se faire que par les triangles semblables, il s'ensuit qu'en levant la Carte d'un Pays par le moyen de la Trigonométrie, il ne s'agit que de trouver la valeur des angles & des côtez qui sont formez par la distance des lieux. Cela étant posé, je commence par établir une base la plus grande qu'il est possible, afin que les lieux qui doivent s'y rapporter soient plus exactement levez: pour cela il faut éviter autant qu'il est possible d'avoir des angles trop obtus & trop aigus. Ayant donc choisi les points de station A & B, je commence par en chercher la distance de la maniere que nous l'avons enseigné dans la seconde proposition: l'ayant trouvée, je viens à l'endroit B, pour y prendre l'ouverture des angles formez par la base AB, & les différens endroits que je me propose de lever. Pour cela je prends l'ouverture de l'angle ABC, de l'angle ABD, de l'angle ABE, je passe le point F, parce que l'angle qu'il formeroit avec la base seroit trop obtus, & qu'on auroit trop de peine à recouper le rayon qui seroit tiré de B en F: je continue à prendre l'ouverture des angles ABG, ABH, ABI, & ABK: je passe aussi le point L, parce que l'angle formé par la base AB, & le rayon de B en L seroit trop aigu.

G g üj

Présentement il ne s'agit plus, pour avoir la position des endroits qu'on voit marquez ci-dessus, que de recouper les rayons qu'on vient de tirer. Pour cela je viens au point A, pour y prendre l'ouverture de l'angle BAE, qui me donnera le point E, parce que dans le triangle ABE je connois le côté AB, & la valeur des angles EAB & ABE, par le moyen desquels je trouverai les distances AE & BE. Pour les autres points, je continue à recouper les rayons que j'ai tirez dans la premiere operation, en prenant l'ouverture des angles BAD, BAC, BAG, BAH, BAI, BAK, comme tous les triangles formez par les rayons, ont la base AB pour côté commun. Il s'ensuit qu'on pourra en trouver la longueur, puisqu'il n'y a point de triangle dans lequel on ne connoisse deux angles & un côté. Comme nous avons passé deux endroits, pour les raisons que nous avons dites, il faut faire voir comment on en peut trouver la position, sans se servir de la base AB: pour donc trouver le point F, je prends la distance BE ou BG pour base, ou toute autre qui pourroit mieux convenir; mais je choisis ici le côté BE, & du point B je prends l'ouverture de l'angle EBF, & du point E l'ouverture de l'angle BEF, qui me donne le point F. Je fais la même chose pour trouver le point L, & même le point M, que je suppose n'avoir pû prendre dans les opérations précédentes; c'est-à-dire, je choisis la base AC, & du point A je prends les ouvertures des angles CAM & CAL, & du point C je prends encore l'ouverture des angles ACL & ACM.

Après avoir trouvé la valeur de tous les côtes du triangle qui sont ici, il faut les rapporter sur le papier, en donnant à chaque ligne la valeur qu'elle doit avoir; ce qui se fera sans difficulté par le moyen d'une échelle; & après que toutes ces positions seront rapportées bien exactement, l'on pourra, en suivant la même méthode, continuer à lever les lieux qu'on aura pû découvrir dans les premieres opérations: ce qui sera bien aisé, puisqu'on aura de toutes parts des bases, dont la valeur sera con-

que. Par exemple, pour lever les objets au-delà des points C & D, on pourra prendre la distance CD pour base, d'un autre côté on pourra prendre la ligne IH: enfin sur la gauche la distance LK, sur la droite toute autre ligne que l'on choisira de même.

DES ATTENTIONS QU'IL FAUT FAIRE
pour lever une Carte particulière.

525. Quand on veut lever une Carte d'une façon à ne rien omettre de toutes les particularitez qui entrent dans le détail d'une Carte, ceux qui conduisent le travail doivent envoyer des personnes entendues dans les Villages pour lever leurs situations, leurs figures, la forme des Rues, la position des Fontaines, s'il s'y en trouve, des Carrieres, des Montagnes, Colines & Vallons, qui peuvent se rencontrer dans les environs. On réduit chaque Village sur l'échelle de la Carte; & pour les rapporter on a soin que l'Eglise soit positivement au point qui est marqué sur le Caneva, parce que ces points sont ordinairement des Clochers & des Tours. Pour les Villes, on fait en sorte d'en avoir les plans, qu'on réduit à l'échelle de la Carte. Quand il se rencontre des Bois ou des Forêts, l'on commence par lever exactement les Villages & les Hameaux qui sont les plus proches, pour avoir des bases, qui ne sont autre chose que la distance d'un lieu à un autre, desquels on forme une espece de polygone, qui entoure le Bois. Après quoi il est aisé de rapporter à ce polygone un nombre de points, qui marquent les limites du Bois, pour en tracer ensuite à la vûe la figure extérieure, quand il ne s'agira que de quelque sinuosité peu considerable. Après cela il faut entrer dans le Bois, pour y considerer les principaux Chemins, les ruisseaux, les Fontaines, les Maisons & les Châteaux qui pourroient s'y rencontrer. Toutes ces choses doivent être levées avec le plus de précision qu'il est possible. Pour cela l'on se donne des points de position, que l'on prend

249 NOUVEAU COURS

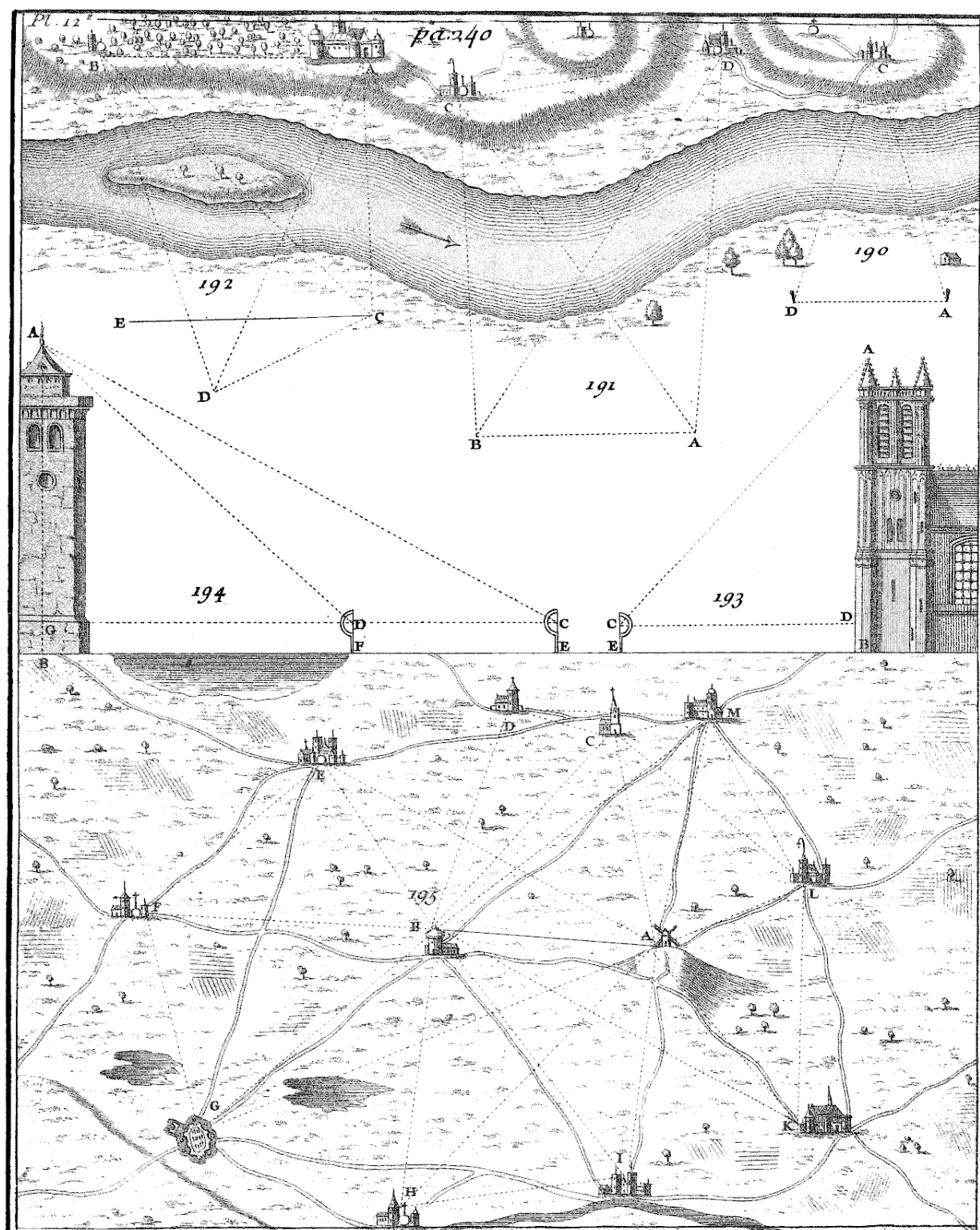
dans le Bois, par des opérations que l'on fait sur quelque éminence hors du Bois. Ces points de position sont ordinairement des Clochers, des Châteaux, ou bien quelques grands Arbres, qui se font distinguer au-dessus des autres : & lorsqu'on est une fois parvenu à la connoissance de quelqu'un de ces points, l'on peut sans aucune difficulté orienter les differens endroits qui se trouvent dans le bois, à l'aide des positions connues.

APPLICATION DE LA TRIGONOMETRIE à la Fortification.

PLAN-
CHE 13.
Fig. 196.

§ 26. Quand on veut tracer une Fortification sur le terrain, il est absolument nécessaire de connoître toutes les lignes & les angles qui en composent le projet : & comme cette connoissance doit être la plus exacte qu'il est possible, il ne conviendrait pas que l'on se servît du compas pour trouver avec l'échelle les lignes que l'on ne connoît pas, non plus que du rapporteur pour trouver la valeur des angles, puisque l'on peut faire des erreurs insensibles sur le papier, qui deviendroient de conséquence sur le terrain. C'est pourquoi il est à propos d'avoir recours à la Trigonométrie, pour connoître par le moyen des lignes que l'on connoît, celles que l'on ne connoît pas : & comme dans la Fortification, selon la méthode de M. de Vauban, l'on connoît la base de 180 toises, la perpendiculaire CF de 30, & la face AD de 50. Voici de quelle maniere on pourra connoître l'angle de l'épaule, l'angle flanquant, le flanc & la courtine; supposant qu'on est prévenu que la ligne DH est égale à la ligne DE.

Il faut avant toutes choses chercher la valeur de l'angle FAC, en disant : Comme le côté AC de 90 toises est au côté CF de 30, ainsi le sinus total AI est à la tangente ID, qui étant trouvé, l'on verra qu'elle correspond à un angle de 18 degrez 26 minutes, qui est la valeur de l'angle FAC ; par conséquent celle de l'angle HDE, à cause



cause des parallèles AB & DE qui aboutissent sur AH. Or comme nous avons besoin dans le triangle DAI du côté AI, on n'aura qu'à dire (pour le connoître) Comme la secante de l'angle DAI est au sinus total, ainsi le côté AD de 50 toises est au côté AI, que l'on trouvera de 47 toises 2 pieds, qu'on n'aura qu'à retrancher de la ligne AC de 90 toises pour avoir la ligne IC de 42 toises 4 pieds; & comme cette ligne est moitié du côté DE, on verra que ce même côté est de 85 toises 2 pieds.

Comme le triangle HDE est isoscèle, & que l'on connoît l'angle du sommet avec les deux côtes qui le comprennent, on n'aura qu'à dire (pour avoir le flanc HE) Si le sinus de l'angle DHE m'a donné le côté DE, que me donnera le sinus de l'angle HDE pour le flanc ou côté HE, que l'on trouvera de 27 toises 2 pieds.

Comme les angles de la base du triangle isoscèle sont chacun de 80 degré & 47 minutes, puisque l'angle du sommet est de 18 degré 26 minutes; il s'ensuit, à cause des angles alternes formés par les lignes parallèles GH & DE, que si de l'angle HED on retranche l'angle GED de 18 degré 26 minutes, il restera 62 degré 21 minutes pour l'angle GEH, dont le supplément 2180. qui est l'angle de l'épaule HEB est de 117 degré 39 minutes; & si l'on ajoute au contraire à l'angle DHE, l'angle GHD, qui est aussi de 18 degré 26 minutes, l'on trouvera que l'angle flancuant GHE est de 99 degré 13 minutes.

Or comme du triangle GHE l'on connoît les angles & le côté HE, l'on n'aura (pour connoître la courtine) qu'à dire: Comme le sinus de l'angle HGE est au côté HE, ainsi le sinus de l'angle GEH est au côté GH, que l'on trouvera de 76 toises 3 pieds.

Pour connoître l'angle flancué, considérez qu'il est plus petit que l'angle de la circonférence de deux fois l'angle DAI, qui est de 18 degré 26 minutes; & comme l'on suppose qu'il s'agit ici d'un exagone, dont l'angle de la circonférence est de 120 degré, l'on n'aura

H h

qu'à retrancher 36 degrez 52 minutes de 120 degrez pour avoir l'angle flanqué, qui fera de 83 degrez 8 minutes.

L'on pourra calculer de même tous les autres fronts de Fortification, dont le côté extérieur auroit plus ou moins de 180 toises, parce que les proportions se trouveront toujours. Ainsi quand il s'agira de calculer les lignes & les angles dont un Ouvrage à corne, ou un Ouvrage à couronne est composé, il suffira de connoître le côté extérieur, la perpendiculaire, & la place d'un Bastion pour connoître le reste : c'est pourquoi cette pratique peut avoir également lieu dans la Fortification irrégulière comme dans la régulière ; car soit que l'on fasse les flancs perpendiculaires sur la ligne de défense, ou sur la courtine, selon les cas où l'on seroit obligé de suivre une méthode plutôt qu'une autre, l'on trouvera le calcul également aisé, pourvû que l'on ait seulement quelques grandeurs connues, par le moyen desquelles on puisse operer.

Fig. 197.

527. De tout ce qui regarde le calcul d'une Fortification, je n'ai point trouvé de partie plus difficile à calculer que la valeur de la face de la demi-Lune ; & l'on peut même regarder ce cas-là comme un petit Problème de Fortification : c'est pourquoi je crois qu'on sera bien aise d'en voir la solution ; car quoiqu'elle paroisse peu de chose, elle ne laisseroit pas que d'embarrasser un Commencant : ainsi pour bien sçavoir de quoi il est question, voici comme on suppose que la demi-Lune a été tracée.

Après avoir pris le point E sur la face d'un Bastion à 5 toises au-dessus de l'angle de l'épaule, l'on a du point C comme centre, & de l'intervalle CE, décrit un arc, qui venant rencontrer la capitale, a donné le point F pour la pointe de la demi-Lune ; ensuite l'on a pris le point D à trois toises au-dessus de l'angle de l'épaule, & l'on a tiré la ligne FD : après quoi l'on a fait le fossé de 20 toises sur le prolongement de la face à l'endroit AH, & l'on a tiré la ligne HK, qui détermine la longueur IE

de la face de la demi-Lune, dont il s'agit de trouver la valeur.

Comme il seroit facile de trouver la longueur IF, si l'on connoissoit la valeur des lignes DI & DF, nous allons voir comment on peut y parvenir, en tirant les lignes DH, DK, CF, & en connoissant les parties du corps de la Place que nous venons de trouver. Pour y arriver, je cherche dans le triangle rectangle CLF la valeur de l'angle LCF, par le moyen des deux côtes LC & CF, qui me sont connus (puisque l'un vaut la moitié de la Courtine, & que l'autre est égal à la ligne CE) en disant : Comme le côté LC est au côté CF ; ainsi le sinus total est à la secante, qui donnera 65 degrés pour l'angle LCF, duquel ayant retranché l'angle MCD de 18 degrés 26 minutes, restera 46 degrés 34 minutes pour l'angle DCF.

Or comme le côté DC est de 88 toises 2 pieds, & le côté CF de 90 toises 2 pieds, & que l'on connoît l'angle qu'ils comprennent, on trouvera par l'analogie ordinaire que le côté DF est de 70 toises 2 pieds, & que l'angle CDF est de 68 degrés 15 minutes.

Comme nous avons besoin de connoître l'angle CDK, aussi-bien que le côté DK, considérez que dans le triangle CDK, l'on connoît les deux côtes DC & CK avec l'angle qu'ils comprennent, & que par conséquent il sera facile de trouver ce que l'on cherche. Aussi verra-t-on que CDK est de 17 degrés 49 minutes, & le côté DK de 88 toises.

Or comme il faut dans le triangle HDK connoître outre le côté DK, le côté HD avec l'angle qu'ils comprennent pour parvenir à la solution du Problème, considérez que dans le triangle AHD l'on connoît le côté AD de 47 toises, & le côté AH de 20, & qu'on connoîtra l'angle HAD, quand on sçaura la valeur de l'angle flanqué, puisqu'il en est la différence avec deux droits ; & comme l'on suppose que c'est ici un exagone, l'angle flanqué sera par conséquent de 83 degrés 8 minutes : ainsi

H h ij

244 NOUVEAU COURS

l'angle DAH sera de 96 degrez 52 minutes ; & en faisant la règle ordinaire , l'on trouvera * que le côté HD est de 53 toises 1 pied , & que l'angle ADH est de 21 degrez 59 minutes.

Presentement si l'on retranche de 180 degrez , la somme des deux angles CDK & ADH , il restera 140 degrez 12 minutes pour la valeur de l'angle HDK.

Or comme l'on connoît dans le triangle HDK deux côtés & l'angle compris , on trouvera par conséquent * les deux autres angles , particulièrement l'angle DKI , dont nous avons besoin , qui est de 14 degrez 4 minutes ; & comme il nous faut aussi l'angle FDK , on trouvera qu'il est de 50 degrez 26 minutes , si l'on retranche de l'angle FDC l'angle KDC : mais comme ceci nous donne la valeur de l'angle DIK , qui est de 115 degrez 30 minutes , l'on pourra donc dire pour trouver le côté DI : Si le sinus du supplément de l'angle DIK a donné le côté DK , que donnera le sinus de l'angle DKI pour la valeur du côté DI , que l'on trouvera de 23 toises 4 pieds , qu'on n'aura qu'à retrancher de la ligne DF , qui vaut , comme nous l'avons vû , 70 toises 2 pieds , l'on trouvera que la face IF de la demi-Lune est de 46 toises 4 pieds.

528. Pour trouver la demi-gorge IN de la demi-Lune , faites attention que dans le triangle ODF , l'on connoît les deux angles FOD , & ODF , & que par conséquent on connoît l'angle OFD , qui se trouve de 40 degrez 11 minutes ; & comme cet angle se trouve aussi dans le triangle INF , dont on connoît l'angle NIF , puisqu'il est supplément de l'angle DIK , il s'ensuit qu'ayant deux angles dans le triangle IFN , l'on connoît le troisième INF ; par conséquent l'on pourra dire : Si le sinus de l'angle INF de 75 degrez 19 minutes a donné le côté IF , que donnera le sinus de l'angle IFN pour le côté IN , que l'on trouvera de .

Enfin si pour tracer la demi-Lune , l'on avoit besoin de la distance du milieu L de la courtine au point F , il feroit

facile de la trouver, en disant : comme le sinus total est à la tangente de l'angle LCF, ainsi le côté CL est au côté LF, que l'on trouvera de

Je ne parle point de la manière de calculer les lignes, tant droites que courbes, qui forment la Contrescarpe, parce que c'est une chose qui m'a paru fort aisée, & que les Commençans pourront faire d'eux-mêmes. Je ne dis rien non plus de la manière de calculer une Fortification, dont les Bastions seroient à orillons, pour leur laisser le plaisir de faire quelque chose par eux-mêmes, ayant mieux aimé leur donner, au lieu de cela, une idée de la façon de tracer une Fortification sur le terrain.

*MANIERE DE TRACER LES FORTIFICATIONS
sur le Terrain.*

529. Après que l'on a fait le calcul des lignes & des angles Fig. 199. qui composent la Fortification, on commence, pour la tracer sur le terrain, par planter des piquets à tous les angles qui doivent former le polygone : ensuite l'on s'attache à tracer la Fortification de chaque front, jusqu'à ce que tout soit achevé.

Si l'on suppose que les points A & B représentent deux endroits auxquels l'on a planté des piquets, qui déterminent la longueur AB d'un des côtés du polygone, qui sera, par exemple, de 180 toises. Voici comment il faut s'y prendre pour tracer le front qui correspond à ses côtés.

Ayant marqué sur un plan le projet de la Fortification avec la valeur des lignes & des angles, comme on le voit dans la Fig. 198. l'on commencera par poser le pied du graphomètre à l'endroit du piquet A : l'on fera avec la base AB, & les pinulles immobiles, un angle EAB de 18 degrez 26 minutes ; & ayant fait porter un piquet sur l'alignement du rayon visuel AE, on déterminera, en toisant fort juste, une longueur comme AC de 50 toises, qui donnera une des faces du premier Bastion. Après quoi

146 NOUVEAU COURS

l'on portera l'instrument à l'extrémité C, & l'on fera avec la ligne CA un angle ACD de 117 degrés 39 minutes, qui fera l'angle de l'épaule, & l'on prendra dans la longueur CD une quantité de 27 toises 2 pieds, en commençant du point C pour avoir le flanc CD.

L'on fera la même opération au piquet B, comme on vient de faire à l'autre; & après avoir tracé, ou seulement planté des piquets aux points F & E, l'on se portera au point E pour voir s'ils se trouvent de même alignement que les deux C & A, afin de remarquer si la face AC se termine précisément dans l'angle flancant; & l'on fera la même chose pour être assuré de la justesse de la face BF: ensuite l'on n'aura plus qu'à tracer avec un cordeau la Courtine DE, aussi-bien que les faces & les flancs des Bastions; & pour voir si on ne s'est pas trompé en traçant les faces & les flancs, on mesurera la Courtine, afin de la vérifier avec le calcul.

AUTRE MANIERE DE TRACER *en se servant de la Planchette.*

Fig. 128.
129.

530. Comme on n'est pas toujours à portée d'avoir des instrumens pour tracer des Ouvrages, voici une maniere par laquelle on peut s'en passer, n'étant point nécessaire de connoître la valeur des angles pour tracer une Fortification.

Il faut faire sur une feuille de papier avec une échelle la plus grande que l'on pourra les Ouvrages du front que l'on veut tracer; ensuite l'appliquer sur la Planchette avec de la cire d'Espagne, de façon que le papier ne fasse aucun pli; & supposant que le quarré ST représente la Planchette avec le plan. Voici comme on s'en servira.

Ayant une règle avec deux pinûlles, il faut porter la Planchette sur son point à l'endroit du piquet A, & puis mettre le bord de la règle le long de la ligne LM, & disposer la Planchette de maniere que la règle dans cette

situation , se trouve d'alignement avec les deux piquets A & B , & prendre garde de ne point faire vaciller la Planchette : il faut ensuite mettre la règle le long de la face LN, & bornoyant le long de la règle, l'on mettra un piquet sur l'alignement : après quoi l'on n'aura qu'à marquer la longueur de la face, comme on a fait ci-devant , & mettre un piquet à l'extrémité C.

Il faut après cela poser la Planchette au point C , & mettre avec la règle la ligne LN d'alignement avec la face CA, & puis l'on changera la règle pour la mettre le long de la ligne NO, pour déterminer l'ouverture de l'angle ACD, qui doit être la même que celle de l'angle LNO, afin de marquer la longueur du flanc CD ; & si l'on vient à l'endroit B , pour y tracer , comme ci-devant , la face MP, & le flanc PQ ; l'on plantera les piquets F & E, qui acheveront de donner les lignes & les angles de la Fortification.

APPLICATION DE LA TRIGONOMETRIE à la conduite des Galeries de Mines.

§ 31. Les Mines étant devenues d'un grand usage pour l'attaque & la défense des Places , il semble qu'il eût à propos de faire voir ici de quelle façon la Trigonométrie peut y avoir part, soit pour l'utilité des Assiegeans ou des Assiegez.

Les Assiegeans se servent des Mines, comme nous l'avons déjà dit , pour se faire un logement sur les Glacis des Chemins couverts , ou pour se loger dans quelque Ouvrage ; & les Assiegez s'en servent pour renverser les Batteries ou les Logemens de l'Ennemi , qui sont le plus à portée de la Contrescarpe. Mais comme l'Assiegeant , aussi-bien que l'Assiégué , pour s'enfoncer autant que la ligne de moindre résistance * le demande, font ordinairement

* Les Mineurs appellent ; Ligne de moindre résistance , la perpendiculaire qui est au-dessus du Fourneau qui marque la hauteur des terres que la Mine doit enlever.

Fig. 200.

rement un puits ou des degrez pour percer la Galerie, il arrive quelquefois qu'ils n'ont point fait deux toises d'ouvrages, qu'ils rencontrent un obstacle, comme de la pierre fort dure, ou une source qui les empêche d'avancer en ligne droite. Dans ce cas la pratique ordinaire du Mineur est de se détourner, en faisant un retour à angle droit sur la droite ou sur la gauche, pour se remettre ensuite dans son chemin. Par exemple, s'il part de l'endroit A pour aller vers B, & qu'étant arrivé à l'endroit D, il rencontre un obstacle C, il fait le retour DE de la longueur qu'il juge nécessaire, pour ne rien trouver qui l'embarrasse; ensuite il continue de cheminer en droiture par la Galerie EF, au bout de laquelle il fait encore un retour FG égal au précédent, pour faire le reste de la Galerie GB sur l'alignement A. Mais comme tous ces retours demandent beaucoup de tems & de travail, & que d'ailleurs ils empêchent que l'air ne circule comme il faut dans la Galerie, voici par la Trigonométrie comme on peut abréger le chemin.

Fig. 201.

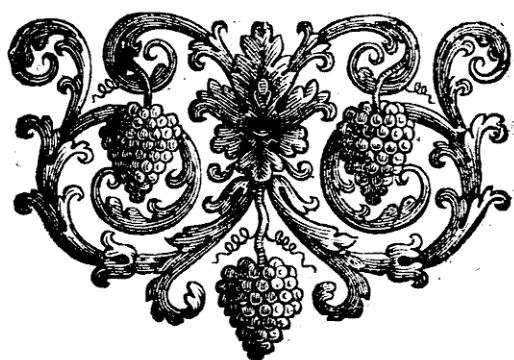
Supposant qu'étant parvenu de O en H, on ait rencontré un obstacle T, il faut se détourner à angle droit d'une longueur HI, la plus courte qu'il sera possible, & voir la différence du chemin que l'on a fait avec celui qu'on a à faire pour avoir la longueur de la ligne HK, qui va se terminer au point K, où l'on doit établir le Fourneau. Or comme l'on a le triangle rectangle HIK, dont l'hypoténuse IK est la longueur que doit avoir la Galerie qui reste à faire pour aller de I en K, on trouvera cette longueur, aussi-bien que l'angle HIK par la Trigonométrie, parce que l'on a dans le triangle rectangle les deux côtes HI & HK de connus. Presentement il ne s'agit plus que de tracer sur le terrain l'angle HIK d'autant de degrez qu'on en aura trouvé par le calcul; ce que l'on pourra faire aisément, en appliquant sur une grande équerre brisée le compas de proportion, pour que les deux bras de l'équerre fassent un angle d'autant de degrez qu'il sera nécessaire.

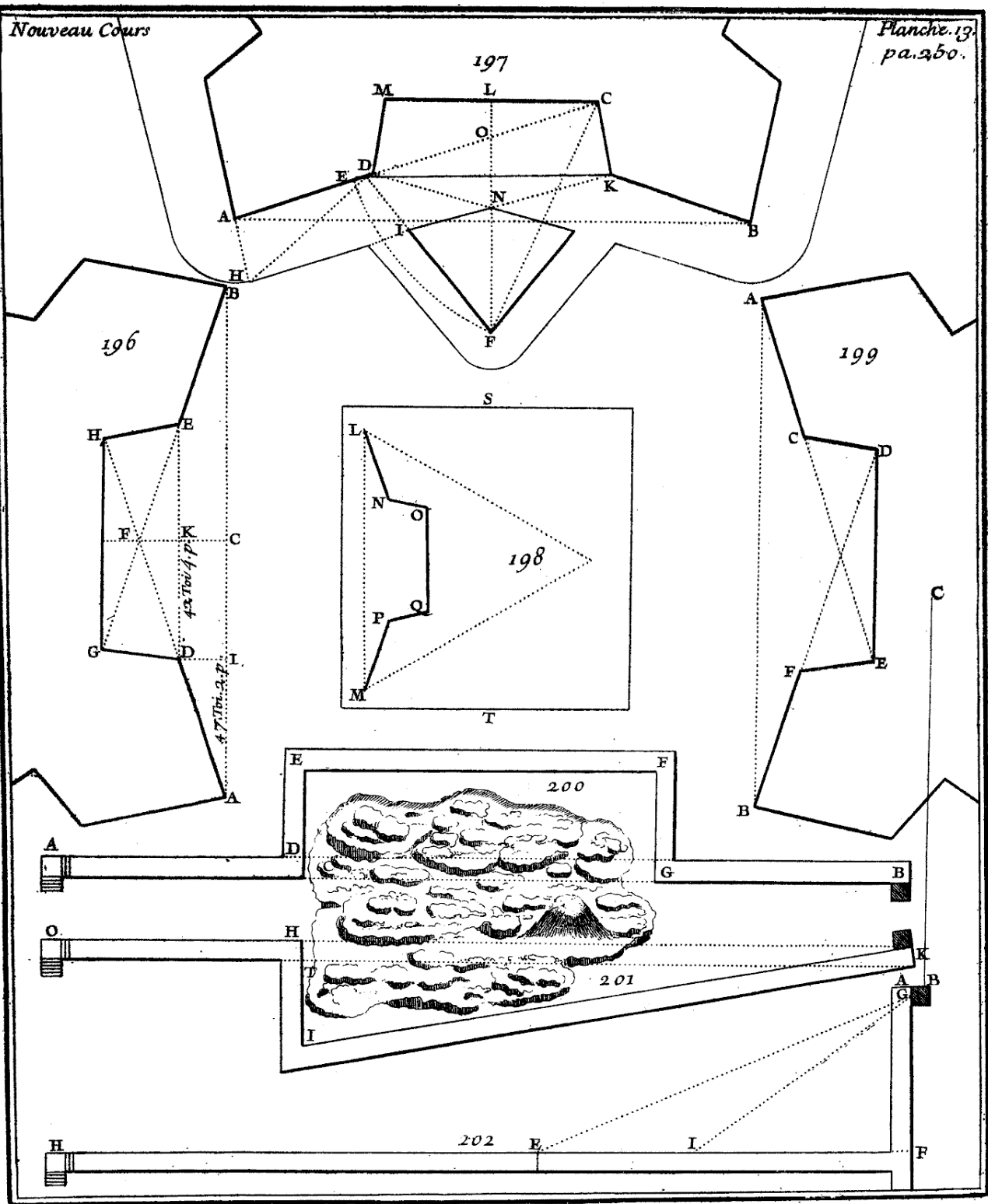
532. Les Fourneaux que l'on fait pour loger les Poudres destinées à faire jouer une Mine, ne se pratiquent pas toujours à l'extrémité de la Galerie, parce que la même Galerie aboutit presque toujours à plusieurs Fourneaux que l'on sépare par des autres petites Galeries que l'on appelle *Rameaux*; par exemple, si l'on a une Galerie HF, au bout de laquelle est un Rameau FA, qui aboutit à un Fourneau G. Les Mineurs après avoir chargé le Fourneau, le ferment par de gros madriers bien étançonnez, ils remplissent le Rameau AF, & une partie de la Galerie FH de terres, de pierres, &c. afin que la poudre ne trouve pas un foible du côté de la Galerie, par lequel elle feroit tout son effet. Or pour faire en sorte que la poudre agisse en haut, il faut que la ligne de moindre résistance BC soit plus petite que toute autre ligne, qui seroit tirée du point G à l'entour du Fourneau: ainsi si la Galerie n'étoit bourrée que jusqu'au point I, & que la ligne GI fût plus petite que CB, la mine au lieu de faire un bon effet, souffleroit du côté de la Galerie, & n'agiroit que fort peu au dehors. Or pour trouver le point E en sorte que GE soit égal à CB, considérez que l'on a le triangle rectangle GFE, dont le côté GF est connu, puisqu'il est la longueur du Rameau que nous supposons de 8 pieds; le côté GE sera aussi connu, puisqu'il est égal à la ligne de moindre résistance CB, que nous supposons de 24. pieds: c'est pourquoi l'on pourra connoître le côté FE que l'on demande.

Cependant comme on peut se passer de la Trigonométrie, j'aimerois mieux en pareil cas quarrer le côté GE pour en soustraire le carré du côté FG, & extraire la racine quarrée du reste, que l'on trouvera de 22. pieds pour la longueur du côté FE; ainsi il faudra bourrer 22. pieds de la Galerie. Mais comme les terres rapportées dans la Galerie ne résisteront jamais autant que les terres vierges, l'on aura soin (pour que la poudre ne fasse pas son effet du côté de la Galerie) d'en bourrer 4 ou 5 pieds plus qu'il ne faut.

A V E R T I S S E M E N T.

J'aurois pû m'étendre davantage sur l'application de la Trigonométrie au Toisé des lignes d'une Fortification ; mais la brieveté que je me suis proposée dans cet Ouvrage , & la réflexion que j'ai faite que cette application appartenoit plutôt à un Traité complet de Fortifications qu'à mon sujet , ne m'ont pas permis d'en parler plus au long.







NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

TROISIÈME PARTIE.

Où l'on donne la *Theorie & la Pratique du Nivellement.*

DEFINITIONS.

I.

533. **L**'On dit que deux points sont de *niveau*, lorsqu'ils sont également éloignés du centre de la Terre. PLAN:
CHE 14.
Fig. 203.

534. De sorte qu'une ligne qui a tous ses points également éloignés du centre de la Terre, est appelée *Ligne du vrai niveau*, qui ne peut être qu'une ligne courbe.

535. L'on peut donc dire que la superficie des Lacs, des Etangs, & de toutes les Eaux qui ne sont guères agitées, renferment une infinité des points de niveau, puisqu'ils sont tous également éloignés du centre de la Terre.

II.

536. *Ligne de niveau apparent*, est une ligne telle que BD, tangente au cercle de la Terre, & par conséquent perpendiculaire au demi-diamètre AB; cette ligne est nommée, *Ligne de niveau apparent*, parce que ses extrémités B & D ne sont pas également éloignées du centre de la Terre: ainsi toute ligne parallèle à l'horizon, & qui étant prolongée par une de ses extrémités, s'écarte de la superficie de la Terre, comme une tangente s'écarte de

Ii ij

la circonférence d'un cercle est une ligne de niveau apparent.

Comme le point B est de niveau avec le point C, puisqu'ils sont également éloignés du centre A de la Terre, l'on voit qu'il s'en faut toute la ligne CD, que le point B ne soit de niveau avec le point D, l'on peut donc dire que la ligne CD est la *différence du niveau apparent au-dessus du vrai*.

537. Quand une ligne de niveau apparent n'a pas plus de 100 ou 150 toises, il s'en faut si peu que ses extrémités ne soient également éloignées du centre de la Terre qu'on peut la regarder comme étant parfaitement de niveau; mais si elle surpasse cette longueur, il faut avoir égard à la différence du niveau apparent au-dessus du vrai, comme nous le ferons voir en son lieu.

III.

Quand on veut niveler deux endroits pour sçavoir de combien l'un est plus élevé que l'autre, ces deux endroits sont nommez *Termes*, & pour lors l'endroit par où l'on commence le Nivellement, est nommé *premier Terme*, & celui où se va terminer la ligne de niveau apparent, est nommé le *second Terme*.

CHAPITRE I.

Où l'on donne l'usage du Niveau d'eau.

Fig. 204. 538. **L**A principale pièce du Niveau d'eau est un tuyau AB de 5 ou 6 pieds de long, recourbé par ses extrémités C & D; ce tuyau peut avoir un pouce de diamètre, aux extrémités sont deux bouteilles FC & GD, qui sont le principal du Niveau: ces bouteilles, pour être d'un bon usage, doivent être d'un verre fort blanc, bien clair & transparent, faites exprès pour être plus commodes; car les deux cercles F & G, qui ont environ trois

pouces de diamètre, sont proprement les culs de ces bouteilles, dans le milieu desquels il y a un trou circulaire d'environ un pouce : ces bouteilles, qui ont 5 pouces de hauteur, ont un petit goulot, dont la grosseur est plus petite que celle du tuyau, parce qu'elles doivent être maîtiquées dedans aux extrémités C & D : dans le milieu du tuyau AB est une virole avec un genou, qui répond à un bâton MN de 4 pieds, de sorte que le Niveau étant posé à un endroit, on le peut faire tourner en tous sens, comme sur un pivot sans bouger le pied.

Pour se servir de cet instrument, l'on verse de l'eau dans l'une des bouteilles, qui va aussi-tôt se communiquer dans l'autre, à cause du tuyau qui est ouvert par les deux bouts ; & quand les bouteilles ont de l'eau environ jusques aux deux tiers, l'eau donne deux surfaces H & I, qui sont parfaitement de niveau. Cela posé, si l'on veut sçavoir de combien le Terme Q est plus élevé que le Terme P, celui qui fait l'opération envoie un aide au second Terme Q, où il pose une toise, ou une double toise, le plus perpendiculairement qu'il est possible, qu'il doit tenir de la main gauche, parce que dans la droite il doit avoir un carton blanc de la grandeur d'un cul de chapeau, & dans le milieu duquel on fait un petit rond noir d'un pouce de diamètre ; & supposant que cet aide soit bien instruit des mouvemens qu'il doit faire, soit pour aller sur la droite ou sur la gauche, ou pour faire monter ou descendre le carton le long de la toise, aux différens signes qu'on lui fera : celui qui fait l'opération vise horizontalement aux surfaces de l'eau, l'endroit de la toise qui se rencontre dans le rayon de mire KL ; & ayant fait signe à l'aide de faire glisser le carton le long de la toise, pour que le bord supérieur du rond noir se rencontre au point L ; on lui fera ensuite un autre signe, pour lui faire entendre qu'il s'est rencontré juste, & pour lors un autre aide, qui est avec celui-ci, mesure exactement la hauteur QL, que je suppose de 2 pieds 9 pouces, & pendant ce tems-là un autre aide, qui ne quitte point celui qui fait

l'opération, mesure la hauteur KP, qui sera, par exemple, de 4 pieds 6 pouces, après avoir mis en écrit de part & d'autre les hauteurs que l'on aura trouvées, & les deux aides que l'on a détachés étant venus joindre celui qui fait l'opération, l'on cherche quelle est la différence de la ligne KP à la ligne LQ, en les soustrayant l'une de l'autre, & l'on trouve 1 pied 9 pouces, qui est la hauteur du second Terme au-dessus du premier : ainsi l'on voit que tout l'objet du Nivellement est de connoître de combien un lieu est plus élevé qu'un autre.

§ 39. Comme les coups de Niveau, qui se donnent avec cet instrument, ne vont guères au-delà de 100 à 120 toises, l'on n'a point égard au Niveau apparent dans les petites opérations comme celle-ci, parce que le Niveau apparent peut être pris pour le vrai.

Fig. 205.

A cause de la petite portée des coups de Niveau, on est obligé d'en donner plusieurs de distance en distance, quand les objets que l'on veut niveler sont beaucoup plus éloignés l'un de l'autre que l'on ne l'a supposé ici ; cependant quand cette distance est environ double de la portée du coup de Niveau, on peut par une seule station trouver la différence des hauteurs du Niveau de ces deux endroits, pourvu que l'on puisse les appercevoir tous les deux, quand on se sera placé à peu près dans le milieu de leur distance.

Par exemple, supposant que la distance de A en B soit de 220 toises, & qu'on veuille sçavoir de combien le Terme A est plus bas que le Terme B, il faut poser le Niveau en C, qui sera à peu près le milieu de la distance AB ; ensuite viser de D en E, le rond noir du carton que l'aide aura posé au point G, que je suppose élevé de 2 pieds 4 pouces. Cela posé, celui qui fait l'opération quitte la bouteille D, & vient à la bouteille E, pour viser de E en F, parce qu'il doit y avoir à l'endroit A un autre aide, pour tenir la toise & le carton : & comme il peut arriver que la ligne AF soit élevée au-dessus de l'endroit A de plus de 6 pieds, en ce cas on a une autre toise, au

bout de laquelle est un carton, comme celui dont nous avons déjà parlé, & l'aide fait glisser cette toise le long de l'autre, la faisant monter & descendre tant que le rond noir du carton se rencontre dans le rayon de mire EF; après quoi un autre aide mesure exactement la hauteur FA. Or supposant qu'ayant mesuré avec autant de précision qu'il est possible, l'on ait trouvé 9 pieds 6 pouces pour la hauteur AF, on soustraira de cette quantité 2 pieds 4 pouces, qui est l'élevation du point G, & la différence sera 7 pieds 2 pouces, qui fait voir que l'endroit A est plus bas que B de 7 pieds 2 pouces.

Cette manière de niveler est la meilleure de toutes, parce qu'elle est moins sujette à erreur, soit de la part du Niveau apparent, ou des réfractions; car tant que le point C sera dans le milieu de deux Termes; les points F & G seront parfaitement de niveau, puisqu'ils sont également éloignés du centre de la Terre: d'ailleurs par cette pratique on fait beaucoup moins de stations que si l'on alloit par plusieurs coups de Niveau d'un terme à l'autre.

CHAPITRE II.

Où l'on donne la manière de faire le Nivellement composé.

540. **Q**Uand les deux Termes que l'on veut niveler sont beaucoup plus éloignés l'un de l'autre qu'on l'a supposé dans l'opération précédente, on est obligé de faire plusieurs stations; & en ce cas l'on dit que le Nivellement est composé; car en effet il est composé de plusieurs coups de Niveau, que l'on fait en sorte d'abréger, comme on le va voir dans l'opération suivante. Fig. 206.

Pour niveler deux objets A & B, éloignez l'un de l'autre de 680 toises, il faut diviser ce nombre par 200 ou 220 toises, pour voir combien l'on sera obligé de faire de stations; car dans l'opération précédente on a nivelé par une seule station une distance de 220 toises; ainsi

comme 680 divisé par 220, donne 3 au quotient, je vois qu'en trois stations on peut niveler les deux Termes A & B. Pour cela je commence par chercher dans la distance AB les trois endroits qui sont les plus commodes pour faire les stations: je choisis d'abord le point C à peu près dans le milieu de AB, où je fais planter un piquet, & à une distance de 100 ou 110 toises du point A j'en fais planter un autre en D, & à la même distance du point B j'en fais placer un troisième E, & autant qu'il se peut il faut que ces trois piquets soient d'alignement avec les deux termes A & B. Ayant donc déterminé les trois stations D, C, E, il faut envoyer deux aides au premier Terme A, dont le premier porte une ou deux toises, & le second soit chargé d'écrire les hauteurs; on en envoie un troisième à peu près dans le milieu de la distance DC, lequel ne doit point bouger de sa place, qu'on n'ait achevé les opérations de la première & de la seconde station, parce que la toise qu'il tiendra en main doit servir de Terme commun pour les deux premières stations.

Ayant donc fait porter le Niveau au point D, il faut viser de T en S, pour que le rayon de mire TM aille rencontrer le bord supérieur du rond noir, qui sera au point M, & le second aide mesure la hauteur MA, que je suppose de 8 pieds 2 pouces, qu'il a soin d'écrire sur des tablettes: ensuite on vise de S en T, pour découvrir le rond noir au point K; & comme il n'est pas nécessaire de connaître la hauteur KF, qui seroit plus embarrassante qu'utile, l'aide qui tient la toise se contente de marquer un trait de crayon à l'endroit de la toise où le rayon de mire SK s'est terminé: de là on vient à la seconde station C, & on envoie à peu près dans le milieu de la distance CE un aide à l'endroit G, qui ne doit pas bouger de sa place, que les opérations de la seconde & de la troisième station ne soient finies. Presentement il faut donner un coup de Niveau de Q en R, pour découvrir le point L du rond noir; & quand on l'aura rencontré, on mesurera la hauteur KL, qui est la distance du trait de crayon que l'on a
marqué

marqué sur la toise au point L, & celui qui tenoit les tablettes à l'endroit A, a eu soin de se rendre à la seconde station, pour y écrire la hauteur KL, qui sera, par exemple, de 3 pieds 6 pouces : après cela il faut viser de R en Q, pour que celui qui est en G puisse marquer sur la toise le point H, par un trait de crayon, sans s'embarrasser de son élévation, qu'il est inutile de connoître, comme nous l'avons déjà dit. Enfin l'on fait porter le Niveau à la troisième station E, pour donner un coup de Niveau de P en O, qui ayant déterminé le point I, on mesurera la ligne HI, que je suppose de 4 pieds 3 pouces, qu'on aura soin d'écrire sur les tablettes : après quoi on donnera le dernier coup de Niveau ON ; & l'aide qui est en B, mesurera la hauteur BN, que je suppose d'un pied 6 pouces, qu'il faudra écrire à part, parce que cette hauteur n'a rien de commun avec ce que l'on a marqué sur les tablettes.

Le Nivellement étant achevé, l'on ajoutera ensemble les hauteurs que l'on a écrites sur les tablettes ; c'est-à-dire, 8 pieds 2 pouces, 3 pieds 6 pouces, & 4 pieds 3 pouces, qui font 15 pieds 11 pouces, d'où il faudra soustraire la hauteur BN d'un pied 6 pouces, & la différence sera 14 pieds 5 pouces, qui est l'élévation de l'endroit B au dessus de l'endroit A.

CHAPITRE III.

Où l'on donne la manière de niveler deux Termes, entre lesquels il se trouve des hauteurs & des fonds.

341. **Q**Uand on veut niveler deux objets fort éloignés l'un de l'autre, il est assez rare qu'on ne rencontre en chemin des hauteurs & des fonds, qui obligent de niveler tantôt en montant, tantôt en descendant ; en ce cas il faut observer certaines choses dont nous n'avons pas encore parlé, qui sont, d'écrire sur les

Fig. 207.

K k

tablettes dans une colonne toutes les hauteurs que l'on trouvera en montant , & dans une autre colonne toutes celles que l'on trouvera en descendant ; & pour les distinguer à l'avenir , nous nommerons première colonne celle dans laquelle il faudra écrire les hauteurs que l'on trouvera en montant , & seconde colonne celle dans laquelle on écrira toutes les hauteurs que l'on trouvera en descendant. L'on va voir ceci dans l'opération suivante.

Pour niveler deux lieux A & B , il faut commencer par poser le Niveau au point D , éloigné d'environ 100 toises des endroits A & B , où l'on aura envoyé des aides avec des toises ; ensuite il faut donner les coups de Niveau DC & DE , & écrire la hauteur AC de 6 pieds 4 pouces dans la première colonne , & marquer un trait de crayon à l'endroit E : de-là il faut faire porter le niveau au point 4 , qui n'est pas dans le milieu de la ligne FH , à cause que la rampe de 3 en 5 ne le permet point ; mais cela n'empêche pas que les coups de Niveau GF & GH ne soient justes , parce qu'ils ne sont pas d'une grande portée. Ayant donc déterminé les points F & H , il faut mesurer la hauteur FE , qui fera , par exemple , de 9 pieds 6 pouces , qu'il faut écrire dans la première colonne , & ne pas oublier de marquer un trait de crayon au point H de la toise 5 : de-là il faut venir à la station 6 , & donner les coups de Niveau KI & IL , l'on marquera , comme à l'ordinaire , un trait de crayon au point L , & l'on écrira dans la première colonne la hauteur LH , que je suppose de 7 pieds ; de-là on viendra à la station 8 , de laquelle je suppose qu'on ne peut donner que le coup de niveau NM , à cause que la rampe est trop grande pour pouvoir en donner un second de l'autre côté , l'on mesurera la hauteur LM depuis le point L que l'on a marqué sur la toise jusqu'au point M du rayon de mire , qui se trouve de 8 pieds 2 pouces ; l'on aura soin de l'écrire dans la seconde colonne , parce que c'est une hauteur que l'on a trouvée en descendant : mais comme la hauteur NO du Niveau fait voir de combien le point O est plus bas que le point

M, il faudra mesurer cette hauteur, que je suppose de 4 pieds & demi, pour l'écrire aussi dans la seconde colonne; ensuite il faudra faire planter un piquet à l'endroit O, & descendre le Niveau au point G, qu'il faudra trouver; de sorte que le rayon de mire PO aille rencontrer le pied du piquet: après quoi l'on donnera le coup de Niveau PQ, & l'aide qui tient la toise aura soin de marquer un trait de crayon au point Q. De-là on ira à la station 11 pour y donner les coups de Niveau SR & ST, afin d'avoir la hauteur RQ, qui sera, par exemple, de 3 pieds, qu'il faudra écrire dans la première colonne, parce que c'est une hauteur que l'on a trouvée en montant; il faut aller après cela au point 13, pour y donner les coups de Niveau XV, XY, & l'on écrira dans la première colonne la hauteur VT, qu'on suppose de 5 pieds 5 pouces: & comme il arrive que le rayon XY va se terminer à un point Y de la hauteur, il n'y aura pas de trait de crayon à marquer sur la toise à cet endroit-là; on y laissera seulement un aide, pour servir à l'opération 15, laquelle ayant déterminé les points Z & B, des coups de Niveau AZ & AB, l'on mesurera la hauteur ZY, que je suppose de 7 pieds 4 pouces, qu'il faudra encore écrire dans la première colonne: de-là il faut venir à la station 17, pour y donner les coups de Niveau DC & DE, marquer un trait de crayon au point E, & considérer que la hauteur BC, qu'on suppose de 6 pieds 6 pouces, a été trouvée en descendant, & que par conséquent il faut l'écrire dans la seconde colonne. Enfin l'on portera le Niveau à la dernière station B, pour déterminer par le rayon GF la hauteur EF, qui sera, par exemple, de 8 pieds 5 pouces, qu'il faudra écrire dans la seconde colonne, aussi bien que la hauteur GB du Niveau, qui est ordinairement de 4 pieds 6 pouces.

Présentement si l'on additionne les nombres de la première colonne, l'on trouvera 38 pieds 7 pouces; & faisant la même chose pour la seconde, l'on aura 32 pieds un pouce. Or si l'on retranche la plus petite somme de la

K k ij

plus grande, c'est-à-dire, 32 pieds 1 ponce, de 38 pieds 7 pouces, la différence sera 6 pieds 6 pouces, qui fait voir que le terme A est plus bas que le terme B de 6 pieds 6 pouces.

Il est bon de remarquer que lorsque l'on a un Nivellement à faire en montant, & qu'on s'apperçoit que les coups de Niveau sont trop courts, de sorte qu'on est obligé d'en donner trop souvent, il vaut mieux monter au sommet de la hauteur, & faire le Nivellement en descendant, observant d'écrire dans la première colonne les hauteurs que l'on trouvera en allant vers un Terme, & dans la seconde colonne, celles que l'on trouvera en allant vers l'autre.

Par exemple, si l'on veut connoître la différence des hauteurs de deux Termes A. & B, & qu'on s'apperçoive qu'il faudra trop de tems & trop d'operations pour niveler de A en B par une suite de coups de Niveau, on fera porter le Niveau à l'endroit 6, que je suppose être le sommet de la hauteur, & l'on nivellera de 6 en A, en observant d'écrire dans la première colonne les hauteurs que l'on trouvera: après cela l'on viendra à l'endroit 6, pour niveler de 6 en 10, & les hauteurs que l'on trouvera, on les écrira dans la seconde colonne. Enfin on viendra au sommet 15 de la seconde éminence pour niveler de 15 en 10, mettant toutes les hauteurs que l'on trouvera dans la première colonne; après quoi l'on nivellera de 15 en B, & on écrira les hauteurs de cette dernière operation dans la seconde colonne, & le reste se fera comme dans l'operation précédente.

L'on peut faire beaucoup d'ouvrage en peu de tems par cette maniere de niveler, parce que tandis qu'une personne entendue fait le nivellement de 6 en A, une autre peut faire celui de 6 en 10; & de la même façon celui de 15 en 10, & de 15 en B.

PREMIERE COLONNE.

SECONDE COLONNE.

pieds.	pouces.	lignes.	pieds.	pouces.	lignes.
6 ¹¹ — ¹¹	4 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹	8 ¹¹ — ¹¹	2 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹
9 ¹¹ — ¹¹	6 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹	4 ¹¹ — ¹¹	6 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹
7 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹	6 ¹¹ — ¹¹	6 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹
3 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹	8 ¹¹ — ¹¹	5 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹
5 ¹¹ — ¹¹	5 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹	4 ¹¹ — ¹¹	6 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹
7 ¹¹ — ¹¹	4 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹			
			32 pieds ¹¹	1 pou. ¹¹	0 li. ¹¹
38 pieds ¹¹	7 pouces ¹¹	0 li. ¹¹			
			pieds	pouces	
			38 ¹¹ — ¹¹	7 ¹¹ — ¹¹	0 ¹¹
			32 ¹¹ — ¹¹	1 ¹¹ — ¹¹	0
Difference			6 pieds 6 pouces		

CHAPITRE IV.

Où l'on fait voir la manière de connoître de combien le Niveau apparent est élevé au-dessus du vrai, pour une ligne de telle longueur que l'on voudra.

542. **L'**On n'a pas eu égard à la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai dans les Nivellemens que nous venons d'enseigner, parce que les coups de Niveau étoient fort petits; d'ailleurs les opérations ont été faites d'une manière à ne pas donner lieu à cette différence: mais comme le Niveau d'eau ne peut servir que pour des petits Nivellemens, & qu'il demande une grande exactitude, pour ne point faire d'erreur, quand le Nivellement est fort composé, on a inventé une autre espèce de Niveau, avec lequel, par le

Fig. 263.

Kk iiij

moyen d'une lunette, l'on peut donner des coups de Niveau extrêmement grands ; c'est l'usage de ce Niveau que nous allons enseigner , après avoir donné dans ce Chapitre la maniere de calculer la hauteur du Niveau apparent au-dessus du vrai, dont la connoissance est absolument necessaire , quand on fait de grands Nivellemens.

543. Nous avons vû dans la Géométrie que le quarré de la tangente BD , étoit égal au rectangle compris sous la secante GD , & sous la partie CD : ainsi divisant le quarré de la ligne BD par la valeur de la ligne GD , on trouvera la ligne CD. Mais comme la ligne GC , qui est le diamètre de la Terre , qui a été trouvée de 538594 toises , ne differe de la ligne GD que d'une quantité infiniment petite , il s'ensuit que l'on pourra prendre la ligne GC pour la ligne GD , & que divisant le quarré de la ligne BD par le diamètre GC de la Terre ; c'est-à-dire , par 6538594 , l'on aura la valeur de la ligne CD , qui est la difference du Niveau apparent avec le vrai. Or supposant que la ligne de Niveau apparent BD , soit de 800 toises , il faudra les réduire en lignes , & l'on aura 691200 lignes , qu'il faut ensuite quarrer pour avoir 477757440000 , qui est le quarré de la ligne BD. Presentement si l'on réduit le diamètre de la Terre , qui est de 6538594 toises en lignes , on aura 5649345216 lignes ; & divisant le quarré de la ligne BD par le nombre précédent , l'on aura environ 85 lignes , qui font 7 pouces une ligne pour la difference CD du Niveau apparent au-dessus du vrai.

544. L'on peut encore d'une maniere plus géométrique que la précédente , trouver la valeur CD du Niveau apparent au-dessus du vrai : car à cause du triangle rectangle ABD les quarez AB & BD pris ensemble , valent le quarré de l'hypotenuse AD. Ainsi il n'y a qu'à quarrer la valeur du demi-diamètre de la Terre , & la valeur de BD de la ligne de Niveau apparent , & additionner ces deux quarez , dont la racine sera la ligne AD ,

de laquelle il faudra retrancher la valeur du demi-diamètre AB ou AC de la Terre, & la différence sera la valeur de la ligne CD.

545. L'on peut remarquer que les hauteurs de deux points de Niveau apparent au-dessus du vrai, sont dans la même raison que les quarrés des lignes des Niveaux apparens; car prenant le diamètre GC pour la ligne GD, & le diamètre HK pour la ligne HI, le quarré de la ligne BI étant aussi égal au rectangle compris sous HK & KI, les quarrés des lignes BD & BI seront dans la même raison que les rectangles qui leur sont égaux: mais ces rectangles ayant chacun pour base le diamètre GC ou HK de la Terre, seront comme leurs hauteurs CD & KI; ainsi les quarrés BD & BI seront donc dans la raison des lignes CD & KI.

546. L'on peut tirer de cette conséquence une règle générale pour trouver la hauteur du Niveau apparent au-dessus du vrai, d'une façon bien plus courte, que par les deux méthodes précédentes; car si on connoît une fois la hauteur du Niveau apparent au-dessus du vrai pour une ligne d'une certaine longueur, l'on pourra trouver la même chose pour toutes les autres.

Par exemple, étant prévenu que pour une distance de 600 toises, le Niveau apparent est élevé au-dessus du vrai de 4 pouces, pour sçavoir combien il est élevé pour une distance de 1000 toises, je fais une Règle de trois, en disant: Si le quarré de 600, qui est 360000, donne 4 pouces, combien donnera le quarré de 1000, qui est 1000000. La Règle étant faite, l'on trouvera 11 pouces 1 ligne 4 points pour la hauteur du Niveau apparent au-dessus du vrai, d'un coup de Niveau de 1000 toises.

CHAPITRE V.

Où l'on fait la description du Niveau de Monsieur Huguens.

547. **N**ous n'avons parlé jusqu'à présent que du Niveau d'eau, parce que c'est celui qui est le plus en usage dans les Nivellemens qui ne sont pas d'une grande étendue. Cependant comme les Niveaux qui ont des lunettes, sont bien plus commodes, parce que l'on peut en deux ou trois coups de Niveau, ou quelquefois même en un seul niveler deux objets, dont on ne pourroit connoître la différence des hauteurs avec le Niveau d'eau, sans faire beaucoup plus d'operations. Voici celui qui a été inventé par M. Huguens, qui peut passer pour le plus commode, & le plus juste de tous ceux qui ont été faits dans ce goût-là.

Fig. 208.

Une des principales parties de cet instrument est la virole D, qui a deux branches plates, C & E, qui sont semblables, chacune d'environ un demi-pied de long; de sorte que le tout fait une espece de croix. Cette virole D porte la lunette AB longue de deux pieds: si elle n'a que deux verres convexes, elle représentera les objets renversez, mais avec beaucoup plus de clarté, que si elle en a quatre, qui les remettroient dans leur situation naturelle. Le tuyau de cette lunette doit être de cuivre, ou de quelqu'autre matiere forte, & à l'épreuve des injures de l'air.

Au bout des branches de la virole D sont attachez deux filers doubles, passez dans des petits anneaux, & serrez entre des pinces à deux dents, dont l'une est fixée au bout de sa branche, & l'autre y est attachée de telle maniere qu'elle se puisse ouvrir.

Comme la lunette est suspendue par la virole D au crochet F, elle est tendue horizontalement par le bois qui est enfermé

enfermé dans la boîte G, dont il ne sort que son crochet. La pesanteur de ce poids ne doit être qu'environ la pesanteur de la croix, & le vuide qui reste dans cette boîte, est rempli d'huile de noix ou de lin, ou de quelque autre liqueur qui ne se glace ni ne se fige point; & c'est par cette liqueur que sont arrêtés les balancemens du poids & de la lunette. Il doit y avoir au dedans de la lunette un fil de soye tendu horizontalement au foyer du verre objectif; & c'est par une vis, que l'on tourne au travers du trou H, percé dans le tuyau de la lunette, que l'on abaisse ou élève ce fil selon le besoin. Il faut mettre au tuyau de la lunette une petite virole, qui doit être fort légère, & ne pas peser plus d'une quatre-vingtième partie de la croix: elle n'est point attachée au tuyau de la lunette, parce qu'il faut la pousser vers le bout, ou l'en reculer autant qu'il est nécessaire pour trouver l'équilibre de la lunette; & la mettre parallèle à l'horison.

Cette Machine est suspendue au haut d'une espece de croix de bois plate, où il y a pour cela le crochet F, qui peut se hausser ou baisser par le moyen de la vis qui tient à l'anneau qui suspend la Machine: cette même croix tient la boîte, qui contient le plomb & l'huile; & cette boîte est enfermée par les côtes & par le fonds.

On couvre le niveau par une autre espece de croix, qui est creuse, que l'on applique contre la croix de bois plate, avec plusieurs crochets, afin de couvrir le niveau contre les injures du tems; de sorte que le tout fait une boîte.

Pour rectifier ce niveau, on le suspendra par l'anneau d'une de ses branches, sans attacher de poids par en bas, & l'on visera par la lunette à quelque objet éloigné, remarquant l'endroit où le point de l'objet est coupé par le fil de la lunette, & ensuite on mettra le poids, en l'accrochant dans l'anneau d'en bas: & si alors le fil de la lunette répond à la même marque de l'objet, c'est une preuve certaine que le centre de gravité, où les deux points de la suspension de la croix répondent au centre du tuyau

de la lunette , ou au centre de la Terre ; mais si cela ne se trouve pas précisément au même point , on la vérifiera par le moyen de la virole I , en la faisant couler de part ou d'autre , pour reparer le défaut , & mettre la lunette en équilibre ; & la lunette étant mise horizontalement par la virole sans poids & avec poids , on la tournera sens dessus dessous , mettant en haut la branche d'en bas , & attachant le poids à la branche que l'on a abaissée.

Si après cette rectification , le fil qui est dans la lunette se trouve à la même hauteur de l'objet que devant ; c'est une marque que le fil du foyer de la lunette est directement au milieu de ce foyer : mais si le fil ne vise pas au même point , & que le fil coupe l'objet au-dessus ou au-dessous , on haussera ou baissera par la vis qui est pour cela , jusqu'à ce que le fil coupe le point moyen , qui est entre les deux points remarquez , & après cela le niveau sera bien rectifié.

Le pied qui doit porter la Machine , est une espece de table de fer ou de cuivre , qui est ronde & un peu concave , afin que la Machine soit plus solidement établie dans la concavité : elle est élevée sur trois bâtons , qui y sont attachez en charniere , & dont la hauteur est de 3 ou 4 pieds.

La Fig. N represente en grand le tuyau qui porte en dedans de la lunette le fil horizontal , qui est attaché à la fourchette K avec de la cire.

Il faut si peu de chose pour faire de grandes erreurs en nivellant , qu'on ne sçauroit prendre trop de précautions à se bien servir des instrumens : pour cela il faut les connoître parfaitement ; quand je dis les connoître , j'entends qu'on doit si-bien les examiner , qu'on puisse en sçavoir jusqu'au moindre défaut , entre lesquels il n'y en a point de plus considerable , que de baisser ou hausser la mire. Il est vrai que pour le niveau de M. Huguens , quand même il n'auroit pas été fait avec assez de précaution , pour avoir cet inconvenient , il ne faut pas beaucoup s'en embarrasser ; car s'il baisse la

mire dans un sens, il la hauffera d'autant dans un autre; & prenant le point du milieu des deux objets, l'on aura toujours le vrai niveau apparent, qui est un avantage particulier de ce niveau, de pouvoir être renversé de bas en haut, & de haut en bas; mais comme on peut se servir de tout autre instrument qui n'aura pas cet avantage, voici le moyen de corriger un rayon de mire faux.

Fig. 209.

Ayant posé un instrument à l'endroit A, pour pointer vers DG, je suppose que l'on a reconnu que la lunette, au lieu de donner le point C du niveau apparent BC, donne le point D, qui est plus élevé que le point C, parce que l'instrument hausse la mire; & ayant remarqué que sur une distance BC de 200 toises, le point D est élevé de 2 pouces au-dessus du point C. Après en être bien assuré, si je vois que cette faute ne se puisse pas réparer, parce que l'on suppose que l'instrument a été mal fait, j'ai égard, dans toutes les opérations que je fais, à la correction de l'instrument; de sorte qu'ayant donné un autre coup de niveau BE de 600 toises, je cherche à quel point de la hauteur EH doit être le niveau apparent, parce que je suis prévenu que ce n'est pas le point E; mais que ce doit être un autre point au-dessous de celui-ci. Pour le trouver, je dis: Si 200 toises donnent 2 pouces pour le haussément du rayon de mire, combien donneront 600 toises: la Règle étant faite, je trouve 6 pouces; ainsi je prends le point F 6 pouces au dessous du point E, & pour lors la ligne BF est celle du niveau apparent: mais si l'instrument baisse la mire au lieu de la hauffer, on trouvera toujours le point du vrai niveau apparent en suivant la même Règle, qui est fondée sur ce que les triangles BCD & BFE sont semblables.

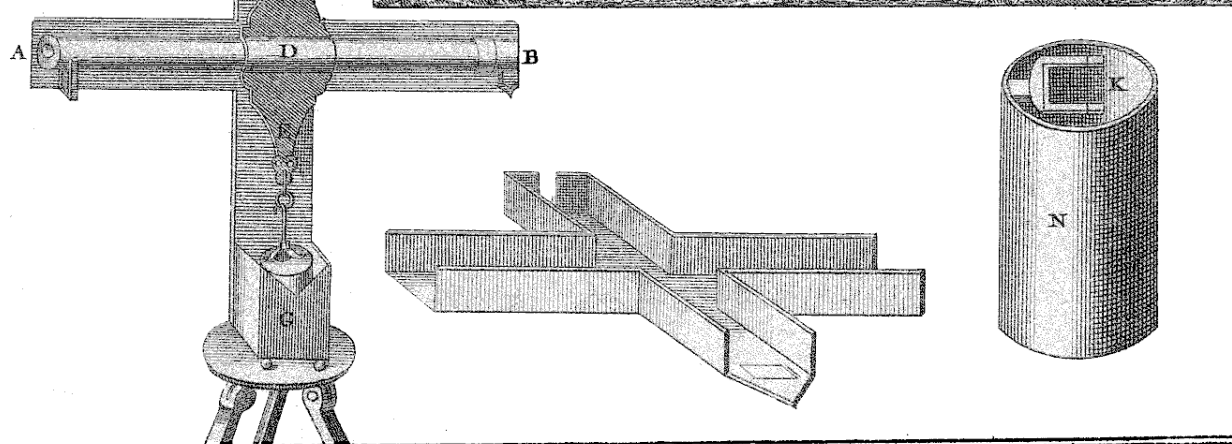
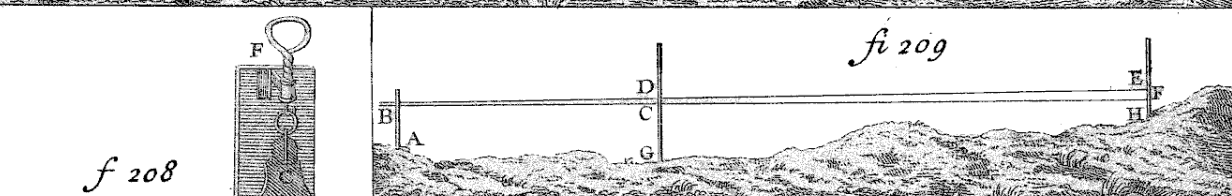
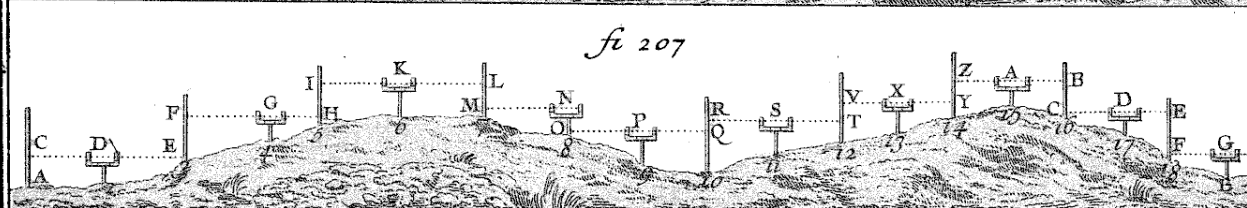
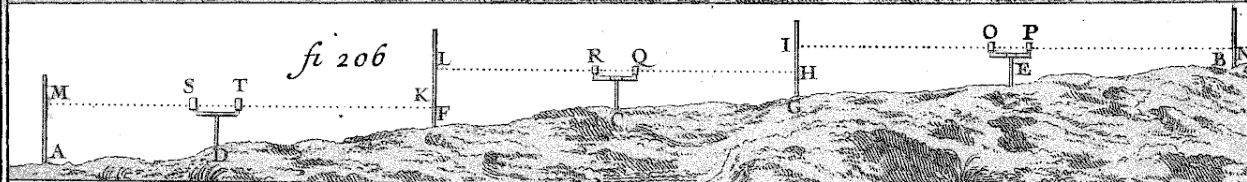
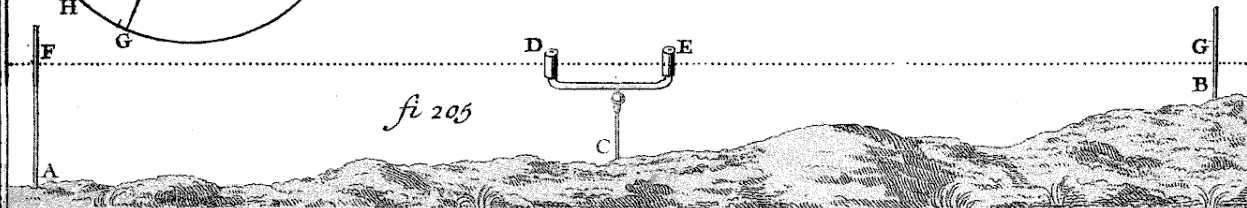
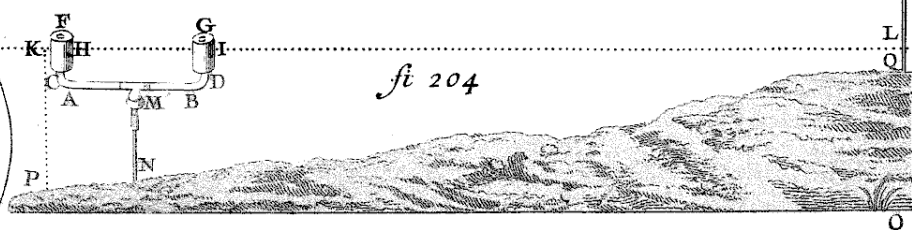
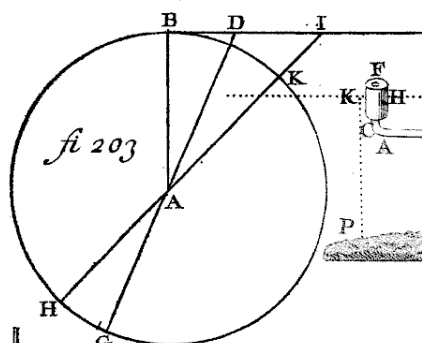
CHAPITRE VI.

Où l'on donne la maniere de se servir du Niveau de M. Huguens.

548. **L**E Niveau ayant été posé au lieu destiné pour l'opération, on enverra, comme à l'ordinaire, un aide à une distance convenable, & on regardera exactement par la lunette l'endroit de la perche où le fil répondra ; & l'aide qui tient la carte, l'ayant haussée & baissée tant que le petit rond noir réponde au rayon de mire, il a soin de marquer un trait de crayon sur la perche à l'endroit où le rayon de mire a répondu, & il ne bouge point de sa place jusqu'à ce qu'il soit averti ; & alors celui qui est à l'instrument le change de disposition, mettant le dessus au-dessous, c'est-à-dire, qu'il faut accrocher la croix par l'anneau d'en bas ; après quoi on vise de-rechef avec la lunette, & celui qui est à la perche hausse & baisse encore le carton, pour marquer à quelle hauteur porte le rayon de mire, qui doit répondre au même endroit que l'on a marqué. Or supposant qu'il donne au-dessous de la marque, il faut marquer exactement à quel endroit ; ensuite diviser en deux également l'intervalle des deux coups de Niveau differens, & l'on aura au juste la hauteur du Niveau apparent, de laquelle il faudra retrancher la hauteur du Niveau apparent au-dessus du vrai, que l'on trouvera, selon qu'il a été enseigné au quatrième Chapitre, & la difference sera la hauteur du vrai Niveau, laquelle on pourroit encore trouver sans faire de calcul, comme on le va voir.

Fig. 210.

Ayant deux perches CA & BE, éloignées l'une de l'autre, je suppose d'une distance de 600 toises, l'on demande quelle seroit la hauteur du Niveau apparent au-dessus du vrai.



Pour la trouver, posez le Niveau à l'endroit A, & pointez avec la lunette l'endroit de la perche BE, où le rayon de mire ira la rencontrer, supposant que ce soit au point B, il faut y faire une marque, & vérifier ce coup de Niveau, en renversant l'instrument, pour voir si dans cette situation le rayon de mire se termine encore au point B. Cela posé, faites porter l'instrument à l'endroit E, & disposez-le de manière que le foyer du verre de la lunette soit précisément à la hauteur B. Après cela donnez un autre coup de Niveau BC, qui aille rencontrer la perche AC au point C, qu'il faudra marquer sur la perche, après l'avoir vérifié comme ci-devant; & si l'on mesure exactement la distance CA, je dis qu'elle sera double de la hauteur du Niveau apparent au-dessus du vrai; de sorte que CA doit se trouver ici de 8 pouces: car en divisant CA en deux également au point E, l'on aura la ligne CD de 4 pouces, qui sera la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai, pour une distance de 600 toises, comme on le peut voir par le calcul; ainsi les points B & D sont de niveau, étant également éloignés du centre de la Terre, comme vous l'allez voir.

Si l'on prend le point A pour l'extrémité d'un des rayons de la Terre, le point B sera plus éloigné du centre de la Terre que le point A de 4 pouces; mais le point C étant plus éloigné du centre de la Terre que le point B aussi de 4 pouces, le point C sera donc plus éloigné que le point A du centre de la Terre de 8 pouces: donc les points D & B étant chacun plus éloignés du centre de la Terre que le point A de 4 pouces; il s'ensuit qu'ils seront de niveau, & que la moitié de la ligne CA sera la hauteur du Niveau apparent au-dessus du vrai.

L'on voit que par le Nivellement réciproque l'on peut d'une manière fort simple déterminer deux points parfaitement de niveau, sans s'embarrasser de leur distance. Il est vrai que l'on peut encore trouver deux points de niveau, sans même faire de Nivellement réciproque, en posant l'instrument dans le milieu de la distance de deux ob-

Lljj.

jets que l'on a à niveler ; ce qui se fait à peu près de la manière qu'on a expliqué dans l'usage du Niveau d'eau.

CHAPITRE VII.

Où l'on donne la manière de faire le Nivellement composé, avec le Niveau de M. Huguens.

Fig. 211.

549. **N**ous avons dit que pour faire un Nivellement composé, il falloit ajouter toutes les hauteurs que l'on trouveroit en montant, & que l'on auroit mises dans la première colonne, & ajouter aussi ensemble toutes celles que l'on aura trouvées en descendant, qui sont dans la seconde colonne, afin de soustraire la somme des unes de la somme des autres, pour avoir la différence, qui fait voir de combien l'un des endroits est plus élevé que l'autre ; mais comme dans cette pratique nous nous sommes servi du Niveau d'eau, dont les coups de Niveau ne sont pas considérables, & que d'ailleurs l'instrument pour chaque station a été placé dans le milieu de deux termes, on n'a pas eu égard à la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai, ni en descendant, ni en montant, parce que, selon cette pratique, la différence du Niveau apparent n'a pas lieu : mais il n'en est pas de même, lorsqu'on se sert d'un instrument à pouvoir donner des grands coups de Niveau, où il faut avoir égard à la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai, en montant comme en descendant, sur tout quand l'instrument est placé au premier Terme, pour niveler d'un terme à l'autre ; car dans cette occasion il faut non seulement mettre dans la première colonne les hauteurs que l'on a trouvées en montant, & dans la seconde celles que l'on a trouvées en descendant ; mais encore écrire à côté de chaque colonne la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai pour chaque distance qui sont dans les colonnes, tant en montant qu'en descendant : & ce qu'il y a de particulier en

ceci , c'est qu'après avoir mis dans une somme les hauteurs du Niveau apparent au-dessus du vrai , que l'on aura trouvées en montant , il faut l'ajouter à la somme des hauteurs de la première colonne , pour ne faire qu'un produit des hauteurs de la première colonne , & des différences de leur Niveau apparent au-dessus du vrai.

L'on écrira de même à côté de la seconde colonne , la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai , pour chaque hauteur que l'on aura trouvée en descendant ; & l'on fera une somme de toutes ces différences , qu'il faudra ensuite soustraire de celles des hauteurs , tellement qu'il faut regarder comme une règle générale , qu'en montant il faut ajouter la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai , aux hauteurs que l'on trouvera en descendant ; & qu'en descendant il les faut soustraire , & en voici la raison.

Supposons qu'en montant l'on ait donné des coups de Niveau BC & FG , & en descendant les coups de Niveau KN & QR. Cela posé , considérez qu'ayant mené à la ligne BC la parallèle AD ; cette parallèle sera une tangente à la Terre , & la ligne DE marquera la hauteur du Niveau apparent au-dessus du vrai. Or comme les lignes BA & CD sont égales , le point C sera plus éloigné du centre de la Terre que le point B , de toute la ligne DE : ainsi pour que le point B soit de niveau avec le point C ; il faudra ajouter à la hauteur BA la ligne DE , c'est-à-dire , la ligne de la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai. De même si à la ligne de Niveau apparent FG l'on mène la parallèle EH , la ligne HI sera encore la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai. Or les lignes FE & GH étant égales , le point G sera plus éloigné du centre de la Terre que le point F de toute la ligne HI : il faut donc , pour que le point F soit de niveau avec le point G , ajouter à la hauteur FC la ligne HI.

A l'égard des coups de Niveau KN & QR , que l'on a donné en descendant , l'on voit que leur ayant mené les

parallèles LO & PS, qui sont des tangentes à la Terre, le point N est plus éloigné du centre de la Terre que le point K de toute la ligne OP ; & que pour trouver un point de Niveau avec le point K, il faut ôter de la hauteur NQ la ligne OP, qui est la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai pour la longueur KN. Enfin comme le point R n'est pas de niveau avec le point Q, parce que le premier est plus éloigné du centre de la Terre que le second de toute la ligne ST: il faudra donc encore ôter la ligne ST de la hauteur RT pour mettre le point R de niveau avec le point Q. Il en fera de même des autres.

L'on a supposé que les lignes BA & CD, FE & GH, &c. étoient parallèles, quoiqu'elles soient des demi-diamètres de la Terre prolongez; mais à cause de la grande distance au centre, on les peut regarder comme telles, sans que cela puisse faire une erreur sensible.

Fig. 212.

Pour appliquer à un exemple ce que nous venons d'enseigner, soient les lieux A & F, dont on veut connoître la différence de Niveau.

Pour cela je me sers d'un Niveau à lunettes, que je pose au premier Terme A pour donner le coup de Niveau GB, qui se termine à un point B de la hauteur, auquel j'envoie un aide pour y planter un piquet, & je considère que la différence du Niveau apparent est de 4 pieds & demi, qui est la hauteur GQ du Niveau, que j'écris dans la première colonne; ensuite je fais mesurer la longueur GB , que je suppose de 600 toises, & je cherche quelle est la hauteur du Niveau apparent au-dessus du vrai, que je trouve de 4 pouces: j'écris cette hauteur à côté de la première colonne, vis-à-vis de 4 pieds & demi. Après cela je fais porter le Niveau au point B, & j'envoie un aide à l'endroit C, qui est une distance que l'on aura jugé convenable; & après avoir donné le coup de Niveau HI, je suppose que l'on a trouvé IC de 2 pieds, que je soustrais de 4 pieds & demi, & il reste 2 pieds & demi pour la hauteur du point C au-dessus du point

point B. Ayant donc écrit cette quantité dans la première colonne, je fais mesurer la longueur HI, que je trouve de 380 toises, qui donnent 1 pouce 7 lignes pour la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai, que j'écris à côté de la première colonne vis-à-vis 2 pieds 6 pouces.

De-là je viens au point C, & j'envoie un aide au point D avec une perche; ensuite je donne le coup de Niveau KL, & l'aide qui est en L, marque un trait de crayon à l'endroit de la perche où a répondu le rayon de mire, & on mesure la hauteur LD, qui sera, par exemple, de 2 pieds: d'où ayant soustrait la hauteur du Niveau, il vient 4 pieds & demi, qui fait voir la différence de Niveau apparent des points C & D. Mais comme 4 pieds & demi est une hauteur que l'on a trouvée en descendant, je l'écris dedans la seconde colonne, à côté de laquelle j'écris aussi 2 pouces 4 lignes, qui est la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai pour la longueur KL. Après cela je fais porter le Niveau au point D, & j'envoie un aide en E, pour marquer le point M sur la perche, après que j'aurai donné le coup de Niveau MN: ayant trouvé 10 pieds & demi pour la hauteur NE, j'en soustrais celle du Niveau, qui est de 4 pieds & demi, & la différence est 6 pieds, que j'écris dans la seconde colonne: & supposant que la distance MN soit de 650 toises, je cherche la hauteur du Niveau apparent au-dessus du vrai pour une pareille distance, & j'ai trouvé qu'elle est de 4 pouces 8 lignes, que j'écris à côté de la seconde colonne, vis-à-vis le dernier nombre que j'y ai marqué; c'est-à-dire, vis-à-vis 6 pieds. Enfin je fais porter le Niveau en E, pour faire la dernière opération OP, qui donne 8 pieds pour la hauteur PF; d'où ayant retranché celle du Niveau, la différence est 3 pieds & demi, que j'écris dans la seconde colonne, à côté de laquelle je mets 5 pouces 4 lignes, qui est la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai pour la distance OP, que nous supposons de 700 toises.

Après que l'on a fait l'opération, il faut faire l'addition

M m

274 NOUVEAU COURS

des hauteurs de la première colonne, & l'on aura 6 pieds, & ajouter aussi ensemble les hauteurs des Niveaux apparens au-dessus du vrai, pour avoir 5 pouces 7 lignes, qu'il faut ajouter avec la première colonne, & le tout sera 6 pieds 5 pouces 7 lignes.

Ensuite il faut ajouter les hauteurs de la seconde colonne, qui font 14 pieds; mettre aussi dans une somme les hauteurs du Niveau apparent au-dessus du vrai, qui font à côté, pour avoir 1 pied 4 lignes, qu'il faut soustraire de la somme des hauteurs de la seconde colonne, c'est-à-dire, de 14 pieds, & la différence sera 12 pieds 11 pouces 8 lignes. Enfin il faut soustraire 6 pieds 5 pouces 7 lignes de cette quantité, & le reste sera 6 pieds 6 pouces 1 ligne, qui fait voir que le lieu A est plus élevé que le lieu F de 6 pieds 6 pouces 1 ligne.

§ 50. Quand le terrain le permet, il vaut beaucoup mieux faire le Nivellement entre deux Termes, que de suivre ce qui vient d'être dit, parce que l'on n'a point d'égard à la différence du Niveau apparent au-dessus du vrai, non plus que dans les pratiques que nous avons données au sujet du Niveau d'eau: mais pour cela il seroit à propos que le Niveau eût deux lunettes, l'une pour pointer de la droite à la gauche, & l'autre pour pointer de la gauche à la droite. Les corrections des coups de Niveau se feront toujours de la même façon qu'il a été enseigné.

Fig. 213. Par exemple, voulant connoître la différence des hauteurs de deux endroits I & E, je partage la distance de ces deux Termes, pour faire des stations aux endroits les plus convenables; & ayant fait planter des piquets aux endroits F, G, H, je fais ma première station au point A, à peu près dans le milieu de EF, la seconde au point B, aussi dans le milieu de FG, la troisième au point C, & la quatrième au point D; observant toujours d'écrire dans la première colonne les hauteurs que l'on trouvera en montant, & dans la seconde celles que l'on trouvera en descendant, sans se mettre en peine des hauteurs du

Niveau apparent au-dessus du vrai. Je crois avoir assez dit pour ne rien laisser à désirer sur tout ce qui regarde le Nivellement ; & pour peu qu'on s'attache à le bien entendre , il ne faudra qu'un peu de pratique pour être en état de faire toutes les opérations qui se pourront présenter.

A V E R T I S S E M E N T.

M'étant apperçû qu'une grande partie de ceux qui se servent tous les jours du Toisé , n'en ont que la routine , & que les personnes qui en ont écrit ne se sont attachées qu'à donner la pratique de ce Calcul , sans rien dire des raisons sur lesquelles il est établi ; j'ai crû devoir en donner un petit Traité avant de parler de la mesure des corps , afin que ceux qui commencent puissent les calculer , & trouvent dans cet Ouvrage tout ce qu'il faut qu'ils sçachent , pour être en état de se servir utilement de ce qui a été enseigné dans la première Partie.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

QUATRIÈME PARTIE.

*Du Toisé en general. Où l'on enseigne la manière de
faire le calcul du Toisé des Plans, des Solides,
& de la Charpente.*

551. **L'**On entend ordinairement par le *Toisé*, la manière de calculer les dimensions de tous les ouvrages qui font partie de la Fortification d'une Place, & même de tous les autres Edifices civils. Quoique chaque Pays ait sa mesure particulière, & que le pied ne soit pas le même par tout, cela n'empêche pas que pour les ouvrages du Roy, l'on ne se serve toujours de la Toise, qui est (comme nous l'avons dit ailleurs) composée de six *pieds*. Mais comme le pied est dans un endroit de dix pouces, dans un autre de onze pouces, on a nommé celui dont on se sert en France pour les Fortifications, *Pied de Roy*, lequel est composé de 12 pouces; ainsi la Toise vaut 72 pouces. L'on a aussi divisé le pouce en 12 parties, que l'on nomme *lignes*, & la ligne en 12 autres parties, que l'on nomme *points*.

Cependant on distingue trois sortes de Toises; la Toise *courante*, la Toise *quarrée*, & la Toise *cube*. La Toise *courante* est celle qui a 6 pieds de longueur, sans largeur ni profondeur; la Toise *quarrée* est celle qui a 6 pieds de longueur sur 6 pieds de largeur, sans hauteur ou profon-

deur ; & la Toise *cube* est celle qui a 6 pieds de longueur, 6 pieds de largeur, sur 6 pieds de hauteur, & qui a par conséquent les trois dimensions égales : aussi cette Toise sert-elle à mesurer les Solides, au lieu que la toise quarrée ne sert qu'à mesurer les superficies, & la Toise courante les longueurs, & à déterminer les dimensions des Plans & des Solides.

Ainsi ce que nous venons d'expliquer à l'égard de la Toise, est la même chose que ce que l'on a dit à l'égard du pied, au commencement du premier Livre.

La Toise quarrée ayant 6 pieds de longueur sur 6 pieds de largeur, l'on peut dire que sa superficie est composée de 36 pieds quarrés, puisque multipliant les deux dimensions de cette Toise l'une par l'autre, c'est-à-dire, 6 pieds par 6 pieds, l'on aura 36 pieds quarrés, à l'égard de la Toise cube comme les trois dimensions sont chacune composées de 6 pieds, on voit qu'elle doit être composée de 216 pieds cubes ; car multipliant la Toise quarrée, qui vaut 36 pieds quarrés par 6 pieds, qui est la hauteur de la Toise cube, l'on aura 216 pieds cubes.

552. Il est bon de remarquer ici que dans le Toisé des Plans & des Solides, tel que nous l'allons expliquer, on ne considère point combien il faut de pieds quarrés pour composer une Toise quarrée, ni combien il faut de pieds cubes pour composer une Toise cube, parce que pour rendre le Calcul plus court, l'on a pris pour le pied de la Toise quarrée, la sixième partie de la même Toise, & pour le pied de la Toise cube, la sixième partie de cette Toise ; tellement que si l'on considère le quarré AB comme une Toise quarrée, dont le côté AC est divisé en six parties égales, le rectangle DE étant la sixième partie du quarré AB, il sera par conséquent un pied de Toise quarrée, de même que le rectangle DF renferme 3 pieds de Toise quarrée, puisqu'il est la moitié du quarré AB. Mais comme la Toise quarrée vaut 36 pieds quarrés, & que le rectangle DE est la sixième partie de la Toise, il s'ensuit qu'un pied de Toise quarrée vaut 6 pieds quarrés.

Fig. 214

M m ij

& que le rectangle DF, qui est la moitié de la Toise, en vaut 18.

L'on pourroit dire la même chose des pouces, des lignes, & des points de Toise quarrée ; car un pouce tel que celui-ci est un rectangle, qui a un pouce de base sur une Toise de hauteur ; de même une ligne est un rectangle, qui a une ligne de base sur une Toise de hauteur. Enfin un point est encore un rectangle, qui a pour base la douzième partie d'une ligne, & pour hauteur une toise : ainsi l'on voit que 12 points de toise quarrée font une ligne de la même toise, que 12 lignes font un pouce, que 12 pouces font un pied, & que 6 pieds font une toise quarrée, puisque toutes ces quantitez ont la même hauteur. Nous ferons voir la même chose à l'égard des pieds, des pouces, des lignes & des points de la toise cube, après que nous aurons suffisamment expliqué la manière de multiplier deux dimensions exprimées par des toises & des parties de toises courantes.

CHAPITRE I.

Où l'on fait voir comment on multiplie deux dimensions dont la première est composée de Toises & de parties de Toises, & la seconde de Toises seulement.

Fig. 214.

§ 53. **A**Yant une longueur AB de 6 toises, à laquelle on a ajouté une petite longueur CB de 2 pieds, & une autre CD de 6 pouces, toute la ligne AD vaudra 6 toises 2 pieds 6 pouces ; laquelle étant multipliée par la ligne AE d'une toise, le produit donnera le rectangle EADH, dont on aura la valeur, en multipliant 6 toises 2 pieds 6 pouces par une toise, pour en faire le calcul.

Je pose les deux dimensions comme on les voit ici ; ensuite je multiplie les plus petites parties, en commençant

par la droite, & finissant par la gauche, en disant, une fois 6 est 6, que je pose à la colonne des pouces, parce que ce sont 6 pouces de toise quarrée, & puis une fois 2 est 2, que je pose au rang des pieds, parce que ce sont des pieds de toise quarrée: enfin une fois 6 est 6, que je pose au rang des toises, parce que ce sont autant de toises quarrées; ainsi le produit 6 toises 2 pieds 6 pouces, est la valeur du rectangle AH, lequel est composé du rectangle AF, qui vaut 6 toises, du rectangle BG, qui vaut 2 pieds, & du rectangle CH, qui vaut 6 pouces.

toises.	pieds.	pouces.
6.	2.	6.
1.	0.	0.
6.	2.	6.

Pour multiplier 10 toises 4 pieds 8 pouces par 5 toises, je dispose ce nombre comme on le voit ici, & je dis 5 fois 8 font 40, faisant attention que ce sont 40 unités, qui valent chacune un petit rectangle, qui a pour base un pouce sur une toise de hauteur; & comme ce sont autant de pouces de toise quarrée, je considère en 40 combien il y a de fois 12, parce que 12 pouces de toise quarrée valent un pied de la même toise: & comme je trouve qu'en 40 il y a 3 fois 12, & 4 de reste, je pose 4 au rang des pouces, & je retiens 3 pieds: ensuite je dis: 5 fois 4 font 20, & 3 de retenus font 23, dont chaque unité vaut un pied de toise quarrée; & comme il faut 6 de ces pieds pour faire une toise, je considère combien 6 se trouve de fois dans 23; & comme il y est 3, & qu'il reste 5, je pose 5 au rang des pieds, & je retiens 3, qui sont autant de toises quarrées, que j'ajoute avec le produit de 10 par 5, pour avoir 53: ainsi l'opération étant faite, on trouvera 53 toises 5 pieds 4 pouces.

toises.	pieds.	pouces.
10.	4.	8.
5.	0.	0.
53.	5.	4.

Pour multiplier 60 toises, 3 pieds, 9 pouces, par 84 toises, je remarque que le nombre 84 étant considérable, la mémoire seroit fatiguée en multipliant les pieds & les pouces, comme dans l'opération précédente; car d'aller dire 84 fois 9, on n'apperçoit pas d'abord combien

ce produit doit donner de pouces ; & supposé qu'on le sçache à l'instant , l'on trouveroit encore un autre embarras , en cherchant combien ce produit contient de pieds , à moins qu'on ne fasse une division par 12 ; & ceci se rencontrera non seulement à l'égard des pouces , mais encore pour les pieds , les lignes & les points. Or pour éviter les difficultez que pourroit donner un pareil calcul , on agit d'une façon fort simple pour multiplier les pieds , les pouces , les lignes & les points de la premiere dimension , quand le nombre de toises de la seconde est composé de plus d'une figure. Pour cela il faut commencer par multiplier les entiers par les entiers ; ainsi je multiplie 60 par 84 , & j'écris le produit comme à l'ordinaire : ensuite je remarque que si au lieu de 3 pieds j'avois une toise à multiplier par 84 , le produit seroit 84 toises ; mais comme 3 pieds ne valent que la moitié d'une toise , la moitié de 84 fera donc le produit de 3 pieds ; ainsi je dis : La moitié de 8 est 4 , & la moitié de 4 est 2 , ce qui donne 42 pour le produit ; mais il faut remarquer que dans le tems que je prends la moitié de 84 pour le produit de 3 pieds , j'agis comme si 84 contenoit des toises quarrées ; car pour que 42 toises soient le produit de deux dimensions , ou autrement soient des toises quarrées , il faut que 84 soient regardez comme des toises quarrées.

Mais comme il y a encore 9 pouces qui n'ont pas été multipliez , je considere quel est le rapport de 9 pouces avec 3 pieds , de même que j'ai considéré celui de 3 pieds avec la toise. Or comme 3 pieds valent 36 pouces , je vois que le rapport de 9 à 36 est un quart , & que si le produit de 84 par 3 pieds a donné 42 toises , le produit de 9 pouces par 84 ne doit donner que le quart de 42 : je dis donc , le quart de 4 est 1 , que je pose sous le

toises.	pieds.	pou.
60.	3.	9.
84.	0.	0.
240.		
480.		
42.	0.	0.
10.	3.	0.
5092.	3.	0.

4, & le quart de 2 est 0 ; mais comme 2 toises valent 12 pieds, n'ayant pû prendre le quart de 2 toises en nombres entiers, je les réduis en pieds pour en prendre le quart, qui est 3 ; après quoi je fais l'addition de tous ces produits, afin d'avoir le produit total, qui est 5092 toises & 3 pieds.

Pour rendre ce calcul plus familier aux Commençans, voici encore plusieurs exemples des mêmes Regles, pour multiplier 18 toises 2 pieds 8 pouces par 24 toises, l'on commence par multiplier les toises par les toises, comme à l'ordinaire : après cela il faut considérer le rapport de 2 pieds avec la toise ; & comme 2 pieds en est le tiers, je prends le tiers de 24, qui est 8 ; & comme ce sont autant de toises, je les place au rang des toises.

toises.	pieds.	pou.
18.	2.	8.
24.	0.	0.
72.		
36.		
8.	0.	0.
2.	4.	0.
442.	4.	0.

Pour être convaincu que 24 multipliées par 2 pieds, donne 8 toises, faisons-en la multiplication comme à l'ordinaire, l'on verra que le produit est 48 pieds, c'est-à-dire, 48 petits rectangles, dont chacun a un pied pour base, & une toise pour hauteur : & comme il en faut 6 pour faire une toise quarrée, l'on voit que divisant 48 par 6, le quotient fera 8, qui est le même nombre que nous avons trouvé de l'autre façon.

Mais il nous reste encore à multiplier 24 toises par 8 pouces ; & comme cela se peut faire par le moyen du produit de 2 pieds, je considère le rapport que 2 pieds ont avec 8 pouces, parce que le rapport du produit de 8 pouces avec celui de 2 pieds sera le même que 8 pouces avec 2 pieds. Or comme 2 pieds valent 24 pouces, & que 8 en est le tiers, je prends le tiers du produit de 2 pieds, c'est-à-dire, le tiers de 8 toises, en disant : Le tiers de 8 est 2, il reste 2 toises, qui valent 12 pieds, dont le tiers est 4 pieds, que je pose au rang des pieds ; après quoi je fais l'addition de tous les produits pour avoir le total, qui est 442 toises 4 pieds.

N n

Pour multiplier 36 toises 5 pieds 6 pouces 9 lignes par 28 toises, je commence, comme à l'ordinaire, à multiplier les toises par les toises; ensuite je compare le produit de 5 pieds avec la toise, & je vois que c'est les $\frac{5}{2}$, & par conséquent il faut pour multiplier 28 toises par 5 pieds, prendre les $\frac{5}{2}$ de 28 toises; & comme il n'est pas aisé de prendre cela tout d'un coup, je cherche des parties aliquotes pour rendre le calcul plus aisé; & comme 5 est composé de 3 & de 2, dont 3 est la moitié de la toise, & 2 le tiers, je prends d'abord pour 3 la moitié de 28, qui est 14; ensuite pour 2 pieds le tiers, en disant: Le tiers de 28 est 9; & comme il reste une toise, j'en prends encore le tiers, qui est 2 pieds.

Pour multiplier les 6 pouces, j'ai recours au produit de 2 pieds, qui paroît le plus commode, parce que 6 pouces est le quart de 2 pieds, puisque 2 pieds valent 24 pouces; ainsi le produit de 6 pouces fera le quart de celui de 2 pieds; & comme ce produit est 9 toises 2 pieds, je dis: Le quart de 9 est 2, il reste une toise, qui vaut 6 pieds, lesquels étant ajoutés avec les 2 pieds qui restent, font 8 pieds, dont le quart est 2; ainsi le produit de 6 pouces est 2 toises 2 pieds.

toises.	pieds.	pouces.	lignes.
36.	5.	6.	9.
28.	0.	0.	0.
288.			
72.			
14.	0.	0.	0.
9.	2.	0.	0.
2.	2.	0.	0.
0.	1.	9.	
1033.	5.	9.	0.

Comme il reste encore 9 lignes, qui n'ont pas été multipliées, je cherche le rapport de 9 lignes avec 6 pouces. Or comme 6 pouces valent 72 lignes, & que 9 lignes en font la huitième partie, le produit de 9 lignes sera donc la huitième partie de celui de 6 pouces, je dis donc: La huitième partie de 2 est 0, mais ce sont 2 toises qui valent 12 pieds, auxquels ajoutant 2 pieds qui restent, on aura 14, dont la huitième partie est un pied, il reste 6 pieds, que je réduis en pouces pour avoir 72 pouces.

dont la huitième partie est 9, que je pose au rang des pouces ; après quoi je fais l'addition, qui donne 1033 toises 5 pieds 9 pouces pour le produit total.

Pour multiplier 12 toises 9 pouces par 18 toises, je fais la multiplication des toises comme à l'ordinaire ; ensuite pour multiplier 18 toises par 9 pouces, je cherche le rapport de 9 pouces avec la toise, & je trouve qu'ils en font la huitième partie, puisqu'une toise vaut 72 pouces ; mais comme il se peut rencontrer une

quantité de nombres, comme 7, 11, 10, où ce rapport ne se fera pas apercevoir aisément, il vaut mieux faire une fausse position, c'est-à-dire, supposer le produit d'un pied. Faisant donc comme s'il y avoit un pied à la place du zero, je multiplie ce pied supposé par 18 toises ; & comme un pied est la sixième partie de la toise, je prends la sixième partie de 18, qui est

toises.	pieds.	pou.
12.	0.	9.
18.	0.	0.
96.		
12.		
3.	0.	0.
1.	3.	0.
0.	4.	6.
218.	1.	6.

3 toises, que je pose au rang des toises, ayant soin de couper le 3 par un trait de plume, pour faire voir qu'il ne doit point être compris dans l'addition. Cela posé, je cherche le rapport de 9 pouces avec un pied, qui est les $\frac{3}{4}$: je prends donc d'abord pour 6 pouces, qui est la moitié ; ainsi je dis : La moitié de 3 est 1, il reste une toise, qui vaut 6 pieds, dont la moitié est 3 : ensuite je prends la moitié de ce produit pour 3 pouces, en disant : La moitié d'un n'est rien, mais c'est une toise, qui vaut 6 pieds, lesquels étant joints avec les 3 pieds qui restent, font 9 pieds, dont la moitié est 4 pieds 6 pouces, que j'additionne avec les autres produits, & il vient 218 toises un pied 6 pouces pour le produit total.

Pour multiplier 24 toises 2 pieds 6 lignes par 52 toises, il faut après avoir multiplié les toises par les toises, chercher le rapport de 2 pieds avec la toise ; & comme c'est le tiers, on prendra donc le tiers de 52, qui est 17 toises 2 pieds. Comme il reste 6 lignes à multiplier par 52

N n ij

toises, il n'est pas aisé de voir le rapport de 6 lignes avec 2 pieds ; l'on auroit bien plus de facilité, si l'on avoit le produit de quelque pouce : cependant comme il n'y a pas de pouces dans la première dimension, il faut se donner un produit supposé d'un pouce ; & comme un pouce est la vingt-quatrième partie de 2 pieds, je m'apperçois qu'il n'est pas encore aisé de prendre la vingt-quatrième partie de 17 toises 2 pieds : c'est pour-

quoi j'en prends la moitié pour avoir le produit d'un pied seulement, qui sera 8 toises 4 pieds. Ayant posé ces nombres à leurs places ordinaires, je les

toises.	pieds.	pouces.	lignes.
24.	2.	0.	6.
52.	0.	0.	0.
48.			
120.			
17.	2.	0.	0.
8.	4.	0.	0.
0.	4.	4.	0.
0.	2.	2.	0.
1265.	4.	2.	0.

coupe par un trait de plume, pour qu'ils ne soient pas compris dans l'addition : après cela je considère qu'un pouce étant la douzième partie d'un pied, si je prends la douzième de 8 toises 4 pieds, j'aurai 4 pieds 4 pouces pour le produit d'un pied : après quoi je barre ces deux nombres, parce qu'ils composent un produit supposé. Or comme 6 lignes font la moitié d'un pied, il n'y a donc qu'à prendre la moitié de 4 pieds 4 pouces, qui est 2 pieds 2 pouces, pour avoir le produit de 6 lignes : si l'on fait l'addition de tous les produits, l'on aura 1265 toises 4 pieds 2 pouces pour le produit total.

Si l'on avoit eu à multiplier 24 toises 6 lignes par 52 toises, & que dans la première dimension il n'y eût eu ni pieds ni pouces, comme on le suppose ici, il auroit fallu pour trouver le produit de 6 lignes, supposer celui d'un pied ; ensuite celui d'un pouce, pour avoir celui de 6 lignes, qui sera la moitié de celui d'un pouce.

CHAPITRE II.

Où l'on donne la maniere de multiplier deux dimensions, dont chacune est composée de toises, pieds, pouces, &c.

§ 54. **N**ous avons affecté de ne pas mettre des pieds, pouces, & des lignes dans la seconde dimension des multiplications que l'on a faites dans le Chapitre précédent, afin de rendre les opérations plus simples : mais comme il arrive presque toujours que s'il y a des pieds, des pouces dans la première dimension, il y en a aussi dans la seconde. Voici la maniere de multiplier les parties de toises, qui peuvent se rencontrer dans l'une & dans l'autre.

Pour multiplier 15 toises 4 pieds 8 pouces 7 lignes par 6 toises 3 pieds 6 pouces, je considère que le nombre des toises de la seconde dimension étant exprimé par un chiffre seulement, je puis faire la multiplication de toute la première dimension par 6 toises par un calcul de mémoire, comme on l'a fait au commencement du Chapitre précédent : ainsi faisant abstraction pour un moment des 3 pieds 6 pouces de la seconde dimension, je commence par multiplier les plus petites parties de la première dimension par 6 toises, en disant : 6 fois 7 font 42 lignes, qui valent 3 pouces 6 lignes. Ayant posé 6 lignes en leur place, je retiens 3 pouces ; je dis ensuite : 6 fois 8 font 48, & 3 de retenus font 51 pouces, qui valent 4 pieds 3 pouces : je pose 3 pouces, & retiens 4 pieds, & je viens

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	poi.
15.	4.	8.	7.	0.
6.	3.	6.	0.	0.
94.	4.	3.	6.	0.
7.	5.	4.	3.	6.
1.	1.	10.	8.	7.
103.	5.	6.	6.	1.

Nn iiij.

à la multiplication des pieds, en disant : 6 fois 4 font 24, & 4 de retenus font 28 pieds, qui valent 4 toises 4 pieds; je pose 4 pieds, & retiens 4 toises, que j'ajoute au produit de 15 toises par 6 pour avoir 94 : ainsi le produit de 6 toises par la première dimension est 94 toises 4 pieds 3 pouces 6 lignes, qui est une quantité qui contient autant de fois la première dimension, qu'il y a d'unités dans le nombre 6.

Présentement je considère que puisque chaque toise du nombre 6 a donné pour son produit une quantité semblable à celle de la première dimension, si j'ai à multiplier cette première dimension par des parties de la toise, il faut que le produit ait même rapport avec celui de la toise par la première dimension, que les parties avec la toise même. Cela posé, comme la première dimension doit être multipliée encore par 3 pieds, je considère que 3 pieds étant la moitié de la toise, que le produit de 3 pieds sera la moitié de la première dimension, qui est supposée dans ce cas avoir été multipliée par la toise; ainsi je dis : la moitié de 15 est 7, il reste une toise qui vaut 6 pieds, qui étant ajoutés avec 4 pieds font 10 pieds, dont la moitié est 5; je dis ensuite : La moitié de 8 est 4, & la moitié de 7 lignes est 3 lignes 6 points.

Comme il nous reste encore 6 pouces à multiplier, je considère que 6 pouces étant la sixième partie de 3 pieds, le produit de 6 pouces sera la sixième partie de celui de 3 pieds; ainsi je prends la sixième partie de ce produit, qui donne une toise 1 pied 10 pouces 8 lignes 7 points, qui étant ajoutés avec le reste, il vient 103 toises 5 pieds 6 pouces 6 lignes 1 point pour le produit total.

Pour multiplier 68 toises 3 pieds 4 pouces 9 lignes par 9 toises 4 pieds 9 pouces, je commence par multiplier la première dimension par 9, & le produit donne 617 toises 6 pouces 9 lignes; ensuite je considère que 4 pieds font les deux tiers de la toise; ainsi je prends deux fois le tiers, pour avoir moins d'embarras, c'est-à-dire, je prends chaque fois pour deux pieds, en disant : Le tiers

de 6 est 2, le tiers de 8 est encore 2, & il reste 2 toises, qui valent 12 pieds, qui étant ajoutez avec les 3 pieds qui sont sur la droite, font 15, dont le tiers est 5. Après cela le tiers de 4 est 1, & il reste un pouce, qui vaut 12 lignes, qui étant ajoutées avec 9, font 21 lignes, dont le tiers est 7; ainsi le produit de 2 pieds étant

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
68.	3.	4.	9.	0.
9.	4.	9.	0.	0.
617.	0.	6.	9.	0.
22.	5.	1.	7.	0.
22.	5.	1.	7.	0.
5.	4.	3.	4.	9.
2.	5.	1.	8.	4.
671.	2.	3.	0.	1.

22 toises 5 pieds 1 pouce 7 lignes, j'écris encore une seconde fois ce produit, afin que les deux fassent celui de 4 pieds; & comme il y a encore 9 pouces à multiplier, je prends seulement pour 6 pouces le quart du produit de 2 pieds, en disant: Le quart de 22 est 5, il reste 2, qui valent 12 pieds, & 5 font 17, dont le quart est 4, il reste 1 pied, qui vaut 12 pouces, dont le quart est 3, il reste encore 1 pouce, qui vaut 12 lignes, & 7 font 19, dont le quart est 4: enfin il reste 3 lignes, qui valent 36 points, dont le quart est 9 points; de sorte que le produit de 6 pouces est 5 toises 4 pieds 3 pouces 4 lignes 9 points. Mais comme je dois avoir le produit de 9 pouces, & que je n'ai encore que celui de 6, je prends pour le produit de 3 pouces la moitié de celui de 6 pouces, qui est 2 toises 5 pieds 1 pouce 8 lignes 4 points & demi: après quoi je fais l'addition de tous ces produits, qui font ensemble 671 toises 2 pieds 3 pouces 1 point & demi.

Pour multiplier 12 toises 5 pieds 6 pouces 4 lignes par 6 toises 4 pouces 8 lignes, je commence, comme à l'ordinaire, par multiplier la première dimension par 6 toises; après quoi je remarque que comme il n'y a point de pieds dans la seconde dimension, il n'est pas aisé de trouver le produit de 4 pouces, sans faire une fausse position; c'est pourquoi je suppose le produit d'un pied, en prenant la sixième partie de la première dimension, qui

est 2 toises 11 pouces 8 points, dont j'ai soin de barrer les chiffres ; & comme 4 pouces est le tiers d'un pied, je prends le tiers du produit d'un pied, qui est 4 pieds 3 pouces 8 lignes 2 points & deux tiers ; & comme il y a encore 8 lignes à multiplier, je vois que 8 lignes étant la sixième partie de 4 pouces (puisque 4 pouces valent 48 lignes) le produit de 8 lignes sera la sixième partie de celui de 4 pouces : après avoir pris cette sixième partie, qui est 8 pouces 7 lignes 4 points & 4 neuvièmes, j'additionne le tout pour avoir le produit total, qui est 78 toises 2 pieds 2 pouces 3 lignes 7 points $\frac{1}{9}$.

Pour multiplier 40 toises 3 pieds 6 pouces 8 lignes par 24 toises $\frac{5}{6}$ pieds 8 pouces, je commence par multiplier les toises par les toises, au lieu de multiplier d'abord les lignes, les pouces & les pieds de la première dimension, à cause qu'il y a plus d'une figure dans le nombre des toises de la seconde dimension ; ensuite j'agis comme j'ai fait dans le Chapitre précédent, en prenant pour 3 pieds la moitié de 24, qui est 12, n'ayant égard qu'aux nombres entiers de la seconde dimension ; ainsi je fais abstraction de 5 pieds & de 8 pouces, qui s'y trouvent, parce qu'il n'est pas encore tems de les multiplier. Ayant donc trouvé le produit de 3 pieds, qui est 12 toises, je considère que les 6 pouces qui sont dans la première dimension, étant la sixième partie de 3 pieds, c'est-à-dire, la sixième partie de 12, qui est 2 ; & ayant encore 8 lignes de la première dimension à multiplier, je vois que 6 pouces valant 72 lignes, les 8 lignes en font la neuvième partie, & par conséquent le produit de ces 8 lignes sera la neuvième partie du produit de 6 pouces. Or comme le produit de 6 pouces est 2 toises, je dis : La neuvième

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
12.	5.	6.	4.	0.
6.	0.	4.	8.	0.
77.	3.	2.	0.	0.
2.	0.	22.	0.	8.
	4.	3.	8.	2.
				$\frac{2}{3}$
		0.	8.	7.
				$\frac{4}{9}$
78.	2.	2.	3.	7.
				$\frac{1}{9}$

partie de 2 n'est rien , mais ce sont 2 toises , qui valent 12 pieds , dont la neuvième partie est 1 pied , & il en reste 3 , qui valent 36 pouces , dont la neuvième partie est 4 , que je place au rang des pouces.

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
40.	3.	6.	8.	0.
24.	5.	8.	0.	0.

Jusqu'ici nous n'avons fait que multiplier la première dimension par les 24 toises qui sont dans la seconde : mais comme ces 24 toises sont accompagnées de 5 pieds 8 pouces , il faut , comme dans les opérations

160.				
80.				
12.	0.	0.	0.	0.
2.	0.	0.	0.	0.
0.	1.	4.	0.	0.
20.	1.	9.	4.	0.
13.	3.	2.	2.	8.
4.	3.	0.	8.	10.

précédentes , chercher le produit de ces deux quantitez ; ainsi je considère que 5 pieds valent 3 & 2 , c'est-à-dire , la moitié & le tiers de la toise : je prends donc pour 3 pieds la moitié de toutes les quantitez qui se trouvent dans la première dimension , & pour 2 pieds le tiers de ces mêmes quantitez. Or comme ce dernier produit est celui de 2 pieds , je remarque que 8 pouces étant le tiers de 2 pieds , le produit de 8 pouces sera le tiers de celui de 2 pieds. Ayant donc pris le tiers de ce produit , je l'additionne avec les autres , pour avoir le produit total , qui est 1012 toises 3 pieds 4. pouces 3 lignes 6 points $\frac{2}{3}$.

Pour multiplier 36 toises 3 pouces 9 lignes par 50 toises 8 lignes , je multiplie les toises par les toises , comme à l'ordinaire ; ensuite pour trouver le produit de 3 pouces , je vois que j'ai besoin de supposer celui d'un pied : ainsi je prends la sixième partie de 50 toises , qui est 8 toises 2 pieds ; & comme 3 pouces font le quart d'un pied , je prends le quart de 8 toises 2 pieds , qui est 2 toises 6 pouces : après cela je cherche le produit de 9 lignes , en considérant que 9 lignes étant le quart de 3 pouces , qui valent 36 lignes , le quart du produit de 3 pouces

00

fera par conséquent celui de 9 lignes, je prends donc le quart de 2 toises 6 pouces, qui est 3 pieds 1 pouce 6 lignes.

Après cela je vois que j'ai 8 lignes dans la seconde dimension, & que n'ayant ni pieds ni pouces dans cette dimension, il faut nécessairement supposer des faux produits pour trouver celui de 8 lignes. Je cherche donc d'abord celui d'un pied, en prenant la sixième partie des quantitez qui composent la première dimension, & je trouve 6 toises 7 lignes & 6 points : mais comme le rapport de 8 lignes à un pied est encore trop grand, pour ne point fatiguer la mémoire, je prends la douzième partie de ce produit, qui est 3 pieds 7 points & demi pour le produit d'un pouce ; & comme 8 lignes sont les deux tiers d'un pouce, je prends pour leur produit les deux tiers de celui d'un pouce, lequel ayant été additionné, donne pour le produit total 1802 toises 5 pieds 7 pouces 6 lignes & 5 points.

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
36.	0.	3.	9.	0.
50.	0.	0.	8.	0.
1800.				
8.	2.	0.	0.	0.
2.	0.	6.	0.	0.
0.	3.	1.	6.	0.
6.	0.	0.	7.	6.
0.	3.	0.	0.	7. $\frac{1}{2}$
0.	1.	0.	0.	2. $\frac{1}{2}$
0.	1.	0.	0.	2. $\frac{1}{2}$
1802.	5.	7.	6.	5.

CHAPITRE III.

Où l'on donne la manière de multiplier trois dimensions exprimées en toises, pieds, pouces, &c.

555. **L**E calcul que l'on a enseigné dans les deux Chapitres précédens, ne convient qu'aux superficies, parce que nous n'y avons supposé que deux dimensions; il est vrai que le calcul de trois dimensions ne diffère pas beaucoup de celui-ci, puisque pour en avoir le produit, il ne faut que multiplier celui des deux premières dimensions par la troisième : mais comme le produit de trois dimensions donne non seulement des toises cubes, mais aussi des pieds, des pouces, & des lignes de toise cube. Voici l'idée qu'il faut avoir de ces différentes parties.

Nous avons dit que la toise cube étoit composée de 216 pieds cubes; mais dans le calcul on ne s'embarrasse point de ces sortes de pieds; car on entend par un pied de toise cube la sixième partie de la même toise, qui est (si l'on veut) de 36 pieds cubes, qui font un parallélépipède EAFGHID, qui a pour base une toise quarrée EAHD, & pour hauteur la ligne HG d'un pied : de sorte que ce solide est la sixième partie du corps EABC, qui est une toise cube. On considérera de même que le pouce de toise cube est un parallélépipède, qui a une toise quarrée pour base sur un pouce de hauteur, & qu'une ligne de toise cube est un parallélépipède, qui a pour base une toise quarrée, & une ligne pour hauteur : ainsi des autres parties. Fig. 2151

556. Il suit de cette définition que 12 lignes de toise cube font un pouce de la même toise; que 12 pouces font un pied, & que 6 pieds font une toise cube; puisque tous ces solides ont pour base une toise quarrée, & des hauteurs, qui étant jointes ensemble, peuvent donner

O o ij

291 NOUVEAU COURS

des toises cubes, ou des parties de toises cubes, comme on le va voir dans les opérations suivantes.

Pour multiplier trois dimensions, dont la première est de 8 toises 2 pieds 4 pouces; la seconde 6 toises 4 pieds 8 pouces; & la troisième 5 toises 3 pieds 6 pouces: il faut commencer par multiplier la seconde dimension par la première, & le produit sera 56 toises 5 pieds 1 pouce 9 lignes 4 points, qu'il faut ensuite multiplier par la troisième dimension, agissant comme dans les règles des Chapitres précédens, c'est-à-dire, qu'il faut faire comme si le produit des deux premières dimensions ne faisoit qu'une dimension.

Je dis donc: 5 fois 4 font 20, qui sont autant de points de toise cube, c'est-à-dire, que ce sont autant de petits parallépipèdes, qui ont pour base une toise carrée, & pour hauteur un point. Car si l'on fait attention que chaque unité du nombre 4 est un petit parallélogramme, qui a pour base un point, & pour hauteur une toise; puis-que ce sont des points de

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
8.	2.	4.	0.	0.
6.	4.	8.	0.	0.
5.	3.	6.	0.	0.
8.	2.	4.	0.	0.
6.	4.	8.	0.	0.
50.	2.	0.	0.	0.
2.	4.	9.	4.	0.
2.	4.	9.	4.	0.
	5.	7.	1.	4.
56.	5.	1.	9.	4.
5.	3.	6.	0.	0.
284.	1.	8.	10.	8.
28.	2.	6.	10.	8.
4.	4.	5.	1.	9.
317.	2.	8.	11.	1.

toise carrée*, l'on verra que multipliant ce parallélogramme par une ou plusieurs toises, qu'ils seront changez en parallépipèdes, qui auront deux dimensions d'une toise, qui font ensemble une toise carrée; ce qui répond à la définition. De même si l'on multiplie 9 lignes de toise carrée par des toises, l'on aura encore des petits parallépipèdes, qui auront pour base une toise carrée, & pour hauteur une ligne; puisque l'on aura

*Art. 552.

multiplié par des toises les rectangles, qui ont une de leurs dimensions, qui vaut une toise; il en fera ainsi des pouces & des pieds: à l'égard des toises, il n'y a point de doute que multipliant des toises quarrées par des toises courantes, le produit ne donne que des toises cubes.

Ainsi multipliant 56 toises 5 pieds 1 pouce 9 lignes 4 points de toise quarrée par 5 toises courantes, le produit fera 284 toises 1 pied 8 pouces 10 lignes 8 points de toise cube.

Or comme 56 toises 5 pieds 1 pouce 9 lignes 4 points étant multipliés par une toise, donneront des toises & des parties de toise cube, qui seront toujours exprimées par les mêmes nombres qui sont ici, c'est-à-dire, par 56 toises 5 pieds, &c. Si l'on suppose que cette multiplication a été faite, la moitié de cette quantité sera donc le produit de 3 pieds; ainsi comme il y a 3 pieds dans la seconde dimension, je prends la moitié de cette quantité, qui sera 28 toises 2 pieds 6 pouces 10 lignes 8 points, que je regarde comme des toises & des parties de toise cube, qui composent le produit de 3 pieds.

Enfin comme il y a encore 6 pouces dans la troisième dimension, je considère que 6 pouces étant la sixième partie de 3 pieds, le produit de 6 pouces sera la sixième partie de celui de 3 pieds: ainsi prenant la sixième partie de ce produit, l'on aura 4 toises 4 pieds 5 pouces une ligne 9 points & un tiers pour le produit de 6 pouces, qui étant ajoutés avec les autres, donneront le produit total de 317 toises 2 pieds 8 pouces 11 lignes 1 point & un tiers.

Pour multiplier trois dimensions, dont la première est 15 toises 5 pieds 3 pouces; la seconde 2 toises 3 pieds 9 pouces, & la troisième 6 toises 2 pieds 6 pouces, je multiplie, comme ci-devant, les deux premières dimensions l'une par l'autre pour avoir leur produit, qui est 136 toises 5 pieds 6 pouces 4 lignes 6 points; & comme ce produit donne des toises & des parties de toises quar-

Q o iij.

rées, je multiplie encore le tout par la troisième dimension, c'est-à-dire, par 6 toises 2 pieds 6 pouces, & le produit donne 878 toises 3 pieds 5 pouces 10 lignes 10 points & demi.

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
15.	5.	3.	0.	0.
8.	3.	9.	0.	0.
6.	2.	6.	0.	0.
15.	5.	3.	0.	0.
8.	3.	9.	0.	0.
127.	0.	0.	0.	0.
7.	5.	7.	6.	0.
1.	5.	10.	10.	6.
136.	5.	6.	4.	6.
6.	2.	6.	0.	0.
821.	3.	2.	3.	0.
45.	3.	10.	1.	6.
11.	2.	5.	6.	4. $\frac{1}{2}$
878.	3.	5.	10.	10 $\frac{1}{2}$

Pour multiplier trois dimensions, dont la première est 4 toises 2 pieds 5 pouces ; la seconde 3 toises 1 pied 6 pouces ; & la troisième 5 pieds 4 pouces, je commence par multiplier les deux premières dimensions, dont le produit est 14 toises 1 pied 10 pouces 3 lignes : ensuite je multiplie ce produit par 5 pieds 4 pouces ; & comme il n'y a point de toises dans la troisième dimension, je pose un zero en leur place, & je multiplie par 5 pieds 4 pouces, commençant par prendre pour 5 pieds la moitié de 14 toises 1 pied, &c. ensuite je prends pour 2 pieds le tiers de la même quantité, & le produit donne 4 toises

4 pieds 7 pouces 5 lignes, dont je prends la sixième partie pour le produit de 4 pouces, parce que 4 pouces est la sixième partie de 2 pieds : enfin j'additionne ce produit avec les autres pour avoir 12 toises 4 pieds 3 pouces 9 lignes 4 points ; ce qui est le produit total.

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
4.	2.	5.	0.	0.
3.	1.	6.	0.	0.
0.	5.	4.	0.	0.
4.	2.	5.	0.	0.
3.	1.	6.	0.	0.
13.	1.	3.	0.	0.
	4.	4.	10.	0.
	2.	2.	5.	0.
14.	1.	10.	3.	0.
0.	5.	4.	0.	0.
7.	0.	11.	1.	6.
4.	4.	7.	5.	0.
0.	4.	9.	2.	10.
12.	4.	3.	9.	4.

Pour multiplier trois dimensions, dont la première est 5 pieds 9 pouces 6 lignes ; la seconde 3 pieds 6 pouces ; & la troisième 4 pieds 8 pouces 6 lignes , je range les deux premières dimensions l'une sur l'autre, en mettant des zeros à la place des toises ; ensuite comme il se trouve 3 pieds dans la seconde dimension, je prends la moitié des termes de la première dimension, pour avoir le produit de 3 pieds ; & comme il y a encore 6 pouces, qui valent la sixième partie de 3 pieds, je prends pour le produit de 6 pouces la sixième partie du produit de 3 pieds ; & l'addition étant faite, il vient 3 pieds 4 pouces 6 lignes

6 points pour le produit des deux premières dimensions, que je multiplie ensuite par la troisième, qui est, comme nous l'avons dit, composée de 4 pouces 8 lignes 6 points :

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
0.	5.	9.	6.	0.
0.	3.	6.	0.	0.
0.	4.	8.	6.	0.
0.	5.	9.	6.	0.
0.	3.	6.	0.	0.
0.	2.	10.	9.	0.
0.	0.	5.	9.	6.
0.	3.	4.	6.	6.
0.	4.	8.	6.	0.
0.	1.	1.	6.	2.
0.	1.	1.	6.	2.
0.	0.	4.	6.	$0.\frac{2}{3}$
0.	0.	2.	2.	$6.\frac{1}{6}$
0.	0.	0.	3.	$4.\frac{7}{12}$
0.	2.	7.	9.	$9.\frac{1}{8}$

ainsi je commence par prendre deux fois le tiers de ce produit, pour avoir celui de 4 pieds : & comme celui de 2 pieds est 1 pied 1 pouce 6 lignes 2 points, je considère que 8 pouces étant le tiers de 2 pieds, le produit de 8 pouces sera le tiers de celui de 2 pieds, qui donne 4 pouces 6 lignes & $\frac{2}{3}$ de points : mais nous avons encore 6 lignes dans la troisième dimension, dont le rapport étant un peu éloigné de 8 pouces, je trouve qu'il est moins embarrassant de faire un faux produit ; & comme celui de 2 pouces conviendrait fort, parce qu'on n'auroit qu'à prendre le quart pour avoir celui de 6 lignes : je prends donc le quart du produit de 8 pouces, pour avoir celui

de 2 pouces, qui est 1 pouce une ligne 6 points & $\frac{1}{2}$, dont je coupe les figures; & prenant le quart de ce produit, il vient 3 lignes 4 points & $\frac{7}{12}$ pour le produit de 6 lignes: & comme il ne reste plus rien à multiplier, je fais l'addition de tous les produits pour avoir le total, qui est 2 pieds 7 pouces 9 lignes 9 points & $\frac{1}{4}$ de points cubes.

A V E R T I S S E M E N T.

§ 56. Comme les preuves de toutes les Regles d'Arithmétique se font par des Regles contraires, il semble que la meilleure preuve que l'on puisse donner du calcul du Toisé, seroit qu'après avoir multiplié deux dimensions, l'on divisât le produit par la première dimension pour avoir la seconde au quotient, ou bien diviser par la seconde pour avoir la première; il y en a qui pratiquent cette preuve; mais ils sont obligés de réduire tous les termes du produit en leur moindre espece, aussi-bien qu'une des dimensions, c'est-à-dire, que si l'on a réduit le produit en lignes, qu'il faut aussi réduire une des dimensions en lignes: après cela on fait une division, dont on réduit le quotient en toises, en pieds, &c. pour avoir l'autre dimension; mais comme cette preuve demande beaucoup d'operations, en voici une beaucoup plus simple.

Après que l'on a trouvé le produit des deux dimensions, pour voir si l'operation est juste, l'on prend la moitié de la première dimension, & l'on double la seconde; ensuite l'on multiplie les deux dimensions ainsi changées l'une par l'autre, & il vient un second produit, qui doit être égal au premier. Par exemple, pour sçavoir si le produit de 6 toises 5 pieds 4 pouces par 4 toises 2 pieds 6 pouces, qui est 30 toises 2 pieds 6 pouces 8 lignes, est bon; il faut prendre la moitié de la première dimension pour avoir 3 toises 2 pieds 8 pouces, & doubler la seconde, qui vaudra 8 toises 5 pieds: après cela si l'on multiplie ces deux quantitez l'une par l'autre, l'on trouvera que le produit est encore 30 toises 2 pieds 6 pouces 8 lignes; ce qui ne peut arriver autrement, si l'operation est bien faite.

P p

CHAPITRE IV.

Où l'on donne la maniere de calculer le Toisé de la Charpente.

Fig. 215. 557. **L**É Toisé de la Charpente est fort différent de celui des autres ouvrages, parce que ce Toisé a une mesure particulière, que l'on nomme *Solive*, qui est une quantité qui contient 3 pieds cubes de bois; de sorte que si l'on a une pièce de bois DC, dont la longueur AD soit de 6 pieds, la largeur AB de 12 pouces, & l'épaisseur BC de 6 pouces, cette pièce composera une Solive, puisqu'elle vaut 3 pieds cubes. Or comme la Toise cube vaut 216 pieds cubes, & que 216 divisé par 3 donne 72, il s'ensuit qu'une Solive est la septante-deuxième partie d'une Toise cube.

La Solive, ainsi que la Toise, est divisée en 6 pieds, que l'on nomme *pieds de Solive*, qui est une quantité qui a une toise de longueur sur un pied de largeur, & un pouce d'épaisseur: de sorte que si la ligne BG est la sixième partie de la ligne BC, la ^{partie} Solive DAFGBEH fera un pied de Solive, puisqu'il est la sixième partie de DC.

Comme un pied de Toise cube vaut 36 pieds cubes, la Solive en fera donc la douzième partie: & comme un pied de Solive est la sixième partie de la Solive, il s'ensuit qu'un pied de Solive est la septante-deuxième partie d'un pied de Toise cube, puisqu'il faut 6 pieds de Solive pour faire une Solive, & 12 Solives pour faire un pied de Toise cube. Comme le pouce de Solive est la douzième partie du pied de Solive, l'on verra de même qu'il est la septante-deuxième partie d'un pouce de Toise cube: il en fera ainsi des lignes & des points.

Il suit de ce qu'on vient de dire que si l'on a une pièce de bois qui contienne un certain nombre de toises, de pieds & de pouces cubes, pour réduire cette pièce en So-

lives, il faut multiplier sa valeur par 72, & le produit sera la quantité de Solives contenues dans la pièce.

Par exemple, si l'on suppose que 2 toises 3 pieds 6 pouces cubes soient la valeur d'une pièce de bois, je considère que chaque toise de cette quantité vaut 72 Solives, chaque pied 72 pieds de Solive, & chaque pouce 72 pouces de Solive; ainsi si l'on multiplie 2 toises 3 pieds 6 pouces cubes par 72, on aura 186 Solives.

toises.	pieds.	pouces cubes.
2.	3.	6.
72.		
144.		
36.		
6.		
186	Solives.	

Pour mesurer une pièce de bois, dont la première dimension a 4 toises 5 pieds 9 pouces; la seconde 1 pied 6 pouces; & la troisième

1 pied 3 pouces; je multiplie, comme à l'ordinaire, la première dimension par la seconde, & le produit donne une toise un pied cinq pouces trois lignes, que je multiplie par la troisième dimension pour avoir un pied six pouces sept lignes un point & demi. Présentement pour réduire cette quantité en Solives, je la multiplie par 72. Pour cela je prends pour 1 pied la dixième partie de 72, qui est 7, & pour 6 pouces la moitié du produit d'un pied, qui est 6: & comme il y a 7 lignes, je prends d'abord pour 6 la douzième partie du produit de 6 pouces, qui est 3 pieds: ensuite pour une ligne

toises.	pieds	pouces.	lignes.	points.
4.	5.	9.	0.	0.
	1.	6.	0.	0.
0.	4.	11.	6.	0.
0.	2.	5.	9.	0.
1.	1.	5.	3.	0.
0.	1.	3.	0.	0.
0.	1.	2.	10.	6.
0.	0.	3.	8.	7. $\frac{1}{2}$
0.	1.	6.	7.	1. $\frac{1}{2}$
72.				
12.	0.	0.	0.	0.
6.	0.	0.	0.	0.
0.	3.	0.	0.	0.
0.	0.	6.	0.	0.
0.	0.	0.	6.	0.
0.	0.	0.	3.	0.
18.	3.	6.	9.	0.

P p ij

la sixième partie du produit précédent, qui donne 6 pouces, il reste encore un point & demi; je prends premièrement pour un point la douzième partie de 6 pouces, qui est 6 lignes. Enfin pour la moitié d'un point la moitié du dernier produit pour avoir 3 lignes; après quoi j'additionne le tout, qui donne 18 Solives 3 pieds 6 pouces 9 lignes de Solive, pour la valeur de la piece de bois.

Il y a une manière de calculer les bois, qui est bien plus courte que la précédente; c'est de réduire d'abord une des deux dimensions de l'équarrissage en pouces: ensuite les mettre au rang des toises, & l'autre à la place qu'elle doit occuper naturellement. L'on multiplie ces deux dimensions l'une par l'autre, comme dans les Regles précédentes, regardant celle qu'on a mise au rang des toises comme des toises mêmes; après quoi on multiplie le produit qui en vient par la longueur de la piece, pour avoir un second produit, qui donne le nombre des Solives, des pieds & des pouces de Solive, qui sont contenues dans la piece.

Par exemple, pour calculer la même piece de bois que ci-devant, qui a 1 pied 6 pouces sur 1 pied 3 pouces d'équarrissage, & 4 toises 5 pieds 9 pouces de longueur, je réduis une des dimensions de l'équarrissage en pouces, qui fera, par exemple, un pied 6 pouces pour avoir 18 pouces, que je mets au rang des toises, & 1 pied 3 pouces de l'autre dimension à leur place ordinaires; ensuite je prends pour 1 pied la sixième partie de 18, qui est 3: & comme il y a encore 3 pouces, qui font le quart d'un pied, je prends le quart du produit d'un pied, pour avoir celui de 3 pouces, qui est 4 pieds 6 pouces; & j'additionne le tout pour avoir le produit de

toises.	pieds.	pouces.	lig.
18.	0.	0.	0.
0.	1.	3.	0.
3.	0.	0.	0.
	4.	6.	0.
3.	4.	6.	0.
4.	5.	9.	0.
15.	0.	0.	0.
1.	1.	6.	0.
1.	5.	3.	0.
	2.	9.	9.
18.	3.	6.	9.

3 toises 4 pieds 6 pouces, qu'il faut multiplier par la longueur de la pièce, c'est-à-dire, par 4 toises 5 pieds 9 pouces, & l'on aura 18 Solives 3 pieds 6 pouces 9 lignes de Solive.

Pour entendre ceci, considérez que si l'on a trois quantitez a, b, c , à multiplier l'une par l'autre, que le produit sera abc ; & que si ce produit doit être multiplié par d , l'on aura $abcd$: mais si au lieu de multiplier le produit abc par d , l'on multiplioit seulement une des dimensions, comme a par d , l'on aura ad, bc , dont le produit donne encore $abcd$; ainsi c'est la même chose de multiplier le produit de trois dimensions par une quantité, ou de multiplier une des dimensions par la même quantité, & ensuite ce produit par les autres dimensions, puisqu'à la fin l'on trouvera toujours la même chose pour le produit total.

558. Or si l'on fait attention qu'une toise vaut 72 pouces, l'on verra que mettant un pouce au rang des toises, c'est comme si on l'avoit multiplié par 72; ainsi quand nous avons mis 18 pouces au rang des toises, on les a donc multipliés par 72, & par conséquent le produit de cette quantité par les deux autres dimensions, est devenu 72 fois plus grand qu'il n'eût été, si l'on avoit mis les 18 pouces à leur place ordinaire; ce qui fait voir que le produit doit donner des Solives: car le produit total devient 72 fois plus grand qu'il n'eût été, si l'on n'avoit pas mis les 18 pouces au rang des toises, & que l'on eût fait l'opération à l'ordinaire. Mais pour donner aux Commençans plus de facilité de se servir de cette méthode, voici encore quelque exemple sur le même sujet.

Pour sçavoir combien il y a de Solives dans une pièce de bois, qui a 3 toises 4 pieds 8 pouces de longueur sur 8 à 14 pouces d'équarrissage, je pose 8 pouces au rang des toises, & l'autre dimension, qui vaut 1 pied 2 pouces, au rang qu'elle doit occuper; & je dis: La sixième partie de 8 est 1, il reste 2, qui valent 12, dont la sixième

Partie

me partie est 2 ; & comme il y a encore 2 pouces, qui font la sixième partie d'un pied, je prends pour 2 pouces la sixième partie du produit d'un pied pour avoir 1 pied 4 pouces, & le produit total est une toise 3 pieds 4 pouces, que je multiplie par la longueur, c'est-à-dire, par 3 toises 4 pieds 8 pouces, & le produit donne 5 Solives 5 pieds 3 pouces une ligne 4 points de Solive pour la valeur de la piece.

L'on peut remarquer que ce n'est pas une nécessité absolue de commencer par multiplier les deux dimensions de l'équarrissage l'une par l'autre : car si l'on veut, il n'y a qu'à multiplier la longueur par la dimension de l'équarrissage, qui doit être mise au rang des toises : ainsi pour avoir la valeur de la piece de bois précédente, je prends pour première dimension la longueur, qui est 3 toises 4 pieds 8 pouces ; & supposant que 8 pouces de l'équarrissage valent 8 toises, je les pose pour seconde dimension, & la multiplication étant faite, il vient 30 toises 1 pied 4 pouces, qui étant multipliés par 1 pied 2 pouces, donnent encore 5 Solives 5 pieds 3 pouces une ligne 4 points de Solive.

Pour calculer la valeur d'une piece de bois, qui a 3 toises 4 pieds de longueur sur 10 à 9 pouces 6 lignes d'équarrissage, je prends la plus simple de deux dimensions

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
8.	0.	0.	0.	0.
0.	1.	2.	0.	0.
1.	2.	0.	0.	0.
0.	1.	4.	0.	0.
1.	3.	4.	0.	0.
3.	4.	8.	0.	0.
4.	4.	0.	0.	0.
0.	3.	1.	4.	0.
0.	3.	1.	4.	0.
0.	1.	0.	5.	4.
5.	5.	3.	1.	4.

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
3.	4.	8.	0.	0.
8.	0.	0.	0.	0.
30.	1.	4.	0.	0.
0.	1.	2.	0.	0.
5.	0.	2.	8.	0.
0.	5.	0.	5.	4.
5.	5.	3.	1.	4.

de l'équarrissage, c'est-à-dire, celle qui est composée des pouces seulement, pour la mettre au rang des toises: ainsi ayant pris 10 pour la première dimension, je la multiplie par la longueur de la pièce, ou par l'autre dimension de l'équarrissage; car il est indifférent de multiplier d'abord par l'un ou l'autre de ces quantitez, comme on l'a déjà dit: ainsi je multiplie 10 par 3 toises 4 pieds pour avoir le produit, qui est 36 toises 4 pieds, que je multiplie ensuite par 9 pouces 6 lignes, & il vient 4 Solives 5 pieds 4 lignes de Solives, pour la valeur de la pièce de bois.

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
10.	0.	0.	0.	0.
3.	4.	0.	0.	0.
30.				
5.	0.	0.	0.	0.
1.	4.	0.	0.	0.
36.	4.	0.	0.	0.
0.	0.	9.	6.	0.
6.	0.	8.	0.	
3.	0.	4.	0.	
1.	3.	2.	0.	
	1.	6.	4.	
4.	5.	0.	4.	

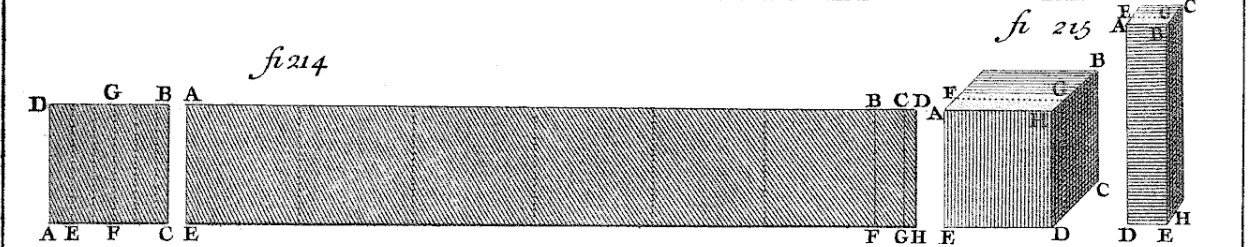
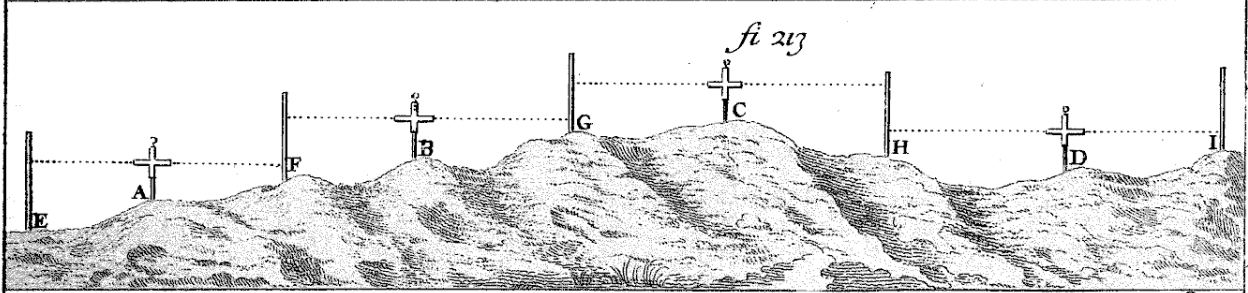
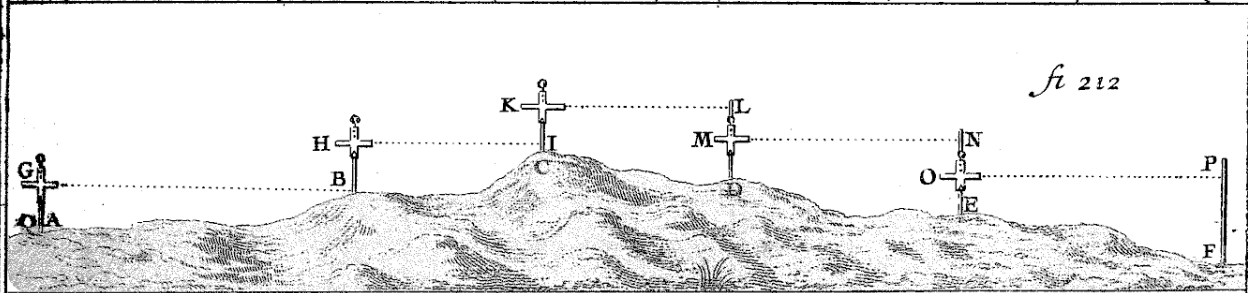
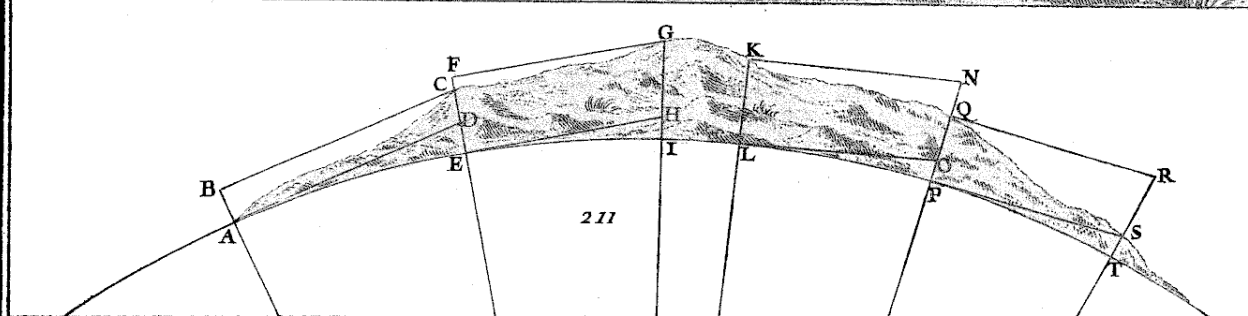
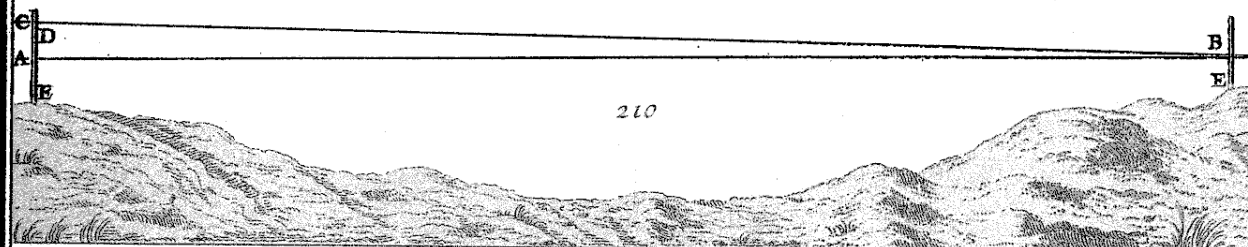
§ 59. S'il arrive que dans les deux dimensions de l'équarrissage il se trouve des pouces & des lignes, il faut pour la dimension, qu'on doit changer de valeur, mettre les pouces au rang des toises, comme à l'ordinaire, & regarder les lignes de cette dimension comme des pieds; ainsi on les mettra au rang des pieds, avec cette attention, qu'au lieu de mettre autant de pieds qu'il y a de lignes, il n'en faut mettre que la moitié, c'est-à-dire, que si cette dimension est composée de 6 pouces 8

lignes, l'on mettra 6 pouces au rang des toises, & la moitié des lignes au rang des pieds, pour avoir 6 toises 4 pieds; & si au lieu de 8 on en avoit 7 ou 9, ou tout autre nombre impair, on en prendra toujours la moitié, & l'on marquera 3 pieds 6 pouces, ou bien 4 pieds 6 pouces. L'on va voir ceci dans les deux exemples suivans.

Pour toiser une piece de bois qui a 6 toises 3 pieds de longueur sur 9 pouces 6 lignes à 10 pouces 8 lignes d'équarrissage, il faut, pour changer une des deux dimensions de l'équarrissage, qui sera, par exemple, 9 pouces 6 lignes, mettre 9 pouces au rang des toises, & la moitié de 6 lignes au rang des pieds, pour avoir 9 toises 3 pieds, qu'il faut multiplier par l'autre dimension, c'est-à-dire, par 10 pouces 8 lignes, pour avoir une toise 2 pieds 5 pouces 4 lignes au produit, qui étant multiplié par la longueur de la piece, l'on verra qu'elle contient 9 Solives 10 pouces 8 lignes.

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
9.	3.	0.	0.	0.
0.	0.	10.	8.	0.
2.	3.	6.	0.	0.
0.	4.	9.	0.	0.
0.	3.	2.	0.	0.
0.	0.	6.	4.	0.
1.	2.	5.	4.	0.
6.	3.	0.	0.	0.
8.	2.	8.	0.	0.
0.	4.	2.	8.	0.
9.	0.	10.	8.	0.

Pour trouver la valeur d'une piece de bois, qui a 5 pieds 3 pouces de longueur sur 8 pouces 7 lignes à 9 pouces 4 lignes



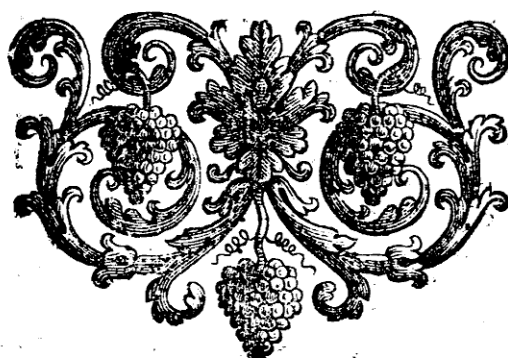
gnes d'équarrissage, je porte 8 pouces à l'endroit des toises; & considérant les 7 lignes de cette dimension comme valant des pieds, je marque 3 pieds 6 pouces; ensuite je multiplie cette dimension ainsi changée par 9 pouces 6 lignes, & le produit donne une toise 9 pouces 6 lignes 6 points, qui étant multiplié par 5 pieds 8 pouces, il vient une Solive 5 pouces 1 point $\frac{2}{3}$ pour la valeur de la pièce.

<i>toises.</i>	<i>pieds.</i>	<i>pouces.</i>	<i>lignes.</i>	<i>points.</i>
8.	3.	6.	0.	0.
0.	0.	9.	6.	0.
2.	2.	7.	0.	0.
0.	4.	3.	6.	0.
0.	2.	1.	9.	0.
0.	0.	4.	3.	6.
1.	0.	9.	6.	6.
0.	5.	8.	0.	0.
0.	3.	4.	9.	3.
0.	2.	3.	2.	2.
0.	0.	9.	0.	8. $\frac{2}{3}$
1.	0.	5.	0.	1. $\frac{2}{3}$

560. Pour rendre raison de ce que nous avons dit qu'il falloit regarder les lignes comme des pieds, après en avoir pris la moitié, considérez que nous avons dit qu'il falloit multiplier une des dimensions par 72, pour que la suite de la règle donnât des Solives : pour cela si la dimension est 8 pouces 7 lignes, nous sçavons que mettant 8 pouces à l'endroit des toises, la multiplication par 72 se fait tout d'un coup; mais à l'égard de ces lignes qui restent, remarquez que si on les mettoit au rang des pouces, c'est comme si on les multiplioit par 12; & que si

Q 9

du rang des pouces on les porte au rang des pieds ; c'est comme si on les multiplioit encore par 12 : ainsi quand on pose des lignes au rang des pieds , c'est proprement les multiplier par 144 ; mais comme , selon notre regle , elles ne doivent être multipliées que par 72 , qui est la moitié de 144 : il faut donc , si l'on porte les lignes au rang des pieds , n'en prendre que la moitié , pour n'avoir que la moitié de 144.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.



CINQUIÈME PARTIE.

Où l'on applique la Géométrie à la mesure des Superficies & des Solides.

CHAPITRE PREMIER.

De la mesure des Superficies.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Problème.

561. **M** *Évaluer les Figures triangulaires.*

Si l'on a un Triangle rectangle ABC, dont la base BC soit de 8 pieds, & la hauteur AB de 5, il faut, pour en trouver la superficie, multiplier la moitié de la base par toute la perpendiculaire, ou la moitié de la perpendiculaire par toute la base, & l'on aura 20 pieds quarrés pour la valeur du Triangle.*

PLANS
CHE 16.
Fig. 216.

562. Si le Triangle n'étoit pas rectangle, comme DEF, il faudroit, en connoissant les trois côtes, chercher la valeur de la perpendiculaire EG; * & multiplier encore la moitié de la base par toute la perpendiculaire, ou toute la perpendiculaire par la moitié de la base.

*Art. 239.

*Art. 484.

563. Mais comme il peut arriver que la perpendiculaire au lieu de tomber dans le Triangle, tombe en dehors, comme HL; en ce cas il en faut chercher la valeur*, & la multiplier par la moitié de la base IK.

Fig. 217.

*Art. 254.

Qq ij

PROPOSITION II.

Problème.

- Fig. 218. 564. *Trouver la superficie des Figures quadrilateres.*
 Pour trouver la superficie du Quarré AC, dont le côté seroit, par exemple, de 7 pieds, il faut multiplier 7 par lui-même, c'est-à-dire, AB par BC, & le produit sera 49 pieds, qui est la valeur du Quarré AC.
- Fig. 219. 565. Si au lieu d'un Quarré l'on a un Rectangle DF, dont la base DE est supposée de 5 pieds, & la hauteur EF de 12, l'on multipliera 5 par 12, pour avoir au produit 60 pieds, qui seront la valeur du Rectangle.
566. Mais si au lieu d'un Rectangle DF l'on avoit un Parallelogramme GK, dont on voulût avoir la superficie, il faudroit prolonger la base GL, & abaisser la perpendiculaire KI, qui sera la hauteur du Parallelogramme * ; & supposant que cette perpendiculaire soit de 10 pieds, & la base GL de 4, l'on multipliera 10 par 4, & le produit sera 40 pieds pour la valeur du Parallelogramme.
- *Art. 234.
- Fig. 221. 567. Si la figure est trapezoïde, comme ABCD, & que le côté BA soit perpendiculaire sur les deux côtes parallèles BC & AD, il faut joindre ces deux côtes ensemble pour avoir la base AE du Triangle ABE, qui sera égal au Trapezoïde. Ainsi supposant que le côté BC soit de 4 pieds, ce côté AD de 10, la hauteur BA de 12, la base AE, ou autrement la somme des deux côtes sera de 14, qu'il faut multiplier par 6, moitié de la perpendiculaire, l'on aura 84 au produit pour la superficie du Triangle ABE, qui est la même que celle du Trapezoïde, parce que les Triangles BCF & FDE sont égaux.
568. Si l'on veut encore d'une autre façon trouver la superficie du Trapezoïde, il n'y a qu'à chercher une moyenne arithmétique * GF entre BC & AD, c'est-à-dire, entre 4 & 10, l'on trouvera qu'elle est 7 ; & si l'on multiplie cette moyenne par toute la hauteur BA, qui est 12, l'on aura 84 pour la superficie ; ce qui est
- *Art. 166.

évident, puisque le Rectangle ABHI est égal au Trapezoïde ABCD, à cause que le Triangle CHF est le même que FID.

PROPOSITION III.

Problème.

569. *Mesurer la superficie des Poligones reguliers & irreguliers.* Fig. 212.

Si l'on veut sçavoir la superficie d'un Poligone regulier, il faut du centre E abaisser une perpendiculaire EB sur un des côtez CD, & tirer les rayons EC & ED, qui donneront le Triangle isoscèle ECD. Or comme on connoîtra les angles de la base de ce Triangle *, puisque le Poligone est regulier, & que d'ailleurs on connoît le côté CD, on aura le Triangle rectangle EBD, duquel il sera facile de connoître le côté EB *: & supposant qu'on l'a trouvé de 6 pieds, on ajoutera ensemble tous les côtez du Poligone, dont la somme sera, par exemple, 48, qu'il faudra multiplier par 3, moitié de la perpendiculaire, pour avoir 144 pieds, qui sera la valeur du Poligone.

Art. 291.

* Art. 502.

570. Si le Poligone est irregulier, comme ABCDEF, l'on tirera du point E les lignes EC, EB, EA, qui diviseront le Poligone en quatre Triangles, dont le premier aura pour hauteur la perpendiculaire FG; le second, la perpendiculaire AH; le troisième, la perpendiculaire CI; & le quatrième, la perpendiculaire DK. Cela posé, si l'on mesure sur le terrain avec la toise, ou sur le papier avec une échelle, la valeur des perpendiculaires, aussi bien que celles des lignes sur lesquelles ces perpendiculaires tombent, l'on n'aura qu'à faire autant de multiplications qu'il y a de Triangles; & ajoutant tous les produits ensemble, l'on aura la valeur du Poligone.

Fig. 223.

Qq üj

PROPOSITION IV.

Problème.

Fig. 224. 571. *Mesurer la superficie des Cercles, & de leurs parties.*

Pour mesurer la superficie d'un Cercle AB, il faut connoître la valeur de son diamètre & de sa circonference, comme on l'a dit art. 320. & multiplier la moitié de la circonference par la moitié du diamètre, & le produit donnera la valeur du Cercle. Par exemple, pour trouver la superficie d'un Cercle, dont le diamètre est 14, je cherche sa circonference, qui sera 44; & prenant la moitié de 44, qui est 22, & la moitié de 14, qui est 7, je multiplie ces deux nombres l'un par l'autre pour avoir 154, qui sera la superficie du Cercle.

Fig. 225. 572. Si l'on veut sçavoir la superficie d'un Secteur de Cercle, il faut connoître l'angle formé par les deux rayons, & la valeur du rayon. Ainsi supposant que l'angle du Secteur ABC est de 60 degrez, & le rayon de 7 pieds, je commence par trouver la valeur du Cercle d'où est provenu le Secteur, laquelle se trouve de 154, & puis je fais une Regle de trois, en disant : Si 360, valeur de toute la circonference, m'a donné 154 pour la superficie qu'elle renferme, combien me donneront 60, valeur de la circonference du Secteur, pour la superficie qu'elle renferme, l'on trouvera 25 pieds 8 pouces.

Fig. 226. 573. Enfin pour trouver la valeur d'un Segment de Cercle, tel que DGF, il faudra commencer par en faire un Secteur, dont on cherchera la superficie, que je suppose encore être 25 pieds 8 pouces. Cela posé, on cherchera la superficie du Triangle DEF, que l'on trouvera à peu près de 21 pieds; & soustrayant cette quantité de 25 pieds 8 pouces, le reste sera la valeur du Segment, qui sera environ de 4 pieds 8 pouces.

PROPOSITION V.

Problème.

574. *Mesurer la superficie d'une Ellipse.*

Fig. 227.

*Art. 245.

Nous avons vu * que les Elemens FH, & EI d'un quart de Cercle, étoient en même raison avec les Elemens FG & ED d'un quart d'Ellipse; par conséquent il y aura donc même raison de la somme de tous les antecédens à la somme de tous les conséquens, que d'un antécédent à son conséquent *, c'est-à-dire, que le quart de Cercle EAI est au quart d'Ellipse EAD, comme la ligne EI est à la ligne ED, ou bien comme la ligne AB est à la ligne CD: & si au lieu du quart de Cercle, & du quart d'Ellipse, l'on prend tout le Cercle & toute l'Ellipse, il y aura encore même raison du Cercle à l'Ellipse, que de la ligne AB à la ligne CD; ce qui fait voir que la superficie d'un Cercle qui auroit pour diamètre le grand axe d'une Ellipse est à la superficie de l'Ellipse, comme le grand axe est au petit. Or supposant que le grand axe AB soit de 14 pieds, & le petit CD de 8, il faut pour trouver la superficie de l'Ellipse, chercher d'abord celle du Cercle de son grand axe, que l'on trouvera de 154, & puis dire: Si le grand axe de 14 m'a donné 8 pouces pour le petit, que me donneront 154, superficie du Cercle pour celle de l'Ellipse, que l'on trouvera de 88 pieds.

*Art. 167.

PROPOSITION VI.

Problème.

575. *Mesurer l'espace renfermé par une Parabole.*

Fig. 228.

Si l'on a une Parabole ABC, dont l'axe BD soit de 9 pieds, & la plus grande ordonnée DA de 12, toute la ligne AC sera de 24. Cela étant, je dis que pour trouver l'espace renfermé par la Parabole ABC, il faut multiplier la ligne AC par les deux tiers de l'axe BD, c'est-à-dire,

24 par 6, pour avoir 144 au produit, qui sera l'espace que l'on demande.

La raison de cette operation est que l'espace ABC est les deux tiers du Rectangle AEFC ; pour le prouver nous ferons voir que l'espace AEBK est le tiers du Rectangle AEBD.

Art. 412. Ayant divisé la ligne EB en un nombre de parties égales, & tiré par tous les points de division des lignes telles que GH & IK, paralleles à AE, l'on verra * que par la propriété de la Parabole le quarré BG est au quarré BI, comme GH est à IK ; mais les parties de suite de la ligne EB étant en progression arithmétique, les quarrés des lignes BG & BI seront ceux des termes d'une progression arithmétique ; par conséquent les Elemens GH & IK sont en même raison que les quarrés des termes d'une progression arithmétique, ainsi l'espace AEBK contient une quantité infinie d'Elemens, qui sont tous dans la même raison que les quarrés des termes infinis d'une progression arithmétique : mais comme pour trouver la valeur de tous ces quarrés, il faut * multiplier le plus grand quarré par le tiers de la grandeur qui exprime la quantité des termes, il faut donc pour trouver la valeur de tous les Elemens qui composent l'espace AEBK, multiplier le plus grand Element EA par le tiers de la ligne EB, qui en exprime la quantité : ce qui fait voir que cet espace est le tiers du Rectangle AEBD, & que par conséquent l'espace AKBD de la Parabole en est les deux tiers.

Art. 366.

R E M A R Q U E.

Il est absolument necessaire pour ceux qui veulent s'attacher au Génie, de sçavoir bien mesurer les Figures planes, parce qu'elles se rencontrent continuellement dans le Toisé des Fortifications & des Bâtimens civils ; car les Couvertures de tuiles & d'ardoise, les Planchers, les Pavez, le blanchissage des Murs recrepis, les Vitres, le Gazon avec lequel on revêt les ouvrages de Terrasse, se mesurent à la toise quarrée, & toutes les figures que

toutes

toutes ces choses peuvent former, se réduisent toujours à des Rectangles ou à des Triangles.

APPLICATION DE LA GEOMETRIE
à la mesure des surfaces des Corps.

PROPOSITION VII.

Problème.

576. *Mesurer les surfaces des Prismes & des Cylindres.* Fig. 229

Pour mesurer la surface d'un Prisme AE, il faut multiplier la somme des côtes du Polygone, qui lui sert de base par la hauteur du Prisme : ainsi si le Prisme a pour base un Exagone, dont chaque côté BC soit de 4 pieds, & la hauteur BE de 6, la somme des côtes sera 24, qui étant multiplié par 6, le produit sera 144 pieds pour la valeur de la surface.

577. Pour mesurer la surface d'un Cylindre, tel que BC, dont le diamètre AC est de 14 pieds, & la hauteur AB de 8, il faut commencer par chercher la circonférence du Cercle qui lui sert de base, qu'on trouvera de 44 pieds. Après cela il faut multiplier cette circonférence par 8, hauteur du Cylindre, & l'on trouvera 352 pieds pour la surface du Cylindre. Fig. 230.

PROPOSITION VIII.

Problème.

578. *Mesurer les surfaces des Pyramides & des Cones.* Fig. 231.

Pour mesurer la surface d'une Pyramide droite, qui a pour base un Exagone, dont chaque côté, tel que AB, est supposé de 6 pieds, & la perpendiculaire tirée du sommet sur un de ses côtes de 10 pieds, il faut multiplier la somme de la moitié de tous ces côtes par toute la perpendiculaire *, c'est-à-dire, 18 par 10, l'on trouvera 180 *Art. 359. pour la surface de la Pyramide.

579. Pour trouver la surface d'un Cone droit, dont le dia- Fig. 232.

Rr

314 NOUVEAU COURS

mètre AB du Cercle de sa base est de 14 pieds, & le côté AD de 12, il faut multiplier la circonférence du Cercle, que l'on trouvera de 44, par la moitié du côté AD *, c'est-à-dire, par 6, & l'on verra que la surface du Cone est de 264; ou bien multiplier la moitié de la circonférence par tout le côté AD, & l'on aura encore la même chose.

PROPOSITION IX.

Problème.

Fig. 233. § 80. *Mesurer les surfaces des Spheres, celles de leurs Segmens, & celles de leurs Zones.*

Pour mesurer la surface d'une Sphere, dont le diamètre AG est supposé de 14 pieds, il faut commencer par chercher la circonférence de ce diamètre, que l'on trouvera de 44; & il faut la multiplier par le diamètre, c'est-à-dire, par 14, & le produit donnera la valeur de la surface de la Sphere *, que l'on trouvera de 616.

*Art. 384. § 81. Si au lieu de la surface de toute une Sphere, on vouloit mesurer seulement celle d'un Segment, tel que ABC, il faudroit chercher d'abord la circonférence du grand Cercle de la Sphere d'où le Segment a été tiré; & de plus connoître exactement la perpendiculaire CD élevée sur le centre du Cercle AB, & puis multiplier la circonférence du grand Cercle par la valeur de cette perpendiculaire *: ainsi supposant que la circonférence du Cercle soit 44, & la perpendiculaire CD de 4, multipliant l'un par l'autre, on aura 176 pieds pour la valeur de la surface du Segment.

*Art. 391. § 82. Enfin pour mesurer la surface d'une Zone, telle que EHFG, il faut connoître aussi la circonférence du grand Cercle de la Sphere d'où elle a été tirée, & la valeur de la perpendiculaire IK, tirée d'un centre à l'autre des deux Cercles oppoiez, & multiplier cette perpendiculaire par la circonférence du grand Cercle *, dont nous venons de parler. Ainsi supposant qu'elle soit encore de 44 pieds, & la perpendiculaire IK de 5, multi-

pliant l'un par l'autre, l'on trouvera 220 pieds pour la valeur de la surface de la Zone.

REMARQUE.

La plupart de ceux qui étudient la Géométrie savent bien que cette Science est fort utile, & qu'en general toutes les propositions qu'elle renferme ont leur usage, cependant comme ils n'en connoissent point l'application, faute de s'être trouvez dans le cas de s'en servir, ils en viennent toujours à demander à quoi tels & tels Problèmes peuvent servir : c'est pourquoi ayant dessein de leur ôter cette inquiétude, je ne serai pas paresseux de leur faire voir l'application des moindres choses : & pour dire un mot des propositions précédentes, ils feront attention que les Cloches étant toujours des Pyramides ou des Cones, que les Dômes étant ordinairement des figures sphériques, & les Tours des Châteaux étant couvertes par des Toits faits en Cones ou en Pyramide, il faut pour en toiser la Couverture, sçavoir mesurer ces différentes surfaces.

CHAPITRE II.

Où l'on applique la Géométrie à la mesure des Corps solides.

PROPOSITION X.

Problème.

Fig. 234.

83. Mesurer la solidité des Cubes, des Parallelepipèdes, des Prismes, & des Cylindres.

Pour mesurer la solidité d'un Cube AD, dont le côté AB seroit, par exemple, de 6 pieds, il faut quarrer 6 pour avoir la superficie de la base, qui sera 36 ; & multipliant cette base par la hauteur du Cube, c'est-à-dire, par 6 pieds, l'on aura 216 pieds, pour la valeur du Cube.

Fig. 235.

Rij

584. L'on trouvera de même la valeur d'un Parallelepipedé, en multipliant la superficie de sa base par la hauteur. Ainsi voulant mesurer le Parallelepipedé EH, supposant que sa base ait 10 pieds de long sur 4 pieds de large, & que sa hauteur HF soit de 5 pieds, il faut multiplier 4 par 10 pour avoir 40, qui sera la superficie de la base, qui étant multipliée par la hauteur 5, donnera 200 pieds cubes pour le Parallelepipedé.

585. Pour mesurer la solidité d'un Prisme CE, dont la base est un Exagone, il faut d'abord connoître la superficie de l'Exagone, que l'on trouvera en multipliant la somme de ses côtes par la moitié de la perpendiculaire AD: ainsi ce côté BC étant de 4 pieds, la perpendiculaire de $3\frac{1}{2}$, la somme des côtes sera 24, qui étant multiplié par $1\frac{1}{2}$, on aura 42 pieds quarrés pour la valeur de la base, qu'il faut ensuite multiplier par la hauteur AE, que je suppose de 6 pieds: la multiplication étant faite, l'on trouvera 252 pieds cubes pour la valeur du Prisme.

Fig. 230.

586. Pour mesurer la solidité d'un Cylindre CB, dont le diamètre BD du cercle de la base est de 14 pieds, & la hauteur AB de 8 pieds, il faut commencer par avoir la valeur du Cercle qui sert de base au Cylindre: pour cela il faut chercher la circonference, que l'on trouvera de 44, dont la moitié étant multipliée par le rayon du même Cercle, l'on aura 154 pieds quarrés pour la valeur de la base du Cylindre: il faut ensuite la multiplier par 8 pour avoir 1232 pieds cubes pour la solidité du Cylindre.

Comme la solidité des Cubes, des Parallelepipedes, des Prismes & des Cylindres, est composée d'une infinité de plans semblables à celui qui sert de base à chacun de ces Corps, & que leur hauteur exprime la quantité de plans dont ils sont composez; il s'ensuit que pour trouver la solidité d'un Corps tel que des précédens, il faut multiplier sa base par toute sa hauteur.

PROPOSITION XI.

Problème.

587. *Mesurer la solidité des Pyramides & des Cones.*

Pour mesurer la solidité d'une Pyramide, qui a pour base un Exagone, il faut commencer par connoître la superficie de la base. Ainsi supposant que le côté AB soit de 6 pieds, & la perpendiculaire CE de $6\frac{3}{4}$, l'on trouvera $121\frac{1}{2}$ pieds $\frac{1}{2}$ quarrés pour la superficie de la base, qu'il faut multiplier par le tiers de l'axe DC de la Pyramide. Comme cet axe est supposé de 10 pieds, il faudra multiplier $121\frac{1}{2}$ par $3\frac{1}{3}$, & le produit sera 405 pieds cubes pour la solidité de la Pyramide.

Fig. 231.

588. Pour trouver la solidité d'un Cone, l'on agira Fig. 232. comme on vient de faire ; pour trouver celle de la Pyramide, on commencera par connoître la superficie du Cercle, qui sert de base au Cone, il faudra la multiplier par le tiers de l'axe du Cone. Ainsi voulant mesurer la solidité d'un Cone ADB, dont le diamètre de son Cercle est de 14 pieds, & la valeur de son axe de $9\frac{1}{2}$; l'on trouvera que la superficie de la base est de 154 pieds quarrés, qui étant multipliez par $3\frac{1}{3}$, qui est le tiers de l'axe, l'on trouvera 456 pieds cubes pour la solidité du Cone.

Si nous avons multiplié la base de la Pyramide, aussi bien que celle du Cone, par le tiers de la hauteur de l'un & de l'autre, c'est que nous avons vu * que la Pyramide étoit le tiers du Prisme de même base & de même hauteur, comme le Cone étoit aussi le tiers du Cylindre de même base & de même hauteur.

* Art. 364.

589. Si les Parallelepipedes, les Prismes, les Cylindres, les Pyramides, les Cones, que l'on veut mesurer, étoient inclinés, il faudroit tirer une perpendiculaire de leur sommet sur leurs bases prolongées ; ensuite connoître la

R. r iii

valeur de cette perpendiculaire, & la regarder comme celle de la hauteur du solide, qui sera incliné; & si cela arrive à l'égard d'un Parallelepipedé, d'un Prisme, ou d'un Cylindre, on multipliera toute la perpendiculaire par la base du solide auquel elle correspond: & si cela arrive à l'égard des Pyramides, des Cones, on multipliera la base de l'un ou l'autre de ces solides par le tiers de la perpendiculaire.

PROPOSITION XII.

Problème.

Fig. 236. 590. *Mesurer la solidité des Pyramides & des Cones tronquez.*

Si l'on a une Pyramide DB, dont les plans opposez DF & AB soient des quarrés, pour en sçavoir la solidité, nous supposons que le côté DE est de 9 pieds, le côté AC de 4, & l'axe GH de 12. Cela posé, il faut chercher la valeur des plans AB & DF, qui seront de 16 & de 81 pieds, entre lesquelles il faut chercher une moyenne proportionnelle, qui sera 36 pour le plan moyen, qu'il faut ajouter avec les deux autres, pour avoir 133, qui sera la somme des trois plans, qu'il faut multiplier par le tiers de l'axe, c'est-à-dire, par 4 pour avoir 532 pieds pour la solidité de la Pyramide tronquée.*

*Art. 373.

Si l'on avoit un Cone tronqué, l'on en trouveroit de même la valeur, en cherchant un Cercle moyen entre les deux opposez, & en multipliant la somme de la valeur des trois Cercles par le tiers de l'axe, pour avoir un produit, qui sera ce que l'on demande.

Fig. 237. 591. Voici encore une autre maniere de trouver la valeur d'une Pyramide, ou d'un Cone tronqué, qui est plus d'usage que la précédente; par exemple, pour connoître la solidité du Cone tronqué ADEB, dont l'axe GC est de 15 pieds, le diamètre DE de 7, & le diamètre AB de 21; j'abaisse la perpendiculaire DH, & j'acheve le

Cône , pour avoir l'axe entier CF , dont je cherche la valeur comme il suit.

Le rayon DG étant de 3 pieds $\frac{1}{2}$, & le rayon AC de $10\frac{1}{2}$, la ligne AG sera la différence de DG à AC , par conséquent de 7 pieds. Or ayant les deux triangles semblables AGD & ACF , je dis : Si le côté AG de 7 pieds donne 15 pieds pour le côté GD , que donnera le côté AC de $10\frac{1}{2}$ pour le côté CF , que l'on trouvera de 22 pieds $\frac{1}{2}$.

Présentement que l'on a trouvé le grand axe , il faut chercher la valeur du Cône AFB , & celle du petit Cône DFE , & retrancher celle-ci de l'autre pour avoir la différence , qui sera la valeur du Cône tronqué.

592. Ou bien à cause que les Cones DFE & AFB sont semblables , l'on pourra cuber les diamètres AB & DE , & dire : Comme le Cube du diamètre AB est au cube du diamètre DE , ainsi la valeur du Cône AFB est à celle du Cône DFE , qui étant trouvée , on la retranchera de celle du Cône AFB , pour avoir la différence , qui sera la partie tronquée.

REMARQUE.

L'on verra dans la suite la nécessité de sçavoir mesurer les Prismes , les Cylindres , les Pyramides , & les Cones , aussi-bien que leurs parties tronquées ; car on ne peut faire le Toisé de la Maçonnerie , du revêtement d'une Fortification , sans qu'il ne se rencontre des parties semblables à celles-ci ; ce qui arrive toujours aux angles rentrants & saillans , il se rencontre même bien des cas où la figure bizarre de ce que l'on veut mesurer , demande beaucoup d'usage de la Géométrie , pour en venir à bout : & comme bien des Ingenieurs se contentent de les toiser par approximation , voici quelques propositions qui donneront beaucoup d'éclaircissemens pour résoudre les difficultez que je ferai appercevoir à ce sujet.

PROPOSITION XIII.

Problème.

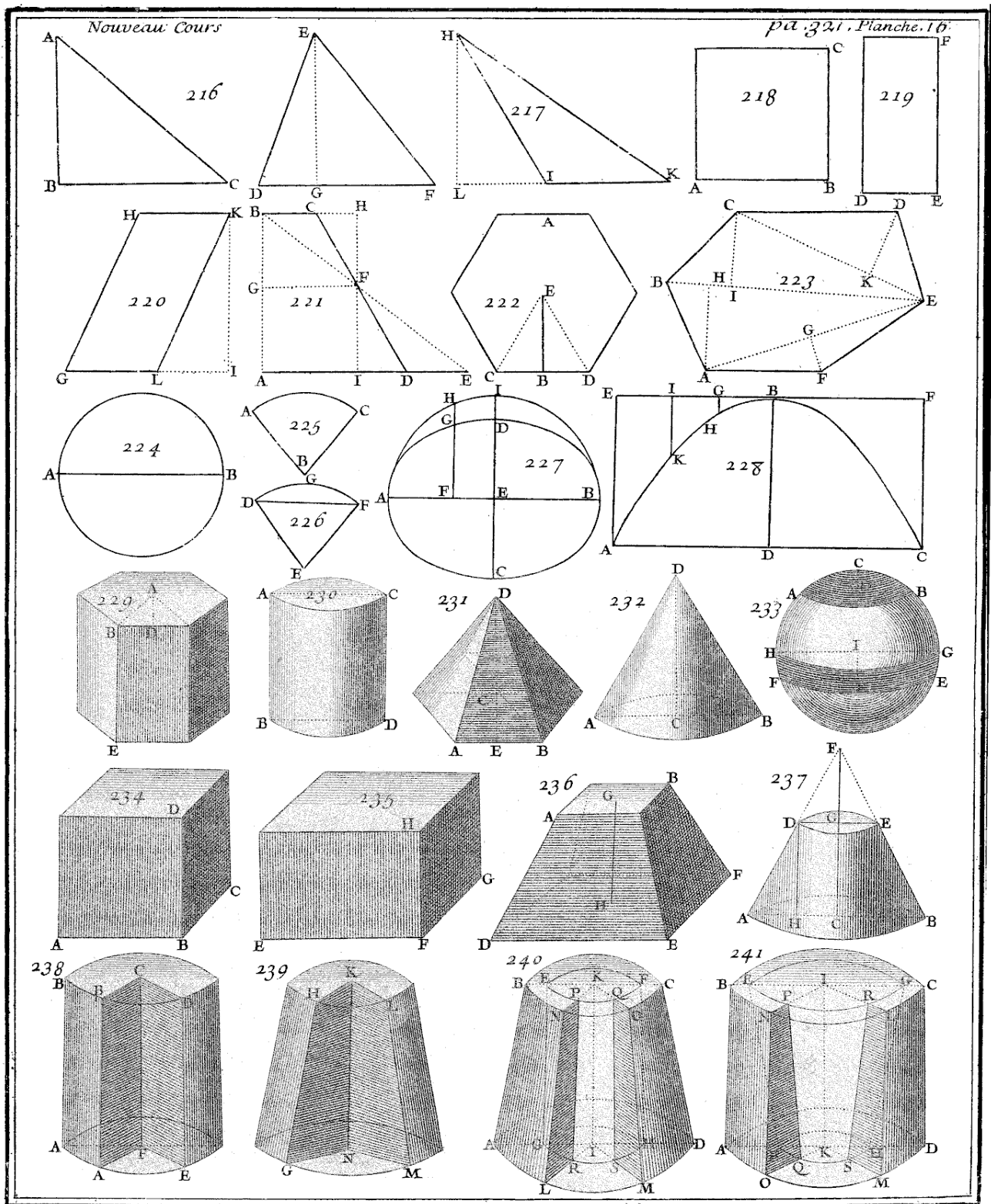
Fig. 238. 593. *Mesurer la solidité des Secteurs de Cylindre, & de Cones tronquez.*

Pour trouver la solidité d'un Secteur ABCDEF d'un Cylindre formé par deux plans CA & CE, il faut commencer par sçavoir la valeur du Cylindre entier, & connoître l'angle BCD du Secteur. Ainsi supposant que cet angle soit de 50 degrez, & que la solidité du Cylindre soit de 425 pieds, il faut dire: Si 360 degrez, valeur du cercle qui renferme le Cylindre, m'a donné 425 pieds pour la valeur du Cylindre, que me donneront 50 degrez pour la valeur du Secteur; l'on trouvera qu'il est de 59 pieds & quelque chose.

Fig. 239. 594. Pour mesurer un Secteur GHKLMN d'un Cone tronqué, il faut, comme ci-devant, connoître l'angle HKL du Secteur, & la valeur du Cone tronqué: ainsi supposant que l'angle est de 60 degrez, & que le Cone tronqué est de 600 pieds, l'on dira encore: Si 360 m'ont donné 600 pour la valeur du Cone tronqué, que me donneront 60 pour la valeur du Secteur, que l'on trouvera de 100 pieds.

Fig. 240. 595. Mais si l'on avoit un Cone tronqué ABCD, dans le milieu duquel il y auroit un vuide cylindrique GEFH, & qu'on voulût sçavoir la valeur du fragment LNPQOMSR formé par des parties de couronnes, il faudroit commencer par trouver la solidité de tout le Cone tronqué ABCD, comme s'il n'y avoit point de vuide, pour avoir la valeur du Secteur LNKOMI tant plein que vuide, de la façon qu'on vient de le pratiquer; ensuite en retrancher le Secteur du Cylindre RPKQSI, & la difference sera la solidité du fragment LNPQOMSR que l'on demande.

Fig. 241. 596 Si au contraire on avoit un Cylindre ABCD, dans le milieu duquel il y eût un vuide en forme de Cone tronqué EFGH, & qu'on voulût sçavoir la valeur de la solidité



solidité du fragment QONPRLMS terminé par des plans qui soient dans les rayons IN & IL, il faudra chercher la valeur du Secteur cylindrique KONILM, & celle du Secteur KQPIRS du Cone tronqué pour le retrancher de celle du Secteur du Cylindre, & la différence sera la valeur du fragment QONPRLMS que l'on demande.

Il faut, pour se rendre familier ce que l'on vient de voir, donner des dimensions aux lignes qui composent ces figures, en faire le calcul, & bien entendre les raisons de chaque operation; car, comme je l'ai déjà dit, nous serons obligés d'avoir recours à lui pour donner la solution de quelques-uns des Problèmes les plus difficiles du Toisé de Fortification.

PROPOSITION XIV

Problème.

597. *Mesurer la solidité d'une Sphere.*

Pour sçavoir la solidité d'une Sphere, dont le diamètre AB est de 14 pieds, il faut chercher la circonference de ce diamètre, qui sera 44, & la multiplier par le diamètre même pour avoir la surface de la Sphere *, qui sera de 616 pieds, qu'il faut multiplier par le tiers du rayon*, c'est-à-dire, par le tiers de 7, pour avoir 143 $7\frac{1}{2}$ pieds cubes pour la solidité de la Sphere.

PLAN-

CHE 17.

Fig. 242.

* Art. 384.

* Art. 383.

L'on trouvera encore la solidité de la Sphere d'une autre maniere, en multipliant la superficie de son grand cercle par les deux tiers du diamètre. *

* Art. 379.

598. Pour mesurer un secteur de Sphere, tel que ABCD, il faut connoître le rayon & la perpendiculaire DE, élevée sur le milieu de la corde AC. Or si nous supposons le rayon de 7 pieds, & la perpendiculaire de 3, il faut chercher, par le moyen du rayon, la circonference du grand cercle de la Sphere, d'où le secteur a été tiré, & on la trouvera de 44 pieds: il faut ensuite multiplier cette circonference par la perpendiculaire DE, c'est-à-dire, 44 par 3; & le produit 132 sera la surface

Fig. 243.

Sf

* Art. 381. ADC du secteur *, qu'il faudra multiplier par le tiers du rayon BC, c'est-à-dire, par $2\frac{1}{3}$, pour avoir 308 pieds-cubes, qui est la solidité du Secteur.

Fig. 244. 599. Si au lieu d'un Secteur l'on avoit un Segment de Sphere DGF, il faudroit, pour en trouver la solidité, le réduire en Secteur, & chercher la solidité de ce Secteur, de laquelle il faudroit retrancher le Cone DEF, & le restant seroit la valeur du Segment.

Fig. 245. 600. Mais si la partie de la Sphere que l'on veut mesurer, étoit une Zone comprise par le grand cercle de la Sphere, & par un autre quelconque, qui lui seroit parallèlement opposé, comme est la Zone AFHE; on en trouveroit la solidité en prenant les deux tiers du Cylindre, qui auroit pour base le grand cercle AE, & pour hauteur la partie de l'axe GC; & de plus le tiers du Cylindre, qui auroit pour base le petit cercle FH, & pour hauteur la même ligne GC. * Or pour en faire l'opération, nous supposons le rayon CE de 14 pieds, & la perpendiculaire CG de 8: & comme nous avons le triangle rectangle CHK, dont l'hypoténuse CH est de 14 pieds, & le côté HK de 8, l'on trouvera par la racine quarrée le côté CK de 11 pieds: ainsi l'on aura le rayon du cercle FH, & par conséquent l'on trouvera la solidité du Cylindre IH, qui est de 3036 pieds cubes, & la solidité du grand Cylindre AD se trouvera de 4928 pieds cubes. Or si l'on prend les deux tiers du plus grand Cylindre, l'on aura $328\frac{1}{3}$, qui étant ajoûtez avec $100\frac{1}{2}$, qui est le tiers du petit Cylindre, l'on trouvera $4297\frac{1}{3}$ pieds cubes pour la solidité de la Zone.

R E M A R Q U E.

Fig. 246. 601. La generation de la plupart des solides ayant été
& 247. formée par la circonvolution d'un plan sur son axe, l'on peut avoir autant de solides differens, que l'on peut avoir de plans generateurs differens: mais pour ne parler que de ceux qui sont formez par le plan des courbes des

Sections Coniques, l'on sçaura que si une demie Parabole ACB fait une circonvolution autour de son axe AB, qu'elle décrira un corps HIK, que l'on nomme *paraboloïde*, qui est composé d'une infinité de cercles, qui auront tous pour rayons les ordonnées, telles que DE & FG, que l'on regarde ici comme les élémens du plan ABC de la Parabole.

602. Si l'on a une demie Ellipse HLI, qui fasse une circonvolution autour de son axe HI, toutes les ordonnées, comme OP & RS, que l'on peut regarder comme les élémens du plan de l'Ellipse, décriront une infinité de cercles, qui tous ensemble formeront le corps ABCD, que l'on nomme *sphéroïde*, parce qu'ayant pour plan generateur une Ellipse, qui est proprement un cercle allongé, le sphéroïde est regardé comme une Sphere allongée. Fig. 250.
& 251.

603. Enfin si l'on fait faire à une demie Hyperbole ABC une circonvolution sur son axe BC, elle décrira un solide, que l'on nomme *hyperboloïde*; & si la demi-Hyperbole est accompagnée d'un Asymptote EF, & des lignes DB & DG, parallèles à AC & BC, le triangle EFC décrira un Cone & le Rectangle GDBC un Cylindre. Fig. 252

Comme la plupart de ces solides ont lieu dans bien des occasions, nous en ferons voir l'application, après que nous aurons donné dans les propositions suivantes la manière de les mesurer.

PROPOSITION XV.

Problème.

604. *Mesurer la solidité d'un Paraboloïde.* Fig. 246.

Pour avoir la solidité d'un Paraboloïde, dont le rayon & 247. LK du cercle de la base seroit de 7 pieds; l'axe IL de 10, il faut chercher la valeur du cercle de la base, qui sera de 154 pieds, qu'il faut multiplier par la moitié de l'axe IL, c'est-à-dire, par 5 pour avoir 770 au produit, qui sera ce que l'on demande.

Pour sçavoir la raison de cette operation, confidez
Sf ij

324 NOUVEAU COURS

- que l'axe AB de la Parabole est composé d'une infinité de parties comme AE & AG, qui sont en progression arithmétique, & que les quarrés des ordonnées ED & GF étant dans la même raison que les parties AE & AG * ;
- * Art. 411. ces quarrés seront aussi en progression arithmétique. Or comme les cercles sont dans la même raison que les quarrés de leurs rayons * ; il s'ensuit que les cercles qui composent le Paraboloïde HIK, sont en progression arithmétique, puisqu'ils sont comme les quarrés des ordonnées de la Parabole : mais comme pour trouver la valeur des termes infinis d'une progression arithmétique *,
- * Art. 240. il faut multiplier le plus grand terme de la progression par la moitié de la grandeur qui exprime la quantité de ces termes : il faut donc, pour trouver la valeur de tous les cercles qui composent le Paraboloïde, multiplier le plus grand cercle HK par la moitié de l'axe IL.

PROPOSITION XVI.

Problème.

- Fig. 250. 605. *Mesurer la solidité d'un Sphéroïde.*
 & 251. Pour sçavoir la solidité d'un Sphéroïde, dont le grand axe BD est de 18 pieds, & le petit axe AC de 14, il faut chercher la superficie du cercle du petit axe, qui sera de 616 pieds, qu'il faut multiplier par les deux tiers du grand axe BD, c'est-à-dire, par 12, pour avoir le produit 7392, qui sera la solidité que l'on demande.
- * Art. 332. L'on connoîtra la raison de cette opération, si l'on considère que les ordonnées OP & RS de l'Ellipse étant dans la même raison que ceux du cercle OQ & RT, les quarrés des ordonnées de l'Ellipse seront dans la même raison que ceux des ordonnées du cercle * : & si à la place des quarrés des ordonnées du cercle, l'on prend les superficies des cercles, dont les lignes seroient les rayons, l'on verra que tous les cercles des ordonnées de l'Ellipse, qui composent ici un Sphéroïde, sont dans la même raison que tous les cercles qui composent la Sphere. Mais com-

me l'on trouve la valeur de tous les cercles qui composent la Sphere, en multipliant le cercle qui auroit pour rayon la plus grande ordonnée MN par les deux tiers de l'axe HI* : on trouvera donc aussi la valeur de tous les cercles qui composent le Spheroïde, en multipliant le cercle qui auroit pour rayon la plus grande ordonnée ^NML de l'Ellipse par les deux tiers de l'axe HI. *Art. 380.

606. Mais si le plan de l'Ellipse, au lieu de faire une circonvolution à l'entour de son grand axe AB, en faisoit une sur son petit axe CD, l'on auroit encore un Spheroïde ACBD, dont on trouvera la solidité, comme ci-devant, en multipliant la superficie du cercle du grand axe AB par les deux tiers du petit axe CD ; car si l'on a un cercle ECFD, qui ait pour diamètre le petit axe CD, & que l'on mene les ordonnées GH & KL, l'on aura par la propriété de l'Ellipse *CG×GD : CK×KD :: $\overline{GH}^2$: $\overline{KL}^2$ Fig. 248 & 249. *Art. 438. & si à la place des rectangles CG×GD & CK×KD, l'on prend les quarrés GI & KM, qui leur sont égaux par la propriété du cercle, l'on aura $\overline{GI}^2$: $\overline{KM}^2$:: $\overline{GH}^2$: $\overline{KL}^2$. Or si à la place des quarrés de toutes les ordonnées du demi-cercle CFD, l'on prend les cercles dont ces ordonnées sont les rayons, & qu'on fasse la même chose pour la demie Ellipse CBD, l'on verra que tous les cercles de la Sphere sont dans la même raison que tous les cercles du Spheroïde, & que la quantité des uns & des autres étant exprimée par la ligne CD, si l'on multiplie le cercle EF par les deux tiers de la ligne CD, pour avoir la valeur de tous les cercles qui composent la Sphere, il faudra multiplier le cercle AB par les deux tiers de la ligne CD, pour avoir la valeur de tous les cercles qui composent le Spheroïde.

607. L'on peut dire aussi que si l'on n'avoit que la moitié d'un Spheroïde ACB, il faudroit de même, pour en trouver la solidité, multiplier le cercle AB par les deux tiers de la ligne CN.

Quoique l'Hyperboloïde n'ait guères lieu dans la Géométrie.

S. f. iij.

métrie pratique, cela n'empêche pas que je ne dise un mot sur la manière de mesurer ce solide, pour satisfaire la curiosité de ceux qui n'aiment pas qu'on leur supprime rien.

PROPOSITION XVII.

Problème.

608. *Mesurer la solidité d'un Hyperboloïde.*

Fig. 253.

Pour avoir la solidité d'un Hyperboloïde DEF, il faut accompagner la courbe DEF de ses asymptotes BA & BC, & de la ligne GH, qui sera égale à un de ses axes. Cela posé, il faut chercher la solidité du Cone tronqué AGHC*, & en retrancher le Cylindre IGHK, pour avoir la différence, qui sera la solidité de l'Hyperboloïde.

*Art. 591.

Pour entendre la raison de l'opération que nous indiquons ici, il faut se rappeler que nous avons fait voir

*Art. 468.

dans l'Hyperbole*, que si l'on mène une ligne telle que AC, parallèle à GH, le rectangle compris sous les parties AD & DC, seroit égal au carré de la ligne GE. Or comme le rectangle compris sous AD & DC, est égal

*Art. 277.

au carré de la perpendiculaire DM*, à cause du demi-cercle ADC : il s'ensuit que la ligne DM est égale à la ligne GE. Cela posé, l'on sçait que le cercle, qui auroit pour rayon la ligne DM, est égale à la couronne formée par les deux circonferences* ANCO & DPFQ. Cela

*Art. 376.

étant, cette couronne sera égale au cercle, qui aura pour rayon la ligne GE, & qui sera un des cercles du Cylindre GHIK ; & comme il arrivera la même chose pour toutes les lignes, telles que AC, qu'on tirera parallèle à GH par tel point que l'on voudra de la ligne GA, il s'ensuit que toutes les couronnes seront égales entr'elles ; puisque chacune sera égale à des cercles du Cylindre. Or comme il y a autant de couronnes que de cercles, les uns & les autres étant exprimez par la ligne EL, il s'ensuit que l'espace qui est renfermé entre l'Hyperboloïde DPFQ & le Cone tronqué ANCOGE (qui n'est autre chose que la somme de toutes les couronnes) est égal au

Cylindre IGHK, & par conséquent le cône est plus grand que l'Hyperboloïde de tout le Cylindre IGHK.

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE
aux Mines.

609. Il y a long-tems qu'on a observé que pour bien charger le Fourneau d'une Mine, il falloit une certaine quantité de poudre proportionnée à la pesanteur & à la tenacité du terrain à enlever. Et comme l'on s'est apperçû que l'excavation d'une Mine étoit presque toujours de figure régulière, l'on s'est attaché à découvrir si cette figure étoit un solide que la Géométrie pouvoit mesurer, afin qu'ayant une fois connu combien il falloit de poudre pour une quantité de toises cubes du terrain d'une certaine qualité, l'on sçache la charge d'un Fourneau qui auroit plus ou moins de terre à enlever dans un lieu dont le terrain seroit semblable à celui où l'on auroit fait des épreuves ; & que faisant de semblables épreuves dans une autre sorte de terrain, l'on fût en état de calculer des Tables, non seulement pour les Mines qu'on peut faire en pleine campagne, mais aussi pour celles que l'on pratique dans la maçonnerie du revêtement des ouvrages pour y faire brèche.

Ayant fait quelque expérience, l'on s'est imaginé que l'excavation d'une Mine étoit un cône renversé comme *Fig. 254* BFC, dont le rayon EC du cercle de la base étoit égal à l'axe EF, que l'on a nommé depuis *Ligne de moindre résistance*, parce qu'elle est la plus courte de toutes celles qu'on peut tirer du Fourneau F, à la surface du terrain que la Mine doit enlever : cependant ceux qui ont un peu raisonné, ont eu de la peine à concevoir que la poudre qui seroit dans le Fourneau F, fit son effet selon l'angle droit BFC, & que le fond de l'entonnoir se terminât en pointe, comme est celle d'un cône ; c'est pourquoi l'on a fait d'autres épreuves pour être plus certain de la figure du solide qu'une Mine enlevoit, & l'on a trouvé qu'au lieu d'un cône, c'étoit une espèce de cône tronqué

* T t

ABCD, dont le petit cercle AD qui répond au Fourneau, avoit pour diametre une ligne égale au rayon EC du grand cercle, qui est ici égal comme dans la premiere opinion à la ligne de moindre resistance, ou autrement à l'axe EF du cone tronqué, j'ai reconnu à peu près les mêmes choses à quantité de Mines que j'ai vû joüer ; avec cette difference cependant, que l'entonnoir n'a pas au fond un plan circulaire AD, mais une espece de cul de chaudron AGD, qui ne provient pas à la verité de l'enlevement des terres, mais de la pression que la poudre fait au dessous & à côté du Fourneau, parce que son effort est d'abord balancé par la masse qu'elle doit enlever ; & l'on remarque la même chose, non seulement dans les Mines, mais encore à l'égard de la poudre qui vient à s'enflammer sur la surface de la terre ; car s'il y en a une quantité un peu considerable, à laquelle on met le feu, l'on voit qu'à la place où elle a brûlé, il se forme un enfoncement qui provient de la resistance que la flamme de la poudre a trouvée de la part du poids de l'air, qui est plus que suffisant pour partager son effort.

La peine que l'on a de se défaire des préjugés, est si grande, qu'elle va même jusqu'à suivre des opinions contraires à l'experience ; l'on a tant fait joüer de Mines, où l'on a vû que l'entonnoir étoit bien plutôt un cone tronqué, qu'un cone, qu'il semble qu'on devroit s'en tenir aux apparences les plus vraies : cependant comme beaucoup de Mineurs font encore l'estimation de la charge des Fourneaux sur celle du cone, il convient de leur faire sentir la grande difference qui se trouve entre le cone & le cone tronqué, dont nous venons de parler, afin de les rendre plus circonspects dans l'usage des Tables dont ils se servent pour la charge des Fourneaux.

Ne considerant que le cone tronqué ABCD, sans nous embarrasser de la partie AGD, puisqu'elle n'est pas comprise dans l'enlevement des terres, remarquez qu'il manque au cone tronqué ABCD un petit cone dont la base est le cercle AD, pour former un cone entier ; & que le cone entier sera semblable au petit. Or le rapport du

grand cone au petit étant dans la raison des cubes des diamètres des cercles qui leur servent de base, c'est-à-dire, comme le cube de la ligne BC est au cube de la ligne AD : la ligne BC étant double de AD (puisque cette dernière est égale au rayon EC) le cube de BC sera octuple de celui de AD : ce qui fait voir que le cone entier est octuple du petit, & que la différence du grand cone au petit (qui est le cone tronqué) est le $\frac{7}{8}$ du cone entier ; mais le grand cone étant semblable au petit, si le cercle de l'un a un diamètre double de celui de l'autre, l'axe de l'un sera aussi double de celui de l'autre ; ce qui fait voir que l'axe du grand cone est double de celui du cone tronqué, c'est-à-dire, de la ligne EF, qui sert aussi d'axe au cone BFC ; mais ce dernier cone a pour base le cercle BC, de même que le grand cone : ils ne diffèrent donc entr'eux que par leurs hauteurs : & comme l'axe du grand cone est double de la ligne EF, ce cone sera donc double du cone BFC ; ainsi il en vaudra les $\frac{4}{3}$: & comme nous avons fait voir que le cone tronqué ABCD en étoit les $\frac{7}{8}$, il s'ensuit que le cone tronqué est au cone BFC, comme 7 est à 4 ; de sorte que si l'on veut charger une Mine, & que l'on soit dans l'opinion que l'excavation est un cone, l'on va faire une erreur considérable dans l'estimation de la charge : puisque tandis qu'il faudra, par exemple, 400 livres de poudre pour le cone, il en faudra 700 pour le cone tronqué.

La figure curviligne causée par la pression de la poudre au fond de l'entonnoir, joint à ce qu'il paroît que les côtes BA & DC ne sont pas parfaitement en ligne droite, a fait penser que le solide enlevé par l'effet d'un Fourneau, pourroit bien être un paraboloides. L'on a même fait quelques remarques qui ont paru assez conformes à ce sentiment : & ceux qui ont quelque raison de croire que l'excavation d'une Mine est un paraboloides BGC, disent qu'ayant un Fourneau à l'endroit F, la ligne de moindre résistance EF est égale au rayon EC du cercle de l'entonnoir, comme dans le cone tronqué, & que la ligne FG qui exprime la

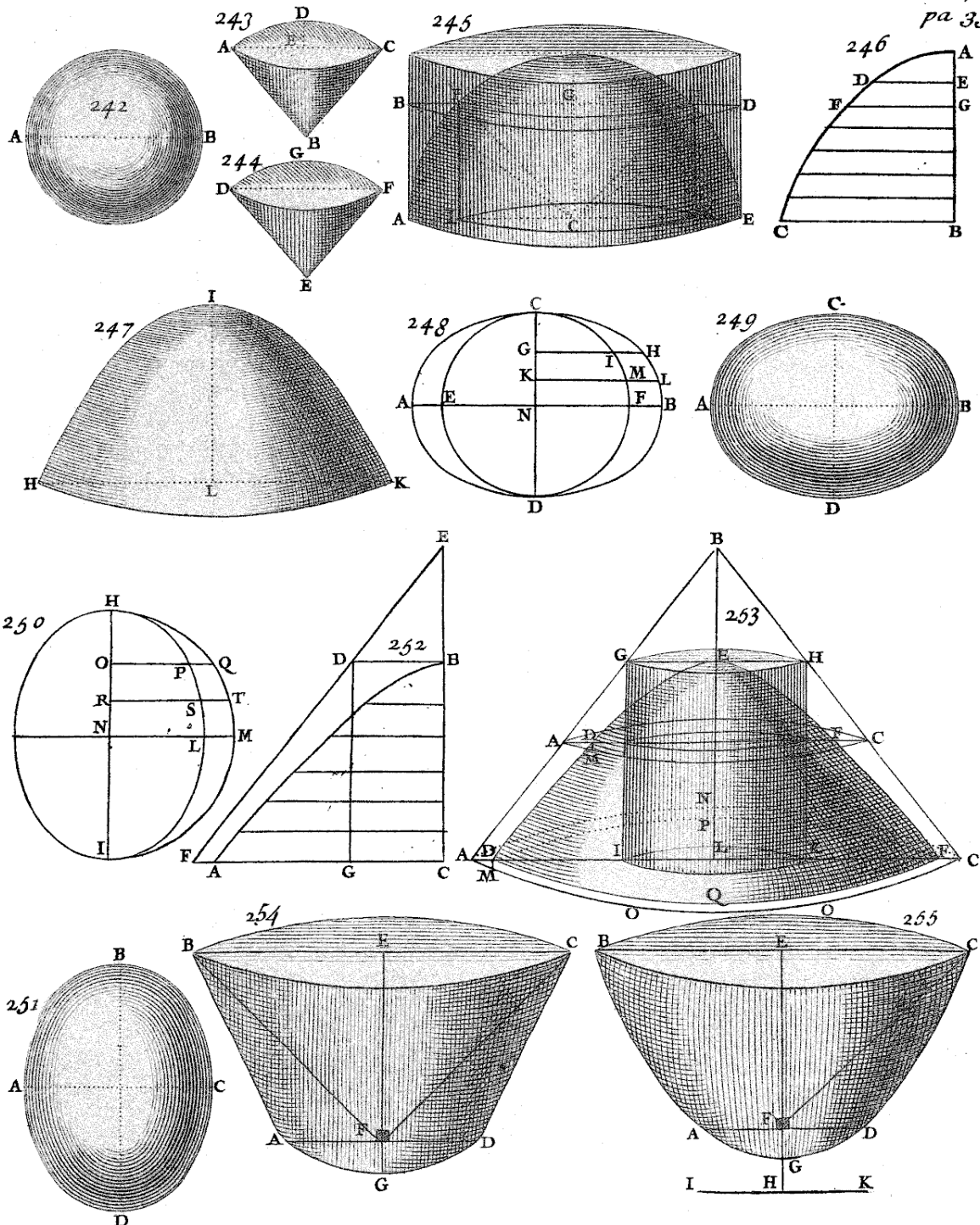
Fig. 253

* T t ij

pression des terres au dessous du Fourneau, est égale au quart du parametre de la parabole, dont le foyer est au centre du Fourneau. Or comme l'on ne peut connoître la valeur du paraboloid tronqué $ABCD$, sans avoir celle de la ligne FG . Voici comme on pourra la trouver, & par consequent s'appercevoir si la pression des terres dans l'effet d'une Mine qui viendrait à jouer dans un terrain d'une consistance ordinaire, se rapporte à ce qui est déterminé par le foyer de la parabole.

Si l'on prolonge l'axe EG de la longueur GH égale à FG , c'est-à-dire, au quart du parametre, la ligne IK perpendiculaire à l'axe prolongé, sera la directrice de la parabole; & par la propriété de cette courbe l'on aura $HE=FC$, qui est l'hypoténuse d'un triangle rectangle & isoscele EFC . Or supposant que la ligne de moindre resistance EF soit de 40 pieds, l'on trouvera par la propriété du triangle rectangle, que la ligne FC est de 56 pieds, 6 pouces, 8 lignes, qui est aussi la valeur de la ligne EH ; d'où retranchant la ligne EF de 40 pieds, la difference sera 16 pieds, 6 pouces, 8 lignes pour la ligne FH , dont la moitié est 8 pieds, 3 pouces, 4 lignes, pour la ligne FG , de sorte qu'il faudroit pour que l'excavation d'une Mine dans les terres ordinaires, fût un paraboloid, que lorsque la ligne de moindre resistance EF aura 40 pieds, que le cul de chaudron AGD fût de 8 pieds, 3 pouces, 4 lignes, de profondeur, qui est une pression bien considerable, qui ne pourroit arriver, selon toute apparence, que dans un terrain d'une foible consistance: & après tout, que l'excavation d'une Mine soit un cone tronqué ou un paraboloid, l'on peut dans la pratique se servir indifferemment de l'un ou de l'autre, puisque selon le calcul que j'en ai fait, j'ai trouvé qu'une Mine qui auroit 40 pieds de ligne de moindre resistance, enlevera 119821 pieds cubes selon le paraboloid, & 118115 selon le cone tronqué; & comme la premiere quantité ne déferé de la seconde que d'un 7^{me}, j'aimerois mieux m'en tenir au cone tronqué qu'au paraboloid, parce que le premier est moins composé que le second.

APPLICATION



APPLICATION DE LA GEOMETRIE
au Toisé des Voûtes.

PROPOSITION XVIII.

Problème.

610. Mesurer la solidité de la Maçonnerie de toutes sortes de Voûtes.

Il n'y a guères que trois sortes de Voûtes parmi les ouvrages de Fortification. Les premières sont celles des Souterrains ; les secondes, celles des Magasins à poudre ; & les troisièmes, celles des Tours auxquelles il y a des platte-formes ; les unes & les autres sont ou à plein ceintre, comme dans la Figure 256. ou surbaissées, comme dans la Figure 257. ou gothique, que l'on nomme aussi *Voûte en tiers point*, ou *Voûte en arc de Cloître*, comme dans la Figure 258. & soit qu'elles servent aux Magasins ou aux Souterrains, elles sont toujours disposées en dehors en dos d'âne comme un toit, parce qu'on y applique dessus une chape de ciment pour les garantir des eaux de pluies.

611. Si l'on a donc à toiser la Maçonnerie d'un souterrain ou d'un magasin, dont la Figure 250. soit le plan, l'on commence par toiser les pignons PRST & MKOL, sans aucune difficulté, parce que ce sont des parallélépipèdes ; ensuite on toise aussi les pieds droits ADFG depuis la retraite des fondemens jusqu'à la naissance AC de la voûte ; & pour la voûte l'on toise la superficie du triangle ABC, que l'on multiplie par la longueur dans œuvre de la voûte ; ce qui s'appelle *toiser tant plein que vuide* ; & comme il faut du produit en déduire le vuide DKE, si la Voûte est en plein ceintre, l'on mesure la superficie du demi-cercle * DKE, que l'on multiplie par la même longueur qui a servi à mesurer le triangle ABC ; & soustrayant ce produit-ci du précédent, la différence est la valeur de la Voûte.

PLANS
CHE 18.
Fig. 256.
257. &c
258.

Fig. 256.
&c 259.

* Art. 572.

T t ij

Fig. 257. 612. Si la Voûte est surbaissée, comme FEG, dont la figure est une demi-Ellipse, il faut mesurer le triangle ABC comme ci-devant, & le multiplier par la longueur dans œuvre de la Voûte : après quoi l'on cherchera la superficie de la demi-Ellipse FEG *, pour la multiplier *Art. 574. aussi par la même longueur ; & soustrayant ce produit-ci du précédent, on aura la valeur de la Voûte.

Fig. 258. 613. Enfin si la Voûte que l'on veut mesurer est en tiers point, comme ILM, on cherchera la superficie du triangle ILM, à laquelle on joindra celle des segmens * *Art. 573. des cercles, dont les lignes LI & LM sont les cordes ; & ayant multiplié cette quantité par la longueur de la Voûte dans œuvre, on soustraira le produit de celui du triangle HKN, multiplié par la même longueur, & l'on aura la solidité que l'on demande.

614. Pour les Voûtes au-dessus desquelles il y a des plattes-formes, comme, par exemple, celles qui couvrent les Salles de l'Observatoire Royal de Paris, le Toisé en est un peu plus difficile ; & je ne sçache pas même que personne ait recherché la manière de le faire géométriquement : comme ces sortes d'endroits ont pour base un quarré ou un polygone régulier, le vuide & le plein de la Voûte sont ordinairement un prisme, qui est facile à mesurer : & comme il n'y a que le vuide qu'il faut déduire, qui peut faire quelque difficulté, nous considérerons ici les différentes figures qu'il peut avoir, afin de les réduire à des corps réguliers.

Fig. 260. Supposant donc que les lieux dont il s'agit ayent pour & 261. base un quarré AB ou un polygone régulier GH, voici comment on peut considérer la nature de leurs Voûtes.

Si la base est un quarré, les diagonales AB & CD serviront de diamètre à des demi-cercles AFB & CFD, qui partagent la Voûte en quatre, & qui forment des arrêtes dans les angles. Or si l'on considère une infinité de quarrés qui remplissent le vuide de la Voûte, tous ces quarrés auront leurs angles dans les quarts de cercles FC, FA, FB, & FD, & leurs côtes seront des lignes com-

me GH & IK , tirées d'un quart de cercle à l'autre parallèlement aux côtes AB ou DB , & la moitié de toutes les diagonales, comme EA & LM feront les ordonnées d'un quart de cercle AFE . Or comme la ligne EF ou EA qui marque la hauteur de la Voûte, exprime la somme de tous ces quarrés ; il s'ensuit que les ordonnées EA & IM servant de demi-diagonales à ces quarrés, l'on trouvera la valeur de tous ces quarrés, comme on trouve celles des ordonnées d'un quart de cercle ; mais nous avons vû * que la valeur des quarrés des ordonnées d'un quart de cercle se connoissoit en multipliant la plus grande ordonnée EA par les deux tiers de la ligne EF : il faudra donc pour trouver la solidité du corps AFB , multiplier le quarré AB , qui lui sert de base, par les deux tiers de la ligne EF , qui en exprime la hauteur.

* Art. 324.
^ Le quarré de

615. Si la Voûte étoit sur des pieds droits, qui passassent ensemble un prisme, & que ce prisme fût de 6 côtes, le corps qui formeroit le vuide de la Voûte, auroit une figure comme $GHIK$, formée aussi par demi-cercles : & comme ce corps seroit composé d'une quantité infinie de polygones semblables, de même que celui que nous venons de voir, est composé de quarrés ; si l'on considère le quart de cercle IKG , l'on verra que toutes les ordonnées, comme OP & QR de ce quart de cercle servent de rayons aux polygones dont le solide est composé ; mais ces polygones étant tous semblables, & dans la raison des quarrés de leurs rayons *, l'on en trouvera la valeur, comme on trouve celle des quarrés de leurs rayons, c'est-à-dire, en multipliant la superficie du plus grand polygone par les deux tiers de la ligne qui en exprime la quantité. Ainsi pour trouver la valeur du solide GHI , il faut multiplier la base GH par les deux tiers de la perpendiculaire IK .

Fig. 264.

* Art. 324.

616. Mais si au lieu de demi-cercles, c'étoit des demi-Ellipses ABC & DBE , qui partageassent la Voûte, on trouveroit de même la valeur du vuide, en multipliant la base AC par les deux tiers de l'axe BF ; car si le plan AC

T t iii

334 NOUVEAU COURS

Art. 441. est un quarré, tous ceux qui composeront le solide seront aussi des quarrés, donc les demi-diagonales seront les ordonnées KL & MN du quart d'Ellipse HGI ou FBC: & comme l'on trouve la valeur de tous les quarrés des ordonnées d'un quart d'Ellipse, comme on trouve celles des ordonnées d'un quart de cercle, c'est-à-dire, en multipliant le quarré de la plus grande ordonnée HI par les deux tiers de la ligne GH: il s'ensuit que la Voûte a ses arrêtes en demi-cercle ou en Ellipse, dont on trouvera toujours la valeur du vuide, en multipliant la base par les deux tiers de la hauteur; & il n'importe pour cela que la base soit un quarré ou un poligone.

Fig. 264.
& 265.

617. Il est encore une autre espèce de Voûte, que l'on nomme *Voûte en bourlet*, parce qu'en effet le vuide de cette Voûte ressemble assez à un bourlet; & pour en donner une idée, considérez les Figures 264. & 265. dont la première est le plan d'une Tour, où l'on voit dans le milieu un pilier AB, sur lequel repose une Voûte, qui répond aussi aux murs de la Tour; de sorte que de quelque sens qu'on puisse prendre le profil de cette Tour, il sera toujours semblable à la Figure 265. Or comme la Voûte regne autour du pilier ABE, il faut pour la toiser, commencer par mesurer la masse HICD, tant pleine que vuide, qui est un cylindre, qui a pour base un cercle dont CD est le diamètre, & HC la hauteur.

Présentement pour trouver le vuide qu'il faut déduire de ce cylindre, il faut chercher la superficie du demi-cercle CMA, & la multiplier par la circonférence du cercle, qui sera moyenne arithmétique entre les circonférences de la Tour & du pilier, c'est-à-dire, entre les circonférences qui auront pour rayons AF & FC; & retranchant ce produit-ci du précédent, on aura la valeur de la Voûte.

Comme le bourlet est composé d'autant de demi-cercles que l'espace qui est entre les deux circonférences CODQ & ANBP contient de lignes, comme AC & NO, qui servent de diamètre aux demi-cercles; il s'ensuit que la

ligne qui exprimera la somme de tous les élémens qui composent la couronne, c'est-à-dire, la somme de toutes les lignes AC & NO, marquera aussi la somme de tous les demi-cercles qui composent le bourlet. Or comme cette ligne n'est autre chose qu'une circonférence GH, moyenne arithmétique entre les deux CODQ & ANBP, qui renferme la couronne, il s'ensuit qu'il faut multiplier le demi-cercle, qui auroit pour diamètre CA par la circonférence GH, pour avoir la valeur du bourlet.

A l'égard du revêtement de la Tour, l'on voit que pour en trouver la solidité, il faut ôter de la valeur du Cone tronqué, dont RSTX seroit la coupe, le cylindre qui auroit pour diamètre du cercle de sa base la ligne HI, & pour hauteur la ligne HZ, afin d'avoir la différence, qui sera ce qu'on demande.

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE à la manière de toiser le Revêtement d'une Fortification.

618. Quand on trace une Fortification, il y a une ligne qui regne tout autour des Ouvrages, que l'on nomme *Magistrales*, qui sert à donner les longueurs que doivent avoir les parties de la Fortification; & cette ligne est celle qui est représentée par le cordon du revêtement d'un Ouvrage; par exemple, si l'on dit qu'une face de Bastion a 50 toises, cela doit s'entendre depuis une extrémité du cordon de cette face jusqu'à l'autre; ou, ce qui est la même chose, depuis l'extrémité jusqu'à l'autre de l'entablement de la muraille de la face.

PLANCHE 19.

Présentement pour mesurer le revêtement du Bastion représenté dans la Figure 266. considérez-en le profil, dont les dimensions ont été prises selon le profil général de M. de Vauban, pour le revêtement ordinaire d'un Rempart, qui auroit 30 pieds depuis la retraite AG des fondemens jusqu'à la hauteur CH du cordon: & comme la partie DEFC n'a point de talut, nous n'en parlerons point ici, parce qu'elle est facile à mesurer; nous consi-

dererons seulement la muraille depuis la retraite jusqu'au cordon ; & faisant aussi abstraction des contreforts , il faut à cause des pyramides tronquées qui se rencontrent aux angles des points A & D , abaisser les perpendiculaires AB & DE , & mesurer la superficie du trapeze ABCG du profil par la longueur AD de la face prise le long des contreforts , & le produit sera regardé comme le revêtement de la face : venant ensuite dans l'angle flancant I , l'on tirera une perpendiculaire GH , de sorte qu'elle corresponde dans l'angle K du pied de la muraille ; & ayant aussi abaissé la perpendiculaire CA , l'on multipliera le profil précédent par la longueur HA ou GC du flanc , & l'on fera de même pour toiser la courtine & les autres parties où l'on aura retranché les pyramides des angles.

Fig. 270.

Pour connoître la valeur de ces pyramides tronquées , je considère que celle qui est à l'angle de l'épaule & à l'angle saillant , ressemblent assez à la Figure 270. Ainsi connoissant les deux plans VT & QR , je mesure cette pyramide tronquée comme à l'ordinaire , & supposant qu'elle soit celle de l'angle flanqué , je me garde bien de la prendre aussi pour celle de l'angle de l'épaule , parce qu'elles sont différentes en solidité : c'est pourquoi je mesure cette dernière , comme je viens de faire la précédente.

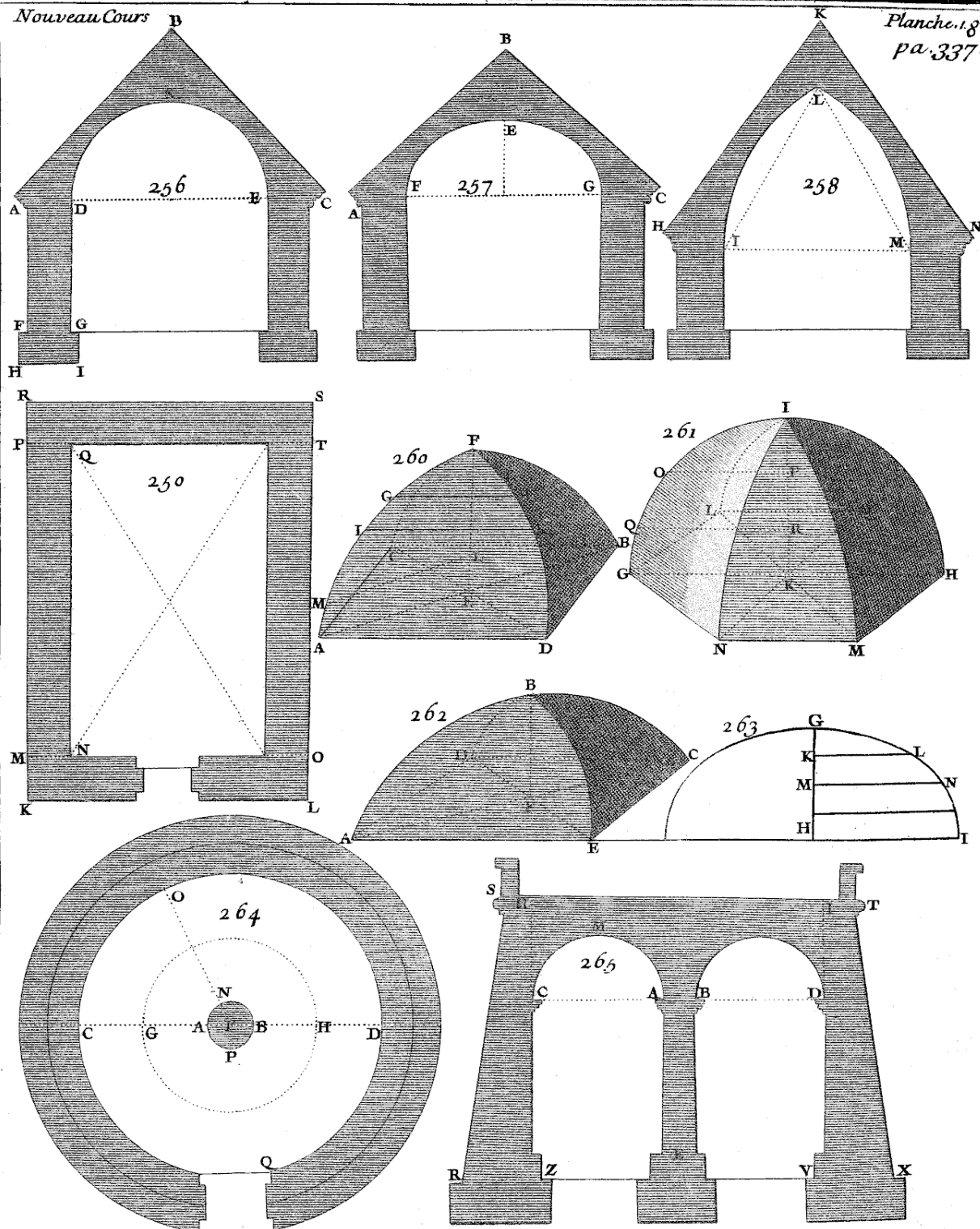
Fig. 268.
& 269.

Quant à ce qui nous reste à mesurer dans l'angle flancant I , je considère la Figure 269. comme étant cette partie-là détachée , qui ressembleroit à un prisme , si le vuide BCEHG étoit rempli ; supposant donc qu'il le soit , je cherche la valeur du prisme AFG , de laquelle je soustrais celle de la pyramide KMI , que je suppose être égale au vuide BEG , & la différence donne la partie que je cherche.

Fig. 271.

619. Ce seroit peu de chose que de toiser le revêtement d'une Fortification , s'il étoit toujours composé de lignes droites , comme dans cette Figure ; mais il y a bien d'autres difficultés , quand il faut toiser le revêtement des parties des Bastions à orillons , comme celle du Bastion repre-

qu'il faut Multiplier



représenté dans la Fig. 271. Cependant comme les art. 594. 595. ont été raportez exprès pour en faciliter l'intelligence, nous allons faire en sorte d'en rendre les opérations aisées.

La Figure 275. représente le flanc d'un Bastion à orillon, dont la largeur AB marque l'épaisseur du revêtement au cordon, qui est toujours de 5 pieds, & la largeur BC marque le talut du revêtement, qui est ici de 6 pieds; de sorte que toute la largeur AC marque l'épaisseur du revêtement sur la retraite, qui sera de 11 pieds, & la ligne FKIGDE la magistralle. Or pour toiser l'orillon GSD, nous allons voir premièrement de quelle façon il a été tracé, afin de connoître l'angle GHD, & le rayon HD, dont nous aurons besoin.

L'on sçait que pour tracer l'orillon selon la méthode de M. de Vauban, que l'on divise le flanc FD en trois parties égales, & que la troisième partie GD devient la corde d'une portion de cercle qui forme l'orillon, & que pour décrire cette portion de cercle, l'on élève sur le lieu de la partie GD une perpendiculaire IH, & une autre DH sur l'extrémité DE de la face du Bastion, & que ces deux perpendiculaires venant se rencontrer au point H, donnent le centre de l'orillon, ou autrement de l'arc GVD; dont le rayon est la perpendiculaire DH.

Cela posé, si avec les rayons HB, HG, HQ, l'on décrit trois cercles, & que l'on considère la Figure 273. l'on verra que ces trois cercles composent un Cone tronqué, dans le milieu duquel est un cylindre, & le plan BY étant le profil de l'orillon, la ligne GQ dans l'une & l'autre Figure marquera le talut du revêtement; la ligne GB son épaisseur à l'endroit du cordon, & la ligne HG le demi-diamètre de l'orillon, qui est la même chose que HD. Or comme le revêtement de l'orillon est un secteur de Cone tronqué, après en avoir ôté le cylindre, qui est dans le milieu, & que la grandeur de ce secteur est déterminée par l'angle GHD, voici comment on pourra connoître la valeur des lignes dont nous avons besoin pour mesurer ce secteur.

V u

PLANCHE 20.
Fig. 285.

Fig. 273.
& 274.

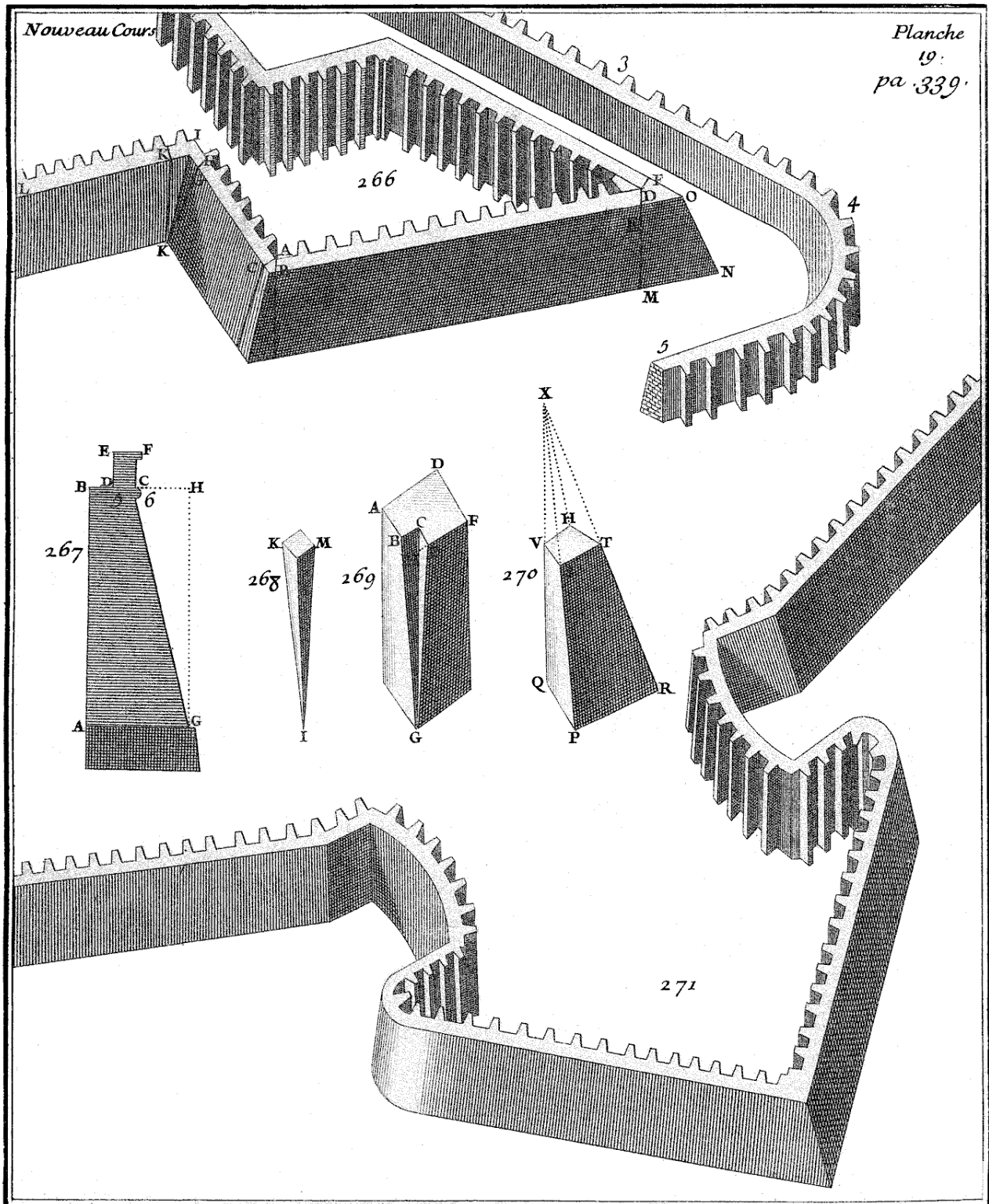
On n'a représenté que la moitié du Cone tronqué, afin de ménager l'espace de la Planch.

On a vû art. 526. que l'angle de l'épaule FDE étoit de 117 degrez 39 minutes; par conséquent si l'on en soustrait l'angle droit HDB, il restera 27 degrez 39 minutes pour l'angle $\widehat{HHD}$ du triangle rectangle HLD. Ainsi l'angle LHD sera de 62 degrez 21 minutes: & comme on a trouvé aussi art. 526. que le flanc FD étoit de 27 toises 2 pieds, la ligne LD en étant la sixième partie sera de 4 toises 3 pieds 4 pouces. Or comme du triangle LHD, l'on connoît les trois angles & le côté LD, il sera facile de connoître le côté DH, que l'on trouvera de 5 toises 9 pouces. Cela étant, on connoitra toutes les lignes de la Figure; car le demi-diamètre HG étant de 5 toises 9 pouces, & la ligne GB de 5 pieds, le rayon HB du cylindre sera de 4 toises 1 pied 9 pouces, & le talut GQ étant de 6 pieds, le demi-diamètre HQ de la base du Cone tronqué sera de 6 toises 9 pouces, & l'axe HZ exprimant la hauteur du revêtement, sera de 5 toises: ainsi l'on connoît tout ce qu'il faut pour mesurer le Cone tronqué & le Cylindre, qui est dans le milieu.

Ayant donc mesuré le Cone tronqué & le Cylindre, on retranchera la valeur du Cylindre de celle du Cone tronqué, pour avoir le fragment qui en fait la difference: & comme le revêtement de l'orillon est un secteur de ce fragment, l'on en cherchera la valeur, en suivant ce qu'on a vû dans l'art. 595. c'est-à-dire, que connoissant l'angle GHD, qui est de 124 degrez 42 minutes, l'on dira: Si 360 degrez m'ont donné tant pour la valeur du Cone tronqué, après en avoir ôté le Cylindre, que me donneront 124 degrez 42 minutes pour le secteur, ou autrement pour la valeur du revêtement de l'orillon, qui se trouvera, en faisant le calcul des parties que l'on vient d'indiquer.

Fig. 272.
& 275.

620. Avant de chercher à toiser le flanc concave KI, il faut être prévenu que pour le tracer on a prolongé la ligne de défense SF de la longueur FK de 5 toises pour faire la brisure, & que par l'angle flanqué S, & le point G l'on a tiré la ligne SI, pour avoir la partie GI aussi de



5 toises ; & ensuite on a tiré la ligne KI, sur laquelle on fait un triangle équilatéral KPI, pour avoir le point P, qui a servi de centre pour décrire avec le rayon PK l'arc KI, avec le rayon PN l'arc NO, & avec le rayon PL l'arc RM.

Présentement la première difficulté est d'avoir la valeur du rayon PK, que l'on trouvera pourtant en considérant qu'on connoît l'angle SFG de 80 degrés 47 minutes par l'art. 526. qui nous a donné aussi la ligne EF de 82 toises, à laquelle ajoutant la ligne SE, c'est-à-dire, la face du Bastion, qui est de 50 toises, on aura toute la ligne SEF de 132 toises : & comme la ligne FG est les deux tiers du flanc ED, que nous avons trouvé de 27 toises 2 pieds ; elle fera donc de 18 toises 1 pied 4 pouces. Or comme du triangle SFG on connoît les côtes FS & FG avec l'angle compris, on trouvera par leur moyen que l'angle FSG est de 8 degrés, & que le côté est de 126 toises 5 pieds ; & si au côté SF on ajoute la ligne FK de 5 toises, & au côté SG la ligne GI aussi de 5 toises, l'on aura un autre triangle KSI, dont on connoîtra le côté SK de 137 toises, le côté SI de 131 toises 5 pieds, & l'angle KSI de 8 degrés, avec lesquels on trouvera la ligne KI de 18 toises 4 pieds quelque chose : & comme cette ligne est égale au rayon PK, il fera donc aussi de 18 toises 4 pieds.

Si l'on considère bien le revêtement du flanc concave KI, on verra qu'il n'est autre chose qu'un secteur du cylindre, dans le milieu duquel il y auroit un vuide en forme de Cone tronqué, comme dans l'art. 596. & pour le mieux comprendre, imaginons que XV est la moitié d'un cylindre, dont le rayon PN du cercle est le même que celui de l'arc NO du flanc, & que le rayon PK étant de 18 toises 4 pieds, si on y ajoute la ligne KN, qui marque l'épaisseur de la muraille au cordon, & qui est par conséquent de 5 pieds, on aura la ligne PN de 17 toises 3 pieds. Or si de la ligne PK on retranche la ligne KL, qui marque le talut de la muraille, qui est de 6 pieds, l'on aura

Fig. 271.
273. &
274.

V u ij

la ligne PL de 17 toises 4 pieds ; & si la ligne NV est égale à la hauteur du revêtement, c'est-à-dire, de 5 toises, le trapeze KLVN. fera le profil du revêtement : ainsi comme l'on connoît le rayon PN du cylindre, le demi-diamètre PK du plus grand cercle du Cone tronqué, & le demi-diamètre PL du plus petit cercle du même Cone, & de plus l'axe Pp de 5 toises ; on a tout ce qu'il faut pour mesurer la solidité du cylindre XV, & celle du Cone tronqué. Ayant donc trouvé ces soliditez, on soustraira celle du Cone tronqué de celle du cylindre, pour avoir la difference, qui étant une fois trouvée, l'on dira : Si 360. m'ont donné tant pour la difference du cylindre au Cone tronqué, que me donneront 60. degrez, valeur de l'angle NPO pour la solidité du secteur de la partie du cylindre, après en avoir ôté le Cone tronqué, & ce qu'on trouvera sera au juste la valeur du revêtement du flanc concave. Quant à la brisure FK, & au revers GI de l'orillon, ce sont des parties trop aisées à toiser, pour avoir besoin d'explication.

Fig. 278. 621. La maniere de toiser l'arondissement d'une Contrescarpe, est encore une operation qui a aussi ses difficultez : mais comme cette partie est la même que celle du flanc concave, si on a bien entendu ce que j'ai dit ci-devant, je ne crois pas qu'on se trouve embarrassé. Cependant comme je ne veux rien laisser à deviner, considerez que pour toiser la maçonnerie de la Contrescarpe de la Fig. 278. on s'y prendra comme on a fait pour le Bastion de la Fig. 266. c'est-à-dire, que faisant abstraction des contreforts, on multipliera la superficie de la maçonnerie par la longueur de la Contrescarpe rectiligne, & qu'on mesurera aussi les pyramides tronquées, qui se trouveront dans les angles rentrants ; & pour l'arondissement, on s'y prendra comme il suit.

Fig. 278. 622. Supposant que l'arc ACB marque le pied de la muraille dans le fossé, l'arc DFG le sommet, & l'arc HIK avec le précédent l'épaisseur au sommet, & l'intervalle CE le talut, on commencera par chercher la valeur de la

corde AB, que nous supposons de 20 toises, & celle de la fleche LC, qui sera, par exemple, de 4, afin de connoître le diamètre de l'arc ACB, qu'on trouvera, aussi-bien que celui de tout autre arc, en cherchant une troisième proportionnelle à la fleche LC, & à la moitié de la corde LA, c'est-à-dire, à 4 & à 10 : cette troisième proportionnelle, qui est ici de 2.5 toises, sera la valeur du diamètre qu'on demande.

623. La raison de ceci s'entendra aisément, en considérant que l'arc ACB de la Figure 276. est le même que le précédent; & on remarquera qu'ayant achevé le cercle, la demi-corde LB est moyenne proportionnelle entre la fleche CL & la partie LM du diamètre; & qu'ayant trouvé la ligne LM troisième proportionnelle à CL & LB, on n'a qu'à l'ajouter à la fleche CL, pour avoir le diamètre CM.

Fig. 276

Comme nous avons besoin de connoître aussi la quantité de degrez que contient l'arc ACB, si on tire les rayons NB & NA du centre, l'on aura le triangle ABN, dont on connoît le côté AB de 20 toises, & les côtés NB & NA chacun de 14 toises 3 pieds : il sera donc facile de connoître l'angle ANB, que l'on trouvera de 90 degrez 44 minutes.

Présentement si l'on considère le profil de la Contreforce dans la Figure 281. on verra que ressemblant à celui du flanc concave, l'arondissement du fossé est un secteur de cylindre, duquel on a ôté un Cone tronqué, dont l'axe commun seroit la ligne OP. Or si la hauteur FR ou OP est de 18 pieds, & l'épaisseur FI de 3, le talut CR de 4, le rayon PC étant de 14 toises 3 pieds, le rayon OF sera de 15 toises 1 pied, & le rayon OI sera de 15 toises 4 pieds : & comme on connoît toutes les lignes du cylindre, qui auroient pour plan generateur le rectangle PI, & celles du Cone tronqué, qui auroient pour plan generateur le trapezoïde POFC ; si on cherche la solidité de l'un & de l'autre, & qu'on ôte celle du Cone tronqué de celle du cylindre, on aura la difference qui nous don-

V. u. iij.

nera la solidité que nous cherchons, en disant: Si 260 degrez m'ont donné cette difference, que me donneront 90 degrez 44 minutes pour la valeur de l'arondissement.

Je n'ai rien dit jusqu'ici sur la maniere de toiser les contreforts, parce qu'ils ne sont autre chose que des parallelepipedes, dont la solidité se trouve en multipliant la base par la hauteur.

*MANIERE DE MESURER LA SOLIDITÉ^I
de l'onglet d'un Bâtardeau.*

Fig. 277. 624. Quand les fosses d'une Fortification sont inondez, on y fait ordinairement aux endroits les plus convenables des Bâtardeaux de maçonnerie, pour retenir les eaux ou pour les lâcher, selon le besoin qu'on en a. Pour connoître ce Bâtardeau, considerez la Figure 277. qui fait voir que cet ouvrage n'est autre chose qu'un corps de maçonnerie, dont le profil ABCDE marque que le dessus BCD est en dos d'âne pour l'écoulement des eaux de pluye, & pour empêcher qu'un homme ne puisse passer dessus: cependant comme les Soldats pourroient, en descendant du rempart avec une corde, passer le fossé en s'achevant sur cette chappe, on fait, pour y mettre empêchement, une tourelle dans le milieu, qui s'oppose absolument au passage. Or pour toiser ce Bâtardeau, on commence par mesurer la superficie du profil ABCDE, qu'on multiplie par toute la largeur du fossé en cet endroit; ensuite on cherche la solidité du cylindre FIKG, aussi bien que celle de sa couverture, qui est quelquefois un Cone ILK, ou une demi-sphere. Jusques-là tout est facile; mais ce qui embarrasse presque tous les Ingenieurs, c'est de toiser les deux fragmens, comme FHG, de la tourelle, qui sont à droite & à gauche, comme on peut les voir encore mieux en X & Z de la Figure 282. qui est un profil de la tourelle & du Bâtardeau.

Fig. 282.

Ce Problème me fut proposé il y a sept ou huit ans par

plusieurs Ingenieurs, qui desiroient d'en avoir la solution. Je la cherchai, & la trouvai de plusieurs manieres; je pris tant de plaisir à y travailler, que je recherchai même plusieurs choses fort curieuses à son occasion; entr'autres de sçavoir quelle est la quadrature de la surface de l'onglet, c'est-à-dire, trouver un rectangle égal à sa surface: & comme je crois qu'on sera bien aisé de sçavoir ce qu'on peut dire de plus intéressant là-dessus, on n'a qu'à examiner ce qui suit.

Comme l'axe du cylindre qui compose la tourelle ré- Fig. 275.
pond sur l'arrête de la cape du Bâtardeau; cette arrête partage la cape du cylindre en deux également; de sorte que chaque demi-cercle devient une des faces NQM de l'onglet. Or si l'on considère ce solide comme composé d'une quantité infinie de triangles rectangles, tels que POQ, qui ont tous pour base les ordonnées PO, RS, TV, des quarts de cercles OQN & OPM, on verra que tous ces triangles étant semblables, ils sont dans la même raison que les quarrés de leurs bases; & ne prenant que les triangles qui composent la moitié QNOP de l'onglet, il s'ensuit qu'on en trouvera la valeur comme on trouve celle des quarrés de leurs bases, ou autrement comme on trouve celle des quarrés des ordonnées d'un quart de cercle *; mais nous sçavons que pour trouver la va- * Art. 356.
leur de tous ces quarrés, il faut multiplier celui de la plus grande ordonnée OQ par les deux tiers de la ligne ON, qui en exprime la quantité: il faudra donc pour trouver la valeur de tous les triangles, multiplier le plus grand triangle POQ par les deux tiers de la ligne ON: mais comme ceci ne donne que la moitié de la solidité de l'onglet, il faudra donc, pour l'avoir toute entière, multiplier le triangle POQ par les deux tiers du diamètre MN.

Supposant que cet onglet-ci soit le même que celui qui Fig. 279.
est en X, le triangle OPQ sera le même que ABC; par & 283.
conséquent si la ligne CA est de 5 pieds, & le diamètre AD de 9, la ligne BC sera de 4 & demi, & la superficie

du triangle ABC fera de 11 pieds 3 pouces, qui étant multiplié par les deux tiers du diamètre AD, c'est-à-dire, par 6, donnera 67 pieds & demi cubes pour la solidité de l'onglet X.

Fig. 289. Si l'on imagine l'onglet coupé par une quantité de plans, qui passant par le centre B du demi-cercle, aillent tomber sur la circonférence AFD, c'est-à-dire, perpendiculairement sur la surface de l'onglet, ces plans partageront l'onglet en une infinité de petites pyramides, qui auront toutes pour hauteur commune le rayon du demi-cercle, & leurs bases dans la surface de l'onglet. Mais comme toutes ces pyramides prises ensemble sont égales à une seule, qui auroit pour base la somme de toutes les bases, c'est-à-dire, la surface de l'onglet, & pour hauteur son rayon; il s'ensuit qu'on trouvera encore la solidité de l'onglet, en multipliant la surface par le tiers du rayon.

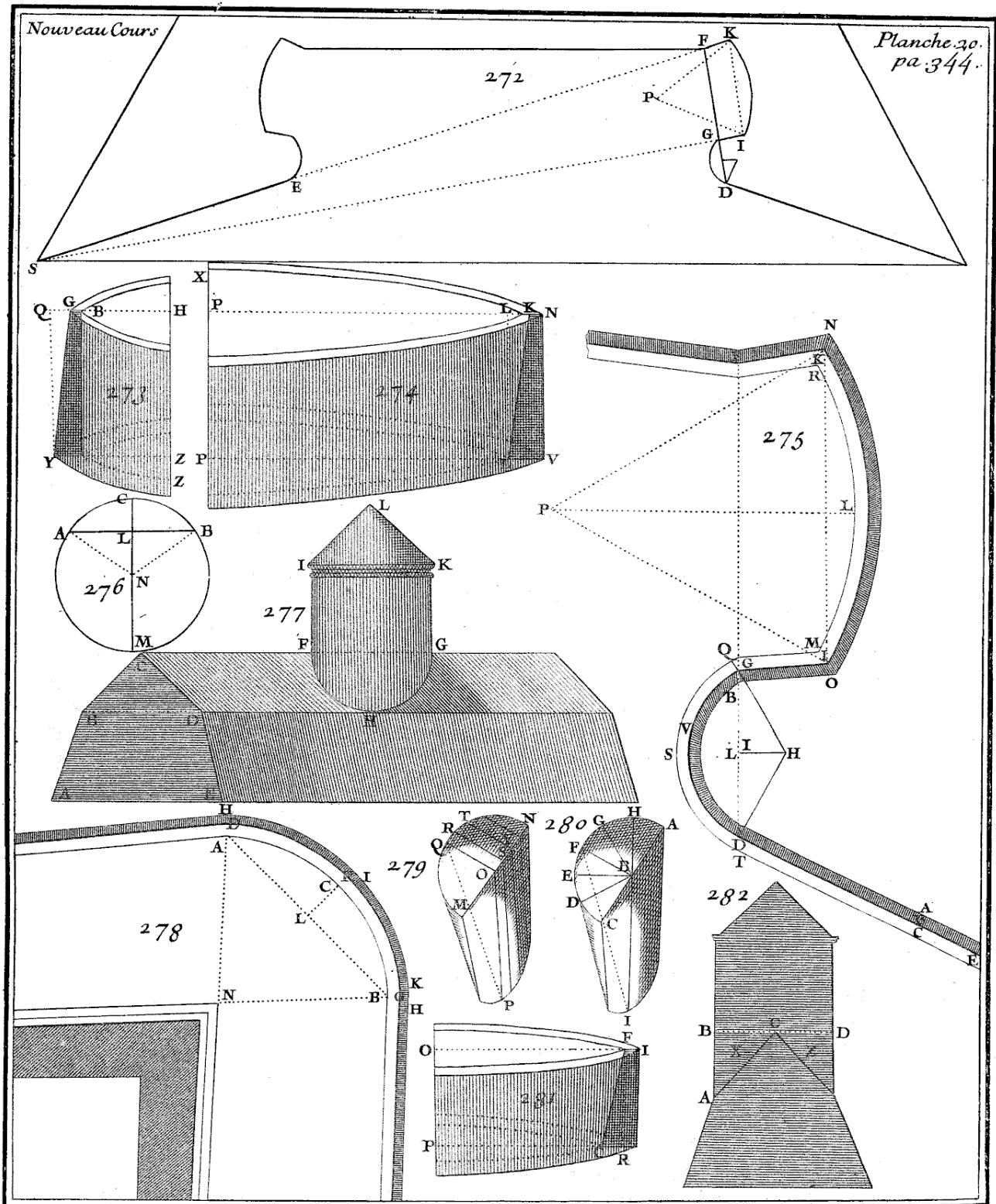
625. Presentement je dis que la surface de l'onglet X est égale à un rectangle, qui auroit pour base le diamètre BD ou MN de l'onglet, & pour hauteur la hauteur même de l'onglet, c'est-à-dire, la ligne BA.

Si l'on nomme la ligne BA, a ; le rayon CB ou CD, b ; le diamètre BD fera $2b$. Cela posé, il faut faire voir que $BD \times BA$ ($2ba$) est égal à la surface de l'onglet.

Considérez que la superficie du triangle ABC est $\frac{ab}{2}$, & que si on multiplie cette quantité par les deux tiers du diamètre BD, c'est-à-dire, par $\frac{4b}{3}$, l'on aura $\frac{4abb}{6}$ pour la solidité de l'onglet: mais comme ce produit peut être regardé comme le produit de la surface de l'onglet par le tiers du rayon, il s'ensuit que divisant $\frac{4abb}{6}$ par $\frac{b}{3}$, le quotient sera nécessairement la surface de l'onglet. Or faisant donc la division *, on trouvera que ce quotient est $2ab = BD \times BA$, ce qui fait voir que la surface de l'onglet est égale au rectangle que nous avons dit.

* Art. 185.

PRINCIPÆ



**PRINCIPE GENERAL POUR MESURER
les Surfaces & les Solides.**

626. Rien ne fait mieux connoître la beauté de la Géométrie, que la fécondité de ses principes, qui semblent à l'envi ouvrir de nouveaux chemins pour parvenir à la même chose ; témoin les belles découvertes qu'on a faites de notre tems, parmi lesquelles en voici une qui est trop intéressante pour la refuser à ceux dont le principal objet, en étudiant la Géométrie, est de sçavoir mesurer les corps ; mais comme sa connoissance dépend de certaines choses dont nous n'avons point parlé jusqu'ici, nous allons faire en sorte de ne rien laisser à deviner.

DEFINITION.

627. L'on nomme *centre de gravité d'une ligne droite*, un point par lequel cette ligne étant suspendue, toutes ses parties sont en équilibre ; car quoiqu'une ligne soit regardée comme n'ayant aucune pesanteur, cela n'empêche pas que la différence de ses parties ne soit considérée comme un obstacle à l'équilibre ; ainsi la ligne AB étant divisée en deux également au point C, ce point est pris pour celui d'équilibre, c'est-à-dire, pour l'endroit par lequel cette ligne étant suspendue, les parties égales CA & CB seront en équilibre, parce que n'étant pas plus longues l'une que l'autre, il n'y a point de raison pour que l'extrémité A ait plus d'inclination pour se mouvoir, que l'extrémité B : & quand cela est ainsi à l'égard d'un plan, ce point est appelé le *centre de gravité du plan* : car quoique le plan, aussi-bien que la ligne, soit considéré sans pesanteur, cela n'empêche pas qu'on ne regarde encore ses parties comme pouvant être un obstacle à leur équilibre.

628. Par exemple, si l'on a un rectangle AB, & qu'on tire les diagonales AB & CD, le point E, où elles se cou-
XX

PLAN-
CHE 21.
Fig. 28

pent, en fera le centre de gravité, parce que si ce plan étoit posé sur un pivot fort aigu qui répondît à l'endroit E, il n'y auroit point de raison pour que le plan inclinât plus du côté DB que du côté AC, ni du côté AD, plutôt que du côté CB.

Fig. 285.
& 283.

Comme les surfaces circulaires sont formées par la circonvolution uniforme d'une ligne droite, & que les solides circulaires sont formez par la circonvolution d'un plan, c'est la valeur de ces surfaces & de ces solides qu'on se propose de trouver ici, moyennant la connoissance du centre de gravité de la ligne generatrice, & celui du plan generateur; car si le point C est le centre de gravité de la ligne AB, & qu'on élève à cet endroit la perpendiculaire CD, nous ferons voir que (la ligne AB ayant fait une circonvolution autour de la ligne EF, qui sera appelée *axe*, & qui est aussi perpendiculaire sur DC) la surface que décrira la ligne AB, sera égale à un rectangle, qui auroit pour base la ligne AB, & pour hauteur une ligne égale à la circonférence, qui auroit pour rayon la ligne DC, qui exprime la distance du centre de gravité C à l'axe; & que si du centre de gravité E l'on abaisse une perpendiculaire EF sur le côté CB, & qu'on fasse faire une circonvolution au rectangle AB sur le côté CB (que nous nommerons aussi *axe*) le corps que décrira le plan, sera égal à un parallelepipedé, qui auroit pour base ce plan même, & pour hauteur une ligne égale à la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon la ligne EF; ce que nous rendrons general pour mesurer toutes les surfaces dont on pourra connoître les centres de gravité de leurs lignes generatrices, & pour mesurer tous les solides dont on pourra connoître le centre de gravité de leur plan generateur.

PROPOSITION PREMIERE.

Problème.

629. Connoissant le centre de gravité d'une ligne droite *AB*, trouver la valeur de la surface qu'elle décrira, après avoir fait une circonvolution autour de l'axe *EF*. Fig. 285.
& 286.

Je dis qu'il faut multiplier la ligne *AB* par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon *DC*, & qu'on aura la surface que l'on demande; car comme cette ligne décrira un cylindre *GB*, & que pour trouver la surface de ce cylindre, il faut multiplier le cercle du rayon *FB* de la base par la hauteur *AB* du cylindre *; il s'ensuit que la ligne *DC* étant égale à *FB*, que les circonférences de ces lignes seront aussi égales; & que par conséquent le produit de la ligne *AB* par la circonférence du rayon *DC*, sera égal à la surface qu'on demande. * Art. 577.

630. Mais si la ligne *AB*, au lieu d'être parallèle à l'axe *EF*, étoit oblique, comme est, par exemple, la ligne *GH*: je dis qu'ayant fait une circonvolution à l'entour de l'axe *EF*, la surface qu'elle décrira sera encore égale au rectangle compris sous la même ligne *GH*, & sous la circonférence du cercle qui auroit pour rayon la ligne *DC*, tirée du centre de gravité *C* perpendiculaire sur l'axe *EF*. Fig. 287.
& 288.

Comme cette ligne aura décrit la surface *IH* d'un Cone tronqué, & que la ligne *DC* est moyenne arithmétique entre *EG* & *FH* *, la circonférence, qui auroit pour rayon *DC*, sera moyenne arithmétique entre les circonférences des rayons *EG* & *FH*: mais comme ces circonférences servent de côtes parallèles au trapezoïde, qui auroit pour hauteur la ligne *GH*, & que ce trapeze est égal à la surface du Cone tronqué; il s'ensuit que le rectangle compris sous *GH*, & la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon *DC*, est égal à la surface décrite par la ligne *GH*. * Art. 568.

631. Enfin si la ligne generatrice venoit rencontrer, comme *EK*, l'axe *EF*, je dis encore que si elle fait une

X x ij

circonvolution à l'entour de l'axe EF, la surface qu'elle décrira, sera égale au rectangle compris sous la même ligne EK, & sous la circonférence du cercle qui auroit pour rayon DC.

Art. 579. Si l'on fait attention que la ligne generatrice aura décrit la surface du Cone LEK, on verra que cette surface étant égale au rectangle compris sous le côté EK, & sous la moitié de la circonférence du cercle LK, la ligne DC étant moitié du rayon FK, la circonférence dont elle fera le rayon, fera aussi moitié de LK; & que par conséquent le rectangle compris sous la ligne generatrice EK, & sous la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon DC, sera égale à la surface qu'elle aura décrite.

P R O P O S I T I O N . I I .

Problème.

Fig. 294. 632. Si l'on a une demi-circonférence EBF, & que le point C soit le centre de gravité, je dis que cette demi-circonférence ayant fait une circonvolution sur l'axe EF, que la surface qu'elle décrira, qui sera celle d'une Sphere, sera égale au Rectangle compris sous une ligne égale à la demi-circonférence EBF, & sous celle qui seroit égale à la circonférence dont la ligne CD seroit le rayon.

Comme il faut connoître le centre de gravité C par rapport aux autres parties de la figure, on sçaura que la ligne CD, qui en détermine la position par rapport au centre du demi-cercle, doit être quatrième proportionnelle à la demi-circonférence EBF, au diamètre EF, & au demi-diamètre DF. Ainsi ayant nommé la demi-circonférence a ; le diamètre EF, b ; le demi-diamètre DF

*Art. 153. fera $\frac{b}{2}$, & par conséquent on aura $a : b :: \frac{b}{2} : \frac{bb}{2a}$. * qui fait

voir que $\frac{bb}{2a}$ est égal à la ligne DC; mais comme nous

avons besoin de la circonférence de la ligne DC, on la

trouvera , en disant , Comme le rayon DF $\left(\frac{b}{2}\right)$ est à la circonférence $(2a)$; ainsi le rayon DC $\left(\frac{bb}{2a}\right)$ est à la

circonférence : c'est pourquoi multipliant le second terme par le troisième, & divisant le produit par le premier*, *Art. 189, on trouvera le quatrième, qui sera $2b$.

Comme $2b$ est la circonférence du rayon DC, si on la multiplie par la demi-circonférence EBF (a) , l'on aura $2ab$ pour la surface que la demi-circonférence aura décrite ; ce qui est évident, car comme cette surface est ici celle d'une Sphere, & que la surface d'une Sphere est égale au produit du diamètre du grand cercle par la circonférence du même cercle*, *Art. 384, toute la circonférence étant ici $2a$, & le diamètre b , la surface sera toujours $2ab$.

R E M A R Q U E.

Je viens d'en dire assez pour faire voir que dès qu'on aura le centre de gravité d'une ligne droite ou courbe, on trouvera toujours la surface dont elle aura été la génératrice, & que rien au monde ne feroit plus beau que ce principe, si l'on avoit autant de facilité à trouver le centre de gravité de ces lignes, qu'on en a à trouver la valeur des surfaces qu'elles décrivent. Ainsi ayant satisfait à mon premier dessein, je vais remplir le second, en montrant comment on peut aussi, par les centres de gravité des plans generateurs, trouver la solidité des corps qu'ils auront décrits.

PROPOSITION III.

Problème.

633. Si l'on a un Rectangle AF, qui fasse une révolution autour de l'axe EF, je dis que la solidité du corps qu'il décrira, sera égal au produit du plan AF par la circonférence, qui auroit pour rayon la ligne CD, tirée du centre de gravité C, perpendiculaire sur l'axe EF. Fig. 184

X x.iiij.

Comme ce solide sera un cylindre, nous supposons que c'est le cylindre AG: ainsi nommant l'axe EF, a ; la ligne AE, b ; la ligne CD sera $\frac{b}{2}$, puisqu'elle est moitié de AE; & si l'on nomme la circonférence du rayon EA, c ; celle du rayon CD sera $\frac{c}{2}$.

Cela posé, $AE \times EF$ (ab) sera la valeur du plan generateur, qui étant multiplié par la circonférence du rayon CD ($\frac{c}{2}$), l'on aura $\frac{abc}{2}$ pour la valeur du solide formé par la circonvolution du plan AF; ce qui est évident: car comme ce solide, ou autrement le cylindre AG, est égal au produit du cercle de sa base par l'axe EF*, on voit que la superficie de ce cercle étant $\frac{bc}{2}$, si on la multiplie par l'axe EF, on aura encore $\frac{abc}{2}$.

PROPOSITION IV.

Problème.

Fig. 291.
& 292.

634. Si l'on a un Triangle isoscèle EBF, dont le centre de gravité soit le point C, je dis que si ce Triangle fait une circonvolution autour de l'axe EF, que le solide qu'il décrira, sera égal au produit du plan generateur par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon la ligne CD, tirée du centre de gravité perpendiculaire sur l'axe.

Remarquez que le solide IKGH qu'aura décrit le triangle EBF, est composé de deux Cones KGH & KIH, & qu'il s'agit de faire voir que le produit du plan EBF par la circonférence du rayon CD, est égal à ces deux Cones: mais pour cela il faut être prévenu que le centre de gravité du triangle isoscèle, est un point tel que C, pris dans la perpendiculaire BD à une distance CD de la base, du tiers de la perpendiculaire. Ainsi nommant la

ligne EF, a ; la ligne BD, b ; & c la circonférence dont elle feroit le rayon ; CD étant le tiers de BD, la circonférence dont elle feroit le rayon, fera $\frac{c}{3}$.

Cela posé le triangle EBF fera $\frac{ab}{2}$, qui étant multiplié par $\frac{c}{3}$, l'on aura $\frac{abc}{6}$ pour la valeur du solide KGH ; ce qui est évident : car si l'on cherche par la voye ordinaire la solidité du Cone KGH, dont le plan generateur est le triangle EBD, la ligne BD étant le rayon du cercle de la base, sa valeur sera $\frac{bc}{2}$, qui étant multiplié par le tiers de la ligne ED*, ou par la fixième partie de EF $\left(\frac{a}{b}\right)$, *Art. 368 l'on aura $\frac{abc}{12}$ pour la valeur du Cone, & par conséquent $\frac{2abc}{12}$, ou bien $\frac{abc}{6}$ pour la valeur des deux Cones, c'est-à-dire, du solide KGH, qui se trouve la même que la précédente.

635. Mais si le triangle EBF faisoit une circonvolution autour de l'axe FM, il décrira un solide d'une autre figure, dont le rapport avec le précédent sera comme la ligne BC est à la ligne CD ; car pour trouver la valeur de ce solide, il faudra multiplier le plan EBF par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon BC : & comme l'un & l'autre solide aura pour base le même plan EBF, ils seront dans la même raison que leurs hauteurs, c'est-à-dire, dans la raison des circonférences des rayons BC & CD, qui sont dans la même raison que ces rayons.

L'on peut remarquer encore qu'ayant un triangle rectangle EBD, qui fasse une circonvolution autour du côté ED, qu'il décrira un Cone dont on trouvera la valeur, en multipliant le triangle BED par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon la ligne CD égale au tiers de la base BD ; car multipliant BD (b) par la

moitié de ED $\left(\frac{a}{4}\right)$, l'on aura $\frac{ab}{4}$ pour la superficie du triangle, qui étant multiplié par $\frac{e}{3}$, donnera $\frac{abc}{12}$.

Fig. 295.

Et si le triangle EBD faisoit une circonvolution autour de l'axe HB, il décrirait l'Entonnoir FGBDE, qui seroit double du Cone; car comme le Cone & l'Entonnoir ont le même plan generateur, ils seront dans la raison des circonférences décrites par le centre de gravité C: & comme le rayon BC est double de CD, l'Entonnoir sera double du Cone; ce qui fait voir qu'un Cone est le tiers d'un cylindre de même base & de même hauteur.

Fig. 293.

636. Enfin si l'on avoit un triangle BAD, dont le point C fût le centre de gravité du triangle double de celui-ci, que l'on prolongeât la ligne AD indéfiniment jusqu'aux points E & F, & que l'on fit faire une circonvolution au triangle BAD autour de l'axe GF, le solide qu'il décrirait seroit égal au produit du plan BAD par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon la ligne CF, qui est la distance du centre de gravité C à l'axe FG; & si le triangle, au lieu de faire une circonvolution autour de l'axe GF, en faisoit une autre autour de l'axe HE, le solide qu'il décrirait seroit égal au produit du plan ABD par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon la ligne CE, tirée du centre de gravité à l'axe, & ces deux solides seroient dans la raison des rayons CF & CE.

Je laisse au Lecteur le plaisir d'en chercher la démonstration; & je me contenterai de dire seulement que le solide formé par la circonvolution du triangle ABD autour de l'axe GF, est semblable à celui dont nous avons parlé dans l'art. 596. c'est-à-dire, qu'il fait la différence d'un cylindre, duquel on auroit ôté un Cone tronqué; & que le solide formé par la circonvolution du triangle ABD autour de l'axe HE, est aussi semblable à celui de l'art. 595. c'est-à-dire, qu'il fait la différence d'un Cone tronqué, duquel on auroit ôté un cylindre: & comme la manière de trouver la valeur de ces solides de la façon que
je

je viens de dire, est plus aisée que celle des art. 595. 596. l'on pourra s'en servir pour toiser la Maçonnerie comprise par le talut de l'orillon, du flanc concave, & de l'arondissement de la contrescarpe.

PROPOSITION V.

Problème.

637. Si l'on a un demi-cercle EBF, dont le centre de gravité soit le point I, & que de ce point l'on abaisse la perpendiculaire ID, je dis que le solide formé par la circonvolution du demi-cercle EBF autour de l'axe EF, qui sera une Sphère, sera égal au produit du plan EBF par la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon la ligne ID. Fig. 294.

Il faut être prévenu que la ligne ID, qui marque la distance du centre de gravité I au centre D du demi-cercle, est une quatrième proportionnelle à la moitié de la circonférence EBF au rayon DE, & aux deux tiers du même rayon. Ainsi nommant la demi-circonférence EBF, a ; le rayon DE, b ; la moitié de la circonférence EBF sera $\frac{a}{2}$, & les deux tiers du rayon DE seront $\frac{2b}{3}$, on trouvera la ligne DI, en disant : Comme $\frac{a}{2}$ est à b , ainsi $\frac{2b}{3}$ est à DI, qui sera $\frac{4bb}{3a}$: & comme nous avons besoin de la circonférence du rayon DI, on dira : Si le rayon DE (b) donne $2a$ pour sa circonférence, que donnera le rayon DI ($\frac{4bb}{3a}$) pour sa circonférence, qui sera $\frac{8abb}{3a}$, ou bien $\frac{8bb}{3}$. Or si l'on multiplie cette circonférence par la valeur du demi-cercle EBF ($\frac{ab}{2}$), l'on aura $\frac{8abb}{6}$, ou bien $\frac{4abb}{3}$ pour la valeur du solide ; ce qui est aisé à prouver : car comme une Sphère est égale au produit de quatre fois son grand cercle par le tiers du rayon *, la superficie du demi-cercle étant $\frac{ab}{2}$, celle de tout le cercle sera ab , qui

* Art. 383 & 385.

Y y

étant multipliée par 4., donnera $4ab$ pour la valeur des quatre cercles ; & si l'on multiplie cette quantité par le tiers du rayon , c'est-à-dire , par $\frac{b}{3}$, l'on aura $\frac{4abb}{3}$ pour la valeur de la Sphere , qui est la même que celle que nous venons de trouver.

Mais si le demi-cercle EBF faisoit une circonvolution autour de la tangente GA , parallele au diamètre EF , il décrirait un solide , dont on trouvera la valeur , en multipliant le demi-cercle par la circonference qui auroit pour rayon la ligne IB , qui est la distance du centre de gravité I à l'axe GA ; & si le demi-cercle fait encore une circonvolution autour de l'axe AH perpendiculaire à EF , il décrira une espece de bourlet , dont on trouvera la valeur , en multipliant le demi-cercle par la circonference du rayon IK , ou du rayon DF , qui est la même chose ; & pour lors le solide décrit par le demi-cercle autour de l'axe EF , sera au solide décrit autour de l'axe GA comme le rayon ID est au rayon IB , & le solide formé par la circonvolution du demi-cercle autour de l'axe EF , sera à celui qui aura été formé par une circonvolution du même demi-cercle autour de l'axe AH , comme le rayon ID est au rayon IK ou DF.

R E M A R Q U E.

Je n'ai point donné la maniere de trouver les centres de gravité , parce que c'eût été m'écarter de mon sujet , n'ayant eu en vue que d'exercer l'esprit des Commencans , & leur faire sentir le prix de ce principe general , par le moyen duquel on peut , indépendamment de ce que nous avons enseigné dans le huitième Livre de la premiere Partie , résoudre une quantité de Problèmes , dès qu'on a les centres de gravité des figures generatrices , que l'on ne peut trouver d'une façon generale , qu'avec le secours du calcul integral : Cependant on peut voir ce qu'en a dit M. Ozanam dans son Traité de Mécanique , où il trouve les centres de gravité de plusieurs figures par la Géométrie ordinaire.



NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

SIXIÈME PARTIE.

*Où l'on applique la Géométrie à la division des
Champs.*

PROPOSITION PREMIÈRE.

Problème.

638. **D**iviser un Triangle en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes tirées de l'angle opposé à la base. Fig. 296.

Pour diviser un triangle ABC en trois parties égales par des lignes tirées de l'angle opposé à la base, il faut diviser la base AC en trois parties égales aux points D & E, tirer les lignes BD & BE, & le triangle sera divisé en trois triangles égaux, puisque ces triangles ont des bases égales, & qu'ils ont la même hauteur.

PROPOSITION II.

Problème.

639. Diviser un Triangle en deux parties égales par une ligne tirée d'un point donné sur un des côtes du Triangle. Fig. 297.

L'on demande qu'on divise le triangle ABC en deux parties égales par une ligne tirée du point D, parce que l'on suppose que ce triangle est un champ, sur le bord du-
Y y ij

356 NOUVEAU COURS

quel est un lieu avantageux au point D, qui doit être commun à chacun de ceux qui auront part au Champ.

Pour résoudre ce Problème, il faut diviser la base AC en deux parties égales au point E, & tirer de ce point les lignes EB & ED ; puis du point B tirer la ligne BF parallèle à DE : enfin tirer la ligne FD, qui divisera le triangle en deux parties égales BDFA & DFC.

Pour prouver cette operation, considérez que le triangle ABE est la moitié de tout le triangle ABC ; & qu'à cause des parallèles BF & DE, le triangle BFD est égal au triangle BEF ; d'où il s'ensuit que le triangle OFE, que l'on a retranché au triangle BEA, est égal au triangle ODB, que l'on a retranché du triangle EBC : ce qui fait voir que le trapeze BDFA est égal au triangle FDC.

PROPOSITION III.

Problème.

Fig. 298. 640. *Diviser un Triangle en trois parties égales par des lignes tirées d'un point pris sur un de ces côtés.*

Pour diviser le triangle ABC en trois parties égales par des lignes tirées du point D, il faut partager le côté AC en trois parties égales aux points E & F ; ensuite tirer la ligne DB, à laquelle il faut mener des points E & F les parallèles EH & FG : & si l'on tire du point D les lignes DG & DH, on aura le triangle divisé en trois parties égales AHD, DHBG, & DGC.

Pour le prouver, il ne faut que tirer les lignes BE & BF qui diviseront le triangle en trois autres triangles égaux. Or comme le triangle ABE est égal au triangle AHD, à cause des parallèles HE & BD : on verra par la même raison que le triangle DGC est égal au triangle BFC, & que par conséquent ils sont chacun le tiers de toute la figure.

PROPOSITION IV.

Problème.

641. *Diviser un Triangle en trois parties égales par des lignes tirées dans les trois angles.* PLANCHE 22.
Fig. 299.

On demande un point dans le triangle ABC, duquel ayant tiré des lignes dans les angles, elles divisent le triangle en trois parties égales.

Pour résoudre le Problème, il faut faire la ligne AF égale au tiers de la base AC ; du point F tirer la ligne FE parallèle au côté AB : & diviser la parallèle FE en deux également au point D, ce point sera celui qu'on cherche. Car ayant tiré dans les angles du triangle les lignes DB, DA, & DC, elles diviseront le triangle en trois parties égales.

Pour le prouver, je tire la ligne BF, qui me donne le triangle BAF, qui est le tiers de toute la figure : & comme ce triangle est égal au triangle ADB, à cause des parallèles ; il s'ensuit que ce dernier triangle est aussi le tiers de la figure. Et comme les triangles ADC & BDC sont égaux entr'eux, comme il est facile de le voir, il s'ensuit que le Problème est résolu.

PROPOSITION V.

Problème.

642. *Diviser un Triangle en deux parties égales par des lignes tirées d'un point donné à volonté dans la superficie du Triangle.* Fig. 300.

Pour diviser en deux également le triangle ABC par des lignes tirées du point donné F, il faut diviser la base AC en deux également au point D, & tirer la ligne DE, à laquelle il faut mener une parallèle BE ; après quoi l'on n'aura qu'à tirer les lignes EF & FB pour avoir la figure ABFE égale à la figure BEEC.

Pour le prouver, tirez la ligne BD, & considérez qu'à
Y. y. üj.

cause des parallèles le triangle BFE est égal au triangle BDE, & que par conséquent ce qu'on a retranché d'une part, est égal à ce que l'on a ajouté de l'autre dans les deux triangles ABD & DBC.

PROPOSITION VI.

Problème.

Fig. 301. 643. *Diviser un Triangle en deux parties égales par une ligne parallèle à la base.*

Pour diviser le triangle ABC par une ligne DE parallèle à la base, il faut partager en deux également l'un des autres côtes, par exemple, le côté BC; puis chercher une moyenne proportionnelle entre tout le côté BC, & sa moitié BF; & supposant que la ligne BE soit égale à la moyenne, que l'on aura trouvée, on n'aura qu'à mener du point E la parallèle ED à la base AC, pour avoir résolu le Problème.

* Art. 328. Pour le prouver, faites attention que les lignes BC, BE, BF, étant proportionnelles, il y aura même raison du carré fait sur la ligne BC au carré fait sur la ligne BE, que de la première ligne BC à la dernière BF. * Or comme les triangles sont dans la même raison que les quarrés de leurs côtes homologues, le triangle BAC fera double du triangle BDE, puisque le carré du côté BC est double du carré du côté BE, à cause que la ligne BC est double de la ligne BE.

Si l'on vouloit diviser un triangle en trois parties égales par des lignes tirées parallèles à la base, il faudroit chercher d'abord une moyenne proportionnelle entre l'un des côtes du triangle, & les deux tiers du même côté: & ayant déterminé la longueur de cette moyenne sur le côté qu'on aura divisé, l'on tirera une parallèle de l'extrémité de cette ligne à la base, on aura un triangle intérieur, qui sera les deux tiers de celui qu'on veut partager en trois: & si l'on divise le rectangle qui contient les deux tiers du grand, en deux également, comme on

vient de le faire dans la proposition précédente ; tout le triangle se trouvera divisé en trois parties égales.

PROPOSITION VII.

Problème.

644. *Diviser un Trapezoïde en deux parties égales par une* Fig. 302
ligne parallèle à la base.

Pour diviser le Trapezoïde ABCD par une ligne parallèle à la base, il faut prolonger les deux côtes AB & DC pour qu'ils se rencontrent au point G ; puis élever sur l'extrémité G la perpendiculaire GH égale à la ligne GB ; tirer la ligne HA, & décrire sur cette ligne un demi-cercle, dont il faudra diviser la circonférence en deux également au point I ; & ayant tiré la ligne IH, on fera GE égal à IH : & si par le point E l'on mène la parallèle EF à la base AD, je dis qu'elle divisera le Trapezoïde en deux parties égales.

Pour le prouver, je considère que la ligne HA est le côté du carré, qui vaut la somme des carrés BG & GA ; & que la ligne IH est le côté d'un carré qui vaut la moitié du carré HA : par conséquent le carré IH ou GE est moyenne arithmétique entre les carrés GA & GB. Et comme les triangles semblables sont dans la même raison que les carrés de leurs côtes homologues, il s'ensuit que les carrés des côtes GB, GE, GA, étant en progression arithmétique, les triangles GBC, GEF, GAD, sont en proportion arithmétique ; par conséquent se surpassent également : & comme les grandeurs dont ils sont surpassés, ne sont autre chose que le Trapezoïde EC, & AF : je conclus que ces Trapezoïdes sont égaux, & que par conséquent le Problème est résolu.

PROPOSITION VIII.

Problème.

Fig. 303. 645. *Diviser un Trapeze en deux également par une ligne parallele à l'un de ses côtez.*

Pour diviser le Trapeze ABCD par une ligne parallele au côté AB, il faut prolonger les côtez BC & AD, tant qu'ils se rencontrent au point G; puis reduire le Trapeze en triangle pour avoir le point F: après quoi on divisera la base AF du triangle ABF en deux également au point H; on cherchera une moyenne proportionnelle entre AG & HG, qui sera, par exemple, IG; & si du point I l'on mene la ligne IK parallele à AB, elle divisera le Trapeze en deux parties égales ABKI & IKCD.

*Art. 328. Pour le prouver, remarquez que les triangles ABG & IKG sont semblables, & qu'étant dans la même raison que les quarrés de leurs côtez homologues, ils seront comme les lignes AG & HG. * Or comme les triangles ABG & HBG ont la même hauteur, ils seront dans la même raison que leurs bases, & auront par consequent même raison que les lignes AG & HG: d'où il s'ensuit que le triangle IKG est égal au triangle HBG. Cela posé, si l'on retranche de part & d'autre la figure HOKG, qui est commune à ces deux triangles, il restera le triangle OIH égal au triangle OBK: mais comme le triangle BAH est égal à la moitié du Trapeze, il s'ensuit que la figure AIKB est aussi égale à la moitié du Trapeze, & que par consequent la ligne IK le partage en deux également.

PROPOSITION IX.

Problème.

Fig. 304. 646. *Diviser un Trapezoïde en trois parties égales.*

Cette proposition est peu considerable, mais elle est mise ici pour servir d'introduction aux suivantes. Ainsi considerant le Trapezoïde AC, qu'on propose à diviser en trois

trois parties égales, on verra qu'il ne faut que diviser les côtes BC & AD en trois parties égales, & tirer les lignes GE & HF, qui donneront les figures égales AG, EH, FC, puisqu'elles sont composées chacune de deux triangles égaux.

PROPOSITION X.

Problème.

647. *Diviser un Trapeze en deux parties égales.*

Fig. 305.

Pour diviser le Trapeze ABCD en deux parties égales, il faut du point B tirer la ligne BH parallèle à AD, & diviser les lignes BH & AD en deux parties égales aux points G & F; ensuite tirer les lignes GC & GF, qui donneront la ~~figure~~^{figure} CBAFG égale à la figure CGFD, qui sont chacune moitié du Trapeze; car par l'opération le Trapezoïde AG est égal au Trapezoïde GD, & le triangle BCG est égal au triangle GCH.

Mais pour que les deux parties du Trapeze fussent plus régulières, il seroit à propos que les lignes de division CG & GF ne fussent qu'une ligne droite. Or si l'on tire à la ligne FC la parallèle GE, on n'aura qu'à tirer de E en F pour avoir le Trapeze divisé en deux parties égales par la seule ligne EF, comme on le peut voir par le triangle FGC & FEC, qui sont renfermées entre les mêmes parallèles.

PROPOSITION XI.

Problème.

648. *Diviser un Trapeze en deux parties égales par une ligne tirée d'un de ses angles.*

Fig. 306.

L'on demande qu'on divise le Trapeze ABCD en deux parties égales par une ligne tirée de l'angle B.

Pour résoudre ce Problème, tirez les diagonales AC & BD, divisez la première AC en deux parties égales au point E, & de ce point menez la ligne EF parallèle à BD; & si vous tirez une ligne de l'angle au point F, elle divisera le Trapeze en deux parties égales.

Z z

362. NOUVEAU COURS

Pour le démontrer, considérez qu'ayant tiré les lignes EB & ED, elles donnent les triangles AED & ECD égaux entr'eux, aussi-bien que les triangles ABE & EBC. Cela étant, le Trapeze se trouve divisé en deux parties égales par les lignes EB & ED: & comme les triangles qui sont renfermez entre les mêmes paralleles nous donnent EBO égal à OFD, il s'ensuit que la seule ligne BF divise le Trapeze en deux également.

PROPOSITION XII.

Problème.

Fig. 307. 649. *Diviser un Trapezoïde en deux parties égales par une ligne tirée d'un point pris sur l'un de ses côtez.*

Pour diviser en deux également le Trapezoïde ABCD par une ligne tirée du point H, il faut commencer par reduire le Trapezoïde en triangle, en tirant à la diagonale BD la parallele CF, afin d'avoir le point F, pour tirer la ligne FB, qui donnera le triangle ABF égal au Trapezoïde. Cela posé, il faut diviser la base AF du triangle en deux également au point E, & tirer la ligne BH, pour avoir le triangle ABE, qui sera la moitié du Trapezoïde. Presentement il faut tirer la ligne BH, & lui mener du point E la parallele EG; & si l'on tire la ligne HG, elle divisera le Trapezoïde en deux également.

Pour le démontrer, faites attention qu'à cause des paralleles, les triangles OHE & OBG sont égaux, & que par conséquent la figure ABGH est égale à la moitié du Trapezoïde, puisqu'elle est égale au triangle ABE.

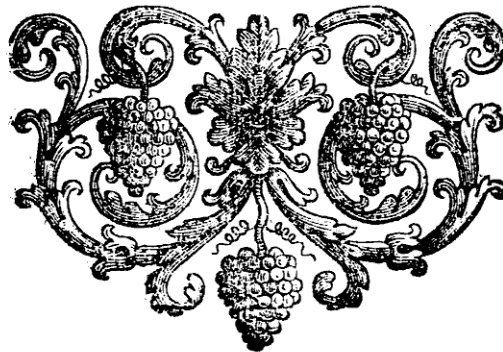
PROPOSITION XIII.

Problème.

Fig. 308. 650. *Diviser un Pentagone en trois parties égales par des lignes tirées d'un de ses angles.*

Pour diviser en trois parties égales le Pentagone ABCDE par les lignes tirées de l'angle C, il faut commencer par

reduire le Pentagone en triangle ; & cela en tirant aux lignes CA & CE les paralleles BF & DG , & en menant des lignes du point C au point F , & du même point C au point G , qui donneront le triangle FCG égal au Pentagone , comme on le peut connoître facilement. Après cela , si l'on divise la base FG en trois parties égales aux points H & I , on n'aura plus qu'à tirer les lignes CH & CI pour avoir le triangle HCI , qui sera le tiers du triangle FCG , par conséquent du Pentagone , & il se trouvera que les parties HABC & ICDE seront égales entr'elles : & seront par conséquent chacun le tiers du Pentagone.





NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE

SEPTIÈME PARTIE.

*Où l'on applique la Géométrie à l'usage du Compas
de proportion.*

DE tous les Instrumens de Mathématique, il n'y en a point dont l'usage soit si universel que celui qu'on nomme *Compas de proportion* : car il facilite la pratique de toute la Théorie de la Géométrie : par exemple, la ligne des parties égales sert à diviser une ligne selon une raison donnée, & à trouver des troisièmes & quatrièmes proportionnelles : la ligne des cordes tient lieu de rapporteur, puisque par son moyen l'on peut connoître la valeur des angles, & en déterminer de quelque quantité de degrez qu'on voudra : la ligne des Polygones sert à diviser un cercle en une quantité de parties égales, pour y inscrire des Polygones : par le moyen de la ligne des Plans l'on trouve les côtes des figures semblables qu'on veut augmenter ou diminuer selon des raisons données : enfin la ligne des Solides, qui peut passer pour la plus considérable du Compas de proportion, sert à trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, à diminuer & augmenter les Solides semblables selon les raisons que l'on voudra. Ce sont toutes ces propriétés que nous allons enseigner ici, en commençant par les lignes des parties égales.

PROPOSITION PREMIERE.

Problème.

651. *Diviser une Ligne droite en tant de parties égales qu'on voudra.* Fig. 309.

L'on trouvera marqué d'un côté sur chaque jambe du Compas de proportion une ligne que l'on verra nommée *parties égales*, parce qu'elles servent effectivement à diviser les lignes droites en parties égales : & pour faire voir comment on s'en sert, nous supposons qu'on veut diviser la ligne HI en neuf parties égales, pour faire, par exemple, l'échelle d'un plan ; pour cela il faut avec le Compas ordinaire prendre la longueur de la ligne HI, & ouvrir le Compas de proportion, de manière que les points du Compas ordinaire puissent être posés dans les points de la ligne des parties égales, où l'on verra marqué 90, qui fera, par exemple, les points D & E. Presentement laissant le Compas de proportion ouvert, il faut avec le Compas ordinaire prendre l'intervalle des points où l'on verra le nombre 10, qui fera, par exemple, l'intervalle FG. Or si vous portez presentement le Compas ainsi ouvert sur la ligne HI, vous trouverez que son ouverture fera la neuvième partie de cette même ligne.

Pour le démontrer, considérez que les triangles AFG & ADE sont semblables, & que par conséquent il y aura même raison de AF à AD, que de FG à DE. Or comme AF est la neuvième partie de AD, FG sera la neuvième partie de DE.

PROPOSITION II.

Problème.

652. *Trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données.* Fig. 310.

Pour trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données E & G, il faut prendre la première F avec

le Compas ordinaire, & la porter sur la ligne des parties égales; comme si elle occupoit, par exemple, la distance depuis A jusqu'en D; ensuite prendre la seconde G, & la porter depuis A jusqu'en B. Il faut après cela ouvrir le Compas de proportion d'une grandeur telle que la distance DF (des deux nombres égaux qui correspondent aux points D & E) soit égale à la ligne G. Presentement si l'on prend la distance BC, c'est-à-dire, l'intervale du chiffre, qui est au point B à celui qui lui correspond au point C, l'on aura la troisième proportionnelle que l'on cherche, qui sera, par exemple, H.

Pour le prouver, considérez que les triangles ABC & EAD sont semblables, & que la ligne AB étant égale à la ligne DE, l'on aura $AD.DE :: AB.EC$. par conséquent $:: F.G.H.$

PROPOSITION III.

Problème.

Fig. 311. 653. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données.*

Pour trouver une quatrième proportionnelle aux trois lignes données A, B, C, il faut prendre la ligne A, & la porter avec le Compas ordinaire sur la ligne des parties égales, en sorte qu'elle occupe l'intervale EF; puis porter la seconde B depuis le point F jusqu'au point correspondant G: enfin il faut prendre la troisième C, en sorte qu'elle occupe l'espace EH, & l'intervale du point H à celui qui lui correspond en I, sera la quatrième proportionnelle, comme est, par exemple, la ligne D.

Pour le prouver, remarquez que les triangles EFG & EHI sont semblables, & par conséquent l'on aura $EF.FG :: EH.HI$. ou bien $A.B :: C.D$.

USAGE DE LA LIGNE DES POLIGONES.

PROPOSITION IV.

Problème.

654. *Inscrire un Poligone dans un cercle.*

Par le moyen de la ligne des Poligones , qui est tracée Fig. 3
sur le compas de proportion , on peut inscrire des Poli- 313.
gones dans un cercle depuis celui de trois côtes jusqu'à
celui de douze , qui sont ceux qu'on met le plus en usage.
Pour faire voir comment on s'en sert , nous supposerons
qu'on veuille inscrire un Octogone dans le cercle H ; pour
cela il faut prendre avec le Compas ordinaire la grandeur
du rayon HI de ce cercle , & ouvrir le Compas de pro-
portion de maniere que les points du Compas ordinaire ,
ouvert , comme nous venons de dire , puissent être posés
dans les points B & C de 6 en 6 , marquez sur la ligne des
Poligones. Après cela l'on prendra du point F au point G,
où correspondent les nombres 8 , & cet intervalle sera le
côté de l'Octogone , qu'on portera 8 fois sur la circonfé-
rence du cercle H , pour avoir les points qui serviront à
décrire l'Octogone.

Si au lieu de l'Octogone l'on vouloit prendre dans le
même cercle un Décagone , il ne faudra que prendre l'in-
tervalle de 10 en 10 , ainsi des autres Poligones : après
avoir pris avant la distance de B en C , en posant sur ces
distances le rayon du cercle , que vous voulez réduire en
Poligone.

PROPOSITION V.

Problème.

655. *Décrire un Poligone regulier sur une ligne donnée.*

Nous servant de la même figure , l'on pourra , à l'aide
du Compas de proportion , décrire tel Poligone qu'on vou-
dra. Or si l'on veut faire sur la ligne KL un Octogone ,
il faudra prendre cette ligne avec le Compas ordinaire ,

& la porter sur le compas de proportion ; de façon que les points du Compas ordinaire tombent dans les points 8 & 8. Après cela si l'on prend l'intervale de B en C, c'est-à-dire, de 6 en 6 ; & que des extrémités K & L l'on fasse une section H avec le Compas ainsi ouvert, on n'aura qu'à décrire du point H un cercle, dont le rayon soit HK ou HL, & l'on pourra trouver tous les points qui serviront à décrire l'Octogone, en portant 7 fois la ligne KL sur la circonférence du cercle.

USAGE DE LA LIGNE DES CORDES.

PROPOSITION VI.

Problème.

Fig. 312. 656. *Prendre sur la circonférence d'un cercle un angle d'autant de degrez qu'on voudra.*
& 314.

Si l'on vouloit prendre sur la circonférence du cercle H un arc de 70 degrez, il faudroit avec le compas ordinaire, porter sur la ligne des cordes aux endroits marquez 60 la grandeur ou rayon HI : ainsi supposant que l'angle ABC est formé par les lignes des cordes du Compas de proportion, de maniere que l'on ait ouvert la grandeur DE égale au rayon HI, l'on prendra l'intervale de F en G, que je suppose être de 70 en 70, & la ligne FG fera la corde de 70 degrez, qu'on n'aura qu'à porter sur la circonférence du cercle, pour avoir l'arc MI qu'on demande.

PROPOSITION VII.

Problème.

Fig. 314. 657. *Un angle étant donné sur le papier, en trouver la valeur par le moyen de la ligne des cordes.*
& 320.

Pour connoître la valeur d'un angle ABC, il faut du point B, comme centre, décrire l'arc AC d'une ouverture de Compas indéterminée ; ensuite prendre le rayon BC, & ouvrir le Compas de proportion, de maniere que l'intervale

vale de 60 en 60 marqué sur la ligne des cordes, soit égal au rayon. Presentement si on prend avec le Compas la corde AC, & qu'on la porte sur la ligne des cordes, de façon qu'il convienne dans deux points également éloignés du centre, les nombres qui correspondront à ces points, donneront la valeur de l'angle : ainsi supposant que ce soit de 50 en 50, l'on connoitra que l'angle ABC est de 50 degrez.

PROPOSITION VIII.

Problème.

658. *Connoissant la quantité de degrez d'un arc de cercle, trouver son rayon.* Fig. 314.
& 315.

Si l'on a un arc de cercle BA de 50 degrez, & qu'on veuille connoître le rayon du cercle de cet arc, il faudra prendre avec le Compas la corde BA, & la porter sur la ligne des cordes, pour ouvrir le Compas de proportion de 50 en 50 : par exemple, si les points F & G correspondent au nombre 50, il faut faire l'intervale FG égal à la corde BA ; & si après cela l'on prend l'intervale DE de 60 en 60, elle fera le rayon que l'on demande, c'est-à-dire, que la ligne DE sera égale au demi-diamètre CB.

PROPOSITION IX.

Problème.

659. *Ouvrir le Compas de proportion de maniere que les lignes des cordes fassent tel angle que l'on voudra, supposant que les lignes AB & CB soient celles des cordes, on demande de faire avec elle un angle de 70 degrez.* Fig. 314.

Il faut prendre avec le Compas ordinaire l'intervale qu'il y a du centre B au point F ou G, que je suppose être de 70 degrez; puis porter les pointes du Compas ainsi ouvert dans les points de 60 en 60 : par exemple, si les points D & E sont ceux de 60 en 60, il faut faire la distance DE égale à l'intervale BF, & les lignes des cordes formeront l'angle ABC de 70 degrez.

A a a

PROPOSITION X.

Problème.

Fig. 314. 660. *Le Compas de proportion étant ouvert d'une grandeur quelconque, connoître la valeur de l'angle formé par les lignes des cordes.*

Si l'on veut sçavoir la valeur de l'angle ABC formé par les lignes des cordes, l'on n'aura qu'à prendre avec le Compas ordinaire l'intervale de 60 en 60 ; puis la porter sur l'une des cordes, en commençant du centre, l'on trouvera la quantité de degrez que contient l'angle : ainsi les points D & E étant supposez ceux de 60, l'on prendra la ligne DE, pour la porter sur BF ; & si l'on voit que le point F correspond à un nombre, par exemple, de 70, l'on verra par-là que l'angle ABC est de 70 degrez.

REMARQUE.

Comme l'on applique quelquefois des pinulles aux extrêmités des cordes du Compas de proportion, pour prendre des angles sur le terrain ; on peut en former de telle ouverture que l'on voudra, puisque par ces deux propositions l'on peut faire un angle quelconque avec les lignes des cordes, & qu'on peut d'ailleurs connoître la valeur des angles qu'elles peuvent former.

USAGE DE LA LIGNE DES PLANS

PROPOSITION XI.

Problème.

Fig. 316. & 321. 661. *Faire un Quarré qui soit à un autre selon une raison donnée.*

Si l'on veut faire un quarré qui ait même raison à un autre que 5 à 2, il faut prendre le côté AB du quarré donné, & ouvrir le Compas de proportion de manière que l'intervale HI des points 2 & 2 de la ligne des

plans soit égale au côté AB, c'est-à-dire, que cette ligne soit égale à HI ; & si l'on prend l'intervale KL, que je suppose de 5 en 5, elle sera le côté du quarré que l'on demande : ainsi faisant CD égal à KL, il y aura même raison du quarré CD au quarré AB, que de 5 à 2.

PROPOSITION XII.

Problème.

662. *Connoître le rapport d'un Quarré à un autre.*

Fig. 316.
& 321.

Se servant de la même figure, si l'on veut sçavoir le rapport du quarré AB au quarré CD, l'on n'aura qu'à prendre le côté AB du plus petit quarré, & ouvrir le Compas de proportion, de manière que le Compas ordinaire se trouve dans deux points également éloignés du centre sur les lignes des plans, comme est, par exemple, HI : ensuite il faut prendre le côté CD de l'autre quarré, & chercher avec le Compas un intervalle tel que KL, qui lui convienne sur la ligne des plans ; & le rapport qu'il y aura entre les deux nombres, qui se trouveront aux points H & K, sera le même que celui du quarré AB au quarré CD.

PROPOSITION XIII.

Problème.

663. *Ouvrir le Compas de proportion de manière que les lignes des plans forment un angle droit.*

Fig. 317.

Pour faire un angle droit tel que BAC avec les deux lignes des plans, il faut avec le Compas ordinaire prendre l'intervale du centre à un nombre quelconque D, qui sera, par exemple, 20, puis ouvrir le Compas de proportion, de manière que l'intervale des points (qui correspondront à la moitié de ce nombre) soit égal à la longueur AD : ainsi prenant les nombres 10 & 10, qui seront moitié de 20, l'on n'aura qu'à faire l'intervale FG égal à la distance AD, & les lignes des cordes AB & AC formeront un angle droit.

A a a ij

PROPOSITION XIV.

Problème.

Fig. 318.
& 321.

664. *Faire un quarré égal à deux autres donnez.*

Pour faire un quarré qui soit égal aux deux autres AB & CD, il faut ouvrir le Compas de proportion, de maniere que les lignes des plans forment un angle droit, comme est l'angle EFG; puis prendre sur la ligne FG la longueur FI égale au côté AB, & bien retenir le nombre où l'extrémité I viendra aboutir: ensuite il faut rendre de même la longueur FH égale au côté CD de l'autre quarré, & la distance de H en I, qui sera, par exemple, celle de 18 en 5, sera le côté du quarré égal aux deux quarez propofez.

R E M A R Q U E.

Comme toutes les figures semblables font dans la même raison que les quarez de leurs côtez homologues, l'on pourra faire les mêmes operations pour les triangles, les poligones & les cercles que l'on a fait dans les propositions précédentes pour les quarez.

USAGE DE LA LIGNE DES SOLIDES.

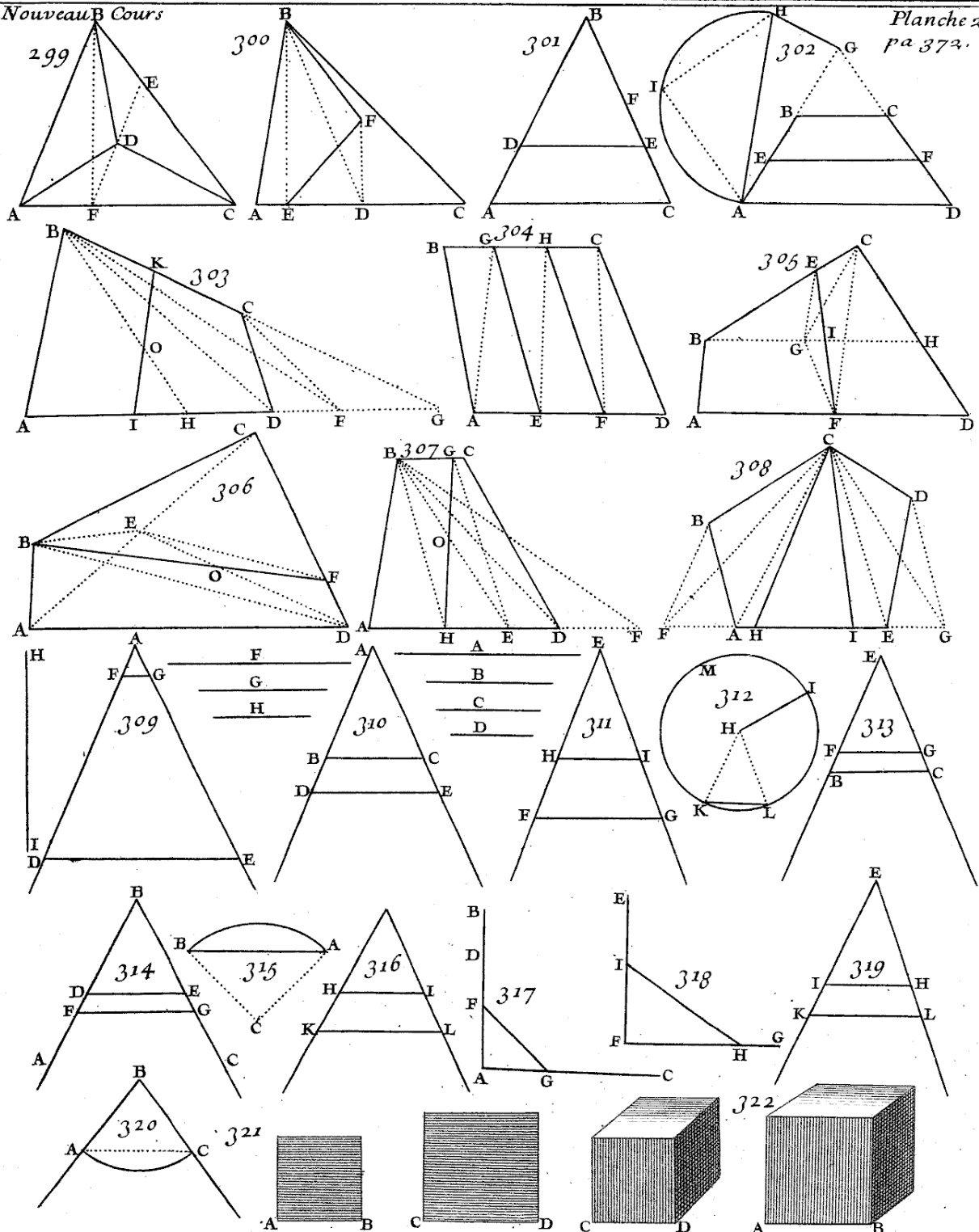
PROPOSITION XV.

Problème.

Fig. 319.
& 332.

665. *Faire un Cube qui soit à un autre selon une raison donnée.*

Si l'on veut avoir un Cube qui soit au Cube AB comme 3 est à 7, il faut commencer par prendre avec le compas ordinaire le côté AB, & le porter sur la ligne des Solides, de maniere qu'il corresponde aux points 7 & 7: ainsi supposant que l'intervale des points K & L soit ceux du nombre 7, l'on n'aura plus qu'à prendre l'intervale IH de 3 en 3 pour avoir le côté du Cube que l'on



demande. Ainsi faisant CD égal à HI, il y aura même raison du Cube AB au Cube CD, que de 7 à 3.

PROPOSITION XVI.

Problème.

666. *Trouver le rapport qui est entre deux Cubes.*

Pour trouver le rapport qui est entre deux Cubes quelconques CD & AB, il faut prendre le côté CD du plus petit Cube, & ouvrir le Compas de proportion, en sorte que l'intervalle HI pris vers le centre, soit égal à ce côté. Après cela l'on prendra le côté AB pour le porter en un endroit comme KL, dont l'intervalle lui soit égal, & le rapport que l'on trouvera entre les nombres qui seront marquez aux points I & K, fera le même que celui du Cube CD au Cube AB. Fig. 319.
& 322.

REMARQUE.

Comme tous les Solides semblables sont dans la même raison que les Cubes de leurs côtes homologues, il s'en suit que l'on pourra faire à l'égard des Cylindres des Cones, des Pyramides, & des Spheres, les mêmes opérations que l'on vient de faire pour les Cubes, comme dans les propositions précédentes.

APPLICATION DE LA GEOMETRIE
à l'Artillerie.

PROPOSITION PREMIERE.

Problème.

667. *Faire l'analyse de l'alliage du Métal dont on fait les Pièces de Canon.*

Pour connoître l'utilité de ce Problème, il faut être prévenu que le métal dont on fait les pièces d'Artillerie de fonte, est composé de *Rosette*, que l'on appelle communément *Cuivre rouge*, & d'*Etain* fin d'Angleterre; & comme

il doit y avoir une proportion entre la Rosette & l'Etain qui composent le Métail, les Fondeurs les plus expérimentez suivent celle de 100 à 12, c'est-à-dire, que sur 100 livres de *Rosette* ils mettent 12 livres d'*Etain*.

Or comme il arrive tous les jours que dans les Fonderies on fond des Pièces qui sont hors d'état de servir, pour en faire de nouvelles, & que les Fondeurs sont embarrassés pour sçavoir si le Métail est conforme à l'alliage qu'ils suivent, pour qu'il ne soit ni trop aigre ni trop doux; voici comment on pourra connoître au juste la quantité de Rosette & d'Etain qui compose le Métail des Pièces.

C'est une chose démontrée par l'expérience, & dont la raison physique est facile à appercevoir, que les Métaux perdent de leur pesanteur lorsqu'ils sont dans l'eau; par exemple, si l'on attache à une balance romaine un morceau de plomb pesant 48 livres, l'on verra que le corps étant mis dans l'eau, de sorte qu'il en soit environné de toutes parts, au lieu de peser 48 livres, n'en pesera que 44, parce que le plomb perd dans l'eau la douzième partie de son poids: ainsi des autres Métaux, qui perdent plus ou moins, selon qu'ils sont plus ou moins pesans: mais comme nous avons besoin de connoître ici ce que perdent l'Etain & la Rosette, l'on sçaura que l'Etain perd la septième partie de son poids, & que la Rosette n'en perd que la neuvième partie.

Cela posé, pour connoître la quantité de Rosette & d'Etain qui se trouve dans une Pièce de 24 livres de balles, qui pèse environ 5200 livres, il faut avoir un morceau de la Pièce, qui sera, par exemple, un de ses tronçons, & le peser bien exactement; & supposant qu'il pèse 163 livres, on le pesera ensuite dans l'eau, pour voir combien il perd de sa pesanteur, & nous supposerons qu'il en perd 19 livres.

Présentement il faut considérer le Métail comme étant tout de Rosette, afin de voir, selon cette supposition, combien il perd de sa pesanteur, & l'on trouvera qu'il perd $\frac{163}{9}$; & considérant aussi le Métail comme étant

tout Etain, l'on cherchera combien il perd de sa pesanteur, & l'on trouvera qu'il perd $\frac{163}{7}$; ainsi si l'on nomme a , la pesanteur du Métail; b , sa perte; c , la perte du poids du Métail, s'il étoit tout de Rosette; d , la perte du même poids, s'il étoit tout Etain, l'on aura $a=163$, $b=19$, $c=\frac{163}{9}$, $d=\frac{163}{7}$; & nommant x la quantité de Rosette qui est dans le Métail, & y la quantité d'Etain, voici comment on trouvera la valeur de ces deux inconnues.

Il faut commencer par faire deux proportions, en disant: Comme a , poids du Métail considéré comme Rosette, est à c , perte de ce poids de Rosette, ainsi x , qui est la quantité de Rosette inconnue, est à la perte du poids de la même Rosette inconnue; ce qui donne $a.c::x.\frac{cx}{a}$; & faisant la même chose pour l'Etain, l'on dira: Comme a , poids du Métail considéré comme Etain est à d , perte de ce poids d'Etain, ainsi y , valeur de la quantité d'Etain inconnue est à la perte de cette quantité d'Etain, qui donnera encore cette proportion $a.d::y.\frac{dy}{a}$.

Mais comme l'on a trouvé $\frac{cx}{a}$ pour la perte du poids de la Rosette qui est dans le Métail, & $\frac{dy}{a}$ pour la perte du poids de l'Etain qui est aussi dans le Métail, & que ces deux quantitez font ensemble la perte du poids du Métail: l'on aura donc cette équation $\frac{cx}{a} + \frac{dy}{a} = b$; & comme x & y représentent la Rosette & l'Etain qui composent le Métail, l'on pourra encore former cette équation $x+y=a$; & dégageant une de ces deux inconnues, qui fera, par exemple, x , l'on aura $x=a-y$; & substituant la valeur de x dans l'équation $\frac{cx}{a} + \frac{dy}{a} = b$, il viendra $\frac{a(x-y)c+dy}{a} = b$, ou bien $c + \frac{dy-c}{a} = b$. Or si l'on fait passer c du premier membre dans le second, & que l'on multiplie

les deux membre par a , il viendra $dy - yc = ab - ac$, qui étant divisé par $d - c$, donne $y = \frac{ab - ac}{d - c}$, où y est égal à des quantitez connues ; par conséquent si l'on met dans l'équation $x = a - y$ la valeur de y , l'on aura $x = a - \frac{ab - ac}{d - c}$, qui donne aussi la valeur de x .

Or pour connoître y en nombre, je considere qu'il est égal à $ab - ac$ divisé par $d - c$: & comme $b - c$ est multiplié par a , je soustrais de 19 de $b - \frac{163}{9}$ valeur de c , & le reste est $\frac{8}{9}$, que je multiplie par 163, qui est la valeur de a pour avoir $\frac{1304}{9}$, que je divise par $\frac{163}{7} - \frac{163}{9}$ valeur de $d - c$, qui est $\frac{16}{3}$; & la division étant faite, l'on trouvera 28 pour la valeur de y : & cherchant de même la valeur de x , l'on trouvera qu'elle est de 135 ; ce qui fait voir qu'il y a 135 livres de Rosette, & 28 livres d'Etain dans le morceau de Métail.

Pour sçavoir presentement la quantité d'Etain qu'il y a dans la pièce de Canon, il faut dire: Si dans 163 livres de Métail il y a 28 livres d'Etain, combien y en aura-t'il dans 5200 livres, poids de la Pièce, l'on trouvera qu'il y en a environ 894 livres, & par conséquent il y a 4306 livres de Rosette.

Mais comme la raison de 4306 livres à 894 n'est pas égale à celle de 100 à 12, parce que nous avons supposé qu'il y avoit dans le Métail beaucoup plus d'Etain qu'il n'en falloit, il sera facile de sçavoir combien il faut ajouter de Rosette pour que l'alliage soit bien fait, en disant: Si pour 12 livres d'Etain il faut 100 livres de Rosette, combien en faudra-t'il pour 894 livres. On trouvera qu'il en faut 7450 livres ; & comme il y en a déjà 4306 livres, il faudra en ajouter 3144 livres.

Si l'on a plusieurs Pièces à refondre en même tems, l'on cherchera par la règle précédente ce qu'il manque à chacune de Rosette ou d'Etain, afin que l'alliage soit dans la raison de 100 à 12.

PROP.

PROPOSITION II.

Problème.

668. *Trouver le calibre des Boulets & des Pièces de Canon.*

Pour trouver le calibre des Boulets de telle pesanteur que l'on voudra, il faut sçavoir d'abord le diamètre d'un Boulet de même métal, comme, par exemple, celui d'une livre de fer coulé, qui est d'un pouce 10 lignes 8 points, & considérer le diamètre comme étant divisé en un grand nombre de petites parties égales, comme en 500 (pour que dans le calcul on puisse négliger les restes) ensuite cuber la valeur du diamètre en petites parties, pour avoir 125000000 pour son cube, que nous regarderons ici comme le Boulet même, parce que les Boulets étant des sphères, ils sont dans la même raison que les cubes de leurs diamètres: c'est pourquoi si l'on veut avoir le diamètre d'un Boulet de 24, l'on n'aura qu'à multiplier le cube d'un Boulet d'une livre, c'est-à-dire, 125000000 par 24 pour avoir 3000000000, qui sera le cube du diamètre du Boulet de 24, puisqu'il est 24 fois plus grand que l'autre. Ainsi en extrayant la racine cube de 3000000000, l'on aura 1442 petites parties, que l'on pourra changer en pouces, lignes & points, en disant: Si 500 petites parties donnent un pouce 10 lignes 8 points pour le diamètre du Boulet d'une livre, combien donneront 1442 petites parties pour le diamètre du Boulet de 24. On trouvera après la règle faite, que le diamètre est de 5 pouces 5 lignes, & un peu plus de 4 points.

Si l'on veut avoir le diamètre de tout autre Boulet, par exemple, celui de 16, l'on fera comme on a fait pour celui de 24; avec cette différence, qu'au lieu de multiplier 125000000 par 24, il faudra le multiplier par 16, afin d'avoir le cube du diamètre du Boulet qu'on cherche: & l'on pourra sur ce principe calculer une Table pour tous les autres Boulets.

Mais comme l'on a besoin de connoître particulière-
Bbb

ment les diamètres des Boulets pour faire les coquilles dans lesquelles on coule le fer, qui doit les former, & que la plupart pourroient se trouver embarrassés, s'ils ne connoissent pas le diamètre du Boulet d'une livre, ou s'ils soupçonnoient qu'il ne fût pas assez juste pour servir de base à une règle generale : en ce cas l'on pourra faire couler un Boulet de tel diamètre que l'on voudra, comme de 3 pouces, sans s'embarasser de sa pesanteur qu'après qu'il sera fondu, parce que pour lors on le pesera bien exactement; & supposant qu'on a trouvé qu'il pèse 5 livres & demie, l'on réduira son diamètre en petites parties pour le cuber, & ensuite l'on dira : Si 5 livres & demie donnent tant de petites parties pour le cube du diamètre de son Boulet, combien une livre donnera-t'elle de petites parties pour le cube de son diamètre : & lorsqu'on aura trouvé ce que l'on cherche, on en extraira la racine cube, qui donnera en petites parties la valeur du diamètre du Boulet d'une livre, qu'il sera facile de réduire en pouces, lignes, &c. sachant que le diamètre du premier Boulet est de 3 pouces.

Pour trouver le diamètre des Pièces, l'on sçaura qu'il ne diffère que de peu de chose de celui de leurs Boulets; & comme cette difference, qui est ce qu'on appelle *vent* du Boulet, n'est pas la même pour toutes les Pièces, il suffira de sçavoir le diamètre de la Pièce d'une livre, pour trouver celui de toutes les autres : & comme le diamètre est d'un pouce 11 lignes 6 points, parce que le Boulet de cette Pièce a environ une ligne de vent, on supposera, comme on a fait pour son Boulet, que le diamètre de la Pièce est divisé en 500 parties; & voulant trouver celui de la Pièce de 24, l'on cubera 500 pour multiplier le produit 24, dont on extraira la racine cube, qui est encore 1442, dont on pourra connoître la valeur en pouces, lignes, &c. en disant : Si 500 donnent un pouce 11 lignes 6 points pour le diamètre de la Pièce d'une livre, combien donneront 1442 pour le diamètre de la Pièce de 24 : on trouvera que ce diamètre est de 5 pouces 7 lignes 9 points.

PROPOSITION III.

Problème.

669. *Trouver le diamètre des Cylindres servant à mesurer la Poudre.*

L'on ne se sert presque jamais de balances dans les Magasins & dans les Arcenaux pour mesurer la Poudre que l'on distribue aux Troupes, soit pour des détachemens ou pour tout autre sujet, parce qu'il faudroit trop de tems pour en faire la distribution : on se fer au lieu de balances de certaines mesures de fer blanc, ou de cuivre de figure cylindrique, qui contiennent plus ou moins de livres de Poudre, ou de parties de livres. Or comme souvent l'on est obligé de faire faire de ces mesures, & qu'on ne peut sans le secours de la Géométrie sçavoir les dimensions qu'il faut leur donner pour contenir une quantité de Poudre quelconque, voici une règle generale qui pourra servir pour trouver le diamètre de toutes les mesures que l'on voudra : mais comme il faut que ces mesures soient semblables pour que la règle puisse convenir à toutes également, nous supposérons que ces mesures étant cylindriques, la hauteur du cylindre est égale au diamètre du cercle qui lui sert de base.

Cela posé, étant prévenu qu'une mesure cylindrique, dont le diamètre est de 3 pouces, contient 4 livres de poudre, l'on trouvera le diamètre d'une mesure pour autant de livres que l'on voudra ; par exemple, pour 10 livres, en disant : Si 4 livres de poudre donne 125 pouces pour le cube du diamètre de sa mesure, combien donneront 10 livres de poudre ; l'on trouvera 312 pouces & demi cubes, dont il faudra extraire la racine qui sera de 6 pouces 8 lignes 9 points, qui est la grandeur qu'il faut donner au diamètre de la mesure de 10 livres, qui doit avoir aussi la même hauteur : il en sera de même pour telle autre mesure que l'on voudra.

Mais si l'on ignore le diamètre d'une mesure pour une

Bbbij

certaine quantité de poudre, & qu'on n'eût aucun terme de la proportion de connue, dans ce cas il faut faire faire une mesure à laquelle on donnera le diamètre que l'on voudra, & on la remplira de poudre, afin de sçavoir ce qu'elle contient; & sçachant ce qu'elle contient, & la valeur du diamètre, l'on se servira de la règle précédente pour trouver le diamètre de toutes les autres mesures, faisant attention que ces mesures ne peuvent avoir lieu que pour la poudre dont les grains sont approchans de même grosseur que sont ceux de la poudre à Canon; car si les grains étoient plus fins, les mesures contiendroient moins de poudre en pesant.

L'on voit que cette règle est établie sur ce que les cylindres semblables sont dans la même raison que les cubes de leurs diamètres. Or comme les mesures dont il s'agit ici sont supposées avoir une hauteur égale à leur diamètre, elles seront donc semblables, & par conséquent leurs soliditez qui ne sont autre chose que la quantité de poudre qu'elles contiennent, seront donc dans la raison des cubes des diamètres.

Mais si l'on vouloit avoir des mesures, dont la hauteur fût plus grande ou plus petite que le diamètre de la base (que nous nommerons *mesure irreguliere*) il faudroit chercher le diamètre de la mesure pour la quantité de poudre que l'on veut que cette mesure contienne, comme si cette mesure devoit être reguliere, c'est-à-dire, que le diamètre fût égal à la hauteur: ensuite cuber le diamètre, & diviser le produit par la hauteur de la mesure irreguliere, & le quotient sera la valeur du quarré du diamètre de cette mesure. Après cela si l'on extrait la racine quarrée de cette quantité, l'on aura le diamètre du cercle qui doit servir de base à la mesure que l'on cherche.

Comme les cercles sont dans la raison des quarrés de leurs diamètres, l'on pourra prendre à la place des cercles les quarrés de leurs diamètres. Or comme les cylindres sont égaux, lorsque leurs hauteurs & leurs bases, ou les quarrés des diamètres de leurs bases sont reciproques,

nommant a le diamètre de la base du cylindre régulier & fera aussi sa hauteur ; & nommant b la hauteur du cylindre irrégulier , & x le diamètre de sa base , il faut , pour que le cylindre régulier soit égal à l'irrégulier , que $b. a. :: aa. xx.$ d'où l'on tire $bxx=aaa$, ou bien $xx=\frac{aaa}{b}$, ou encore $x=\frac{\sqrt[3]{aaa}}{b}$, qui fait voir la raison de la règle précédente.

Ce que nous venons de dire à l'égard des mesures pour la poudre , se peut appliquer à toutes autres mesures cylindriques pour telles choses que ce soit.

PROPOSITION IV.

Problème.

670. *Trouver quelle longueur doivent avoir les pièces de Canon par rapport à leurs calibres.*

Les extrêmes dans lesquelles on est tombé pour régler la longueur des pièces de Canon , en faisant celles de même calibre , tantôt fort longues , tantôt fort courtes , m'ont fait penser qu'il devoit y avoir une longueur pour les pièces cylindriques de chaque calibre , qui étoit telle qu'avec la charge ordinaire le Boulet reçût la plus grande vitesse que l'impulsion de la poudre est capable de lui donner ; & si pour la connoître l'on est obligé de considérer les effets de la poudre dans le Canon , voici , à mon avis , ce que l'on peut dire de plus plausible sur ce sujet.

Comme l'on ne peut douter que plus il y a de poudre enflammée dans un Canon , & plus le Boulet reçoit de mouvement , nous supposons que l'on a mis pour la charge de la pièce DG la quantité de poudre DE. Cela posé , aussitôt que le feu de l'amorce se fera introduit au point A de la lumière , les premiers grains de poudre enflammés rarefient l'air qu'ils contiennent ; & celui dont ils sont environnés , & écarteront à la ronde tout ce qui leur fera ob-

PLANCHE 23.
Fig. 323.

B b b iij

stacle , & fucceffivement la poudre continuant à s'enflâmer , elle occupera un bien plus grand volume qu'auparavant ; & agiffant avec beaucoup de violence à droite & à gauche du point A , & particulièrement du côté où elle trouvera moins de réfiftance , qui eft celui du Boulet qu'elle chaffera du côté de la bouche , avec une grande quantité de poudre , qui n'aura pas encore eu le tems de s'enflâmer , & la vîteffe du Boulet augmentant dans la même raifon du volume de la poudre enflâmée , il fe trouvera dans un instant chaffé en G pour fortir de la pièce. Or fi dans le tems que le Boulet a parcouru l'efpace EG , la poudre qui l'accompagnoit n'a pû être enflâmée entierement , il en fortira une quantité F avec le Boulet , qui s'écartera comme du petit plomb , au lieu que fi la pièce avoit été plus longue que je ne la fuppose ici , le Boulet ayant à parcourir un plus grand efpace , la poudre qui a été chaffée avec lui auroit eu le tems de s'enflâmer , & par confequent auroit été capable d'un plus grand effort : ainfi l'on peut conclure que la proportion qu'il doit y avoir entre DE & DG , c'est-à-dire , entre la charge & la longueur de la pièce , doit être telle que la poudre acheve de s'enflâmer entierement à l'inftant que le Boulet fort de la pièce ; d'où il fuit qu'un Canon qui eft chargé plus qu'il ne faut , ne chaffe pas pour cela fon Boulet plus loin , & même au contraire , puifque plus il y aura de parties entre la poudre agiffante & le Boulet , moins il recevra de mouvement : & cela eft fi vrai que fi au lieu d'un bouchon de fourage ordinaire entre la poudre & le Boulet , l'on en mettoit cinq ou fix , l'on s'appercevroit vifiblement que la portée ne feroit pas fi longue que s'il n'y en avoit qu'un , comme j'en ai fait l'expérience ; car le Boulet ne recevant de mouvement que par l'impulfion que la poudre a imprimée au premier bouchon , celui-ci ne peut le communiquer aux autres , pour aller jufqu'au Boulet , fans l'alterer ; ce qui fait qu'il s'en faut de beaucoup que le Boulet n'ait autant de vîteffe que s'il avoit reçu fon impulfion immédiatement de la poudre même. Ainfi le

trop de poudre fera le même effet que s'il y avoit trop de bourre.

Mais si au lieu d'une pièce trop courte nous en supposons une trop longue, comme LO, il n'y a point de doute, quoiqu'elle soit de même calibre que la précédente, & chargée avec la même quantité de poudre, qu'elle ne porte pas si loin que si elle étoit d'une juste longueur : car supposant que la poudre LM faisant son effet, ait poussé le Boulet jusqu'au point N, qui est l'endroit où elle auroit achevé de s'enflâmer entièrement, il est certain que si le Boulet a encore à parcourir l'espace NO, il sortira avec moins de violence de l'endroit O, que si il étoit parti d'abord de l'endroit N ; car dans le tems que le reste de la poudre acheve de s'enflâmer vers N, la flâme de celle qui a commencé vers la culasse se dilate, & l'air rarefié s'amortissant de ce côté-là, il n'y a plus que celui qui est vers N qui fait impression sur le Boulet : de sorte que si la pièce étoit assez longue pour que l'impulsion de la poudre fût entièrement amortie à l'instant que le Boulet est prêt à sortir de la pièce, il pourroit arriver que l'air que le Boulet auroit chassé avec beaucoup de violence, cherchant à rentrer dans la pièce, le repousseroit vers la culasse ; ce qui arriveroit sans doute, si à l'instant que le feu a pris à la poudre, l'on pouvoit boucher la lumière avec assez de promptitude, pour empêcher que l'air que le Boulet chasse ne soit remplacé par celui qui s'introduiroit par là.

Puisque les pièces d'une trop grande longueur font moins d'effet que les autres, il ne faut donc plus s'étonner si la Coulevrine de Nancy (contre l'opinion commune) a moins de portée que les pièces de même calibre, comme M. Dumez l'a observé dans les épreuves qu'il a faites à Dunkerque.

Ce raisonnement fait voir que la charge doit dépendre de la longueur de la pièce, & la longueur de la pièce de la force de la charge : mais comme pour de grosses char-

ges il faudroit de longues pièces , dont le service & le transport souffriroient bien des difficultez , joint à la grande consommation de poudre que l'on feroit obligé de faire. Comme il semble que la méthode de charger (comme on le pratique ordinairement) les pièces à la moitié du poids du Boulet , est la meilleure , il faut en comptant là-dessus chercher quelle doit être la longueur d'une pièce par rapport à un calibre quelconque ; parce qu'après cela l'on peut établir des règles pour connoître la longueur de tous les calibres imaginables. Je crois que le plus sûr moyen pour parvenir à cette connoissance est de faire un Canon fort long , dont le calibre seroit , par exemple , de 8 livres , & le charger à la moitié du poids de son Boulet , puis le tirer de but en blanc , pour voir sa portée : & comme l'on suppose que la pièce est plus longue qu'elle ne doit être , on la sciera pour la diminuer d'un calibre , & on tirera un autre coup pour voir de combien elle aura porté plus loin que le premier ; & continuant toujours à raccourcir la pièce , en la diminuant de quelques pouces , sur la fin l'on arrivera à un point où la pièce , pour être un peu trop courte , portera moins loin qu'auparavant ; & considérant la longueur moyenne entre celle du dernier coup & le pénultième , l'on aura au juste la longueur de la pièce par rapport à sa charge , pour que la poudre soit capable du plus grand effet qu'il est possible avec la même quantité de poudre.

Cependant comme ce que je propose ici pourroit peut-être n'avoir pas ses partisans , quoique le sujet soit assez de conséquence pour prendre toutes ces mesures , voici encore ce que l'on pourroit faire.

Comme l'expérience fait voir tous les jours que les petites pièces portent plus loin à proportion que les grosses , puisque , selon les épreuves qu'en a faites M. Dumez , il a trouvé que nos pièces de France chargées aux deux tiers de la pesanteur du Boulet , & pointées à 45 degrez , portotent ,

Premierement ,

Premièrement,

La pièce de 24 à	2250 toises.
de 16 à	2020.
de 12 à	1870.
de 8 à	1660.
& la pièce de 4 à	1520.

Ce qui me fait croire que la longueur des petites pièces est mieux proportionnée par rapport à leurs calibres, que celle des grosses : ainsi supposant qu'une pièce de Canon de 4, qui a ordinairement 6 pieds de longueur dans l'ame, soit bien proportionnée, voici comment on pourra trouver la longueur des pièces de tel calibre que l'on voudra.

Considérant AC comme étant la longueur de l'ame d'une pièce de 4 ; AB l'espace qu'occupe la poudre dans le Canon ; & HK la longueur de la pièce de 24, que je cherche, & HI l'espace qu'occupe la charge, je fais attention que la poudre agissant dans la pièce de 4 & dans la pièce de 24, dans la raison de la quantité qu'il s'en trouve dans l'une & dans l'autre (en faisant abstraction des forces unies) il faut que le Boulet de l'une & de l'autre pièce parte dans le moment que la poudre est entièrement allumée, qu'il y ait même raison du cylindre AB au cylindre AC, que du cylindre HI au cylindre HK : & comme je peux prendre à la place des cylindres AB & HI la quantité de poudre qu'ils contiennent, & à la place des cylindres AC & HK le cube de leurs axes, puisqu'ils doivent être semblables, l'on pourra (pour trouver la longueur HK) dire : Si deux livres de poudre, qui est la charge de la pièce de 4, donne 216 pour le cube de son axe, combien donneront 12 livres de poudre, qui est la charge de la pièce de 24, pour le cube de l'axe de la même pièce ; l'on trouvera 1296 pieds cubes, dont la racine cube est 11 pieds moins très-peu de chose : ainsi l'on voit que l'ame de la pièce de 24, pour être proportionnée à la charge par rapport à celle de 4, doit avoir 11 pieds

C c c

de longueur : & comme l'ame de ces mêmes pièces n'a ordinairement qu'environ 9 pieds, selon ce principe, elles sont trop courtes de 2 pieds.

L'on pourra trouver de même la longueur de toutes les autres pièces, lorsqu'elles auront leurs chambres cylindriques ; car si elles étoient autrement, il faudroit prendre d'autres mesures.

Les pièces dont on se sert ordinairement n'étant point d'une longueur proportionnée à celle de la pièce de 4 ; & comme il n'y a point d'apparence qu'on les fonde toutes exprès pour les y faire convenir, il faut, puisque la charge d'une pièce dépend de sa longueur, comme la longueur dépend de la charge, faire voir comment on peut trouver la charge de toutes les pièces en connoissant le calibre & la longueur. Comme les ames des pièces qui ne sont point semblables, sont dans la raison composée des quarrés des diamètres des pièces & des axes des mêmes pièces, si l'on multiplie le quarré du diamètre de chaque pièce par l'axe, l'on pourra trouver la charge qui convient aux pièces, puisque ces charges doivent être dans la raison des produits des quarrés des diamètres des pièces, par les axes des mêmes pièces. Ainsi voulant sçavoir la charge d'une pièce de 24 ordinaire, dont l'ame a 9 pieds de longueur, j'ai recours à la pièce de 4, pour en prendre le diamètre, qui est 3 pouces, que je quarré pour en multiplier le quarré par la longueur de l'axe, qui est 6 pieds, dont le produit est 54 ; ensuite je quarré le diamètre de la pièce de 24, qui donne 29 pouces 9 lignes 6 points, que je multiplie par l'axe, qui est 9, & le produit est 268. Après cela je fais une Règle de trois, en disant : Si 54, produit du quarré du diamètre de la pièce de 4 par son axe, donne deux livres pour sa charge, combien donneront 268, produit du quarré du diamètre de la pièce de 24 par son axe, pour la charge de la même pièce, l'on trouvera 10 livres moins quelque petite chose, qui fait voir que les pièces de 24, dont l'ame a 9 pieds de longueur, doivent être chargées à 10 livres de poudre,

quand la pièce de 4 sera chargée à la moitié de son Boulet.

De la même façon, si l'on veut sçavoir qu'elle doit être la charge de la Coulevrine de Nancy par rapport à la pièce de 4 chargée à la moitié de son Boulet, il faut être prévenu que cette pièce est de 18 livres de balle, que son diamètre est de 5 pouces 1 ligne 6 points, & que la longueur de son axe est de 20 pieds: ainsi faisant la Règle, on trouvera qu'elle doit être chargée à 20 livres de poudre.

Mais comme son métal ne résisteroit peut-être pas à une charge aussi forte que celle-ci, il n'y a qu'à voir la longueur qui lui convient pour la charge de la moitié de son Boulet, c'est-à-dire, pour 9 livres de poudre, en disant: Si 2 livres de poudre, qui est la charge de la pièce de 4, donnent 216 pour le cube de son axe, que donneront 9 livres de poudre, qui est la charge d'une pièce de 18, pour le cube de son axe, que l'on trouvera de 972, dont la racine cube est environ 9 pieds 11 pouces, qui est la longueur que devoit avoir l'ame de la Coulevrine, pour être bien proportionnée. Ainsi l'on connoîtra que cette pièce est environ de 10 pieds plus longue qu'elle ne devoit être.

Quand j'ai supposé que la charge de la pièce de 4 étoit de la moitié de la pesanteur de son Boulet, je n'ai pas prétendu que c'étoit la plus forte charge qu'on pouvoit lui donner: c'est pourquoi si la charge aux deux tiers du Boulet est capable d'un plus grand effet, l'on pourra trouver la charge de toutes les autres sur ce pied-là, sans qu'il soit besoin d'augmenter la longueur qu'on a trouvée par les Règles, parce que l'effet d'une plus grande charge dans la pièce de 4 sera toujours la même à proportion dans toutes les autres pièces, lorsqu'on en aura déterminé la longueur ou la charge sur la pièce de 4.

Il y a encore une difficulté touchant les armes à feu, qui est de sçavoir à quel endroit doit être posée la lumière, pour que la poudre fasse un plus grand effet, & je ne crois pas que l'on se soit déterminé là-dessus: les uns disent

C c c ij

qu'il faut la placer dans le milieu de la longueur de la chambre, parce que la poudre s'enflâme à la ronde, & en bien plus grande quantité : les autres sont d'une opinion contraire, & veulent qu'elle soit placée à l'extrémité de la chambre contre la culasse, disant pour leur raison que la pièce n'a pas tant de recul. Ces deux raisonnemens sont également vrais; cependant comme les ressorts de la poudre, aussi-bien que tous les autres ressorts, n'agissent avec plus ou moins de violence, qu'autant que les corps qui leur résistent cèdent plus ou moins, il s'ensuit quand une arme à feu n'a presque point de recul, que c'est une marque que la poudre a trouvé si peu de résistance pour chasser la balle, qu'elle n'a eu besoin que de son premier effort, au lieu que si elle trouve beaucoup de résistance vers la culasse & du côté de la balle, tous ses ressorts se débânderont en même tems, quoique le recul soit plus grand, la balle ira bien plus loin, que si le Canon n'avoit point eu de recul : ainsi la lumière étant placée dans le milieu de la chambre, les ressorts agiront en bien plus grande quantité dans le même tems, que si elle étoit contre la culasse, où ces mêmes ressorts ne peuvent agir que successivement, puisque la poudre s'enflâme ainsi; & si le Boulet vient à partir dès que la poudre commence à s'enflâmer, il arrivera encore qu'une grande partie sera chassée hors de la pièce sans faire aucun effet : ainsi il me semble que la lumière placée dans le milieu de la chambre convient beaucoup mieux que par tout ailleurs; car comme le Canon ne recule qu'avec peine, à cause de la pesanteur de la machine, & du frottement de l'affût contre la platte-forme, il se fait une réaction d'une grande partie de la poudre, qui agit contre la culasse, qui vient augmenter l'impulsion de celle qui pousse le Boulet.

Mais en parlant du Canon je voudrois désabuser ceux qui croient que le Boulet en sortant de la pièce s'élève au-dessus de la même pièce; & qui pensent qu'après avoir décrit une courbe, il reprend une direction horizontale, pour en décrire après cela une autre; & la plupart sont si

opiniâtres à soutenir cette erreur, qu'on a beau leur dire que la pesanteur du Boulet, bien loin de permettre qu'il puisse s'élever au-dessus de l'axe de la pièce, l'emporte au-dessous, dès l'instant même qu'il sort, & lui fait décrire une courbe, qui à la vérité est d'abord fort approchante de la ligne droite, mais qui devient sensible à mesure qu'il s'éloigne de la pièce; & une preuve à laquelle ils ont tous recours pour soutenir leur opinion, c'est, disent-ils, quand on tire après une pièce de gibier à la chasse, il faut tirer un peu au-dessous de l'animal, pour gagner la distance dont la balle s'est élevée au-dessus du canon: mais comme cette raison ne vaut absolument rien, en voici l'unique cause.

Si l'on attache un canon de Fusil sur une petite planche, & qu'aux deux côtes de cette planche on y mette deux tourillons, en sorte que le canon soit en équilibre sur ces tourillons, comme les bras d'une balance, on verra que l'ayant chargé à balle, si l'on tire au-dessus de l'horison, la partie de la poudre qui agira contre la culasse, & qui cause ordinairement le recul, fera baisser la culasse, & par conséquent lever le bout du canon: & comme cela se fera avant même que la balle soit sortie du canon, il arrivera qu'elle ira au-dessus de l'objet vers lequel on avoit pointé, parce qu'en sortant elle ira selon la direction de l'ame, & non pas selon celle du rayon visuel, qui ne fera plus le même à cause du dérangement de la culasse. Or si l'on fait attention que le Fusil entre les mains du Chasseur fait le même effet que je viens de dire, l'on verra que quand on veut pointer juste, il faut pointer au-dessous de l'objet.

Cependant ce qui fait qu'il semble que le Boulet à une certaine distance s'élève au-dessus de la pièce, c'est que la surface extérieure de la pièce n'étant point parallèle avec l'ame, le Boulet emporté avec beaucoup de violence, approche fort pendant un tems de la direction de l'ame: & comme cette direction se coupe avec celle de la surface de la pièce de ces deux lignes prolongées, celle de

C c c iij

l'ame passe au-dessus de la surface : & si le Boulet suit encore à peu près la direction de l'ame au-de-là de la section des deux lignes , il arrive en effet que le Boulet est au-dessus de la surface de la pièce , mais non pas au-dessus de la direction de l'ame prolongée ; & il y a même apparence que des Fondeurs ont eu égard à l'obliquité de la surface de la pièce par rapport à l'ame , afin de rectifier la ligne courbe pour tirer de but en blanc ; mais on a pensé bien différemment pour la fabrique des pièces qui ont été fondues en dernier lieu à Douai : car comme ceux qui les ont fait fondre ont crû que pour tirer juste il falloit viser parallèlement à l'ame , ils ont élevé sur le bourlet un bouton de mire d'une grosseur extraordinaire ; de sorte que le rayon visuel de la culasse au sommet de ce bouton se trouve parallèle à l'ame. Ainsi l'on vise selon une direction , tandis que le Boulet en prend une autre ; & ce seroit la plus mauvaise chose du monde que ces boutons , si le Canonier n'avoit soin de pointer au-dessus de l'objet qu'il veut atteindre.

PROPOSITION V.

Problème.

671. Où l'on donne la maniere de connoître le nombre des Boulets qui sont en pile.

Les Boulets de Canon & les Bombes qui sont dans les Arcenaux , sont ordinairement rangez en pile ; ces piles sont de trois sortes : il y en a qui ont pour base un carré que l'on nomme *piles quarrées* , comme dans la Fig. 324. d'autres un triangle , que l'on nomme *piles triangulaires* , comme dans la Fig. 325. & d'autres un parallelogramme , comme dans la Fig. 326. que l'on nomme *piles oblongues*. Or comme la maniere de compter ces Boulets dépend d'un calcul qui est différent , selon la figure de la pile. M. Goyseau , Garde d'Artillerie à la Fere , a donné il y a long-tems des Tables pour construire ces piles , & pour

Fig. 324.
325. 326.
327.

compter les Boulets qui les composent ; on les trouve dans les Memoires de S. Remy , & il y a peu d'Officiers d'Artillerie qui n'en ayent la pratique : mais comme beaucoup ne sçavent peut-être pas les raisons des operations qu'il faut faire , en voici l'explication.

Avant toutes choses , il faut considerer que les faces de la pile quarrée & de la pile triangulaire sont toujours des triangles , dont les trois côtez sont égaux , & que ces triangles étant formez par des Boulets , ils composent une progression arithmétique , qui commence par l'unité , c'est-à-dire , par le Boulet qui est au sommet de la pile , & que le plus grand terme de la progression est la base du triangle. Et comme nous serons obligez de connoître la quantité de Boulets contenue dans une face , que nous nommerons dans la suite *triangle arithmétique* , voici comment on les pourra compter d'une maniere fort aisée.

Pour sçavoir combien il y a de Boulets dans le triangle ABC , il faut compter combien il s'en trouve dans le côté AC , ajouter à ce nombre l'unité ; ensuite multiplier cette quantité par la moitié du côté AB ou AC , qui est la même chose , & le produit donnera le nombre des Boulets contenus dans le triangle : ainsi le côté AC étant de 6 Boulets , si j'ajoute à ce nombre l'unité pour avoir 7 , qui étant multipliez par la moitié de AB ou de AC , qui est 3 , le produit sera 21 , qui est le nombre des Boulets que l'on cherche. Il en sera de même pour tous les autres triangles arithmétiques.

La raison de ceci est que dans une progression arithmétique, $a, a+e, a+2e, a+3e, a+4e, a+5e$, dont les termes se surpassent d'une quantité e , la somme des deux termes $a+e$ & $a+4e$ également éloignez des extrêmes, est égale à la somme des extrêmes a & $a+5e$, ou à celle des deux autres termes quelconques aussi également éloignez des extrêmes ; puisque la somme des uns & des autres donne $2a+5e$; mais il y a la moitié autant de fois $2a+5e$ (qui est la somme des extrêmes) qu'il y a de termes dans la progression. Donc pour avoir la valeur de

Fig. 324.

tous les termes d'une progression arithmétique, qui commence par l'unité, ou par tout autre nombre, il faut multiplier le premier & le dernier terme, par la moitié du nombre qui exprime la quantité des termes: c'est pourquoi nous avons ajouté le premier terme AC avec le dernier B, & que nous avons multiplié la somme par la moitié du côté AB, c'est-à-dire, par la moitié du nombre des termes de la progression pour avoir les Boulets du triangle.

Prévenu de ceci, il faut encore considérer que si l'on a une quantité de Boulets qui forment par leurs arrangements un prisme triangulaire DEHGF (soutenu par un plan incliné IK) dont la base soit le triangle EGH, que ce prisme étant coupé par un plan EF, ~~parallèle~~^{oblique} à la base, il divisera ce prisme en deux parties, dont l'une, comme DEF, sera le tiers de tout le prisme; & l'autre, comme EFGH, en fera les deux tiers; car la partie EDF est une pyramide triangulaire, qui a pour base le triangle opposé à EGH, & pour hauteur la hauteur DE du prisme; par conséquent la partie EFGH, qui est aussi une pyramide, qui a pour base un quarré, en fera les deux tiers. Mais il faut remarquer que le plan EF partage un triangle de Boulet tel que EFG, qui se rencontre dans la coupe; ce qui rendra les deux pyramides imparfaites, quand on les considérera composées de Boulets: car comme le plan EF passe par le tiers de chaque Boulet L, il faudra donner à la pyramide triangulaire DEF les deux tiers de la quantité des Boulets du triangle arithmétique, qui se rencontre dans la coupe EF. De même pour rendre régulière la pyramide quarrée EFGH, il faudra lui donner le tiers du même triangle arithmétique. Or si l'on suppose que l'on a détaché du prisme la pyramide quarrée EFGH, pour tenir lieu de la pyramide ABCQ, & que la pyramide triangulaire DEF qui reste soit regardée comme la pyramide MNOP, on pourra donc dire que la pyramide ABCQ est plus grande que les deux tiers du prisme qui auroit pour base le triangle ABC,

qui

Fig. 324.
& 325.

qui est la même chose que EGH, & pour hauteur le côté AB, qui est la même chose que DE, du tiers du triangle ABC, qui est le même que celui qui se trouve dans la coupe EF.

Enfin l'on pourroit dire aussi que la pyramide MNOP sera plus grande que le tiers du prisme, qui auroit pour base le triangle MNO, qui est le même que EGH, & pour hauteur le côté MN, qui est le même que DE, des deux tiers du triangle MNO, qui est le même que le triangle arithmétique qui se rencontre dans la coupe EF.

D'où il s'ensuit, 1°. que pour trouver la quantité de Boulets contenue dans une pile quarrée ABCQ, il faut d'abord chercher le nombre de ceux qui sont contenus dans le triangle arithmétique ABC, & le multiplier par les deux tiers du côté AB ou AC, & ajouter au produit le tiers du triangle ABC.

Ainsi le côté AC étant de 6, je commence par trouver le triangle ABC, en ajoutant l'unité au nombre 6 pour avoir 7, que je multiplie par la moitié du côté AB qui est 3, & le produit donne 21, que je multiplie par les deux tiers du côté AB, qui est 4, pour avoir 84 au produit, auquel ajoutant le tiers du triangle arithmétique ABC, qui est 7, il vient 91 pour le nombre des Boulets de la pile.

2°. L'on pourra donc dire aussi que pour trouver le nombre de Boulets contenus dans la pile triangulaire MNOP: il faut multiplier le triangle MNO par le tiers du côté MN, & ajouter au produit les deux tiers du nombre de Boulets contenus dans le triangle MNO; ainsi le côté NO étant encore de 6, le triangle arithmétique sera de 21, qui étant multiplié par le tiers du côté MN, qui est 2, l'on aura 42, auxquels ajoutant les deux tiers du triangle, qui est 14, l'on aura 56 pour le nombre de Boulets contenus cette pile.

A l'égard de la pile oblongue, il est fort facile d'en connoître la quantité de Boulets; car comme elle est com-

D d d

Fig. 326

posée d'un prisme triangulaire RSTV, & d'une pyramide quarrée VTXY, l'on voit qu'il n'y a d'abord qu'à chercher la quantité de Boulets contenue dans une pyramide quarrée, qui auroit pour côté XY, ou VX; ensuite ajouter à la valeur de cette pyramide celle du prisme RSTV, que l'on trouvera en multipliant le triangle XTV ou celui de la coupe TV, qui est la même chose, par la quantité de Boulets RT qui se trouve au sommet de la pile moins une unité; quand je dis moins une unité, c'est qu'on doit faire attention que le premier Boulet T, avec le triangle arithmétique TV, qui lui correspond, appartient entierement à la pyramide TVXY, & par conséquent il doit être supprimé de la quantité RT.

Ainsi supposant que le côté XY ou TX soit de 9, j'ajoute 1 à 9 pour avoir 10, que je multiplie par la moitié de 9; ou, ce qui est la même chose, 9 par la moitié de 10, qui est 5, le produit sera 45 pour la quantité de Boulets du triangle XTY, que je multiplie par les deux tiers de 9, c'est-à-dire, par 6, & il vient 270 pour le produit, auquel j'ajoute le tiers du triangle, qui est 15, & le tout fait 285 pour la pyramide. Or supposant aussi que RT soit de 15 Boulets, je multiplie 15 moins 1, qui est 14, par le triangle arithmétique, qui est 45, & il vient 630 pour le nombre de Boulets du prisme RSTV, qui étant ajouté avec ceux de la pyramide, l'on trouvera 715 Boulets dans la pyramide oblongue.

PROPOSITION VI.

Problème.

Fig. 328. 672. Où l'on donne la maniere de dégorger les embrasures des Batteries de Canon dans les Sieges.

Après que l'on a fait le coffre d'une Batterie, & qu'on l'a rempli de terre jusqu'à une certaine hauteur, qui est à peu près celle de l'épaulement, on dégorge les Embras-

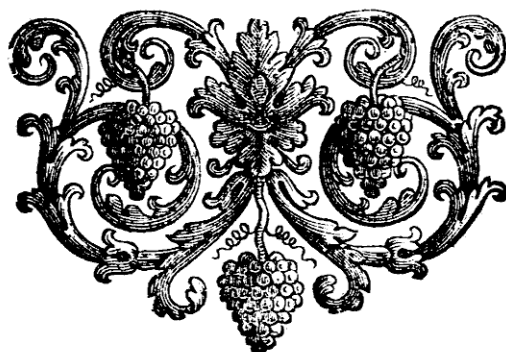
fares , aufquelles on donne 2 pieds à l'ouverture AB , pour recevoir la volée de la pièce , & 9 pieds à l'ouverture CD ; & pour tracer l'Embrasure , on élève une perpendiculaire EL fur le milieu de la ligne AB : enfuite un Canonier va planter un piquet en C & en D , chacun éloigné du point L de 4 pieds & demi ; & ayant les alignemens AC & BD , l'on pose les fauciflons qui doivent former les joues de l'Embrasure. Or comme on ne peut faire cette manœuvre fans que l'Ennemi s'en aperçoive , il dirige fon feu de ce côté-là , & quoiqu'on fafle un masque pour s'en garantir , cela n'empêche pas que l'on ne foit fort inquieté. Or pour agir avec plus de précaution , voici comment on pourra dégorgier & faciner les joues fans être obligé de monter fur l'épaulement pour planter les piquets I , L , K.

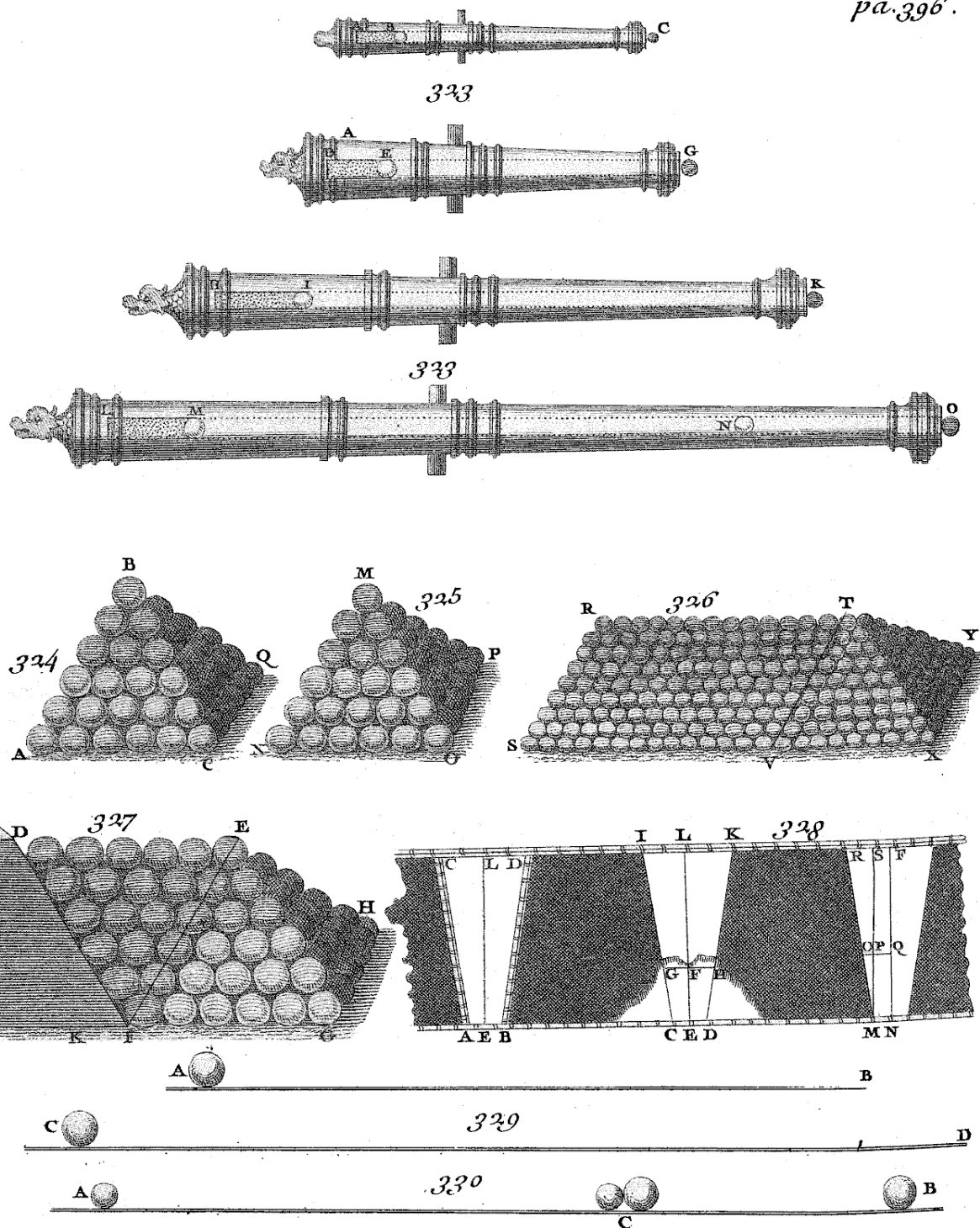
Il faut déblayer devant foi au-deffus de la genouillière une quantité de terre autour du point E ; enfuite marquer les deux piquets C & D éloignez chacun d'un pied du point E , mettre une toife EF perpendiculaire fur la ligne CD ; puis à l'extrémité F de la toife marquer de part & d'autre deux piquets G & H , éloignez du point F chacun de 2 pieds 2 pouces , l'on aura les alignemens des joues de l'Embrasure CG & DH , qui étant prolongez à mefure que l'on déblayera les terres devant foi , iront fe terminer en I & en K à une diftance de 4 pieds & demi du point L , qui eft ici dans le milieu de l'Embrasure.

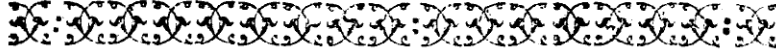
Pour faire voir la raifon de cette pratique , confiderez qu'ayant mené MS parallele à NT , l'on aura retranché de la largeur RT la partie ST d'un pied , & que par confequent RS fera de 3 pieds & demi. Or fi l'on fuppose que MP foit de 6 pieds , & que PO foit parallele à RT , l'on aura les triangles femblables MFO & MSR ; par confequent $\frac{MS}{MP} = \frac{SR}{PO}$, qui eft ordinairement de 18 pieds , fera à SR de 3 pieds & demi , comme MP de 6 pieds , fera à PO , qui fe trouvera d'un pied 2 pouces ; & fi l'on ajoute à cette ligne la partie PQ , qui eft d'un pied , la

D d d ij

perpendiculaire OQ sera de 2 pieds 2 pouces , & la ligne RT de quatre pieds & demi. Ainsi donnant 6 pieds à NQ , il faudra donner 2 pieds 2 pouces à la distance QQ , pour que la moitié de l'ouverture RT de l'Embrasure soit de 4 pieds & demi.







DISCOURS

SUR LE MOUVEMENT DES CORPS, & sur le Jet des Bombes.

LE principal objet que je me suis proposé dans le Traité du Mouvement que je donne ici, a été d'enseigner l'art de jeter les Bombes. Il est vrai que je ne commence pas d'abord par là, parce qu'il m'a paru qu'il étoit bon de donner une connoissance du choc des Corps, afin d'en tirer quelques principes, qui nous serviroient beaucoup dans la Mécanique. Je pourrois dire la même chose du Chapitre du Mouvement, parce qu'il me donnera aussi lieu dans la Mécanique d'expliquer plusieurs choses qui n'auroient pû être entendues sans une connoissance de la chute des Corps : d'ailleurs il est absolument nécessaire à ceux qui veulent s'attacher aux Mathématiques & à la Physique, pour expliquer quantité de choses curieuses dans l'Artillerie, de sçavoir les principales Régles du choc & du mouvement des Corps ; ainsi ce Traité contient trois Chapitres : le premier traite du Choc des Corps ; le second, des Régles du Mouvement ; & le troisième, de la Théorie & de la Pratique du Jet des Bombes.

A l'égard du jet des Bombes, je ne vois pas que les Bombardiers se soient mis beaucoup en peine de :

D d d iij

ſçavoir ſ'il y avoit des règles certaines ſur ce ſujet ; dans la penſée où ils ont toujours été qu'il n'y avoit que la ſeule pratique qui puiſſe ſervir au Bombardier , pour lui faire jeter des Bombes avec ſuccès ; & cela vient ſans doute de ce que la plûpart n'ayant aucune connoiſſance des Mathématiques ni de Phyſique , ne peuvent point ſ'imaginer qu'il eſt poſſible de donner des loix des effets de la poudre , au caprice de laquelle ils attribuent les fautes qu'ils font. J'avoue qu'il y a tant de choſes qui concourent dans la charge d'un Mortier à déranger tout ce que les règles & l'attention du Bombardier le plus adroit font en état de faire , qu'il y auroit de la témérité à croire qu'on peut jeter des Bombes dans un endroit comme ſi on les y portoit avec la main. Mais ce qu'il y a de ſûr , c'eſt que ſi un Bombardier avoit aſſez d'attention en chargeant ſon Mortier pour en examiner le défaut , & pour faire en forte de charger toujours également , que les règles ſeroient d'un uſage excellent , puisſque l'on n'auroit pour chaſſer des Bombes à une diſtance quelconque , qu'à en tirer une avec la charge que l'on aura jugé à propos , & à un degré d'élévation à volonté , pour connoître l'élévation qu'il convient de donner au Mortier , pour jeter les autres Bombes à la diſtance qu'on demande. Mais ceux qui n'ont que la pratique , ſouſtiennent qu'il eſt impoſſible de pouvoir obſerver cette précision dans la maniere de charger également. Car , diſent-ils , l'inégalité des grains de poudre , ſoit

dans leur grosseur, ou dans les matieres qui la composent, fait que la même quantité pour chaque charge produit des effets differens ; ce qui peut venir aussi de la part de la terre avec laquelle on remplit la chambre, qui peut être plus ou moins refoulée une fois que l'autre. D'ailleurs les Bombes qui ne sont point toutes bien de calibre & d'égale pesanteur, & souvent mal coulées, la platte-forme qui se dérange presque à chaque coup que l'on tire, font autant de sujets qui prouvent que moralement il n'est pas possible de jamais tirer des Bombes comme il faut : mais quoiqu'on puisse remédier à tout ceci quand on voudra y bien prendre garde, il n'y a point de doute qu'un Bombardier expérimenté d'ailleurs dans son métier, & qui sçaura l'art de jetter les Bombes, ne soit plus sûr de son fait que celui qui n'a que la simple pratique ; car s'il s'aperçoit que son premier & son second coup ne jettent point la Bombe où il veut qu'elle tombe, il pourra se corriger, au lieu que ce dernier tâtonnera en augmentant ou diminuant la poudre ou les degrez pendant un tems considerable : & quoiqu'on dise que c'est le pur hazard qui gouverne l'action du Mortier, l'expérience m'a fait voir que quand on vouloit apporter tous ses soins à charger également, & à poser l'affut toujours dans le même endroit de la platte-forme, & les tourillons dans la même situation sur l'affut, il étoit très-possible de tirer quantité de Bombes toujours à peu près dans le même endroit. Qu'on revienne donc de l'opinion où l'on

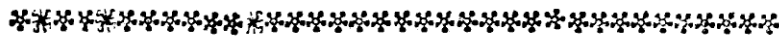
est que les règles pour jeter les Bombes ne peuvent être d'aucun secours, puisque si l'on a soin de charger bien également, & que l'on se serve des Bombes à peu près de même poids, l'on n'aura plus lieu de douter de la certitude de ces règles.

Après cela on peut dire qu'il y a si peu de Bombardiers qui se soient attachez à sçavoir ces règles, & encore moins à les pratiquer, que certainement il y a plus de préjugé que de connoissance dans leur fait : & quand ils pourroient s'en passer pour jeter des Bombes dans un endroit de niveau avec la batterie, après en avoir tiré un grand nombre d'inutiles, comme cela arrive toujourns, comment s'y prendroient-ils pour en jeter dans quelque Forteresse fort élevée, comme sur un rocher escarpé, au pied duquel seroit la Batterie, ou bien si la Batterie étoit un lieu fort élevé pour en jeter dans un fond, il n'y a point de Bombardier, que je sçache, à qui l'expérience ait donné quelque pratique pour cela, d'autant plus qu'ils ne regardent point ces deux cas comme problématiques. Enfin il résulte de tout ce qui vient d'être dit, que jamais on ne parviendra à jeter des Bombes à une distance donnée, que l'on ne sçache les règles qui sont établies pour cela, & qu'on ait assez d'expérience pour prévoir tous les accidens auxquels le Mortier & la Bombe sont sujets.

NOUVEAU



NOUVEAU COURS
DE MATHÉMATIQUE.



HUITIÈME PARTIE.

Qui traite du Mouvement & du Choc des Corps.

Pour servir d'introduction à la Mécanique & à l'art
de jeter les Bombes.

CHAPITRE PREMIER.

Du Choc des Corps.

D E F I N I T I O N S.

I.

673. **L**A *vitesse* d'un Corps est le plus ou le moins de chemin qu'il fait pendant un certain tems, lorsque quelque cause l'a mis en mouvement.

II.

674. La *vitesse* d'un Corps est dite *uniforme* ou *variable* ; elle se nomme *uniforme* , lorsque dans des tems égaux elle parcourt des espaces égaux ; & elle se nomme *variable* , lorsque dans des tems égaux elle parcourt des espaces inégaux.

E c c

III.

675. La *direction* d'un Corps, est la ligne qu'un Corps parcourt, lorsqu'étant mis en mouvement il va d'un lieu à un autre.

IV.

676. La direction est *simple* ou *composée* : l'on dit qu'elle est *simple*, lorsqu'il n'y a qu'une cause qui tend à mouvoir le Corps ; & on la nomme *composée*, lorsqu'il y en a deux ou plusieurs.

V.

677. Les Corps dont on considère le mouvement sont *durs* ou *fluides* : il y en a aussi qui ont du *ressort*, & d'autres qui n'en ont pas.

VI.

678. On appelle Corps *dur* celui dont les parties ne se divisent pas aisément, & qui étant divisées ne se réunissent point facilement, comme une pierre.

VII.

679. On appelle Corps *fluide* celui dont les parties se divisent aisément, & lesquelles étant divisées se réunissent facilement, comme l'eau.

VIII.

680. On appelle Corps *sans ressort* celui qui à la rencontre d'un autre ne change point de figure, ou s'il en change, ne se rétablit point dans sa première figure.

IX.

681. On appelle Corps *à ressort* celui qui à la rencontre d'un autre change de figure dans le choc, & ensuite se rétablit comme auparavant.

682. Nous n'examinerons dans ce Traité que les Corps durs sans ressort ; à l'égard des autres nous en parlerons aux endroits qu'il conviendra.

DEMANDES.

I.

603. L'on demande qu'il soit regardé comme incontestable que lorsque deux corps se rencontrent dans des directions diamétralement opposées, ils se communiquent mutuellement leur mouvement, & qu'un Corps perd autant de son mouvement qu'il en communique à un autre.

II.

684. Que lorsque deux Corps sans ressort se rencontrent, ils ne se repoussent point l'un l'autre, & que le plus fort emporte le plus foible dans la même détermination.

COROLLAIRE.

685. Il suit que lorsqu'un Corps a plus de force qu'un autre, il pousse devant lui celui qui est le plus foible, & que ces deux Corps peuvent être regardez comme s'ils n'en faisoient plus qu'un, qui les vaut tous deux.

III.

686. On suppose encore que les Corps se meuvent dans un milieu, qui ne résiste point à leurs mouvemens; de sorte que si un Corps parcourt 4 toises dans la première minute de son mouvement, il continuera de parcourir 4 toises dans chaque minute.

AXIOME.

687. Les effets sont proportionnels à leurs causes.

COROLLAIRE.

688. Il suit que si l'on a deux Corps égaux A & C, qui étant mis en mouvement, parcourent en même tems les espaces AB & CD, ces deux Corps ont reçu des degrez de vîteses, qui sont dans la raison des mêmes espaces AB & CD; puisque les degrez de vîteses de ces

Fig. 329.

Eec ij

Corps peuvent être pris pour les causes , & les espaces parcourus pour les effets.

AVERTISSEMENT.

Comme les Corps que l'on fait rouler sur un plan parcourent des lignes droites , nous prendrons dans la suite des lignes droites pour exprimer non seulement le chemin que ces Corps parcourent , ou auront à parcourir , mais encore pour exprimer les degrez de force qu'on leur aura attribué : nous supposerons aussi que les Corps dont nous parlerons seront de figure spherique.

PROPOSITION PREMIERE.

Théoreme.

689. *Si deux Corps semblables de même matiere & égaux, sont mis avec des vitesses inégales, l'effort du Corps qui aura le plus de vitesse sera plus grand sur le Corps qu'il rencontrera, que celui dont la vitesse sera plus petite.*

DEMONSTRATION.

Si l'on suppose que de deux Corps égaux l'un ait une vitesse double de l'autre , je dis que ces deux Corps venant à frapper un autre corps, celui qui aura la vitesse double, le frappera avec deux fois plus de force que l'autre ; car les effets étant proportionnez à leurs causes * si l'on prend les vitesses pour les causes , & les chocs pour les effets , le Corps qui aura deux fois plus de vitesse que l'autre, agira avec deux fois plus de force contre celui qu'il rencontrera.

* Art. 687.
& 688.

PROPOSITION II.

Théoreme.

690. *Si deux Corps inégaux & de même matiere, sont poussez avec des vitesses égales, le plus grand Corps fera plus d'impression sur le Corps qu'il rencontrera, que le plus petit.*

D E M O N S T R A T I O N .

Si l'on suppose deux Corps l'un de quatre livres, & l'autre de deux livres, il est constant que si ces deux Corps ont des degrez de vîteses égaux, le plus grand aura deux fois plus de force que le plus petit; car si l'on suppose le Corps de quatre livres divisé en deux également, l'on aura deux autres Corps, dont chacun sera égal à celui de deux livres; & comme ils auront la même vîtesse que celui de deux livres, la force de chacun en particulier sera égale à celle du plus petit: ainsi ces deux Corps n'en faisant qu'un, la force du plus grand Corps sera par conséquent double de celle du plus petit.

C O R O L L A I R E I.

691. Il suit des deux Théoremes précédens que la force d'un Corps, qu'on peut appeller aussi *quantité de mouvement* de ce Corps, ne dépend pas seulement de sa vîtesse, mais encore de sa masse; c'est pourquoi l'on connoîtra toujours la quantité de mouvement de deux ou de plusieurs Corps *en multipliant la masse de chacun par sa vîtesse*, puisque les Corps inégaux, & qui ont des vîtesses inégales, ont une quantité de mouvement, qui est dans la raison composée de leurs masses & de leurs vîtesses: ainsi ayant deux Corps que nous nommerons *a* & *b*, nommant *c* la vîtesse du premier, & *d* la vîtesse du second, *ac* sera la quantité de l'un, & *bd* la quantité de mouvement de l'autre.

C O R O L L A I R E I I.

692. Il suit encore que connoissant la quantité de mouvement d'un Corps & sa masse, en divisant la quantité de mouvement par la masse, l'on aura au quotient la vîtesse; & que divisant de même la quantité de mouvement par la vîtesse, le quotient donnera la masse.

E e e iij

PROPOSITION III.

Théoreme.

693. *Si deux Corps ont des masses & des vitesses qui soient en raison reciproque, ces deux Corps auront une même quantité de mouvement.*

DEMONSTRATION.

Si l'on nomme a la masse du premier corps; b , celle du second; c , la vitesse du premier; & d , la vitesse du second, selon la supposition l'on aura $a. b :: d. c$. par conséquent $ac = bd$; mais ac est le produit du premier Corps par sa vitesse, & bd est le produit du second Corps par sa vitesse. Donc la quantité de mouvement de l'un est égale à la quantité de mouvement de l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 330. 694. Il suit que si l'on a deux Corps A & B, dont les masses soient reciproques aux vitesses; que ces deux Corps venant à se rencontrer par des directions diamétralement opposées, qu'ils se choqueront également, & qu'ils demeureront tous les deux en repos au moment qu'ils se seront choquez: car supposant que le Corps A soit de 4 livres, & sa vitesse soit de 12 degrez, que le Corps B soit de 6 livres, & sa vitesse de 8 degrez, la masse du Corps A qui est 4, étant multipliée par sa vitesse, qui est 12, l'on aura 48 pour la quantité de mouvement du Corps A. De même, si l'on multiplie la masse du Corps B, qui est 6, par sa vitesse, qui est 8, la quantité de mouvement sera encore 48. Or s'ils se rencontrent au point C avec une égale quantité de mouvement, le Corps A choquera autant le Corps B, que le Corps B choquera le Corps A: ainsi ils demeureront en repos, puisque l'un ne fera pas plus d'effort que l'autre.

Cette égalité de forces ou quantité de mouvemens qui agissent l'un contre l'autre, se nomme *équilibre*.

COROLLAIRE II.

695. Il suit encore que si deux Corps égaux avec des vitesses égales, viennent à se rencontrer dans des lignes de directions diamétralement opposées, ils seront en équilibre à l'instant du choc, puisqu'ils auront chacun une même quantité de mouvement.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

696. Lorsque deux Corps sans ressort se meuvent dans la même détermination, & vers un même côté, le Corps qui a le plus de vitesse ayant rencontré celui qui en a moins, & ces deux Corps allant ensemble, ils auront une quantité de mouvement égale à la somme de celles qu'ils avoient avant le choc.

DEMONSTRATION.

Si ces deux Corps se meuvent d'un même côté, il n'y aura rien d'opposé, qui détruira leur mouvement. C'est pourquoi ils conserveront après le choc la même quantité de mouvement qu'ils avoient avant le choc; car si celui qui a le plus de mouvement en communique à celui qui en a moins, cette quantité de mouvement reste dans ce dernier. Or ces deux Corps étant considerez comme n'en faisant qu'un seul * après le choc : il s'ensuit que leur quantité de mouvement est la somme de celles qu'ils avoient avant le choc. *Art. 685.

COROLLAIRE I.

697. Il suit que connoissant la quantité de mouvement de deux Corps, qui n'en font plus qu'un, après s'être rencontrés, l'on trouvera la vitesse, en divisant la quantité de mouvement par la somme des masses; & que con-

noissant la vitesse, l'on trouvera la somme des masses, en divisant la quantité de mouvement par la vitesse.

COROLLAIRE II.

698. Par conséquent si l'on a deux Corps égaux sur une même ligne de direction, & que l'un soit en repos, & l'autre en mouvement; celui qui est en mouvement venant rencontrer celui qui est en repos (ces deux Corps n'en faisant plus qu'un) il lui communiquera la moitié de la vitesse qu'il avoit avant le choc; puisque pour avoir cette vitesse, il faut diviser la quantité de mouvement par une masse double: enfin si le Corps mobile en rencontre un autre en repos, dont la masse soit triple de la sienne, sa vitesse ne sera plus que d'un quart. Ainsi des autres.

PROPOSITION V.

Théoreme.

699. *Si deux Corps se meuvent dans un sens opposé sur une même direction, ces deux Corps venant à se rencontrer, & n'en faisant plus qu'un, la quantité de mouvement de ces Corps sera la différence des quantités de mouvemens que les deux Corps avoient avant le choc.*

DEMONSTRATION.

Si ces deux Corps se meuvent dans des déterminations opposées, ils tendront mutuellement à s'arrêter; de sorte que s'ils avoient des forces égales, ils demeureroient en repos après le choc: ainsi le plus fort perd autant de sa force que le plus foible en a. Il ne reste donc pour avoir ces deux Corps après leur choc, que la différence de leurs forces, ou de leur quantité de mouvement; mais ces deux Corps étant considerez comme n'en faisant plus qu'un, sa quantité de mouvement sera la différence de celles des deux Corps avant le choc.

COROL.

COROLLAIRE.

700. Il suit que pour trouver la vitesse de ces Corps après leur choc , qu'il faut diviser la différence de leur quantité de mouvement qu'ils avoient avant le choc , par la somme de leurs masses , & le quotient donnera cette vitesse , laquelle sera dans la détermination du Corps qui avoit la plus grande quantité de mouvement avant le choc.

CHAPITRE II.

Du Mouvement des Corps jettez.

DEFINITIONS.

I.

701. **S**I un Corps se meut pendant un certain tems , lequel tems soit divisé en plusieurs parties égales , nous appellerons chacune de ces petites parties *moment* ou *instant*.

II.

702. Si un Corps tombant de haut en bas , reçoit dans chaque instant une augmentation de vitesse , cette vitesse sera nommée *accélérée* ; & si au contraire l'on jette un Corps de bas en haut , & qu'à chaque instant de la montée il perde dans des instans égaux des parties égales de vitesse , cette vitesse sera nommée *retardée*.

AXIOME I.

703. Un Corps , soit qu'il soit en mouvement ou en repos , est toujours le même Corps.

COROLLAIRE.

704. Donc le Corps de lui-même ou de sa nature est tout-à-fait indifférent au mouvement ou au repos , &
Fff

par conséquent ce Corps étant une fois mis en mouvement, il ne se mettra jamais en repos ; de même qu'étant une fois en repos, il ne se mettra jamais de lui-même en mouvement.

AXIOME II.

705. Un Corps de quelque côté qu'on le mette en mouvement, & avec une vitesse quelconque, est toujours le même Corps.

COROLLAIRE.

706. Donc le Corps de soi ou de sa nature est tout-à-fait indifférent à quelque détermination, ou à quelque vitesse que ce puisse être ; & par conséquent ce Corps ne changera jamais de lui-même, ni la vitesse ni la détermination qu'il a eu en dernier lieu.

DEMANDE.

707. L'on demande qu'il soit accordé que la pesanteur de quelque côté qu'elle puisse provenir, presse toujours le Corps avec une même force pour le faire descendre.

PROPOSITION PREMIERE.

Théoreme.

708. *Si rien ne s'opposoit au mouvement des Corps jettés, chacun de ces Corps conserveroit toujours avec une vitesse égale le mouvement qu'il auroit reçu, & suivroit toujours une même ligne droite.*

DEMONSTRATION.

Comme un Corps ne peut jamais de lui-même se mettre en repos, ni changer sa détermination ou la vitesse qu'il a reçue*, il s'ensuit que si rien ne s'opposoit à cette vitesse, le Corps conserveroit perpétuellement son mouvement, & avec une vitesse toujours égale, & suivroit toujours une même ligne droite. C. Q. F. D.

*Art. 704.
& 706.

COROLLAIRE I.

709. Donc le mouvement tel qu'il est de la part de la puissance qui meut , soit horizontalement , soit obliquement , soit verticalement , seroit perpétuel & égal , en allant toujours de même côté , si l'air ne résistoit pas au Corps , & si sa pesanteur ne le faisoit pas toujours descendre en bas ; de sorte que le mouvement précisément comme il est de la part du mobile , doit être considéré comme égal perpétuel , & droit toujours vers le même côté où le Corps est poussé.

COROLLAIRE II.

710. De même , si immédiatement après qu'une puissance a donné une certaine quantité de vitesse à un Corps qui tombe , l'action de la pesanteur venoit à cesser tout-à-fait , & que l'air ne résistât point , ce Corps néanmoins s'approcheroit toujours de la terre avec la même vitesse qu'il auroit reçue en dernier lieu , conservant toujours également cette même vitesse , & s'approchant toujours par une ligne droite.

COROLLAIRE III.

711. Donc puisque l'action de la pesanteur ne nuit point à la vitesse d'un Corps qui tombe , si l'air , ni autre chose ne s'y opposoit , la vitesse que la pesanteur causeroit au Corps dans le premier instant , continueroit dans le second instant avec une pareille vitesse causée par la même pesanteur , par la même raison les vitesses des deux premiers instans continueroient avec celles du troisième instant ; & ainsi les vitesses de tous ces premiers instans continueroient avec les vitesses que ce même Corps recevrait dans chacun des instans suivans , ou bien (ce qui est la même chose) lorsqu'un Corps tombe , ce Corps reçoit des parties égales de vitesse dans des tems égaux , en supposant que l'action de la pesanteur est uniforme , & négligeant la résistance de l'air.

Fff ij

PROPOSITION II.

Théoreme.

712. *Un Corps qui tombe reçoit des parties égales de vitesse dans des tems égaux ; de sorte que dans le second instant il y a une vitesse double de celle qu'il avoit dans le premier instant de sa chute , & dans le troisième il en a un triple ; & ainsi des autres.*

DEMONSTRATION.

Puisqu'un Corps qui tombe est continuellement poussé en bas par l'action de sa pesanteur, qui est toujours la même *, il s'ensuit que la pesanteur doit donner à ce Corps à chaque instant de sa chute d'égales parties de vitesse. Donc puisque les parties de vitesse que le Corps auroit reçues en premier lieu subsistent entièrement avec celles qu'il auroit reçues en dernier lieu * le Corps en tombant se trouve avoir autant de degrez de vitesse causez par sa pesanteur, qu'il sera écoulé de momens depuis le commencement de sa chute jusqu'au moment que l'on compte. Donc ce Corps aura à la fin du second instant une vitesse double de celle du premier au troisième instant une vitesse triple, &c. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Il suit que les vitesses qu'un Corps reçoit dans chaque instant de sa chute, sont comme les tems qui se sont écoulés depuis le commencement de sa chute.

PROPOSITION III.

Théoreme.

713. *Les espaces que parcourt un Corps en tombant dans quelque tems que ce soit, sont entr'eux comme les quarrés des mêmes tems.*

D É M O N S T R A T I O N .

Si un Corps A a parcouru deux espaces, l'un pendant le tems exprimé par la ligne AB, & l'autre pendant le tems exprimé par la ligne AC, il faut démontrer que les espaces parcourus pendant chacun de ces tems sont comme les quarrés des mêmes tems AB & AC. Pour cela tirez la ligne AD, qui fasse avec AC tel angle que l'on voudra, & menez CD & BE perpendiculaires à AC; ensuite divisez la ligne AB à un nombre de parties égales; & par chaque point de division F, H, L, &c. menez les parallèles FG, HK, LM, &c. Cela posé, si l'on suppose que le Corps tombe du point A pour venir vers B, & que l'on prenne la partie AF pour un tems, & la parallèle FG pour exprimer l'espace parcouru pendant ce tems, & qu'on suppose aussi que pendant le tems AH le Corps ait parcouru un espace exprimé par HK, l'on verra qu'à cause des triangles semblables AFG & AHK, que le tems AF sera à l'espace parcouru FG comme le tems AH sera à l'espace parcouru HK. Or comme toutes les parallèles qui sont dans le triangle ABE, expriment tous les espaces parcourus dans le tems de la ligne AB; il s'ensuit que si l'on suppose le tems de la ligne AB, divisé en des instans infiniment petits, les parallèles qui exprimeront les vitesses de ces tems seront infiniment proches les unes des autres; & qu'ainsi la ligne AB étant prise pour la somme de tous les instans du tems que le Corps aura mis à descendre, le triangle ABE pourra être pris pour la somme de tous les espaces parcourus pendant le tems AB: par la même raison si l'on prend la ligne AC pour un tems, le triangle ACD pourra être pris pour la vitesse du Corps pendant le tems AC: ainsi le tems AB sera au tems AC comme la vitesse exprimée par le triangle ABE sera à la vitesse exprimée par le triangle ACD. Or ces triangles étant semblables, seront dans la raison des quarrés de leurs côtes homologues, c'est-à-dire, comme les quarrés des tems AB & AC: d'où il s'ensuit qu'en prenant ces

E ff iii.

Fig. 331.

quarrez pour les vîteses, l'on pourra dire que la somme des vîteses ou les espaces que parcourt un Corps pendant les tems AB & AD seront comme les quarrez de ces mêmes tems.

COROLLAIRE I.

714. Puisque les tems AB, AC, sont entr'eux comme les vîteses BE, CD, que le Corps a acquises à la fin de ces tems, il est évident que les espaces que ce Corps parcourra pendant ces mêmes tems, seront aussi entr'eux comme les quarrez des vîteses que ce Corps aura à la fin de chacun de ces tems. Ainsi nommant L une longueur parcourue depuis le point de repos; T, le tems employé à la parcourir; V, la vîtesse acquise à la fin de ces tems: & l, une autre longueur parcourue depuis le point de repos; t, le tems employé à la parcourir; v, la vîtesse acquise à la fin de ce tems, l'on aura $L.l::TT.tt.$ ou bien $L.l::VV.vv.$

COROLLAIRE II.

715. Puisque l'on a $L.l::VV.vv.$ si on extrait la racine quarrée de chaque terme, on aura $\sqrt{L}.\sqrt{l}::V.v.$ ce qui fait voir que dans le mouvement accéléré on peut exprimer les vîteses par les racines des longueurs parcourues depuis le point de repos. Il faut s'appliquer à comprendre ceci pour n'être point arrêté dans la suite.

COROLLAIRE III.

716. Il est aussi évident que si l'on prend plusieurs tems égaux de suite, à commencer au premier instant de la chute, par exemple, AF, FH, HL, LN, &c. pendant lesquels tems soient parcourus les espaces RS, ST, TX, XZ, en sorte que pendant le tems AF le Corps parcoure l'espace RS, pendant le tems FH l'espace ST, &c. ces mêmes espaces seront entr'eux comme les nombres impairs depuis l'unité; sçavoir, 1, 3, 5, 7, 9, &c. de sorte que si RS vaut 1 pied, ST en vaut 3; TX, 5; XZ, 7, &c. car c'est la difference des quarrez des grandeurs ou

Fig. 331.
& 332.

nombre 1, 2, 3, 4, &c. qui suivent naturellement après l'unité. Lors donc qu'on augmente ces degrez de vitesse selon la suite naturelle des nombres dans des tems égaux, les espaces parcourus pendant ces mêmes tems augmentent suivant la suite des nombres impairs depuis l'unité.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

717. *L'espace qu'un Corps parcourt dans un tems donné, lorsqu'étant en repos il commence à tomber, est la moitié de l'espace que ce Corps parcourreroit d'un mouvement égal dans un pareil tems avec la vitesse qu'il a acquise dans le dernier moment de sa chute.*

DEMONSTRATION.

Qu'un Corps tombe avec le tems AB, en sorte que sa vitesse au dernier moment de sa chute soit BC, je dis que l'espace que ce Corps parcourreroit avec cette même dernière vitesse continuée également pendant le tems AB, est double de celui que ce même Corps a parcouru pendant ce même tems AB; car il est évident que la somme des vitesses, ou la vitesse totale de ce Corps qui tombe avec le tems AB, est exprimée par la superficie du triangle ABC. Mais si ce même Corps se mouvoit encore avec une vitesse égale BC, pendant le même tems AB, il est évident, par la même raison, que la vitesse totale seroit pour lors exprimée par le parallelogramme BD. Donc puisque les espaces sont comme les vitesses totales, il s'ensuivra que l'espace que ce Corps parcourreroit pendant le tems AB avec une vitesse égale & uniforme BC, sera à l'espace que ce Corps parcourreroit pendant le même tems avec une vitesse accélérée jusqu'à BC, comme le parallelogramme BD au triangle ABC: mais le parallelogramme BD est double du triangle ABC; donc l'espace qu'un Corps parcourreroit dans un tems donné, &c. C. Q. E. D.

COROLLAIRE.

718. Il suit que si un Corps en tombant a parcouru depuis le point de repos un espace que nous nommerons a , dans un tems que nous nommerons T , que ce Corps parcourera d'un mouvement uniforme le même espace a dans la moitié du tems T , c'est-à-dire, en $\frac{1}{2} T$.

REMARQUE.

Quand on dit qu'un Corps parcourt d'un mouvement uniforme avec une vitesse acquise un certain espace qu'on exprime ordinairement par une ligne. Il est bon de remarquer que cette ligne peut être perpendiculaire, horizontale, ou oblique à l'horison.

PROPOSITION V.

Théoreme.

719. *La force qui porte un Corps perpendiculairement en haut, se diminue également.*

DEMONSTRATION.

Si l'on considère qu'un Corps poussé de bas en haut est toujours tiré en bas par sa pesanteur, l'on verra que lorsque la force de l'impulsion qui le pousse en haut est diminué jusqu'au point de devenir égale à celle de sa gravité, en ce moment le Corps jetté doit cesser de monter; après quoi il doit immédiatement descendre, parce qu'alors la force de la pesanteur commence à prévaloir à celle que la puissance lui a imprimée. Or puisque la pesanteur empêche que le mobile n'aille toujours également, il reçoit donc à chaque instant de la montée des diminutions égales de vitesse dans la même raison que cette vitesse augmente quand il descend, puisque la pesanteur qui est cause qu'en descendant il reçoit des augmentations des vitesses égales dans des tems égaux, fait qu'agissant d'un sens contraire, il perd en montant des parties de vitesses égales dans des tems égaux. C. Q. F. D.

COROL.

COROLLAIRE.

Il suit que si un Corps est poussé en haut avec la force ou la vitesse qu'il a acquise en tombant d'une certaine hauteur dans un certain tems, qu'il doit remonter à la même hauteur dans le même tems, & passer par les mêmes espaces dans des tems égaux en descendant & en montant; ainsi les espaces parcourus par le mobile jetté en haut seront les mêmes dans un ordre renversé que ceux qu'il parcourera quand la gravité le fera retomber.

PROPOSITION VI.

Problème.

720. *Connoissant l'espace qu'un Corps pesant parcourt en un tems déterminé, trouver l'espace qu'il parcourera dans un tems donné.*

Supposant qu'un Corps a parcouru en tombant 180 toises en 6 minutes, on demande combien le même Corps parcourra de toises en 4 minutes. Pour le sçavoir, faites attention que la somme des vitesses des Corps qui tombent étant dans la raison des quarrés des tems; & si au lieu des vitesses on prend les espaces parcourus, l'on n'aura qu'à dire: Si le quarré de 6 minutes, qui est 36, donne 180 toises pour l'espace parcouru, combien donnera le quarré de 4 minutes, qui est 16, pour l'espace parcouru, l'on trouvera que le Corps aura parcouru 80 toises en 4 minutes.

PROPOSITION VII.

Problème.

721. *Connoissant le tems qu'un Corps a mis à parcourir un espace déterminé, connoître le tems qu'il mettra à parcourir un espace donné.*

Sçachant qu'un Corps a parcouru 200 toises en 5 minutes, l'on demande en combien de tems il parcourera 150 toises.

G g g

Pour le sçavoir, il faut, à cause que les espaces parcourus sont comme les quarrés des tems, dire: Comme 200 toises sont au quarré de 5 minutes, qui est 25; ainsi 150 toises sont au quarré du tems que le Corps aura mis à parcourir cet espace. La règle étant faite, on trouvera pour le quarré du tems $18\frac{3}{4}$, dont la racine quarrée est $4\frac{3}{4}$; c'est-à-dire, 4 minutes & 20 secondes, qui est le tems que le Corps mettra à parcourir 150 toises.

CHAPITRE III.

De la Théorie & de la Pratique du Jet des Bombes, pour servir à la construction & à l'usage d'un Instrument universel pour le Jet des Bombes.

Tous ceux qui tirent des Bombes sçavent que la Bombe décrit une courbe en allant du Mortier au lieu où elle tombe; & l'on a nommé cette courbe *Parabole*, parce qu'en effet elle en a les propriétés. Or comme c'est sur la nature de la Parabole qu'est fondée la Théorie du Jet des Bombes, il faut faire voir avant toutes choses, que non seulement la Bombe, mais tout autre Corps poussé selon une direction parallèle ou oblique à l'horison, décrit une Parabole: & c'est ce qui va être démontré dans la proposition suivante.

PROPOSITION VIII.

Théoreme.

723. *Si un Corps est jetté selon une direction quelconque, pourvu qu'elle ne soit point perpendiculaire à l'horison, je dis qu'il décrira par son mouvement composé du mouvement d'impulsion, & de celui de sa pesanteur, une Parabole.*

D E M O N S T R A T I O N .

Considérez que la force imprimée au mobile pour le pousser de A en B, lui fera parcourir des espaces égaux AE, EG, GI, IB, dans des tems égaux, que dans le premier tems il aura parcouru l'espace AE par son mouvement d'impulsion, & l'espace AL ou EF par sa pesanteur; dans le second tems il aura parcouru l'espace AG par son impulsion; & l'espace AM ou GH par sa pesanteur; dans le troisième tems l'espace AI par son impulsion, & l'espace AN ou IK par sa pesanteur; enfin qu'au quatrième tems il aura parcouru l'espace AB par son mouvement d'impulsion, & l'espace AO ou BD par celui de sa pesanteur: mais selon la loi du mouvement uniforme, les espaces parcourus AE, AG, AI, IB, sont entr'eux comme les tems employez à les parcourir *; & par la loi des corps qui tombent, les espaces AL, AM, AN, AO, ou leurs égales EF, GH, IK, BD, parcourus en tombant, sont entr'eux comme les quarrés des espaces AE, AG, AI, AB, ou de leurs égales LF, MH, NK, OD * parcourus d'un mouvement uniforme, imprimé au mobile suivant la direction AB. Or la ligne courbe dans laquelle se trouvent les points F, H, K, D, a donc cette propriété, que les quarrés des parallèles LF, MH, NK, OD, sont entr'eux comme les lignes AL, AM, AN, AO; mais il est démontré dans les Sections Coniques *, qu'une courbe qui a cette propriété, est une parabole: ainsi un Corps jeté selon une direction quelconque, décrit une parabole. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 334.

& 335.

* Art. 711.

* Art. 713.

* Art. 411.

& 412.

C O R O L L A I R E I.

724. Si la direction AB du mobile poussé par le mouvement d'impulsion, est parallèle à l'horison, comme est la ligne AB dans la Fig. 334. la courbe AHD sera une demi parabole, dont la ligne AO sera l'axe: & comme le mobile par sa gravité s'éloigne perpétuellement de la ligne AB, il commencera à décrire la parabole au point A;

Fig. 334.

& 335.

G g g ij

ainsi la ligne AB ne touchant la parabole qu'au seul point A, elle en fera la *tangente*.

COROLLAIRE II.

725. Mais si le mobile a été poussé selon une direction AB oblique à l'horison, comme dans la Figure 335. dès qu'il partira du point A, il commencera à décrire la parabole AHD; & s'il est poussé selon la direction AQ, dès qu'il partira du point A, il commencera à décrire la parabole ARS; ce qui fait voir que la ligne BQ est tangente à la parabole au point A, & que la ligne AP est un diamètre à la parabole; puisque * AL. AM :: LF. MH. ainsi la démonstration précédente prouve toujours que le mobile décrit une parabole, soit qu'on le pousse selon une direction parallèle ou oblique à l'horison.

* Art. 423.
& 424.

COROLLAIRE III.

726. Il suit encore que les paraboles décrites par un mobile ont d'autant plus d'étendue, que la vitesse imprimée au mobile suivant la même direction, est plus grande.

DEFINITION.

Fig. 335. La ligne AB est nommée la ligne de *projection*; la ligne BD, la ligne de la *chûte*; & la ligne AD, la ligne de *but*, que l'on nomme aussi *amplitude* de la parabole, lorsqu'elle en détermine l'étendue; & dans ce cas l'amplitude est toujours une ligne horizontale.

REMARQUE.

Comme les étendues des paraboles décrites par un mobile, dépendent de la force qui a mis le mobile en mouvement, Galilée n'a point trouvé de moyens plus assurés pour réduire ces forces à de certaines mesures, qu'en supposant que le mobile a acquis cette force ou cette vitesse en tombant d'une certaine hauteur; car comme le

mobile en tombant acquiert à chaque instant de sa chute un nouveau degré de vitesse, il n'y a point de vitesse si grande qu'on puisse s'imaginer, à laquelle le mobile ne puisse arriver; puisque l'on peut supposer les hauteurs d'où il sera tombé aussi grandes que l'on voudra: ainsi la différence des degrés de vitesse pourra s'exprimer par la différence des hauteurs d'où l'on peut supposer que le mobile est tombé.

PROPOSITION IX.

Problème.

727. Connoissant la ligne de projection AB (qu'on suppose parallèle à l'horison) & la ligne de chute BF de la parabole AEF décrite par un mobile, on demande de quelle hauteur ce mobile doit tomber pour avoir à la fin de sa chute une vitesse avec laquelle il puisse d'un mouvement uniforme parcourir la ligne AB , dans le même tems qu'il parcourra par sa pesanteur la hauteur BF . Fig. 336.

Ayant achevé le rectangle GB , il faut diviser la ligne AB en deux également au point D , & tirer la ligne GD ; & sur cette ligne élever la perpendiculaire DC , qui aille rencontrer la ligne GA prolongée jusqu'en C ; & je dis que la ligne CA sera la hauteur que le mobile doit parcourir de C en A pour avoir une vitesse capable de parcourir la ligne AB d'un mouvement uniforme dans le même tems qu'il parcourra la hauteur BF par sa pesanteur.

Nous nommerons AG , a ; AD , b ; la ligne CA , x ; & T , le tems que le mobile aura mis à parcourir la verticale AG , en tombant de A en G .

DEMONSTRATION.

Supposant que le mobile soit tombé de A en G dans le tems T , sa vitesse sera $\sqrt{AG}$ ($\sqrt{a}$) * avec laquelle il parcourra d'un mouvement uniforme la ligne AG (a) dans *Art. 715.
 $G g g iij$.

Art. 719. le tems $\frac{1}{2}T^*$: & comme l'on a nommé x la hauteur de laquelle il doit tomber pour avoir une vitesse uniforme capable de parcourir le côté AD (b) dans le même tems $\frac{1}{2}T$; la vitesse acquise par la hauteur que l'on cherche,

Art. 715. sera $\sqrt{x}$; & par conséquent l'on aura AG (a). AD (b)

:: $\sqrt{AG} (\sqrt{a}) \sqrt{x}$. d'où l'on tire $a\sqrt{x} = b\sqrt{a}$. Or si l'on multiplie chaque membre de cette équation par soi-même, on aura $aa x = bba$; car il faut remarquer que $\sqrt{x}$ multiplié par soi-même, & $\sqrt{a}$ multiplié aussi par soi-même, donne x & a ; & que par conséquent en quarrant $a\sqrt{x} = b\sqrt{a}$, l'on a $aa x = bba$, où il n'y a plus de signes radicaux : ainsi

dégageant l'inconnu x , l'on aura $x = \frac{bba}{aa}$, ou bien $x = \frac{bb}{a}$

$= \frac{AD \times AD}{AG}$: mais à cause des triangles semblables GAD

& ADC, l'on aura GA (a). AD (b) :: AD (b). AC (x). qui fait voir que CA est la hauteur d'où le mobile doit tomber pour une vitesse capable de parcourir AD d'un mouvement uniforme dans un tems $\frac{1}{2}T$; mais le mobile étant tombé de A en G doit parcourir avec la vitesse acquise dans un tems T un espace double de AG d'un mouvement uniforme. Donc le mobile parcourera avec la vitesse acquise de C en A, un espace double de AD, qui est AB, dans un tems double de $\frac{1}{2}T$, c'est-à-dire, dans un tems T, qui est le même que le mobile a mis à parcourir l'espace AG ou BF d'un mouvement accéléré.

Suite du Problème précédent.

Mais si l'on veut sçavoir de quelle hauteur doit tomber le mobile pour acquérir un degré de vitesse capable de lui faire parcourir d'un mouvement uniforme la ligne inclinée GD dans un tems $\frac{1}{2}T$, qui est celui que le mobile mettra à parcourir d'un mouvement uniforme la ligne AG avec la vitesse acquise en tombant de A en G, il faut nommer

la hauteur que l'on cherche y , & considérer que la vitesse du mobile qui parcourra cette ligne, fera $\sqrt{y}$: & comme la vitesse de la ligne AG (a) est $\sqrt{a}$, nommant la ligne GD, d , l'on aura AG (a). GD (d) :: $\sqrt{AG} (\sqrt{a}). \sqrt{y}$. qui donne $a\sqrt{y} = d\sqrt{a}$; d'où faisant évanouir les signes radicaux (en quarrant chaque membre) il vient $aa y = dd a$,

* Art. 718

ou bien $y = \frac{dd}{a} = \frac{GD \times GD}{AG}$. Mais comme les triangles sem-

blables CGD & DAG donnent AG. GD :: GD. GC. on voit que GC est égal à $\frac{AG}{2}$; & que par conséquent le mobile doit tomber de C en G pour acquérir un degré de vitesse capable de parcourir la ligne GD d'un mouvement uniforme dans le tems $\frac{1}{2} T$.

COROLLAIRE.

728. Puisque le mobile avec la vitesse acquise de C en G parcourt d'un mouvement uniforme la ligne GD dans un tems $\frac{1}{2} T^*$, il parcourra donc la ligne GB double de GD dans un tems double de $\frac{1}{2} T$, c'est-à-dire, en T , qui est le tems que le mobile a mis à parcourir la verticale AG d'un mouvement accéléré ; & par conséquent dans un tems double de T , c'est-à-dire, en $2T$, le mobile parcourra la ligne GE quadruple de GD d'un mouvement uniforme, tandis que le mobile parcourra d'un mouvement accéléré un espace quadruple de AG, c'est à-dire, EF, puisque les espaces parcourus sont dans la même raison que les quarrés des tems* ; ce qui fait voir que si un mobile est poussé selon une direction oblique GE avec la vitesse acquise en tombant de C en G, qu'il parcourra d'un mouvement uniforme la ligne de projection GE dans le même tems que sa pesanteur lui fera parcourir en tombant la ligne EF, & qu'il décrira pendant le même tems avec un mouvement composé de celui d'impulsion, & de sa pesanteur la parabole GHF, avec la force acquise de C en G.

* Art. 719.

Fig. 337.

* Art. 713.

DEFINITION.

Toute ligne comme CA ou CG parcourue par un mobile pour acquérir un degré de force capable de décrire une parabole, est nommée ligne de hauteur.

PROPOSITION X.

Théoreme.

729. Le paramètre de toute Parabole décrite par un mobile, est quadruple de la ligne de hauteur de cette Parabole.

DEMONSTRATION.

Fig. 336. Pour démontrer premièrement que le paramètre de la Parabole AEF décrit selon une projection horizontale AB, est quadruple de CA, nous ferons voir que le carré de l'ordonnée GF est égal au rectangle compris sous l'abscisse AG, & sous 4CA. Pour cela considérez que $\overline{AD}^2 = AC \times AG$; & que si l'on multiplie chaque membre par 4, l'on aura $4\overline{AD}^2 = 4AC \times AG$: mais comme l'on a aussi $\overline{GF}^2 = 4\overline{AD}^2$, à cause que GF est double de AD, l'on aura $\overline{GF}^2 = 4AC \times AG$. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Fig. 337. Pour prouver aussi que le carré de l'ordonnée IH est égal au rectangle compris sous l'abscisse GI du diamètre GK, & sous une ligne quadruple de CG, remarquez que les triangles CGD & DBH sont semblables, & que par conséquent CG. GD :: DB. BH. & que si à la place de BH l'on met GI, qui lui est égal, on aura $CG \times GI = GD \times DB$: & comme GD est égale à DB, l'on aura $CG \times GI = \overline{GD}^2$. Or multipliant cette équation par 4, il viendra $4CG \times GI = 4\overline{GD}^2$: mais comme $\overline{IH}^2$ est double de $4\overline{GD}^2$, l'on pourra, au lieu de $4\overline{GD}^2$, prendre $\overline{IH}^2$ pour avoir $4CG \times GI = \overline{IH}^2$. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

COROL.

COROLLAIRE I.

730. Il suit que si l'on élève sur la ligne de projection GE une perpendiculaire EM, qui aille rencontrer la ligne GC prolongée, MG sera le paramètre du diamètre GK; car les triangles GCD & GME étant semblables, l'on aura $GD : GE :: GC : GM$. Or comme GE est quadruple de GD, GM sera quadruple de GC; par conséquent GM est le paramètre.

COROLLAIRE II.

731. Il suit que connoissant le paramètre de toute parabole décrite par un mobile, l'on sçaura de quelle hauteur ce mobile doit tomber pour avoir un degré de force capable de décrire la parabole de ce paramètre, puisque cette hauteur sera toujours la quatrième partie du paramètre même.

COROLLAIRE III.

732. Il suit encore que le paramètre MG, la ligne de projection GE, & la ligne de chute EF, sont trois proportionnelles; car à cause des triangles semblables MGE & GEF, l'on aura $MG : GE :: GE : EF$. Fig. 337.

COROLLAIRE IV.

733. Comme le paramètre MG peut être troisième proportionnelle à une quantité de lignes de projections & de lignes de chute différentes, l'on voit que si le paramètre demeure le même pour ces différentes lignes, la force que le mobile doit avoir pour décrire toutes les paraboles de ces différentes projections, sera aussi la même, puisqu'elle sera acquise en tombant toujours de la même hauteur, c'est-à-dire, de la quatrième partie du paramètre.

COROLLAIRE V.

734. Si les lignes de chute EF sont perpendiculaires à Fig. 338.
H h h

l'horison GF, elles formeront avec les lignes de projections GE des triangles rectangles GEF, qui doivent être semblables aux triangles GME, qui seront par conséquent rectangles, & qui auront tous pour hypoténuse commune le paramètre MG; ce qui fait voir que les triangles MEG sont renfermez dans un demi-cercle; & que par conséquent toutes les lignes de projection comme GE des paraboles décrites avec une même force, sont renfermées dans un demi-cercle; ce qui n'arrive néanmoins que lorsque le paramètre & les lignes de chute sont perpendiculaires à l'horison.

APPLICATION DES PRINCIPES précédens à l'art de jetter les Bombes.

PROPOSITION XI.

Problème.

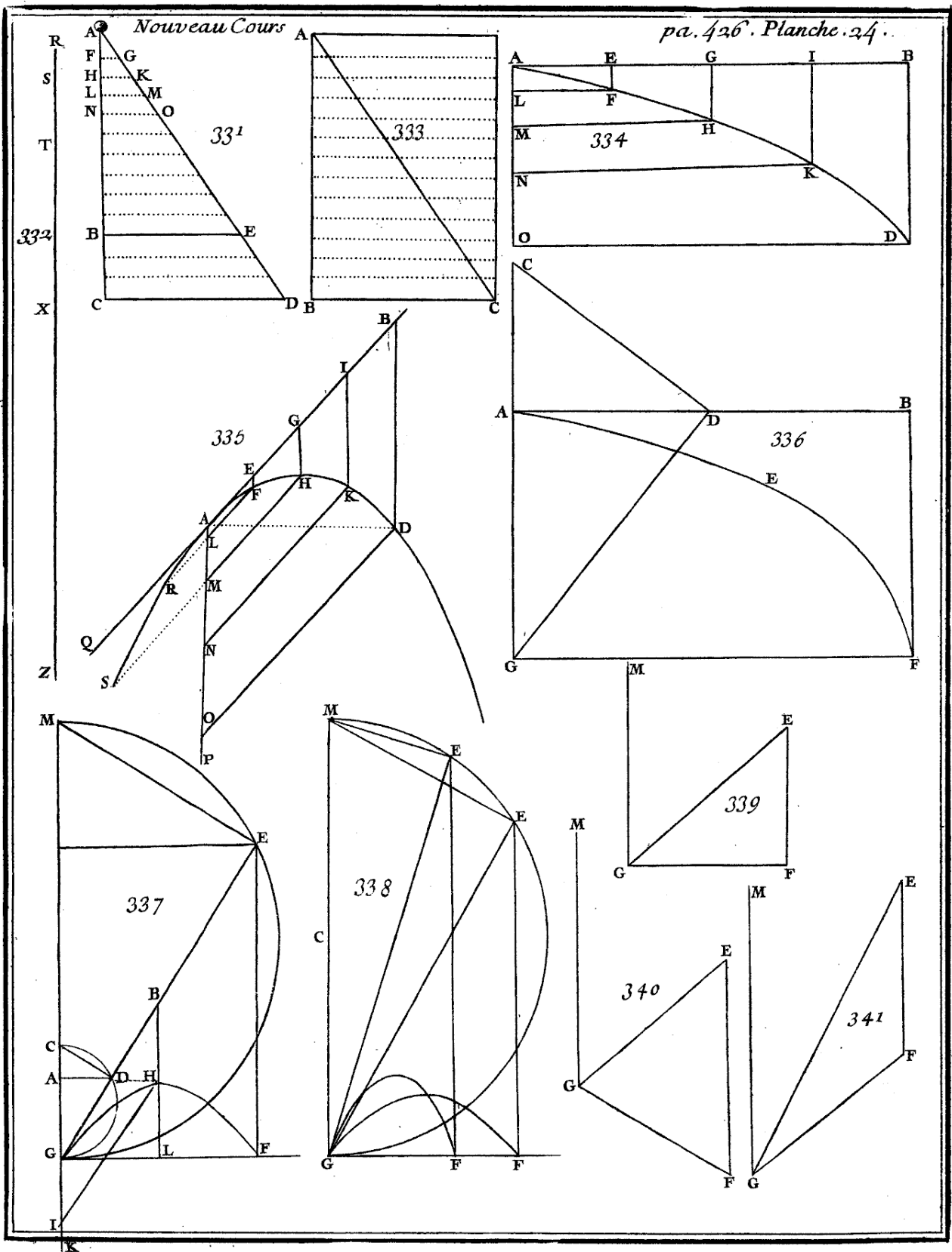
Fig. 339. 735. Etant donnée la ligne de but GF, l'angle MGE for-
340. 341. mé par le paramètre MG, & la direction GE du Mortier, &
l'angle EGF formé par la direction du Mortier, & la ligne
de but GF, trouver le paramètre MG, la ligne de projection
GE, & la ligne de chute EF.

Considérez que les lignes MG & EF étant parallèles, les angles alternes MGE & GEF sont égaux; & que connoissant l'un, on connoitra l'autre: & qu'ainsi l'on connoît dans le triangle GEF le côté GF avec les angles EGF & GEF; & que par conséquent on trouvera par la Trigonométrie la ligne de projection GE, & la ligne de chute

Art. 732. EF: mais EF. EG:: EG. GM. * Ainsi l'on voit que cherchant une troisième proportionnelle à la ligne de chute & à la ligne de projection, l'on aura aussi le paramètre.

COROLLAIRE.

736. Il suit que si l'on jette une Bombe avec un Mortier, selon telle inclinaison que l'on voudra, pour trou-



ver le paramètre de toutes les paraboles décrites avec le même mobile toujours poussé avec la même force, qu'il n'y a qu'à observer l'angle d'inclinaison du Mortier, & mesurer la distance où la Bombe sera tombée, puisque le reste se trouve après aisément.

A V E R T I S S E M E N T.

Nous allons résoudre plusieurs Problèmes sur le Jet des Bombes avec la Règle & le Compas seulement, pour nous préparer à faire les mêmes choses dans la pratique avec un instrument universel, dont la construction & l'usage dépendent de ce que l'on va voir : ainsi il ne faut pas que ceux qui étudieront ce Traité, s'inquiètent si on ne les conduit pas d'abord à la pratique, puisqu'ils trouveront dans la suite de quoi se contenter.

P R O P O S I T I O N X I I.

Problème.

737. *Trouver quelle élévation il faut donner à un Mortier pour jeter une Bombe à tel endroit que l'on voudra, pourvu que cet endroit soit de niveau avec la Batterie.*

Le Mortier étant supposé au point G, & le point F étant celui où l'on veut jeter la Bombe, nous supposons que la ligne GM, élevée perpendiculaire sur GF, est le paramètre de projection. Cela posé, on le divisera en deux également au point A ; & de ce point comme centre, on décrira un demi-cercle, & sur le point F de la ligne horizontale GH on élèvera la perpendiculaire FE, qui coupera le demi-cercle aux points E. Or si l'on tire du point G aux points E les lignes GE, je dis que le Mortier pointé selon l'une ou l'autre de ces directions, jettera la Bombe au point F. Fig. 342

D E M O N S T R A T I O N.

Nous avons fait voir * que le paramètre, la ligne de projection, & la ligne de chute étoient trois proportion-

H h h ij

*Art. 732

nelles : ainsi pour prouver que la ligne GE est la ligne de projection, il n'y a qu'à prouver qu'elle est moyenne proportionnelle entre le paramètre MG & la ligne de chute correspondante EF. Or si l'on tire les lignes ME, l'on aura les triangles semblables MGE & GEF ; car ils ont chacun un angle droit, & les angles GME & EGF ont chacun pour mesure la moitié de l'arc GIE ; par conséquent l'on a $MG. GE :: GE. EF$.

Fig. 343. Mais si la perpendiculaire élevée sur le point F, au lieu de couper le cercle, ne faisoit que le toucher en un seul point E, je dis que la ligne GE sera encore l'inclinaison du Mortier ; puisqu'à cause des triangles semblables MGE & GEF l'on aura $MG. GE :: GE. EF$.

Enfin si l'on suppose que le point donné soit l'endroit C, & que la perpendiculaire CD ne rencontre pas le cercle, je dis que le Problème est impossible ; puisque GD qui est supposé la ligne de projection, ne peut pas être moyenne proportionnelle entre le paramètre MG & la ligne de chute DC ; car pour cela il faudroit qu'elle fût un côté commun aux deux triangles semblables MGE & GDC ; ce qui ne peut arriver, tant que la pointe D sera hors du cercle.

COROLLAIRE I.

738. Il suit que lorsque la perpendiculaire EF coupe le cercle, le Problème a deux solutions ; & que par conséquent on peut jetter une Bombe en un même endroit par deux chemins différens ; car les arcs ME & GE étant égaux, lorsque le Mortier sera pointé à un degré d'élevation par un angle autant au dessus qu'au-dessous du quart de cercle, la Bombe ira également loin : mais comme les angles MGE n'ont pour mesure que les moitiés des arcs ME, & que c'est toujours avec la verticale MG & les lignes de projections GE, que l'on considère l'élevation du Mortier, l'on voit que cet angle sera toujours plus petit qu'un droit, & qu'on pourra pointer le Mortier égale-

ment au-dessus ou au-dessous de 45 d. pour chasser la Bombe en un même endroit.

COROLLAIRE II.

739. Comme le Problème est toujours possible, soit que la ligne EF coupe ou touche le cercle, l'on voit que lorsqu'elle touchera le cercle, la Bombe sera chassée le plus loin qu'il est possible avec la même charge, puisque la ligne de but GF est la plus grande de toutes celles qui peuvent être renfermées entre le paramètre & la ligne de chute. Or comme l'angle MGE a pour mesure la moitié du demi-cercle ME, l'on peut dire que de toutes les Bombes qui seront tirées avec une même charge, celle qui ira le plus loin fera celle qui aura été tirée sous un angle de 45 degrez.

PROPOSITION XIII.

Problème.

740. *Trouver quelle élévation il faut donner à un Mortier pour chasser une Bombe à une distance donnée, en supposant que la Batterie n'est pas de niveau avec l'endroit où l'on veut jeter la Bombe, c'est-à-dire, en supposant que cet endroit est beaucoup plus élevé ou plus bas que la Batterie.*

Le point G étant supposé l'endroit du Mortier, & le point F celui où l'on veut jeter la Bombe, lequel sera plus élevé que la Batterie, comme dans la Fig. 344. ou plus bas que la Batterie, comme dans la Fig. 345. il faut sur la ligne horizontale GH élever la perpendiculaire GM égale au paramètre de la charge du Mortier, parce que je suppose que l'on a fait une épreuve pour trouver ce paramètre, comme il a été dit art. 736. ensuite l'on élèvera la perpendiculaire GA sur la ligne du plan GL, & l'on fera l'angle AMG égal à l'angle AGM; & du point A, comme centre, l'on décrira la portion de cercle MEG, & du point donné F l'on menera la ligne FE parallèle au paramètre MG; & cette ligne venant cou. er le cercle

Fig. 344.
& 345.

H h h ij

aux points E, je dis que si l'on tire les lignes GE, qu'elles détermineront l'élevation qu'il faut donner au Mortier pour jeter la Bombe au point F dans l'un & l'autre cas.

D E M O N S T R A T I O N .

MG étant le paramètre, GE la ligne de projection, & EF la ligne de chute, il faut prouver, comme on l'a fait ci-devant, que $MG. GE :: GE. EF$. Pour cela considérez que les triangles MGE & GEF sont semblables; car comme la ligne GF est perpendiculaire au rayon AG, l'angle EGF sera égal à l'angle GME, puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié de l'arc GIE: d'ailleurs à cause des parallèles MG & EF les angles MGE & GEF sont égaux, étant alternes: ainsi l'on aura $MG. GE :: GE. EF$. ce qui fait voir que l'angle MGE est celui qu'il faut que le Mortier fasse avec la verticale pour chasser la Bombe au point F.
C. Q. F. D.

Pour ne pas repeter les mêmes choses, nous avons compris les deux cas précédens dans une même démonstration: mais il seroit bon que les Comménçans repetaient deux fois la démonstration précédente, pour ne considérer qu'une des deux Fig. 344. & 345. à la fois.

C O R O L L A I R E .

741. Il arrivera dans les deux cas du Problème précédent ce que nous avons dit * à l'occasion des Bombes jettées à un endroit de niveau avec la Batterie, qui est que si la parallèle EF touche le cercle, au lieu de le couper, la portée de la Bombe sera la plus grande de toutes celles qu'on peut jeter avec la même charge; & que si la parallèle EF ne touchoit ni ne coupoit le cercle, que le Problème seroit impossible; ce qui a été suffisamment expliqué ailleurs *, pour n'avoir pas besoin d'en faire voir encore la raison.

R E M A R Q U E .

Il est bon que l'on sçache que dans la pratique ordi-

naire du Jet des Bombes , l'on pointe toujours le Mortier sous l'angle qui donne la plus grande ligne de chute EF , afin que la Bombe tombant de plus haut , acquierre par sa pesanteur un degré de force capable de produire plus de dommage sur les édifices où elle tombe : mais quand on est près d'un ouvrage de fortification que l'on veut labourer par les Bombes , pour le mettre plutôt en état de l'attaquer , l'on pointe le Mortier sous l'angle de la petite ligne de chute EF , afin que la Bombe passant par le chemin le plus court , ne donne pas le tems à ceux qui sont dans l'Ouvrage , de se garantir des éclats.

PROPOSITION XIV.

Problème.

742. *Construction d'un Instrument universel pour jeter les Bombes sur toutes sortes de plans.*

Fig. 346.

On fera un cercle de cuivre ou de quelque'autre matiere solide & polie , & on divisera sa circonference en 360. parties égales ou degrez : on appliquera à un de ses points G une règle fixe GN , qui le touche au point G , & qui soit égale à son diamètre GB. On divisera cette règle en un grand nombre de parties égales , comme en 200 parties ; & on y attachera un filet avec un plomb D , enforte néanmoins que le filet puisse couler le long de la règle , en s'approchant ou s'éloignant du point G. On expliquera l'usage de cet Instrument dans les Problèmes suivans.

USAGE DE L'INSTRUMENT
universel pour le Jet des Bombes.

PROPOSITION XV.

Problème.

Fig. 339. 743. *Trouver par le moyen de l'Instrument universel quelle hauteur il faut donner à un Mortier pour jeter une Bombe à une distance donnée, supposant que le lieu où l'on veut la jeter, soit de niveau avec la Batterie.*

Pour résoudre ce Problème, il faut commencer par faire une épreuve, en jettant une Bombe avec la charge qu'on se propose de tirer, qui sera, par exemple, de deux livres de poudre; & supposant que la Bombe a été jettée à 400 toises sous un angle que l'on aura pris à volonté, qui sera, si l'on veut, de 30 degrez, il faut chercher le paramètre: ainsi l'angle MGE étant de 30 degrez, l'angle GEF sera aussi de 30 degrez, parce que la ligne de chute EF est parallèle au paramètre MG: & comme l'angle EGF est de 60 degrez, & qu'on connoît la ligne FG de 400 toises, l'on trouvera par la Trigonométrie que la ligne de chute EF est de 693 toises, & que la ligne de projection GE est de 800 toises. Or cherchant une troisième proportionnelle à 693 & à 800 toises, l'on trouvera qu'elle est de 923 toises, qui est la valeur du paramètre GM.

Fig. 346. Cela posé, si l'on veut sçavoir à quels degrez d'élevation il faut pointer le Mortier pour chasser une Bombe à 250 toises avec une charge de 2 livres de poudre, il faut faire une Règle de trois, en disant: Si 923 toises, valeur du paramètre, donnent 250 toises pour la distance donnée, combien donneront 200, valeur du diamètre de l'instrument, c'est-à-dire, valeur de la ligne NG pour le nombre de ses parties que je cherche, qu'on trouvera de 54.

Présentement

Présentement il faut mettre la règle NG parfaitement de niveau , & faire glisser le filet KD jusqu'au nombre 54 , & le filet venant à couper la circonférence du cercle de l'instrument aux deux endroits C , marquera que le Problème a deux solutions , & qu'il doit être pointé sous un angle moitié du nombre des degrez compris dans les arcs GC. Or comme le plus grand est de 148 degrez , & que le plus petit est de 32 degrez , prenant leurs moitiés , qui sont 74 & 16 , le Mortier pointé à l'une ou l'autre de ces elevations , chassera la Bombe à la distance proposée.

DEMONSTRATION.

Pour faciliter la démonstration de la pratique précédente , nous supposons que la ligne GF est la distance donnée , c'est-à-dire , qu'elle vaut 250 toises , & que la perpendiculaire GM est le paramètre que l'on a trouvé. Or si l'on décrit un demi-cercle MEG , & que l'on mène la ligne FE parallèle à GM , & que l'on tire les lignes GE aux points où cette parallèle coupe le cercle , l'on aura les angles MGE de l'elevation du Mortier pour jeter la Bombe au point F , comme on l'a démontré ci-devant. * Présentement si l'on imagine que la règle NG de l'instrument soit mise d'alignement avec la ligne de but GF , & que les diamètres MG & GB soient aussi d'alignement , & que le filet KD soit encore à l'endroit où on l'a posé , c'est-à-dire , au point 54 , l'on aura selon la pratique du Problème GM. GF :: GB. GK. parce qu'on peut prendre ici le diamètre GB pour la longueur de la règle GN , ces deux lignes étant égales. Cela étant , à cause de la proportion , la perpendiculaire KD coupera le demi-cercle GCB de la même façon que la perpendiculaire FE coupe le demi-cercle MEG : ainsi les lignes EG & GC n'en faisant qu'une seule EC , comme les lignes MG & GB , l'arc ME fera égal à l'arc CB ou GC , qui est la même chose ; ainsi ces arcs seront de 32 degrez : & comme l'angle MGE n'a pour mesure que la moitié de l'arc

Fig. 347.

*Art. 737.

434 NOUVEAU COURS

ME, il ne vaudra que 16 degrez, qui est l'élevation qu'il faudra donner au Mortier, si l'on veut pointer au-dessous de 45 degrez; ainsi l'on voit que l'on trouve par le moyen de l'Instrument les mêmes choses que l'on a trouvées ci-devant * avec le demi-cercle MEG. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

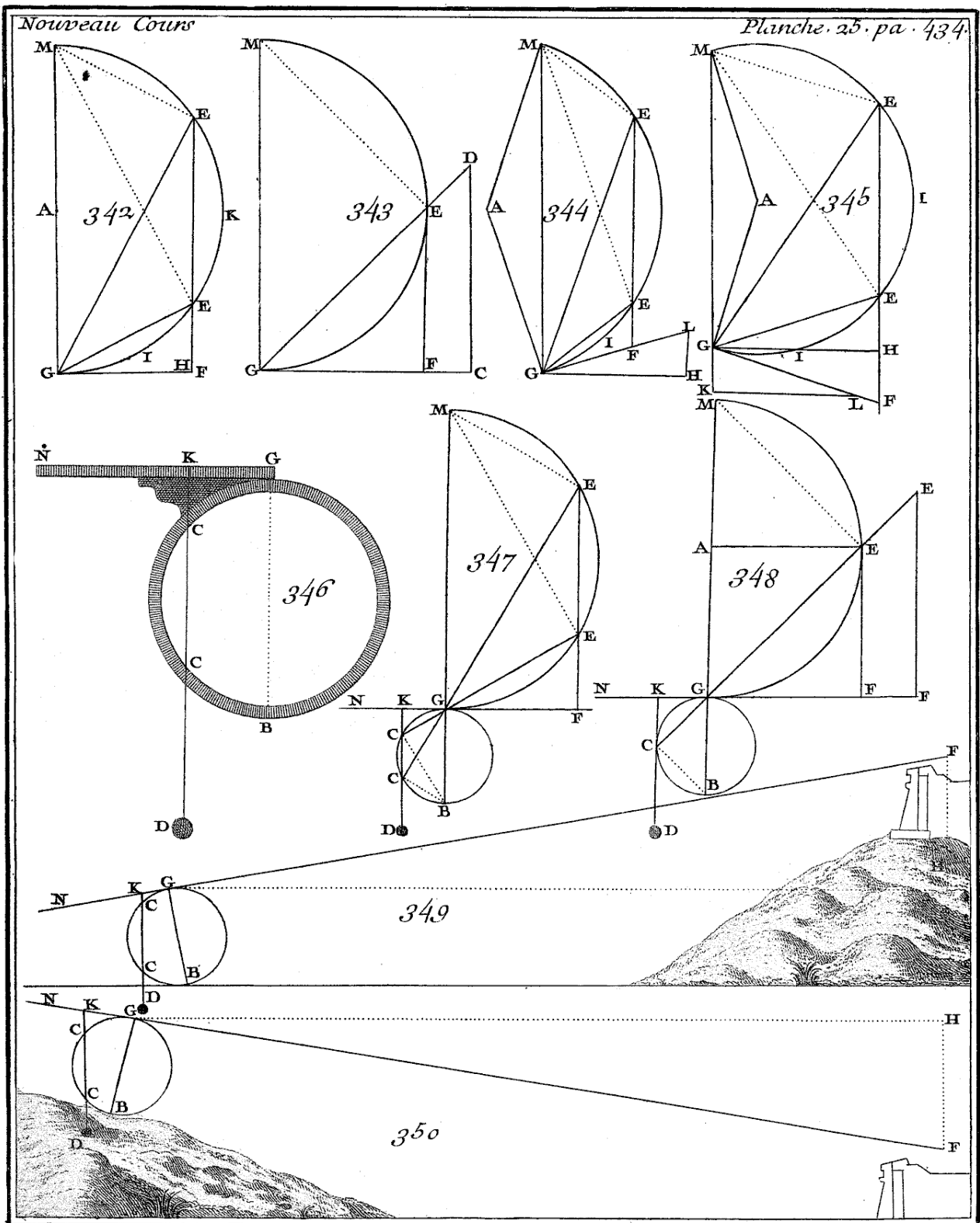
Fig. 348. 744. Il suit que lorsque le filet KD au lieu de couper le demi-cercle GCB, ne fait que le toucher en C, que le Mortier pointé sous la moitié de l'arc GC, qui est 45 degrez, chassera la Bombe le plus loin qu'il est possible avec la même charge; puisque pour lors la ligne EF touchera aussi le demi-cercle MEG: enfin que si le filet KD ne touchoit ni ne coupoit le cercle, que le Problème sera impossible; puisque dans ce cas la ligne EF ne peut pas toucher non plus ni couper le demi-cercle MEG.

PROPOSITION XVI.

Problème.

Fig. 349. & 350. 745. *Trouver quelle élévation il faut donner au Mortier pour chasser une Bombe à une distance donnée, supposant que l'endroit où l'on veut jeter la Bombe soit beaucoup plus élevé ou plus bas que la Batterie; & cela en se servant de l'Instrument universel.*

Supposant que de l'endroit G, où seroit une Batterie de Mortiers, on veuille jeter des Bombes à l'endroit F beaucoup plus élevé ou plus bas que le plan de la Batterie, il faut commencer par chercher, en se servant de la Trigonométrie, la distance horisontale GH, qui est l'amplitude de la parabole; & connoissant le paramètre de la charge dont on voudra se servir, que je suppose être le même que celui du Problème précédent, c'est-à-dire, de 923 toises, la charge étant encore de 2 livres de poudre, l'on dira: comme le paramètre est à la distance GH, ainsi la longueur GN de la règle divisée en 200



parties est à la longueur GK, qui donnera un nombre de ces parties. Or supposant qu'on a trouvé 60 parties, l'on fera glisser le filet KD sur le nombre 60, où il faudra le tenir fixe; ensuite on appuyera le cercle de l'Instrument sur un endroit où il puisse être stable; & l'ayant mis bien verticalement, on visera le long de la règle NG le lieu donné F, & le filet KD coupera le cercle aux points C, où il déterminera les arcs CG: & si l'on prend la moitié du nombre des degrez contenus dans l'un ou l'autre de ces arcs, l'on aura la valeur de l'angle que doit faire le Mortier avec la verticale pour jetter la Bombe au point F.

DÉMONSTRATION.

Ayant élevé sur la ligne horizontale GH la perpendiculaire GM égale au paramètre, & sur le plan GF la perpendiculaire GA, on fera l'angle AMG égal à l'angle AGM, & du point A on décrira une portion de cercle MEG, & du point F on menera la ligne FE parallèle à GM, qui coupera le cercle aux points E, auxquels menant les lignes GE, l'on aura les directions GE qu'il faut donner au Mortier pour jetter une Bombe à l'endroit F. * Or si on place l'Instrument de manière que la règle NG soit d'alignement avec le plan GF, & que le diamètre GB soit d'alignement avec le diamètre GO, & que le filet KD soit toujours à l'endroit où on l'a posé dans l'opération, l'on verra que le demi-cercle GCB est coupé par la perpendiculaire KD de la même façon que le demi-cercle OEG est coupé par la perpendiculaire EF; ce qui se prouve assez de soi-même, sans qu'il soit besoin de repeter ce qui a déjà été dit ailleurs à ce sujet.

Fig. 351.
& 352.

*Art. 740.

AVERTISSEMENT.

Comme l'on peut se servir de la Trigonométrie pour jetter des Bombes par une méthode toute différente de celle que nous venons d'enseigner, voici deux propositions dont on pourra faire usage dans les occasions où

Iii ij

l'on n'auroit pas d'instrument tel que celui dont nous venons de parler ; il est vrai que tout ce que nous allons enseigner ne peut avoir lieu que lorsque l'objet, où l'on veut jeter les Bombes, est de niveau avec la batterie ; mais comme cela se rencontre presque toujours, je ne me suis pas soucié de donner une méthode pour en jeter dans un lieu qui seroit plus bas ou plus haut que la batterie, parce que les opérations m'ont paru trop longues par la Trigonométrie. Il faut remarquer que nous allons supposer dans les propositions suivantes, que le Mortier fait son angle d'élevation avec la ligne horizontale, quoique dans la pratique l'on pourra, si l'on veut, le former avec la verticale.

PROPOSITION XVII.

Théoreme.

746. *Si l'on tire deux Bombes avec la même charge à différentes elevations de mortier, je dis que la portée de la premiere Bombe sera à celle de la seconde comme le sinus d'un angle double de l'elevation du mortier pour la premiere Bombe, est au sinus de l'angle double de l'elevation pour la seconde.*

Fig. 353.

Ayant élevé sur l'extrémité B de la ligne horizontale BP, une perpendiculaire BN à volonté, on la divisera en deux également au point M, pour décrire le demi-cercle NGB ; ensuite ayant tiré les lignes BG & BK, pour marquer les deux inclinaisons différentes du mortier, on les prolongera de manière que KA soit égal à KB, & que GD soit égal à BG, & des extrémités A & D l'on abaissera les perpendiculaires AC & DE sur la ligne horizontale BP ; ensuite si par le point K l'on mène la ligne IL parallèle à BC, l'on aura IK égal à KL, & AL égal à LC, à cause des parallèles IB & AC ; ainsi IK sera moitié de BC : & menant aussi par le point G la ligne FH parallèle à BE, l'on aura encore FG égal à GH, & par conséquent FG sera la moitié de BE.

DEMONSTRATION.

Considérez que l'angle DBE ayant pour mesure la moitié de l'arc GOB, la ligne GF étant le sinus de l'angle GMB, elle sera le sinus d'un angle double de l'angle DBE ; & que de même l'angle ABC ayant pour mesure la moitié de l'arc KGB, la ligne KI étant le sinus de cet arc, ou bien de son complément, qui est la même chose, elle sera le sinus d'un angle double de l'angle ABC. Or la ligne BC étant double de IK, & la ligne BE double de FG, l'on aura donc $BC : BE :: IK : FG$. mais si à la place des demi-amplitudes BC & BE, l'on prend les amplitudes entières BQ & BP, c'est-à-dire, la portée entière de chaque Bombe, l'on aura comme BQ portée de la première Bombe, est à BP portée de la seconde : ainsi IK sinus de l'angle double de l'élevation de la première, est à FG sinus de l'angle double de l'élevation de la seconde. C. Q. F. D.

APPLICATION.

Pour tirer des Bombes avec une même charge à quelle distance l'on voudra, il faut commencer par faire une épreuve : cette épreuve se fera, par exemple, en chargeant le mortier à deux livres de poudre, & en le pointant à 45. degrez, qui est l'élevation où le mortier chassera le plus loin avec cette charge, comme nous l'avons déjà dit ; après avoir tiré la Bombe, on mesurera exactement la distance du mortier à l'endroit où elle sera tombée, que je suppose qu'on aura trouvée de 800 toises. Cela étant fait, si l'on veut sçavoir quelle élévation il faut donner à un mortier pour envoyer une Bombe à 500 toises, pour la trouver, il faut faire une règle de trois, dont le premier terme soit 800 toises, qui est la distance connue, le second 500 toises, qui est la distance où l'on veut envoyer la Bombe, le troisième le sinus d'un angle double de 45 degrez, qui est 100000. La règle étant faite, l'on trouvera 62500, qui est le sinus d'un angle

Lii iii

doublé de celui que l'on cherche : après l'avoir trouvé dans la Table, l'on verra qu'il correspond à 38 degrés 40 minutes, dont la moitié est 19 degrés 20 minutes, qui est la valeur de l'angle que doit avoir le mortier avec l'horizon pour jeter une Bombe à 500 toises.

PROPOSITION XVIII.

Théoreme.

747. *Si l'on tire deux Bombes à differens degrez d'élevations avec la même charge, il y aura même raison du sinus de l'angle double de la premiere elevation au sinus du double de la seconde, que de la portée de la premiere elevation à la portée de la seconde.*

DEMONSTRATION.

Fig. 353.

L'angle ABC étant celui de la premiere elevation du mortier, & l'angle DBE celui de la seconde, l'on aura encore IK. FG :: BC. BE. ou bien IK. FG :: BQ. BP. qui fait voir que IK sinus d'un angle double de l'angle ABC est à la ligne FG sinus d'un angle double de l'angle DBE, comme la premiere portée BQ est à la seconde BP.

APPLICATION.

On peut par le moyen de cette proposition sçavoir à quelle distance du mortier une Bombe ira tomber, ayant fait une épreuve comme nous l'avons dit ci-devant.

Supposons donc qu'une Bombe a été tirée par un angle de 40 degrés, & qu'elle ait été chassée à 1000 toises avec une certaine charge, on demande à quelle distance ira la Bombe avec la même charge, le mortier étant pointé à 25 degrés, il faut faire une regle de trois, dont le premier terme soit le sinus d'un angle double de 40 degrés, c'est-à-dire, le sinus de 80 degrés, qui est 98480, & le second le sinus d'un angle double qu'on veut donner au mortier, comme cet angle a été proposé de 25 degrés; on prendra donc le sinus de 50 degrés,

qui est 76604, & le troisième terme la distance où la Bombe a été chassée à 40 degrez, que nous avons supposé de 1000 toises, la regle étant faite, l'on trouvera pour quatrième terme 777 toises, qui est la distance du mortier à l'endroit où tombera la Bombe, ayant été tirée sous un angle de 25 degrez.

PROPOSITION XIX.

Problème.

Connoissant l'amplitude d'une Parabole décrite par une bombe, savoir quelle est la hauteur où la bombe s'est élevée au dessus de l'horison. Fig. 353.

Nous servant de la Figure precedente, où l'on a supposé que la ligne BA marquoit l'élevation du mortier, l'on peut dire que cette ligne est la tangente de la Parabole BLQ; & qu'ainsi la sôutangente AC fera double de l'abscisse LC*, qui est ici la hauteur où la bombe aura été élevée sous l'angle ABC. Supposant cet angle de 70 degrez, l'amplitude BQ de 300 toises, la demi-amplitude BC fera de 150 toises: ainsi dans le triangle ABC l'on connoît l'angle ABC de 70 degrez, le côté BC de 150 toises, & l'angle droit BCA: ainsi par le calcul ordinaire de la Trigonometrie l'on trouvera le côté AC de 412 toises, dont la moitié, qui est 206 toises, fera la valeur de la ligne LC, c'est-à-dire, la hauteur où la bombe se fera élevée. *Art. 416.

PROPOSITION XX.

Problème.

Connoissant la hauteur où une bombe s'est élevée, savoir la pesanteur ou le degré de mouvement qu'elle a acquis en tombant par son mouvement accéléré.

Supposant qu'une bombe de 12. pouces soit tombée de 206 toises de hauteur, sa vîtelle sera exprimée par la racine quarrée de sa chute*, c'est-à-dire, par la racine *Art. 715.

quarrée de 206, qui est $14\frac{1}{2}$. Cela posé, l'on sçait que la force ou la quantité du mouvement d'un corps, est *Art. 691. le produit de sa masse par sa vitesse. * Or comme les bombes de 12 pouces pesent environ 140 livres, l'on peut regarder cette quantité comme la valeur de la masse, qui étant multipliée par la vitesse, qui est $14\frac{1}{2}$, l'on aura 2006 pour la quantité de mouvement, ou la force de la bombe.

REMARQUE.

Par les deux Problèmes precedens l'on voit qu'il est facile de sçavoir la force des bombes qui sont chassées sous differens degrez d'élevations, puisque connoissant leurs amplitudes, on connoitra les hauteurs où elles se sont élevées, & par consequent leur vitesse, qu'il ne faudra que multiplier par la pesanteur des bombes, de mêmes ou de differens calibres, pour avoir des produits, dont les rapports seront les mêmes que ceux des forces que les bombes auront acquises en tombant. Ainsi l'on peut sçavoir quel degre d'élevation il faudroit donner à un mortier de 8 pouces, pour que la bombe de son calibre tombant sur un édifice, comme, par exemple, sur un magasin à poudre, fît autant de dommage qu'une bombe de 12 pouces, qui auroit été jettée sous un angle de direction moindre que celui de la bombe de 8 pouces, cette dernière devant acquerir par la hauteur de sa chute, ce qu'elle a de moins en pesanteur que celle de 12 pouces. Ceci est non seulement curieux, mais peut encore avoir son utilité dans l'attaque des Places.



DISCOURS



DISCOURS

SUR LA MÉCANIQUE.

Comme la Mécanique est une partie des Mathématiques dont on fait le plus d'usage dans les Arts, puisque l'on n'y emploie aucune Machine, dont les propriétés ne dépendent de ses principes, il n'y a point de Livre qui soit plus en droit d'en traiter que celui-ci : son principal objet étant d'instruire ceux qui se destinent à servir dans l'Artillerie ou dans le Génie, car la Mécanique nous apprenant la Science de construire des Machines, & de s'en servir utilement pour enlever de gros fardeaux aisément, & avec le secours d'une puissance, qui deviendrait incomparablement trop foible, si elle n'étoit soulagée par une Machine : c'est particulièrement dans la construction des Fortifications, & dans les manœuvres de l'Artillerie, qu'on fait le plus d'usage de mille moyens ingénieux que la Mécanique inspire, pour venir à bout d'une infinité de choses, qui quoique faciles à exécuter, n'oseroient être entreprises par ceux qui ignorent à quel point on peut multiplier la force d'un homme. Mais comme les principes de cette Science peuvent se démontrer de plusieurs façons, j'ai été quelque tems embarrassé de sçavoir celle que je choisirois pour me faire entendre avec le plus de succès, non pas cependant que je ne fusse bien persuadé qu'il y en avoit une plus naturelle & plus simple que toutes les autres, qui est celle de M. Varignon : aussi m'en suis-je servi préférentiellement à toute autre, tant parce qu'elle est la véritable, que parce que son illustre Auteur avoit achevé quelque tems avant sa mort son Traité de Mécanique : & qu'ainsi ce que je me proposois d'en donner, pouvoit en quelque sorte servir d'introduction à cet Ouvrage.

Comme dans le tems que je travaillois à ce petit Traité de Mécanique, le Bataillon de M. Pijart est venu de l'E-

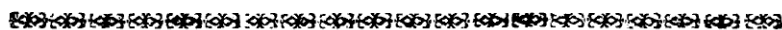
Kkk

cole de Metz à celle de la Fere, & que dans l'Ecole que les Officiers venoient de quitter, on leur avoit démontré la Mécanique par le principe du Mouvement, M. de Bellecour Officier de ce Bataillon, me fit entendre que je ne serois pas mal d'employer ce principe dans ma Mécanique, afin de le faire connoître à ceux qui l'ignoroient, & de faire voir à ceux qui avoient appris la Mécanique par-là, que quoique je l'enseignasse d'une autre façon, ce qu'ils avoient appris ne feroit que leur donner beaucoup de facilité pour entendre ce petit Traité, où ils trouveroient en beaucoup d'endroits un langage qui ne leur étoit pas inconnu. Ainsi j'ai suivi le conseil d'une personne, qui joint à beaucoup de bonnes qualitez, celle d'être fort entendu dans les Mathématiques : & après avoir démontré les proprietez des Machines simples, & les principales Machines composées, avec l'un & l'autre des principes dont je viens de parler, j'en ai fait quelque application aux manœuvres de l'Artillerie, à la construction des Voûtes pour les Magazins à poudre, & à la théorie des Mines, afin de suivre toujours mon dessein, qui est de faire voir l'utilité des choses que je traite.





NOUVEAU COURS
DE MATHÉMATIQUE.



NEUVIÈME PARTIE.

Qui traite des Mécaniques.

CHAPITRE PREMIER.

Où l'on donne l'Introduction à la Mécanique.

DEFINITION I.

748. **L**A *Mécanique* est une Science qui considère les rapports qui se rencontrent entre les *forces* ou *puissances* qui agissent pour mouvoir les corps, les masses ou les pesanteurs de ces mêmes corps, & les vitesses avec lesquelles ils seroient mûs, s'ils ne trouvoient point d'obstacles qui les empêchassent d'être mûs, le tout considéré dans l'état de l'*équilibre*, & par le moyen des machines.

II.

749. L'*Équilibre* en general est l'action de deux ou plusieurs forces qui agissent les unes contre les autres en sens contraires, de manière que le tout demeure en repos.

III.

750. *Force mouvante* ou *puissance*, est l'action d'une cause qui meut ou qui tend à mouvoir un corps.

K k k ij

I V .

751. *Poids* est l'effort que la pesanteur fait contre un corps pour l'approcher du centre de la terre, que l'on appelle aussi *centre des graves*.

V .

752. La *ligne de direction* d'une puissance, est celle que cette puissance fait parcourir à un corps, ou tend à lui faire parcourir vers quelque partie du monde qu'elle le pousse.

V I .

753. La *direction des poids* est la ligne que la pesanteur leur fait parcourir en tombant vers le centre de la terre.

V I I .

754. On appelle *Machines* tous les Instrumens propres à faire mouvoir ou à arrêter le mouvement des corps. Il y en a des *simples* & des *composées*.

755. Les *Machines simples* sont au nombre de six; sçavoir, le *Levier*, la *Roue dans son essieu*, la *Poulie*, le *Plan incliné*, le *Coin*, & la *Vis*.

756. A l'égard des *Machines composées*, elles sont sans nombre, & on les nomme composées, parce qu'elles sont toujours composées de quelques *Machines simples*.

V I I I .

757. Le *Centre de gravité* ou de pesanteur d'un corps, est un point par où ce corps étant suspendu, demeure en repos dans toutes les situations où on le peut mettre, on supposera dans la suite que toute la pesanteur d'un corps est réunie dans son centre de gravité.

A X I O M E .

758. Les poids & les pesanteurs agissent également dans tous les points de leurs directions; car il faut autant

de force pour soutenir un poids attaché à une corde fort près du poids, ou beaucoup plus éloigné, pourvu que la corde soit supposée sans pesanteur, & que le poids soit toujours également éloigné du centre de la terre, en quelque endroit de la corde que la puissance soit appliquée.

L E M M E.

759. Si l'on a deux puissances exprimées par les deux lignes AB & DB , & que la force AB fasse parcourir au corps B le côté BC d'un parallélogramme dans le même tems que la force DB fera parcourir au même corps l'autre côté BE ; je dis que ces deux forces agissant ensemble sur le corps B , lui feront parcourir la diagonale BF du même parallélogramme, dans un tems égal à celui que chaque puissance AB ou DB en particulier aura employé à faire parcourir au corps B chaque côté BC ou BE . PLANE
CHE 26
Fig. 354

D E M O N S T R A T I O N.

Les deux forces AB & DB , agissant ensemble sur le corps B , selon les directions BC & BE , la direction du corps B sera composée de ces deux directions. Or si l'on divise en un nombre d'instans égaux le tems que chaque force mettra à faire parcourir au corps B le côté BC ou BE , il est clair que les deux forces agissant ensemble sur le corps B , la force AB tendra à faire parcourir au corps B le côté BC dans le même tems que la force DB tendra à lui faire parcourir le côté BE . Si l'on suppose que dans le premier instant la force AB ait fait parcourir au corps B l'espace BH , tandis que la force DB lui aura fait parcourir l'espace HI , le corps se trouvera au point I , & les espaces BH & HI si petits qu'on puisse les imaginer, seront toujours comme les forces AB & DB , ou comme BC & BE : ainsi à cause des triangles semblables BHI & BCF , le corps étant en I , sera dans un point de la diagonale BE , & l'aura même toujours suivie depuis B jusqu'en I , parce que l'on peut supposer les lignes

K k k iii

446 NOUVEAU COURS

BH & HI infiniment petites ; & si au second instant la force AB fait parcourir au corps B l'espace IK , dans le même tems que la force DB lui fera parcourir l'espace KL , le corps se trouvera encore au point L de la diagonale ; & il en sera toujours de même tant que le corps sera parvenu au point F. Mais toutes les lignes comme BH , IK , depuis B jusqu'en F , sont égales prises ensemble , à la ligne BC , & toutes les lignes comme HI & KL , &c. depuis B jusqu'en F , sont encore prises ensemble égales à la ligne BE. Ainsi le tems que le corps a mis à parcourir la diagonale BF , par les deux forces agissantes ensemble , sera égal au tems que chaque force en particulier aura mis à faire parcourir au corps B le côté BC ou BE. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

760. Puisque les forces AB & DB sont capables de faire parcourir au corps B les espaces BC & BE en tems égaux , il s'ensuit que les effets étant proportionnels à leurs causes * , l'on aura $AB \cdot DB :: BC \cdot BE$.

*Art. 687.

COROLLAIRE II.

Fig. 355. 761. Si l'on acheve le parallélogramme AD , & que l'on prolonge la diagonale FB jusqu'en G , la ligne BG fera la diagonale du parallélogramme AD , & les triangles BCF & GDB étant semblables , l'on aura $BC \cdot GD :: BF \cdot GB$. & comme AB est égal à GD , il s'ensuit que l'espace BC est à la force GD , comme l'espace BF est à la force GB : ce qui fait voir que la force exprimée par la diagonale GB , fera parcourir au corps B l'espace BF dans le même tems que la force AB ou GD fera parcourir au même corps l'espace BC ; & comme l'on a encore $BE \cdot BD :: BF \cdot GB$. il s'ensuit que la diagonale GB a autant de force elle seule pour faire parcourir au corps B l'espace BF , que les deux forces AB & DB agissant ensemble , selon les directions BC & BE , pour faire parcourir au corps B le même espace BF.

COROLLAIRE III.

762. Il suit encore qu'ayant pris sur la diagonale BF Fig. 355 la partie BH égale à la diagonale BG, que la force exprimée par BH, agissant de H en B, selon la direction BG, est capable d'empêcher l'effet de la force GB, agissant de G en B; & par conséquent la force HB pourra elle seule résister aux deux forces AB & DB agissantes ensemble selon les directions BC & BE; d'où il s'ensuit que le corps B demeurera dans un parfait repos, lorsque les trois forces AB, DB & HB, agiront en même tems, & pour lors cette égalité des forces, qui agissent en sens contraire, se nomme *équilibre*.

On démontrera dans la suite que l'état de l'équilibre dans les Machines, consiste à avoir toujours deux forces comme AB & DB agissant ensemble contre un corps ou un point B, pour le mouvoir selon une direction BF, pendant qu'une troisième force comme HB, diamétralement opposée, s'oppose à l'effort de deux autres, de manière que le corps ou le point B demeure en repos.

COROLLAIRE IV.

763. Il est encore manifeste que les trois puissances Fig. 355 qui font équilibre, sont proportionnelles aux trois côtés d'un parallélogramme fait sur leurs directions (en prenant ici la diagonale pour un des côtés;) car dans l'équilibre la puissance résistante est capable de produire le même effet que les deux agissantes, c'est-à-dire, de faire parcourir la diagonale d'un parallélogramme dans le même tems que les deux agissantes les feroient parcourir ensemble, & que chacune d'elles feroit parcourir le côté qui lui répond.

COROLLAIRE V.

764. L'on voit encore que l'on peut toujours substituer deux forces à la place d'une seule; car pour substituer deux forces à la place de celle qui seroit expri- Fig. 355

née par GB, capable de faire parcourir au corps B l'espace BF; il faut, si les directions BE & BC sont données, prolonger les mêmes directions vers A & D; & du point G tirer les parallèles GD & GA aux directions BC & BE, & l'on aura les deux forces BA & BD, qui agissant ensemble, feront le même effet que la force GB.

Mais si l'on vouloit substituer deux forces à la place d'une autre, & que ces deux forces fussent données, de manière cependant qu'elles soient prises ensemble plus grandes que la seule GB, il faudra faire un triangle GBD avec ces deux forces, qui seront, par exemple, GD & BD; & si l'on achève le parallélogramme AD, & qu'on prolonge les forces AB & DB pour faire le parallélogramme EC, l'on aura les deux directions que ces deux forces doivent avoir pour faire ensemble le même effet que la force GB.

COROLLAIRE VI.

Fig. 356. 765. Il suit encore que quoique la somme des deux puissances agissantes AB & DB, soit plus grande que la résistante BH, ou son égale BG, que lorsque leurs directions BC & BE font un angle CBE d'une grandeur finie, qu'il y a encore une égalité de force qui agit selon des directions diamétralement opposées; car si des points A & D l'on abaisse sur GB les perpendiculaires AL & DI, & qu'on achève les parallélogrammes LM & IK, les forces exprimées par DK & KB, feront le même effet que la force DB *, & les forces AM & MB, le même effet que la force AB; mais les efforts BK & BM étant égales & parallèles aux perpendiculaires AL & ID, seront égales entr'elles, & perpendiculaires à la ligne GF: ainsi ces deux forces n'approcheront ni n'éloigneront le corps B des points G & F. Ainsi elles peuvent être regardées comme nulles par rapport au point F; mais IB ou DK est égal à GL, de même que AM est égal à LB: ainsi la force GB étant égale aux forces DK & AM prises ensemble, l'on voit que ce sont les seules parties des forces

* Art. 764.
Et 765.

forces AB & DB, qui font équilibre avec la puissance résistante BH, puisque les autres parties de force KB & BM ne font nul effet sur le corps B par rapport au point F.

REMARQUE.

766. Nous avons considéré jusqu'à présent le parallélogramme AD, que l'on peut appeler le parallélogramme des forces, & le parallélogramme EC, que l'on peut appeler le parallélogramme des espaces; mais dans la suite il ne sera fait mention que du seul parallélogramme des espaces; car comme ces deux parallélogrammes sont semblables, ils ont leurs côtes proportionnels: ainsi l'on pourra nommer par des lettres de l'alphabet les forces exprimées par les lignes AB, GB, DB, ou bien l'on pourra prendre les côtes BE & BC pour exprimer la force des puissances agissantes, & la diagonale BF pour exprimer la force de la puissance résistante.

THEOREME I.

Servant de principe general pour la Mécanique.

767. Si l'on a trois puissances que nous nommerons P, Q, R, appliquées à des cordes qui soient attachées au corps F, l'on sçait que ces trois puissances seront en équilibre, & que le corps demeurera en repos, si la puissance résistante R est exprimée par la diagonale BF d'un parallélogramme, & si les deux puissances agissantes P & Q sont exprimées par les côtes EF & DF du même parallélogramme. Or cela posé, je dis, 1°. que si l'on compare la puissance P à la puissance Q de la fig. 357. elles seront dans la raison reciproque des perpendiculaires BC & BG, tirées d'un des points de la direction de la puissance R sur celles des puissances P & Q, c'est-à-dire, que $P. Q :: BG. BC$. 2°. Que si l'on compare la puissance R avec la puissance Q de la fig. 358. elles seront dans la raison reciproque des perpendiculaires EC & EG, tirées d'un des points de la direction de la puissance P sur celles des puissances R & Q, c'est-à-dire, que $R. Q :: EC. EG$.

3°. Que si l'on compare les deux puissances R & P de la fig. 359. elles seront dans la raison reciproque des perpendiculaires DC & DG , tirées d'un des points de la ligne de direction de la puissance Q sur celles des puissances P & R , c'est-à-dire, que $R. P :: DC. DG$.

DEMONSTRATION DU PREMIER CAS.

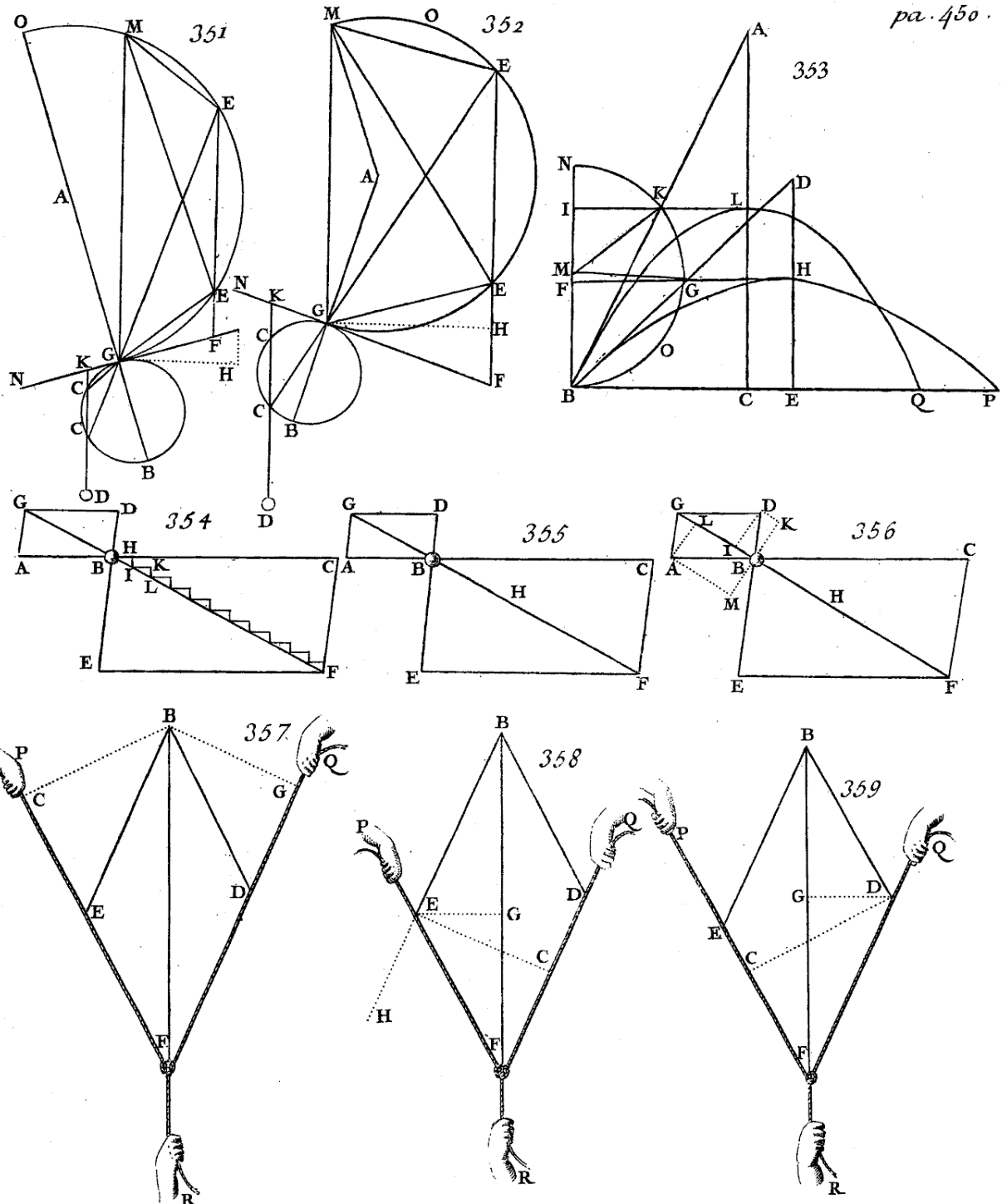
Fig. 357. 768. Si à la place de FD l'on prend EB , l'on aura les côtes FE & EB du triangle EBF , qui seront dans la raison des puissances P & Q . Or comme les sinus des angles sont dans la même raison que leurs côtes opposés, remarquez que BC est le sinus de l'angle EFB , & BG le sinus de l'angle BFD ; mais à cause que l'angle BFD est égal à l'angle EBF , puisqu'ils sont alternes, la perpendiculaire BG sera aussi le sinus de l'angle EBF : par conséquent $EF. EB :: BG. BC$. & si l'on prend P à la place de EF & Q à la place de EB , l'on aura $P. Q :: BG. BC$. $C. Q. F. D.$

DEMONSTRATION DU SECOND CAS.

Fig. 358. 769. Si l'on prend EB à la place de FD , l'on aura le triangle EBF , dont les côtes BF & BE seront dans la même raison que les puissances R & Q . Or comme la perpendiculaire EG est le sinus de l'angle EFB , & la perpendiculaire EC le sinus de l'angle BEF , ou de son supplément HEF , à cause que c'est un angle obtus; car EC étant le sinus de l'angle EFD , il sera aussi celui de l'angle HEF , puisque ces deux angles sont alternes. Or les sinus des angles étant dans la même raison que leurs côtes opposés, l'on aura $BF. BE :: EC. EG$. ou bien $R. Q :: EC. EG$. $C. Q. F. D.$

DEMONSTRATION DU TROISIÈME CAS.

Fig. 359. 770. Si l'on prend BD à la place de EF , l'on aura le triangle BDF , dont les côtes BF & BD seront dans la raison des puissances R & P : ainsi la perpendiculaire DG étant le sinus de l'angle BFD , & la perpendiculaire DC



celui de l'angle BDF, l'on aura encore BF. BD :: DC.
DG. ou bien R. P :: DC. DG. C. Q. F. D.

DEFINITION.

771. Nous nommerons dans la suite *point d'appui* un point tel que B, ou E, ou D, pris dans la direction d'une des trois puissances qui n'entrera pas dans la proportion, & duquel on tirera des perpendiculaires sur les directions de celles qui entreront dans la proportion. Fig. 357.
358. &c
359.

CHAPITRE II.

Où l'on fait voir le rapport des puissances qui soutiennent des poids avec des cordes.

Comme nous avons considéré dans le Traité du Mouvement la Théorie des Corps qui se choquent ou qui se rencontrent, celle des corps jettés selon des directions perpendiculaires, obliques ou parallèles à l'horizon; il semble que pour suivre un ordre dans la Mécanique, dont l'objet est de considérer en équilibre les corps qui tendent naturellement à se mouvoir, d'expliquer avant toutes choses ce qui a le plus de rapport avec ce qui précède immédiatement. Or ce sera sans doute la Théorie des corps soutenus par des puissances qui sont en équilibre avec ces corps dans toutes les situations qu'on peut leur donner: & c'est ce qu'on se propose d'enseigner dans ce second Chapitre, parce qu'après cela nous ferons voir dans le troisième les poids qui tendent à rouler sur des plans inclinés, & le rapport de leur pesanteur avec les puissances qui les soutiennent en repos.

PROPOSITION.

Théoreme.

PLAN-
CHE 27.
Fig. 360.

772. Si les deux puissances P & Q soutiennent un poids R tendant à suivre la direction BR , je dis que ces deux puissances seront en équilibre entr'elles, si elles sont en raison reciproque des perpendiculaires BC & BG , tirées d'un des points B de la direction BR sur les directions FP & FQ , c'est-à-dire, que $P. Q :: BG. BC$.

DEMONSTRATION.

Pour que ces deux puissances fassent équilibre entr'elles, il faut qu'elles soient comme les côtes FE & FD d'un parallelogramme, dont la diagonale BF exprimeroit la force ou la pesanteur du poids R , parce que pour lors le poids R étant pris pour la puissance résistante, il sera en équilibre avec les deux puissances agissantes, parce qu'il se trouvera de part & d'autre une égalité de force; mais prenant BD à la place de EF , nous aurons les côtes BD & DF du triangle BDF , qui feront dans la raison des puissances P & Q ; & comme les côtes BD & DF sont aussi dans la raison des sinus de leurs angles oppo-
sez, qui ne sont autre chose que les perpendiculaires BC & BG , l'on aura donc $P. Q :: BC. BG. C. Q. F. D.$

Fig. 361.

De même si d'un point D de la direction FQ l'on tire les perpendiculaires DG & DC sur les directions BR & FP , l'on aura le rapport de la puissance P au poids R , étant en raison reciproque des perpendiculaires DC & DG ; car à cause que ces perpendiculaires sont les sinus des angles oppo-
sez aux côtes BF & BD du triangle BDF , l'on aura $BD. BF :: DG. DC.$ ou bien $P. R :: DG. DC.$

Fig. 362.

Enfin si du point E pris dans la direction de la puissance P , l'on abaisse les perpendiculaires EG & EC sur les directions des puissances R & Q , l'on aura encore $Q. R :: EG. EC.$

COROLLAIRE I.

773. Il suit que si l'on suppose que le poids R diminue Fig. 363
continuellement, les deux puissances P & Q demeurant les mêmes, la diagonale BF du parallélogramme ED, diminuera à proportion du corps R. Or comme les côtes FD & FE demeureront les mêmes, l'angle EFD augmentera, parce que les puissances P & Q descendront, & le poids R montera ; mais tant que le poids R sera d'une grandeur finie, la diagonale BF sera toujours une ligne finie, & pourra toujours former le parallélogramme ED, & par conséquent les directions FP & FQ formeront toujours un angle en F.

COROLLAIRE II.

774. De-là il suit qu'une corde ne peut jamais être tendue en ligne droite que par une puissance infinie ; car son poids, quelque petit qu'on le suppose, sera toujours d'une grandeur finie, & peut être regardé, étant réuni en un seul point, comme le poids R attaché à quel qu'un des points F de la même corde.

COROLLAIRE III.

775. Si des points E & D l'on abaisse les perpendicu- Fig. 364
laires EG & DH sur la direction BR, & qu'on acheve les parallélogrammes rectangles GI & HK, l'on aura les côtes EI & IF qui représenteront deux forces égales à la force EF, & les deux côtes EK & KD, qui exprimeront aussi deux forces égales à DF * ; mais IE & FK sont * Art. 764
deux forces égales qui ne soutiennent aucune partie du poids R : ainsi la partie du poids que soutient la puissance Q, sera exprimée par DK, & la partie du poids que soutient la puissance P, sera exprimée par EI. Il s'ensuit donc que les parties du poids R que soutiennent les puissances P & Q, sont l'une à l'autre comme EI est à DK, ou comme GF est à HF ; mais comme BH est égal à GF, BF exprimera toute la pesanteur du poids : ainsi l'on

L l liij.

aura donc $P. R :: EI. ou GF. BF.$ & de l'autre part $Q. R :: DK. ou HF. BF.$

COROLLAIRE IV.

Fig. 365.

776. Mais si la puissance Q étoit dans la ligne horizontale ED , & que la puissance P fût au-dessus de l'horizontale, cette puissance soutiendra elle seule tout le poids R ; car ayant achevé le parallélogramme rectangle BE , la perpendiculaire HE exprimera la partie du poids R , que porte la puissance P ; mais HE est égal à la diagonale BF , qui exprime toute la pesanteur du poids: ainsi la puissance P soutiendra donc tout le poids.

COROLLAIRE V.

Fig. 366.

777. Mais si la puissance Q étoit au-dessous de l'horizontale HL , & la puissance P au-dessus, il arrivera que la puissance P soutiendra non seulement tout le poids R , mais encore la partie du poids que soutiendrait la puissance Q , si elle étoit autant au-dessus de l'horizontale HL , comme elle se trouve ici au-dessous; car ayant formé les parallélogrammes rectangles IH & GK , la ligne EH exprimera ce que porte la puissance P , & la ligne FK exprimera l'effort que fait la puissance Q . Or comme FK est égal à IB , il s'ensuit que EH ou IF est composé de BF & de BI , c'est-à-dire, de BF , qui exprime la pesanteur du poids, & de BI qui est la partie du poids R que soutiendra la puissance Q , si elle étoit autant au-dessus de l'horizontale HL qu'elle est au-dessous: ce qui fait voir que la puissance P soutient plus que la pesanteur du poids R .

COROLLAIRE VI.

Fig. 367.

778. Enfin il suit que si l'on a un corps pesant HI , soutenu par deux puissances P & Q , ces deux puissances seront en équilibre, si elles sont en raison reciproque des perpendiculaires FG & FC , tirées d'un des points de la direction BF sur celles des puissances P & Q ; car si l'on sup-

pose que toute la pesanteur du corps HI soit rassemblée autour de son centre de gravité F pour former le poids R, il faudra pour soutenir ce poids, que P soit à Q comme BE est à BD, ou comme FD est à BD. Or comme les sinus des angles dans le triangle FBD sont dans la même raison que leurs côtes opposés, FG étant le sinus de l'angle FBG, & FC le sinus de l'angle BFD, puisqu'il est celui de son alterne CBF, l'on aura $FD : BD :: FG : FC$. ou bien $BE : BD :: FG : FC$. par conséquent $P : Q :: FG : FC$.

Mais si le corps pesant HI étoit appuyé par une de ses extrémités H, & soutenu seulement à l'extrémité I par la puissance Q, cette puissance Q sera au poids R comme BD est à BF; & comme ces lignes sont les côtes du triangle BFD, elles seront dans la raison des sinus des angles BFD & BDF, qui sont les perpendiculaires EG & EC; ce qui fait voir que la puissance Q est au poids R dans la raison reciproque des perpendiculaires EC & EG, tirées d'un des points E de la direction de la puissance P sur celles des puissances Q & R.

Fig. 368.

CHAPITRE III.

Du Plan incliné.

DEFINITIONS.

779. **O**N appelle *plan incliné* toute superficie inclinée à l'horison, le long de laquelle on fait mouvoir un poids. Ce plan peut toujours être exprimé par l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

PROPOSITION.

Théoreme.

780. Si une puissance Q soutient un poids sphérique P par une ligne de direction DE, parallèle au plan incliné AB, PLATEAU
CHE 28.

Fig. 369. je dis, 1°. que la puissance sera au poids comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur, c'est-à-dire, que $Q. P :: BC. BA.$

Fig. 370. 2°. Que si le poids est soutenu par une puissance Q , qui tire selon une direction DE , parallèle à la base AC du plan, la puissance sera au poids comme la hauteur du plan est à la longueur de sa base, c'est-à-dire, que $Q. P :: BC. AC.$

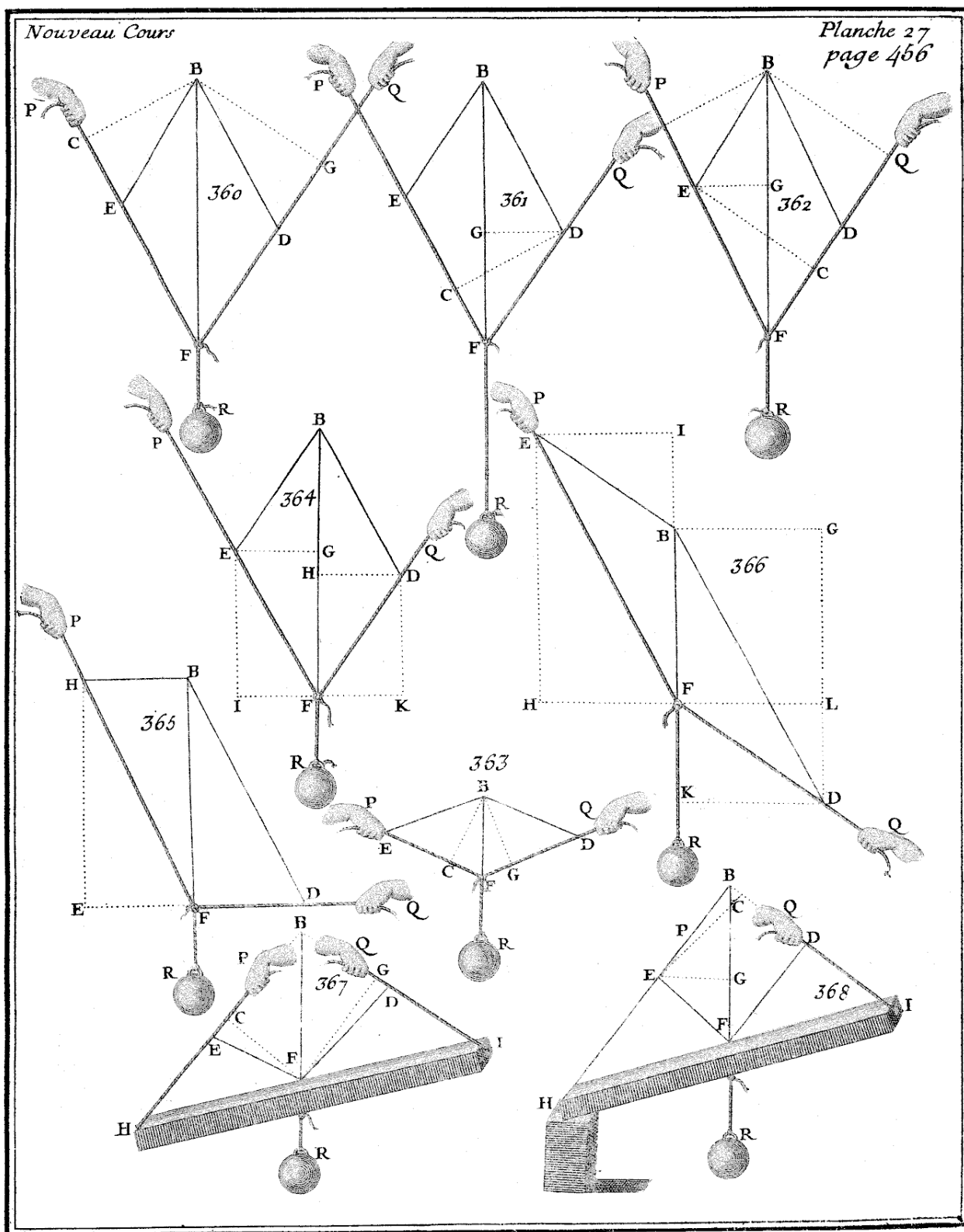
DEMONSTRATION DU PREMIER CAS

Fig. 369. Si l'on tire la ligne DF perpendiculaire sur le plan incliné AB , cette ligne sera la direction de la puissance résistante; & faisant le parallélogramme IG , le côté DG exprimera une des puissances agissantes, & le côté DI l'autre puissance agissante, & ces deux puissances agissantes ensemble seront en équilibre avec la puissance résistante DF ; mais ces deux puissances étant l'une à l'autre comme DG est à DI , seront comme les côtes IF & ID du triangle rectangle DIF ; & comme ce triangle est semblable au triangle ABC , l'on aura $IF. ID :: BC. BA.$ ou bien $Q. P :: BC. BA.$

DEMONSTRATION DU SECOND CAS.

Fig. 370. 781. Si la direction DE de la puissance Q est parallèle à la base AC du plan incliné, il sera facile de prouver que $Q. P :: BC. CA.$ car si la ligne DF est perpendiculaire sur AB , elle exprimera encore la puissance résistante; & si l'on fait le parallélogramme rectangle IG , l'on aura $Q. P :: DG. DI.$ Or si à la place de DG on prend IF , l'on aura les côtes IF & ID du triangle rectangle DIF , qui seront comme Q est à P ; & comme ce triangle est semblable au triangle ACB , l'on aura $FI. ID :: BC. CA.$ ou bien $Q. P :: BC. CA.$

Fig. 371. 782. Mais si la ligne de direction DE de la puissance Q n'étoit point parallèle au plan incliné AB , ni à sa base AC , & que cependant la puissance & le poids fussent en équilibre, en ce cas la puissance sera au poids dans la raison réciproque des perpendiculaires FI & FL ; car
ayant



ayant fait le parallélogramme KG, l'on aura toujours $Q. P :: DG. DK.$ ou $GF.$ mais les côtes DG & GF du triangle GDF, sont comme les sinus de leurs angles opposés, qui sont les perpendiculaires FI & FL : ainsi l'on aura $DG. GF$ ou $DK :: FI. FL.$ ou bien $Q. P :: FI. FL.$ L'on trouvera comme dans les propositions précédentes le rapport de chacune des puissances agissantes P & Q à la résistance R, qui est l'effort que le poids P fait contre le plan AB.

COROLLAIRE I.

783. Il suit que si deux corps P & Q se soutiennent mutuellement sur des plans diversement inclinez par des lignes RP & RQ, parallèles à ces plans, ils seront entre-eux comme les longueurs des plans, c'est-à-dire, que $P. Q :: BA. BC.$ car comme BD est la hauteur commune des deux plans, la puissance qui seroit en R ne fera pas plus d'effort pour soutenir le poids P, que pour soutenir le poids Q, c'est-à-dire, qu'elle pourroit être la puissance commune : ainsi comme le rapport de la puissance R à la hauteur DB, est le même pour chaque plan incliné, le rapport des plans & des poids fera aussi le même. Fig. 372

COROLLAIRE II.

784. De même si deux poids P & Q se soutiennent mutuellement sur des plans diversement inclinez par des lignes de directions parallèles aux bases, ces deux poids seront entr'eux comme les longueurs des bases, c'est-à-dire, que $P. Q :: DA. DC.$ car comme BD est la hauteur commune des deux plans, la puissance R pourra devenir commune pour les deux poids : ainsi comme le rapport de la hauteur BD à la puissance de part & d'autre sera le même, le rapport des poids & des bases sera aussi le même. Fig. 373

COROLLAIRE III.

785. Il suit encore que lorsqu'une puissance Q tire Fig. 369
Mmm

458 NOUVEAU COURS
ou pousse un poids P par une ligne de direction parallèle au plan, la puissance est au poids comme le sinus BC de l'angle d'inclinaison BAC du plan est au sinus total AB , & que par conséquent la puissance est toujours moindre que le poids.

COROLLAIRE IV.

Fig. 370. 786. Enfin l'on peut dire encore que lorsqu'une puissance Q tire ou pousse un poids P par une ligne de direction parallèle à la base AC du plan incliné, la puissance est au poids comme le sinus BC de l'angle d'inclinaison BAC est au sinus AC de son complément ABC ; ce qui fait voir que la puissance est égale au poids, lorsque l'angle d'inclinaison est de 45 degrés, & qu'elle est plus grande que le poids, lorsque l'angle d'inclinaison est au-dessus de 45. degrés.

CHAPITRE IV.

Du Levier.

DEFINITIONS.

787. **L**evier est une verge inflexible considérée sans pesanteur, à trois points de laquelle il y a trois puissances appliquées, deux desquelles, qui sont les *agissantes*, agissent d'un certain sens, & ont leurs directions dans un même plan; & la troisième, qui est la *résistante*, agit d'un sens directement opposé aux deux autres, entre lesquelles elle est toujours.

PROPOSITION.

Théoreme.

Fig. 374. 788. Deux puissances P & Q que l'on compare, seront en équilibre, si elles sont en raison réciproque des perpendicu-

lignes DG & DH, tirées du point d'appui D sur les lignes de directions CA & CB des puissances P & Q : ainsi il faut prouver que $P. Q :: DH. DG$.

D E M O N S T R A T I O N.

Si du point D l'on tire les lignes DE, DF, parallèles aux lignes de directions CA, CB, l'on aura un parallélogramme EF, dont la diagonale CD exprimera la force de la puissance qui résiste aux deux puissances P & Q ; le côté CE exprimera la force de la puissance P, & le côté CF celle de la puissance Q : ainsi l'on aura $P. Q :: EC. ou DF. FC$. mais dans le triangle DCF l'on sçait que les sinus des angles sont dans la même raison que leurs côtes oppozés. L'un aura donc le côté DF est au côté CF, comme le sinus de l'angle DCF est au sinus de l'angle CDF. Or comme DH est le sinus de l'angle DCF, & que DG est le sinus de l'angle CDF, puisqu'il est celui de l'angle alterne ECD, si à la place de DF on prend EC, l'on aura $EC. FC :: HD. DG$. & si au lieu de EC & FC l'on prend les puissances P & Q, l'on aura encore $P. Q :: DH. DG. C. Q. F. D$.

C O R O L L A I R E I.

789. Il est clair que si le point C s'éloignoit de plus en plus des trois points A, D, B, de sorte que les directions AC, DC, BC, des trois puissances P, R, Q, devinssent enfin parallèles, elles seront perpendiculaires ou obliques ; si elles sont obliques, l'on aura encore $P. Q :: DH. DG$. car Fig. 374 & 375 les lignes DH & DG sont des perpendiculaires tirées sur les lignes de directions des puissances P & Q ; de plus à cause des triangles semblables DAG & DBH, l'on pourra à la place des lignes DH, DG, prendre les lignes DB & DA, d'où l'on tire $P. Q :: DB. DA$. c'est-à-dire, que deux puissances appliquées aux extrémités des bras d'un Levier, sont en équilibre, lorsqu'ayant leurs directions parallèles, elles sont en raison reciproque des bras du Levier, c'est-à-dire, si $P. Q :: DB. DA$.

M m m ij

REMARQUE.

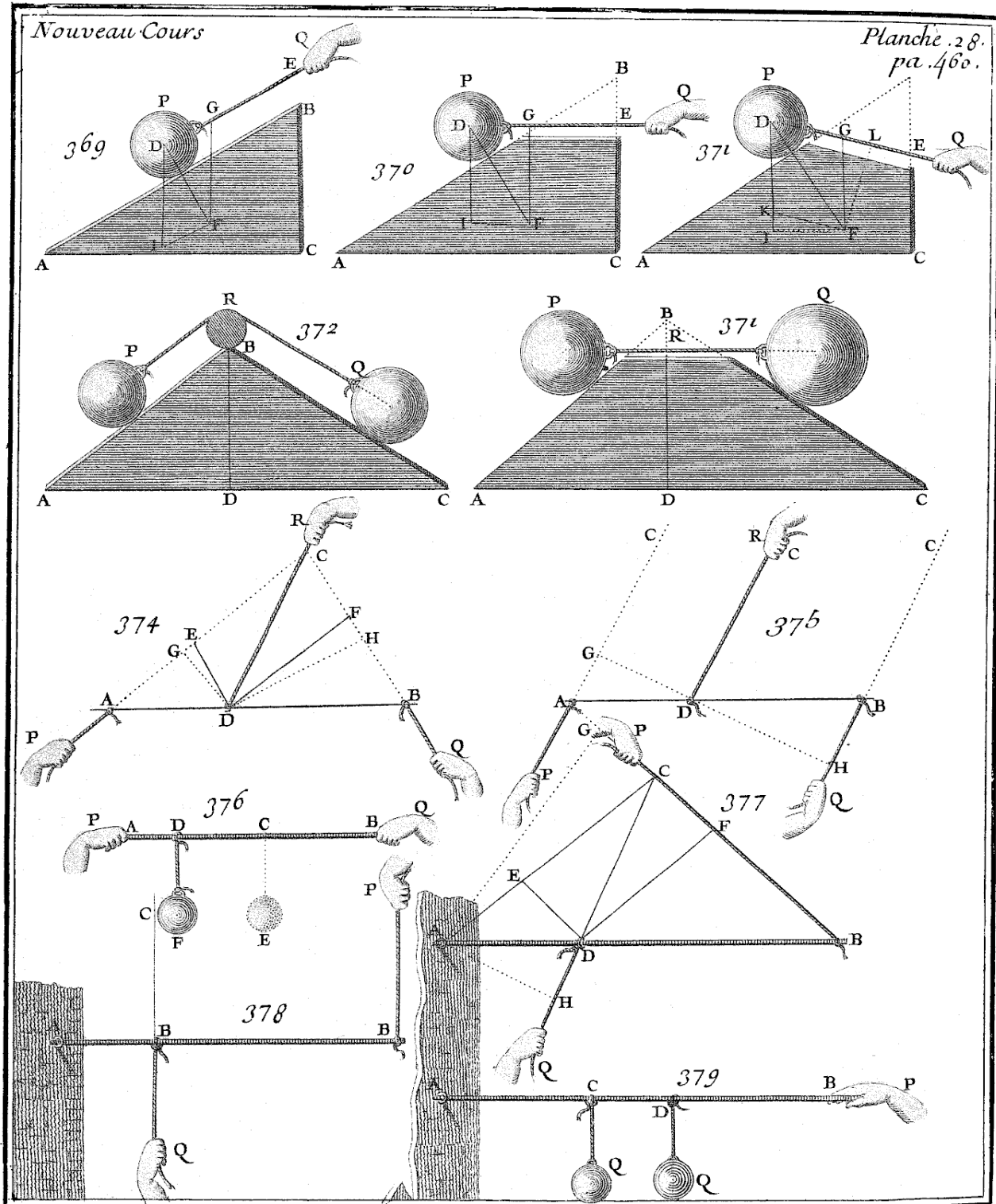
Fig. 376. 790. L'on peut remarquer ici en passant, que si deux puissances portent un poids E appliqué dans le milieu C d'un Levier, elles seront également chargées ; car il y aura même raison de P à Q que de CB à CA : mais comme CB est égal à CA, la puissance P sera égale à la puissance Q. Et si au contraire le poids E est plus près de A que de B, comme le poids F, la puissance P sera plus chargée que la puissance Q, puisque l'on aura $P.Q :: DB.DA$. Ainsi d'autant le bras DB sera plus grand que le bras DA, d'autant la puissance P sera plus chargée que la puissance Q.

COROLLAIRE II.

Fig. 377. 791. Mais si l'on a un Levier AB, dont le point d'appui soit à une des extrémités A, & que de deux puissances appliquées aux points D & B, l'une tire selon la direction DQ, & l'autre selon la direction BP en sens contraires, ces deux puissances seront encore en équilibre, si elles sont en raison reciproque des perpendiculaires AG & AH, tirées du point d'appui A sur leurs lignes de directions ; car faisant le parallelogramme EF, le côté CF exprimera la force de la puissance P, & la diagonale CD celle de la puissance Q, pour que ces deux puissances soient en équilibre. Et comme dans le triangle CFD les côtes CF & CD sont dans la raison des sinus de leurs angles oppoés, l'on aura $CF.CD :: AH.AG$, ou bien $P.Q :: AH.AG$.

COROLLAIRE III.

Fig. 377. & 378. 792. L'on peut dire encore comme dans le Corol. II. que si le point C s'éloignoit de plus en plus à l'infini des points D & B, en sorte que les lignes de directions BP & DQ devinssent paralleles & perpendiculaires au Levier AB, les puissances P & Q demeureront toujours en équilibre ; car dans ce cas la perpendiculaire AG deviendra



égale à la longueur du Levier AB, & la perpendiculaire AH égale au bras AD, & l'on aura encore $P. Q :: AD. AB.$

COROLLAIRE IV.

793. Par conséquent si une puissance P soutient un poids Q à l'aide d'un Levier AB, en sorte que le poids soit dans le milieu D, le point d'appui à l'extrémité A, & la puissance à l'extrémité B, cette puissance ne soutiendra que la moitié du poids Q; car l'on aura $P. Q :: AD. AB.$ ainsi AD étant la moitié de AB, P fera la moitié de Q. Fig. 379.

COROLLAIRE V.

794. Donc si le poids au lieu d'être dans le milieu du Levier, étoit au point C plus près de A que de B, la puissance sera moins chargée qu'elle n'étoit auparavant; car l'on aura toujours $P. Q :: AC. AB.$ Et comme AC est moindre que CB, P fera moindre que la moitié de Q.

COROLLAIRE VI.

494. Il suit que si la puissance étoit appliquée à un point quelconque D du Levier AB, & que le poids fût à l'extrémité B, la puissance & le poids seront encore en équilibre, s'il y a même raison de la puissance au poids, que du Levier AB au bras AD. PLAN-
CHE 29.
Fig. 380.

COROLLAIRE VII.

795. Si l'on a un Levier AB, dont le point d'appui soit en E, deux poids P & Q attachez aux extrémités A & B, seront en équilibre, s'ils sont en raison réciproque des bras du Levier, c'est-à-dire, si $P. Q :: EB. EA$; car nous avons démontré que deux puissances dans cet état étoient en équilibre; si au lieu des puissances l'on met des poids qui leur soient équivalens, ils feront le même effet, & seront par conséquent en équilibre. Fig. 381.

M m m i i t

COROLLAIRE VIII.

Fig. 381. 796. Il fuit encore que si l'on a deux poids appliquez aux extrémités d'un Levier ou d'une balance, on pourra toujours trouver le point d'appui, autour duquel les deux poids seront en équilibre, en disant : comme la somme de deux poids P & Q est à toute la longueur de la balance AB ; ainsi le poids P est à la longueur du bras BE , qui donnera le point E pour le point d'appui.

Par la même raison connoissant les bras AE & EB avec un poids P , l'on trouvera toujours l'autre poids Q , en disant, comme le poids P est au bras EB , ainsi le bras AE est au poids Q .

COROLLAIRE IX.

Fig. 382. 797. Il fuit encore qu'ayant une verge AB d'une pesanteur quelconque, on pourra trouver un point tel que F , par lequel la verge étant suspendue, elle soit en équilibre avec le poids C ; car il n'y a qu'à diviser la verge AB en deux également au point D , & supposer que la pesanteur est rassemblée autour de son centre de gravité pour avoir le poids E , ensuite chercher dans la verge AD , qui n'a plus de pesanteur, un point d'appui F , en disant : comme la somme des deux poids C & E est à la longueur AD , ainsi le poids E est au bras AF .

COROLLAIRE X.

Fig. 383. Enfin l'on peut dire qu'ayant deux poids C & D appliquez aux deux extrémités d'une balance AB , à laquelle on suppose une pesanteur, que pour trouver un point d'appui, autour duquel la pesanteur de la balance & celle des poids soient en équilibre, il faut d'abord chercher un point d'appui tel que E , autour duquel les deux poids C & D soient en équilibre, en faisant abstraction de la pesanteur de la balance ; ensuite supposer que les poids C & D sont réunis dans le seul poids G au centre de gravité E , & que la pesanteur de la balance est

aussi réunie dans le poids F autour de son centre de gravité H, & regardant la longueur EH comme une balance aux extrémités de laquelle sont les poids G & F, on en cherchera le point d'appui, en disant : comme la somme des deux poids G & F est à la longueur EH, ainsi le poids F est au bras EI, qui donnera le point I, qui sera celui autour duquel la pesanteur de la balance & celle des poids C & D seront en équilibre.

COROLLAIRE XI.

798. Enfin si l'on a une verge ou balance AB d'une certaine pesanteur avec un poids I suspendu à l'extrémité A, & qu'on prenne le point C pour le point d'appui, & que l'on veuille trouver dans le bras CB un endroit où un poids tel que H aidé de la pesanteur de la balance, soit en équilibre avec le poids I, il faut diviser la balance AB en deux également au point E, & supposer que sa pesanteur soit réunie dans le point F ; ensuite chercher la partie du poids I, qui fera équilibre avec le poids F, ou autrement avec la balance, en disant : comme le bras AC est au poids F, ainsi le bras CE est à la partie du poids I qui doit faire l'équilibre, qui sera, par exemple, la partie K. Présentement pour trouver le point G, où le poids H doit être suspendu pour être en équilibre avec ce qui reste du poids I, qui est la partie L, il faut dire, comme le poids H est au bras AC, ainsi le poids L est au bras CG, que l'on trouvera après avoir déterminé la pesanteur de la balance AB, & celles des poids I & H.

Fig. 384

L'on tire de ce Corollaire le moyen de faire la Balance Romaine, que l'on nomme aussi *Peson*.

REMARQUE.

799. Il y a encore une autre manière de démontrer l'équilibre dans les Machines dont nous n'avons pas encore parlé, mais qui s'entendra aisément, si l'on se rappelle ce qui a été enseigné dans le Traité du Mouvement. Par exemple, pour prouver que deux poids P & Q

Fig. 385

attachez aux extrêmités d'un Levier AB, sont en équilibre, s'ils sont en raison reciproque des bras EB & EA, c'est-à-dire, si $P. Q :: EB. EA$.

Considérez que le poids P ne peut se mouvoir qu'il ne fasse aussi mouvoir le poids Q. Or supposant que le poids P puisse emporter le poids Q, dans le tems que le poids P décrira l'arc AF, le poids Q décrira l'arc GB : ainsi l'arc AF marquera la vitesse du poids P, & l'arc GB la vitesse du poids Q en tems égaux. Mais nous avons fait voir * que deux corps avoient une même quantité de force, lorsqu'ils avoient des masses & des vitesses reciproques. Ainsi ces deux poids auront des forces égales, si $P. Q :: GB. AF$. Or selon la supposition $P. Q :: EB. EA$, ainsi prenant donc EB & EA à la place de GB & AF, qui sont dans la même raison, l'on aura $P. Q :: EB. EA$. Par conséquent ces deux poids ayant une même force, lorsqu'ils sont dans la raison reciproque des bras du Levier, demeureront donc en équilibre, puisque l'un ne fera pas plus d'effort pour se mouvoir que l'autre.

C O R O L L A I R E.

Fig. 385. 800. Il suit que si à la place du poids Q on suppose une puissance, cette puissance sera encore en équilibre avec le poids P, s'ils sont en raison reciproque de leurs chemins ou de leurs vitesses, qu'ils sont en tems égaux, c'est-à-dire, si la puissance Q est au poids P, comme le chemin ou la vitesse AF du poids, est au chemin ou à la vitesse GB de la puissance. *C'est pourquoi lorsque l'on fera voir dans les Machines que le chemin de la puissance & celui du poids sont en raison reciproque de la puissance & du poids, on prouvera toujours que la puissance & le poids sont en équilibre.*

Fig. 386. Par exemple, pour prouver que si une puissance Q appliquée à l'extrémité d'un Levier, soutient un poids P, que la puissance & le poids seront en équilibre, si $Q. P :: AF. AB$. Imaginons que la puissance & le poids se soient mis, en sorte que le Levier AB ait pris la situation AD, la vitesse de la puissance sera l'arc DB, & la vitesse

vitesse du poids l'arc EF ; & dans l'état de l'équilibre l'on aura $Q. P :: EF. DB.$ & si à la place des arcs l'on prend les rayons, l'on aura $Q. P :: AF. AB.$

DEFINITION.

801. Comme nous n'avons point mis de différence entre les Leviers dont nous venons de faire mention, & que cependant le point d'appui, ou la puissance résistante change le Levier de nature, selon qu'il est placé différemment, nous nommerons *Levier du premier genre* celui qui a une puissance à une extrémité, un poids à l'autre, & le point d'appui entre les deux. Nous nommerons *Levier du second genre* celui dont le point d'appui est à une des extrémités, une puissance à l'autre, & le poids entre les deux. Enfin nous nommerons *Levier du troisième genre* celui dont le point d'appui est à une des extrémités, le poids à l'autre, & la puissance entre les deux.

Il y a encore une quatrième sorte de Levier, qu'on appelle *Levier recourbé*. Ce Levier est nommé ainsi, parce qu'il fait un angle au point d'appui ; ce qui lui a fait aussi donner le nom d'*angulaire*. Ce Levier se rapporte toujours au Levier du premier genre, parce que la puissance est à une des extrémités, le poids à l'autre, & le point d'appui entre deux.

CHAPITRE V.

De la Rouë dans son Essieu.

DEFINITION.

802. **L**A Rouë dans son Essieu est une Machine composée d'une Rouë attachée par ses rayons fixement à un cylindre, que l'on nomme *Treuil*, aux extrémités duquel sont des pivots de fer posés sur un affut qui n'est autre chose qu'un assemblage de pièces de bois, qui sert à porter la Rouë & son Essieu.

Nnn

La puissance s'applique ordinairement à la circonférence de la Rouë, qu'elle fait tourner par le moyen des chevilles qui sont perpendiculaires à son plan, comme aux Rouës qui servent à tirer les pierres des Carrieres : pour le poids, il est toujours attaché à une corde qui tourne autour du Treüil.

PROPOSITION.

Théoreme.

803. *Si une puissance soutient un poids à l'aide d'une Rouë, & que cette puissance agisse par une ligne de direction tangente à la Rouë, je dis que la puissance sera au poids comme le rayon du Treüil est au rayon de la Rouë.*

DEMONSTRATION.

Fig. 387. Pour prouver que si la puissance Q soutient le poids P en équilibre, il y aura même raison de Q à P que du rayon CB du Treüil au rayon CA de la Rouë. Remarquez que la ligne droite AB peut être regardée comme un Levier dont le point d'appui est au centre C du Treüil, & que la puissance Q étant à une des extrémités du Levier, & le poids à l'autre, l'on aura dans l'état de l'équilibre $Q.P :: CB.CA$.

Mais si la puissance au lieu d'agir selon la direction AQ agissoit selon la direction DF toujours tangente à la Rouë, la puissance sera encore au poids comme le rayon du Treüil est au rayon de la Rouë; car l'angle DCB fait un Levier recourbé, dont les bras sont les rayons CB & CD . Or si la puissance agit par une ligne de direction DF perpendiculaire au bras CD , elle fera le même effet à l'endroit D , qu'à l'endroit A : ainsi le Levier recourbé tenant lieu du Levier du premier genre*, l'on aura toujours $Q.P :: CB.CA$. ou bien $Q.P :: CB.CD.C.Q.F.D$.

*Art. 801.

L'on peut encore démontrer ceci par le mouvement, en considérant que lorsque la puissance a fait un tour de la Rouë, le poids a fait un tour du Treüil; mais nous sca-

vons que la puissance & le poids sont en équilibre, lorsqu'ils sont en raison reciproque de leurs vîteses : ainsi la circonference de la Rouë exprimant la vîtesse de la puissance, & la circonference du Treuil celle du poids, la puissance sera au poids comme la circonference du Treuil est à la circonference de la Rouë ; mais prenant les rayons à la place des circonférences , puisqu'ils sont en même raison , l'on aura que la puissance est au poids comme le rayon du Treuil est au rayon de la Rouë.

CHAPITRE VI.

De la Poulie.

DEFINITION.

804. **L**A *Poulie* est une rouë de bois ou de métal, qui est attachée à une *écharpe* ou *chape* de, qui embrasse la Poulie.

Lorsque la Poulie est attachée à l'endroit d'une Machine d'où elle ne bouge point, on la nomme *Poulie fixe*; & lorsqu'elle est attachée à un poids que l'on veut enlever, on la nomme *Poulie mobile*.

Lorsque plusieurs Poulies sont enfermées dans la même chape, soit qu'elles soient posées les unes au dessus des autres, ou les unes à côté des autres, on les nomme *Poulies mouflées*, lesquelles peuvent être toutes ensemble fixes ou mobiles.

REMARQUE.

805. Dans la Théorie de la Poulie, non plus que dans celle de toutes les autres Machines, l'on n'a point d'égard aux frottemens des cordages, ni à celui de la Poulie sur son essieu; cependant l'on peut dire que plus la Poulie sera grande & l'axe petit, & moins il y aura de frottement.

N n n ij

PROPOSITION.

Théoreme.

806. Si une puissance soutient un poids à l'aide d'une Poulie, dont la chape soit immobile, je dis, 1°. que la puissance sera égale au poids. 2°. Que si la chape est mobile, de sorte que le poids qui y seroit attaché, soit enlevé par la puissance, cette puissance sera la moitié du poids, lorsque la direction de la puissance, & celle du poids seront parallèles.

DEMONSTRATION DU PREMIER CAS.

Fig. 388.

Si l'on considère le diamètre AB de la Poulie, comme un Levier du premier genre, puisque le poids est à une extrémité, la puissance à l'autre, & le point d'appui entre les deux, qui est ici le point C. Il faudra pour que la puissance soit en équilibre avec le poids, avoir cette proportion $Q. P. :: CA. CB$. Mais comme l'on a CA égal à CB, puisque ce sont les rayons d'un même cercle, l'on aura $Q = P$. C. Q. F. D.

Pour démontrer ceci par le mouvement, faites attention que si la puissance Q tire de haut en bas, la corde BQ de la longueur de deux pieds, cela ne se pourra faire sans que le poids P ne soit monté d'autant que la puissance est descendue, c'est-à-dire, de deux pieds; mais dans l'état de l'équilibre, la puissance doit être au poids dans la raison reciproque de la vitesse ou du chemin de la puissance & du poids. Et comme la vitesse de l'une est égale à la vitesse de l'autre, la force de l'une sera égale à la force de l'autre.

COROLLAIRE.

807. Il suit que les Poulies fixes n'augmentent point la force de la puissance, & qu'elles ne servent qu'à changer les directions, & à diminuer le frottement qui seroit très-considérable. Si la corde ne tournoit pas avec la Poulie,

& étoit obligé de glisser ou de passer par dessus un cylindre immobile, au lieu qu'il n'est presque question ici que du frottement qui se fait de la Poulie contre son essieu, qui est bien plus petit que celui que feroit la corde sur le cylindre immobile, le frottement de l'essieu étant à celui du cylindre immobile, comme le rayon de l'essieu est à celui de la Poulie. Ce qui fait voir, comme nous l'avons déjà dit, que plus la Poulie est grande, & l'essieu petit, moins il y aura de frottement.

DEMONSTRATION DU SECOND CAS.

Si l'on suppose une Poulie AB, au dessous de laquelle passe une corde, dont l'un des bouts soit attaché à un endroit fixe G, & qu'à l'autre bout AE soit appliqué une puissance Q, ou bien que l'autre bout de la corde passe au dessus d'une Poulie DE, afin que la puissance étant en Q, & tirant de haut en bas, agisse plus commodément; enfin que le poids P soit attaché à l'écharpe CI, il faut prouver que la puissance ne soutient que la moitié du poids. Fig. 389

Pour cela faites attention que le diamètre AB de la Poulie peut être regardé comme un Levier du second genre, dont le point d'appui est à l'extrémité B, la puissance à l'extrémité A, & le poids dans le milieu. Or si la puissance est en équilibre avec le poids, l'on aura $Q \cdot P :: CB \cdot AB$. mais le rayon CB, est la moitié du diamètre AB; donc la puissance Q fera la moitié du poids P.

Il faut remarquer que par ce qui a été démontré dans le premier cas, la Poulie DE ne fait autre chose ici que faciliter l'action de la puissance, puisqu'elle n'aura pas plus de force appliquée dans la partie EA de la corde, que dans la partie DQ, comptant toujours pour rien le frottement dans la Poulie DE, comme dans la Poulie AB.

On démontrera encore ceci par le mouvement, en considérant que si la puissance a élevé le poids P de deux pieds, chaque brin de corde GB & EA sera diminué de deux pieds; ainsi la puissance Q sera descendue de qua-

N.n.n.iii.

tre pieds, ou pour mieux dire, le brin DQ fera augmenté de quatre pieds; ainsi le mouvement de la puissance sera double de celui du poids: par conséquent le poids sera double de la puissance, puisque dans l'état de l'équilibre, la puissance & le poids, sont dans la raison reciproque de leurs vîteses.

R E M A R Q U E.

808. Il est à remarquer que si les brins AQ & BG ne sont point parallèles, l'analogie précédente ne sera plus la même, c'est-à-dire, que l'on n'aura pas $Q. P :: BC. AB$. mais que le rapport de la puissance au poids sera dans la raison reciproque des perpendiculaires tirées du point d'appui B sur les lignes de direction du poids & de la puissance. Or prenant la ligne AH pour la direction de la puissance, & la ligne HI pour celle du poids, BC sera une perpendiculaire tirée sur la direction CI du poids, & BF sera une perpendiculaire sur la direction AH de la puissance; ainsi l'on aura $Q. P :: BC. BF$. Ce qui est facile à entendre, si l'on a bien compris ce qui a été enseigné au sujet du Levier.

Mais comme plus la ligne BA est grande par rapport à la ligne BC, plus la puissance est grande par rapport au poids dans le Levier du second genre; il s'ensuit que la ligne BF devenant plus petite que BA, lorsque les brins ne sont pas parallèles, la puissance n'a pas tant de force dans ce cas-ci que dans l'autre, & par conséquent il faut que les brins soient parallèles, pour que la puissance agisse avec toute sa force.

CHAPITRE VII.

Du Coin.

DEFINITION.

809. **L**E *Coin* est une Machine de fer ou de bois servant à élever des corps à une petite hauteur, ou à fendre du bois, qui est son principal usage. Sa figure est ordinairement isoscele, quand il sert à fendre du bois; mais on suppose qu'elle est rectangle, quand on s'en sert pour élever un corps pesant. Fig. 390.

On suppose en premier lieu que les faces AO & BO du Coin, sont égales, & que le bois est flexible; de manière qu'étant commencé à fendre, & le coin introduit par la force qui le pousse dans la fente, les faces de la fente sont pliées en ligne courbe, & que les faces du Coin les pousse en deux points I & K, où il y a deux puissances égales, qui résistent selon des directions EC & FC perpendiculaires aux faces du Coin, & à celle des fentes qui repoussent celle du Coin, autant qu'elles sont poussées par le Coin, parce que l'action est égale à la réaction, en supposant que la tête du Coin est frappée en G par un maillet ou une force, dont la direction est perpendiculaire à AB, & passe par l'angle AOB du Coin qu'elle divise en deux également, puisque le Coin est isoscele. Or l'objet de ceci est de prouver premièrement que dans l'instant de l'équilibre que le Coin est enfoncé, comme on vient de le dire, le bois ne se fend point, mais il se feroit fendu, pour peu que la force du Coin eût été plus grande; il faut prouver, dis-je, que dans l'instant de l'équilibre les faces du Coin poussant celles des fentes en sont également repoussées, ou, ce qui est la même chose, que les deux efforts qui se font en I & en K sont égaux.

Pour cela ayant pris sur GO, direction de la puissance R, un point quelconque D, & achevé le parallélogramme CEDF, je dis qu'il a tous ses côtes égaux; car les triangles CIO, CKO, rectangles en I & en K, sont égaux & semblables, puisque les angles COI, COK sont égaux, & par conséquent aussi les angles OCI, OCK; mais l'angle OCF est égal à l'angle CDE, étant alternes: donc l'angle OCI égal à OCK est égal à l'angle CDE, & par conséquent CE & DE sont égales entr'elles, & partant le parallélogramme EF a les quatre côtes égaux; mais dans l'état de l'équilibre l'action du Coin, ou la résistance du bois en I est à l'action du Coin ou à la résistance du bois en K, comme CE, CF; donc puisque CE & CF sont égaux, l'effort du Coin en I est égal à l'effort du Coin en K: nommant donc la force qui pousse le Coin R, & l'effort du Coin en I, P, l'effort en K sera aussi P.

P R O P O S I T I O N.

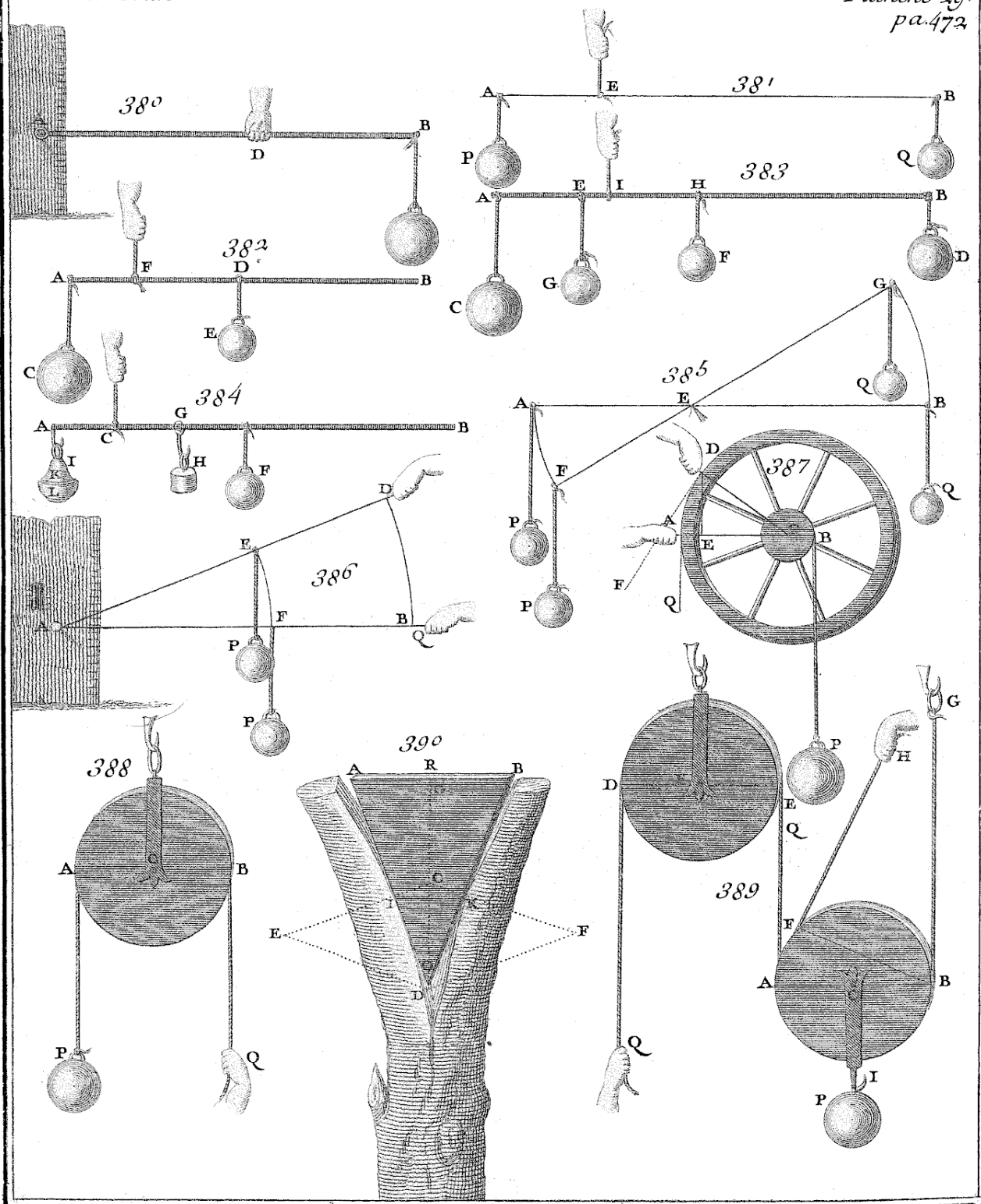
Théoreme.

Fig. 320. 810. *La force qui chasse le Coin est à la résistance du bois, comme la moitié de la tête du Coin est à la longueur d'un de ses côtes: ainsi il faut prouver, 1°. que $R. 2P :: AG. AO.$ 2°. Que si une puissance soutient un poids à l'aide d'un Coin, la puissance sera au poids comme la hauteur du Coin est à sa longueur.*

DEMONSTRATION DU PREMIER CAS.

Il est clair que les trois puissances R, P, P, peuvent être regardées comme agissantes contre le point C, où leurs directions concourent; c'est pourquoi l'on a $R. 2P :: CD. CE + CF.$ ou $CE + ED.$ mais les triangles ABO, CDE, sont semblables; car les triangles AGO, CIO, le sont, ayant chacun un angle droit aux points G & I, & l'angle au point O commun; c'est pourquoi $CD. CE + DE.$ ou $2CE :: AB. AO + BO.$ ou $2AO.$ Donc $R. 2P :: AB. 2AO.$ ou $R. 2P :: AG. AO.$ en divisant par 2 les deux termes du deuxième rapport. C. Q. F. D.

DEMONSTR.



DEMONSTRATION DU SECOND CAS.

Pour démontrer présentement que si une puissance Q soutient un poids à l'aide d'un Coin ABC , la puissance est au poids comme sa hauteur BC est à sa longueur CA , supposons que le poids P soit retenu par une corde GD , attachée à un point fixe D , & qu'une puissance Q pousse le Coin, en sorte que de l'endroit où il étoit, il soit parvenu en FA , pour lors le poids P sera monté au sommet B du Coin, ou au sommet E , qui est la même chose; alors le chemin de la puissance sera exprimé par la ligne AC , & le chemin du poids par la ligne CB ; car la puissance a été de A en F , ou ce qui est la même chose, de C en A dans le même tems que le poids est monté de la hauteur BC ou EA ; mais dans l'état de l'équilibre, la puissance & le poids sont dans la raison réciproque de leurs vitesses; donc l'on aura $Q. P :: BC. CA. C. \mathcal{Q}. F. D.$

PLANCHE 30.
Fig. 391.

COROLLAIRE.

811. Il suit que plus la hauteur ou la tête du Coin est petite, plus la puissance a de force.

CHAPITRE VIII.

De la Vis.

812. **L**A *Vis* est de toutes les Machines celle qui donne le plus de force à la puissance pour élever ou pour presser un corps, lorsque la puissance se sert d'un Levier pour la mettre en mouvement; & quoique cette Machine soit connue de tout le monde, voici cependant de la façon qu'il faut la concevoir, afin de mieux entendre l'analogie que nous en ferons.

Ayant un cylindre $ABCD$, imaginons que sa hauteur BD est divisée en un nombre de parties égales, & que par chaque point de division comme F & H , l'on a tiré des perpendiculaires FE & HG à la ligne BD , & que cha-

Fig. 392.

O o o

que perpendiculaire soit égale à la circonférence du cercle du cylindre, c'est-à-dire, qui auroit AB pour diamètre. Or si l'on tire des lignes EB & GF, l'on aura autant de triangles rectangles EBF & GFH, qu'il y a de parties égales dans la hauteur BD; & si l'on roule tous ces triangles sur le cylindre, le point E viendra aboutir en F, & le point G en H, & toutes les hypoténuses EB & GF ainsi roulees, formeront ensemble une spirale sur le cylindre, qui commencera en B, & finira en D; ou autrement toutes ces hypoténuses formeront les filets de la Vis, & les hauteurs EF & FH seront les intervalles de ces filets, que l'on nomme *Pas de la Vis*: ainsi l'on peut donc dire que la Vis est un cylindre enveloppé de triangles rectangles, dont les hypoténuses EB & GF formeront les filets, les hauteurs BF & FH les pas de la Vis, & les bases EF & GH le contour du cylindre.

L'Ecrrouë dans lequel entre la Vis, est un autre cylindre creux, dont le diamètre est égal à celui de la Vis, & dont la surface intérieure est composée de triangles rectangles égaux, & semblables à ceux qui sont roulees sur le cylindre pour former la Vis. C'est ainsi que les Géomètres regardent la Vis & son Ecrrouë.

Mais afin de tirer de la Vis toute l'utilité qu'on en attend, il faut entailler le cylindre entre les filets formez par les hypoténuses des triangles rectangles d'une certaine profondeur, & diminuer le diamètre de l'Ecrrouë d'une grandeur égale à la profondeur des entailles de la Vis, & faire les mêmes entailles dans les creux de l'Ecrrouë; afin que la Vis puisse entrer dedans, & y tourner librement: si l'Ecrrouë est fixe en tournant la Vis, on la fait avancer, & si c'est la Vis qui est mobile, on fait avancer l'Ecrrouë.

Il y a encore une autre sorte de Vis, que l'on nomme *Vis sans fin*, qui n'entre point dans un Ecrrouë. Elle est mise en mouvement par une Manivelle, ou par une Rouë dentée, dont les dents glissent le long des pas de la Vis, comme on le verra dans les Machines composées.

PROPOSITION.

Théoreme.

813. *Si une puissance presse ou enleve un poids à l'aide d'une Vis, la puissance sera au poids, comme la hauteur d'un des pas de la Vis, est à la circonference du cercle que décrira la puissance appliquée au Levier, par le moyen duquel on meut la vis.*

DEMONSTRATION.

Si l'on suppose que l'Erouë CD de la Vis soit immobile sur le plan GH, la Vis EF étant mise en mouvement, fera monter le poids P qui est attaché à son extrémité F, & si la puissance Q est appliquée à l'extrémité B d'un Levier AB, il faudra pour faire tourner la Vis, qu'elle tourne elle-même. Or dans le tems qu'elle aura décrit une circonference de cercle, dont le rayon sera AB, la Vis aura aussi fait un tour, & sera montée de la hauteur d'un pas : ainsi le chemin ou la vitesse de la puissance sera exprimé par la circonference IB, & le chemin ou la vitesse du poids par la hauteur d'un pas de la Vis ; mais dans l'état de l'équilibre la puissance est au poids dans la raison reciproque de la vitesse de l'une à celle de l'autre. Donc la puissance Q, est au poids P, comme la hauteur d'un pas de la Vis, est à la circonference décrite par la puissance Q. C. Q. F. D.

Fig. 392.
& 393.

COROLLAIRE.

814. Il suit que plus les pas de la Vis seront ferrez, & le Levier long, plus la puissance aura de force. Ainsi supposant que les pas de la Vis ne soient éloignés que de deux pouces, & que le Levier soit de 6 pieds, ou autrement de 72 pouces, la circonference du cercle dont il sera le rayon, sera de 452 pouces : ainsi la puissance sera au poids comme 2 est à 452, ou bien comme 1 est

O o o ij

à 226 ; par conséquent une puissance d'une livre sera en équilibre avec un poids de 226 livres.

Nous n'avons point eu d'égard ici au frottement, non plus que dans les autres Machines, quoiqu'il soit considérable.

CHAPITRE IX.

Des Machines composées.

815. **N**ous avons déjà dit que lorsque plusieurs Machines simples de mêmes ou de différentes espèces, servent à faire mouvoir un corps, la Machine qui étoit composée de toutes celles-là, se nommoit *Machine composée*. Or comme ces sortes de Machines montrent parfaitement l'utilité que l'on tire des Mécaniques dans la pratique des Arts, nous allons faire voir les propriétés de celles qui sont le plus d'usage.

816. Mais avant cela il faut sçavoir que l'effort d'un homme qui agit en poussant ou tirant (comme font ceux qui tournent au cabestan, & qui tirent les charrettes) n'est que d'environ 25 livres, & que celle des chevaux qui agissent de la même manière, n'est que de 175 livres, ou égale à celle de sept hommes, ce qu'on a connu par expérience.

817. Que l'effort d'un homme qui tire du haut en bas, peut être d'environ 50 ou 60 livres, & même davantage ; mais il ne peut agir si long-tems : il peut même être égal à son poids ; mais alors il ne pourroit agir.

818. Que l'effort d'un homme qui marche dans une Rouë, est égal à son poids.

819. Que dans la pratique il faut avoir égard aux frottemens, qui sont d'autant plus grands, que la Machine est plus composée ; aux grosseurs des cordes qui allongent les rayons des cylindres de leur demi-diamètre ; à la grosseur des cordes qui augmentent aussi le

rayon du cylindre ; à la roideur des mêmes cordes ; que si l'on fait faire plusieurs tours à la corde, le rayon du cylindre augmente à chaque tour du diamètre de la corde.

ANALOGIE DES POULIES MOUFLEES.

Si une puissance soutient un poids à l'aide de plusieurs Poulies, je dis que la puissance est au poids comme l'unité est au double du nombre des Poulies d'en bas, qui sont toujours les Poulies mobiles.

DEMONSTRATION.

Soit HG la Moufle d'en haut, qui est celle qui doit être fixe, & DK la Moufle d'en bas, qui est celle qui doit hausser, & enlever le poids, soit aussi un des bouts de la corde attaché à l'extrémité G de la Moufle d'en haut ; après avoir passé au dessus des Poulies A, B, C, & au dessous des Poulies D, E, F, en sorte que son autre extrémité soit le bout où est appliquée la puissance. Cela posé, lorsque la puissance tire le bout de la corde pour faire monter le poids, toutes les parties de la corde tirent d'une égale force à la puissance Q ; c'est pourquoi chacune des Poulies d'en bas D, E, F, porte une égale partie du poids P, c'est-à-dire, que chacune porte un tiers, parce qu'il y a trois Poulies. Or si l'on considère que la Poulie F est un Levier du second genre, dont le point d'appui est en M, la puissance en N, ou dans la direction NO ou RQ, qui est la même chose, & le poids dans le milieu F, l'on aura que la puissance est au poids comme MN est à MF, c'est-à-dire, que la puissance sera la moitié du poids ; mais comme la Poulie ne soutient ici que le tiers du poids, la puissance n'en soutiendra que la sixième partie, puisque $Q : P :: 1 : 6$. qui fait voir que la raison de la puissance au poids, est comme l'unité au double du nombre des Poulies D, E, F.

820. Mais si l'on avoit une Moufle EF immobile, dont les Poulies A, B, C, D, fussent mises les unes à côté des

Fig. 394.

Fig. 395.

autres , & une Moufle mobile LM, dont les Poulies G, H, I, K, fussent dans la même disposition que celles d'en haut , & qu'une corde dont une des extrêmités seroit attachée en I, passât au dessous des Poulies d'en bas , & au dessus des Poulies d'en haut , tant que l'autre bout étant parvenu à la dernière Poulie A, fût retenu par une puissance Q, l'on verroit encore que cette puissance est au poids, comme l'unité est au double du nombre des Poulies d'en bas ; ainsi comme il y a quatre Poulies G, H, I, K, l'on aura $Q. P :: 1. 8.$

AUTRE DEMONSTRATION
par le mouvement.

Fig. 394.

821. Pour prouver que $Q. P :: 1. 6.$ dans la Figure 394. ou que $Q. P :: 1. 8.$ dans la Figure 395. remarquez que pour que le poids P soit élevé par la puissance Q d'un pied, il faut que chacune des cordes qui soutient le poids se raccourcisse aussi d'un pied, & qu'ainsi la puissance doit descendre d'autant de pieds qu'il y a de brins de cordes qui se raccourcissent : mais il y a deux fois autant de brins de corde qu'il y a de Poulies mobiles ; ce qui fait voir que la vitesse du poids est à celle de la puissance comme l'unité est au double du nombre des Poulies d'en bas , & par conséquent la puissance & le poids sont en équilibre, puisqu'ils sont en raison reciproque de leurs vitesses.

APPLICATION DE L'EFFET DES POULIES
aux Manœuvres de l'Artillerie.

Fig. 396.

822. De routes les Machines composées, il n'y en a pas qui soient plus en usage pour les manœuvres de l'Artillerie , & pour celles qu'on pratique en general , pour élever facilement des corps fort pesans, que la Chèvre. Or pour faire voir ici l'effet de la Chèvre ABCD, qui est équipée de deux Poulies mouflées immobiles E, F, & de deux autres mobiles G, H, à la moufle desquelles est attachée une pièce de canon pesant 4800 livres. Consi-

derez que si la puissance est appliquée à la corde EQ, l'on aura Q. P :: 1. 4. ainsi la puissance ne soutiendra que la quatrième partie du poids, c'est-à-dire, 1200 liv. mais la puissance, quand on se sert d'une Chèvre, elle n'est jamais appliquée aux cordes, elle est toujours appliquée à un Levier MO, qui passe dans le Treuil KL de la Chèvre. Or si le Treuil a un pied de diamètre, & que le Levier depuis l'axe du Treuil jusqu'à l'endroit où est appliquée la puissance, soit de 5 pieds, ou autrement de 60 pouces, le rayon du Treuil & la longueur du Levier feront un Levier du second genre, dont le point d'appui sera au centre du Treuil, la puissance à l'extrémité O, & le poids à l'endroit I de la circonférence du Treuil. Si la puissance soutient le poids en équilibre, il y aura même raison de cette puissance au poids, que du rayon du Treuil à la longueur du Levier, c'est-à-dire, comme 6 pouces est à 60 pouces, ou bien comme 1 est à 10; mais le poids de 4800 livres est réduit à 1200 livres à l'endroit I, la puissance qui seroit appliquée au Levier ne soutiendra donc que la dixième partie de 1200 livres, qui est 120 livres : ainsi l'on voit qu'une puissance de 120 livres soutient par le moyen de la Chèvre un poids de 4800 livres, & qu'elle en pourroit élever un beaucoup plus pesant avec une force même moindre que celle qu'on lui a supposée ici, en augmentant le nombre des Poulies, & la longueur du Levier.

DEFINITION.

823. La Machine simple à laquelle une puissance est immédiatement appliquée, & qui donne le mouvement à toutes les autres, est nommée la *première* ; celle sur laquelle la première agit, la *seconde* ; & celle sur laquelle la seconde agit, la *troisième* : ainsi de suite.

COROLLAIRE I.

824. Il suit que l'effet de la première Machine est à la cause qui fait agir la seconde, comme l'effet de la se-

conde est à la cause qui fait agir la troisième ; ainsi de suite jusqu'à la dernière.

COROLLAIRE II.

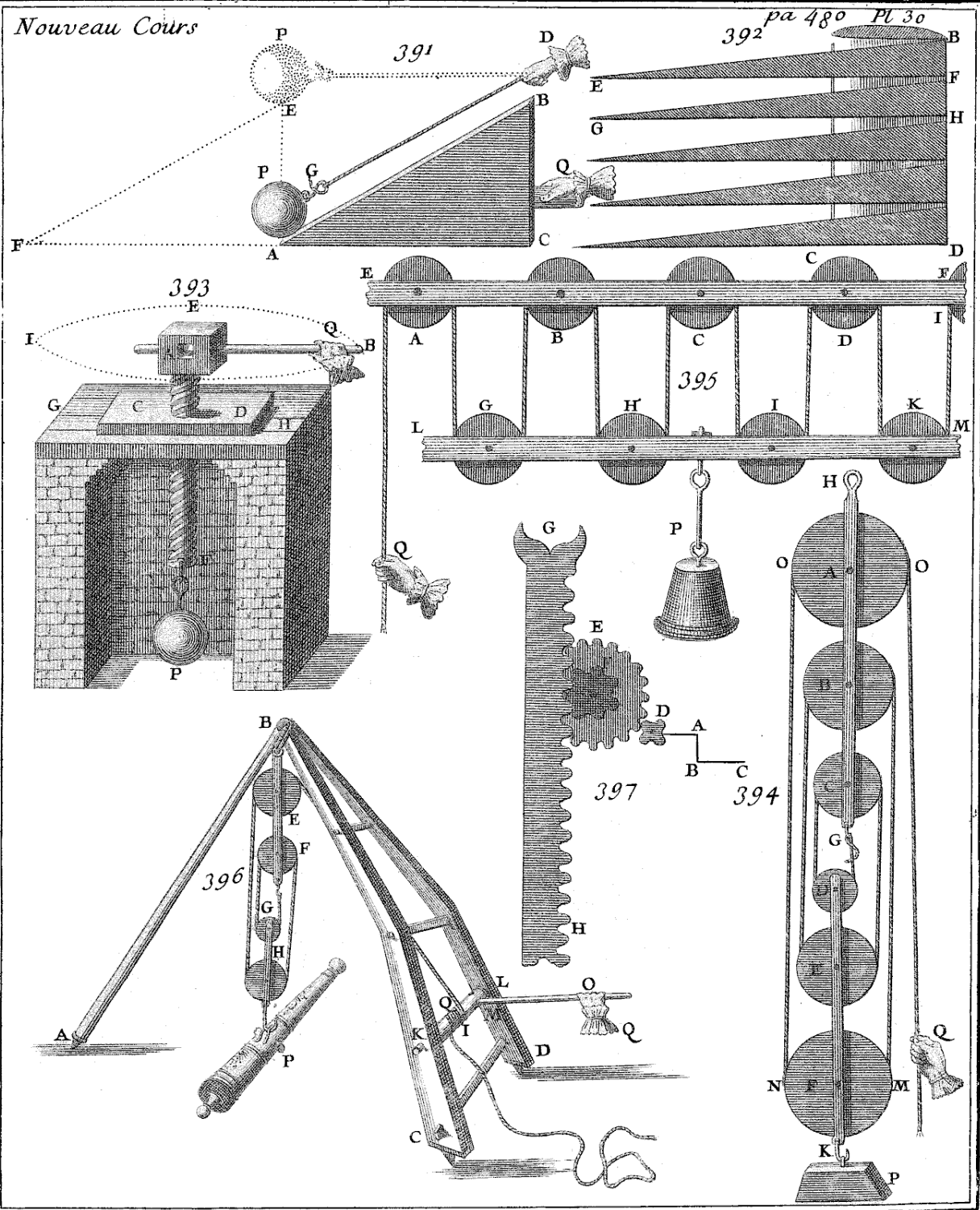
825. Il suit encore que dans les Machines composées le rapport de la puissance au poids est composé de l'effet de la première Machine à la cause qui fait agir la seconde, & de l'effet de la seconde à la cause qui fait agir la troisième : ainsi de suite jusqu'à la cause qui fait mouvoir le poids, par exemple, dans la Chèvre dont nous venons de parler, le rapport de la puissance Q au poids P est composée de celui de 1 à 10, & de celui de 1 à 4 : ainsi multipliant les antécédens de ces rapports les uns par les autres, & les conséquens aussi les uns par les autres, on aura $\frac{1}{40}$ pour le rapport composé, qui est celui de la puissance au poids, & qui fait voir que la puissance est la quarantième partie du poids ; car $\frac{1}{40}$ est la même chose que $\frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 10}$, qui est le rapport que nous avons trouvé.

DES ROUES DENTES.

DEFINITION.

826. Lorsqu'une Machine est composée de plusieurs Rouës, il faut que toutes les Rouës soient *dentées*, excepté la *première*, & que toutes les lanternes ou pignons le soient aussi, excepté le *dernier*, qui doit être rond, afin que la corde qui enlève le poids, s'entortille à l'entour, il faut aussi qu'il y ait à chaque extrémité des pivots des axes, pour pouvoir être ajoutés dans une espèce d'affûts ; de manière que la lanterne ou pignon de l'axe de la première Rouë engraine dans les dents de la seconde, la lanterne ou pignon de la deuxième dans les dents de la troisième : ainsi de suite jusqu'à la dernière. Cette Machine ainsi composée, est nommée Machine *des Rouës dentées*, qui est propre pour élever de très-gros fardeaux, & d'autant plus gros & plus pesans que les Rouës seroient en plus grand nombre.

ANALOGIE



ANALOGIE DES ROUES DENTÉES.

827. *Ayant nommé f le rayon de la première Rouë, à la circonférence de laquelle est appliquée la puissance, a le rayon de son pignon, g le rayon de la seconde Rouë, b celui de son pignon, h le rayon de la troisième Rouë, c celui de son pignon, k le rayon de la quatrième Rouë, d celui de son pignon, l le rayon de la cinquième Rouë, & e celui de son pignon, (qui n'est point denté) il faut faire voir que le rapport de la puissance Q au poids P, est comme le produit des rayons des effieux au produit des rayons des Rouës.*

PLANS
CHE 11.
Fig. 398.

Si la première Rouë étoit seule, & que la puissance enlevât par son moyen le poids P, qui devroit pour cela être suspendu au pignon ou au treüil de cette Rouë, l'on auroit $Q. P :: a. f.$ mais l'effet de la première Rouë au lieu d'être employé à lever un poids, est employé à faire tourner la seconde par le moyen des dents de son pignon qui engraine dans les dents de la seconde Rouë; d'où l'on voit que l'effet de la première Rouë est la cause qui fait agir la seconde, parce que l'effet des dents de son effieu contre les dents de la seconde Rouë, est égale au poids qu'elle pourroit enlever. Il en est ainsi des autres. Or si l'on nomme l'effet de la première Rouë r , l'effet de la seconde s , celui de la troisième t , & celui de la quatrième u , l'on aura pour le premier rapport $q. r :: a. f.$ pour le second $r. s :: b. g.$ pour le troisième $s. t :: c. h.$ pour le quatrième $t. u :: d. k.$ enfin pour le cinquième & dernier rapport, $u. p :: e. l.$

Présentement si l'on multiplie ces cinq proportions terme par terme, c'est-à-dire, les antécédens par les antécédens, & les conséquens par les conséquens, l'on aura cette proportion $qrstp :: abcde. fghkl.$ Et si l'on divise les deux premiers termes par $rstu$, l'on aura $Q. P :: abcde. fghkl.$ d'où l'on tire cette analogie pour toutes les Machines composées des Rouës dentées: *Si*

$$\begin{aligned} q. r &:: a. f. \\ r. s &:: b. g. \\ s. t &:: c. h. \\ t. u &:: d. k. \\ u. p &:: e. l. \end{aligned}$$

P p p

une puissance soutient un poids à l'aide de plusieurs Roues, la puissance est au poids comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des Rouës.

APPLICATION.

828. Pour faire voir la force immense qu'on peut donner à une puissance par le moyen des Rouës dentées, supposons que la force de la puissance soit de 50 livres, & que cette puissance soit appliquée à la première Rouë d'une Machine composée de cinq Rouës de chacune 12 pouces de rayon, parce que nous les supposons égales, aussi-bien que les pignons qui seront, par exemple, d'un pouce de rayon. Cela posé, le rapport du rayon de chaque pignon au rayon de chaque Rouë, sera comme 1 est à 12 : ainsi le produit de tous les pignons sera 1, & celui de tous les rayons des Rouës sera 248832. Or si l'on veut sçavoir quelle est la pesanteur du poids qu'une puissance de 50 livres, que je suppose être la force d'un homme, pourroit enlever avec cette Machine : je considère que selon ce qui vient d'être démontré, la puissance est au poids comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des Rouës, & que par conséquent le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des Rouës, comme la puissance est au poids : ainsi pour trouver le poids, je dis : Si un produit des rayons des pignons donne 248832 pour le produit des rayons des Rouës, que donnera la puissance de 50 livres pour le poids qu'elle seroit capable d'enlever ; l'on trouvera 12441600, qui est le nombre de livres qu'un homme peut enlever avec une force moyenne, aidée d'une Machine composée de cinq Rouës dentées.

DU CRIC.

829. Le Cric dont l'usage est si fréquent dans l'Artillerie, fait encore voir combien les Rouës dentées augmentent la puissance, & pour en calculer la force, con-

siderez la Figure 397. qui représente à peu près les parties, dont l'intérieur du Cric est composé, qui est mis en mouvement par la manivelle ABC, où est appliquée la puissance; cette manivelle en tournant fait tourner le petit pignon D, lequel étant engrainé dans la Rouë E, la fait aussi tourner. Au centre de cette Rouë est un autre pignon F, qui fait monter le Cric GH, pour enlever le fardeau. Presentement si l'on suppose que la manivelle AB (que nous considerons ici comme le rayon d'une Rouë,) soit de 15 pouces, que le pignon D ait un pouce de rayon, la Rouë E, 12 pouces aussi de rayon, & le pignon F deux, l'on connoîtra le rapport de la puissance au poids qu'on peut enlever, en considerant le rapport du produit des rayons des pignons au produit des rayons des Rouës : ainsi le produit des pignons sera 2, & le produit des Rouës 180; ce qui fait voir que la puissance sera au poids, comme 2 est à 180, ou bien comme l'unité est à 90. Or si l'on suppose que la puissance est 50, multipliant 50 par 90, l'on aura 4500, qui est à peu près le poids qu'un homme peut enlever par le moyen d'un Cric tel que celui que nous venons d'expliquer : & si au lieu de deux Rouës il y en avoit davantage, l'on voit qu'on peut avec le Cric lever des fardeaux d'une pesanteur immense.

PLAN-
CHE 30.
Fig. 397.

DE LA VIS SANS FIN

appliquée aux Rouës dentées,

830. La Vis sans fin est encore une Machine propre à augmenter extrêmement la force de la puissance, surtout quand elle met en mouvement plusieurs rouës dentées. Supposant donc qu'on a une Machine composée d'une Vis sans fin, & de trois rouës, comme celle de la Figure 399. pour sçavoir le rapport de la puissance Q au poids P, je considere que la puissance étant appliquée à une manivelle ou à un levier AB, fera tourner la Vis, qui mettra en mouvement la première rouë, à cause que les pas de la Vis sont engrainés avec les dents de la pre-

PLAN-
CHE 31.
Fig. 399.

P p p ij

mière rouë, dont les pignons qui s'engraineront avec les dents de la seconde rouë, la fera tourner aussi, & le pignon de celle-ci la troisième rouë, au pignon de laquelle est attaché le poids.

Présentement si l'on nomme n la circonférence du cercle, qui auroit pour rayon le levier AC ; a l'intervalle d'un pas de la Vis ; f l'effet des filets contre les dents de la rouë ; g le rayon de la première rouë ; b celui de son pignon ; h le rayon de la seconde rouë, & d le rayon de son pignon ; k le rayon de la troisième rouë, & c celui de son pignon ; t l'effet de la première rouë, & u l'effet de la seconde. Voici comme il faut raisonner : l'on sçait que la puissance qui est appliquée au levier d'une Vis, est à l'effet de la Vis, comme l'intervalle d'un des pas de la Vis est à la circonférence du cercle que décrit la puissance, l'on aura donc cette proportion $q. f. :: a. n.$ & l'effet de la première rouë donnera encore $f. t. :: b. g.$ l'effet de la seconde $t. u. :: d. h.$ & celui de la troisième $u. p. :: c. k.$ Or multipliant ces quatre proportions termes par termes, l'on aura $qst u. stup :: abdc.$ $qst u. stup :: acdb. hgnk.$ & divisant les deux premiers termes par stu , l'on aura $Q. P :: acdb. hgnk.$ d'où l'on tire cette analogie.

831. Si une puissance enlève un poids à l'aide d'une Vis, & de plusieurs Rouës dentées, la puissance sera au poids comme le produit de l'intervalle d'un des pas de la Vis, par les rayons des pignons des Rouës, est au produit de la circonférence que décrit la puissance par les rayons des Rouës.

APPLICATION.

832. Pour sçavoir quel est le poids qu'une puissance de 50 livres peut enlever par le moyen de la Machine précédente, nous supposons que le rayon CA du cercle que décrit la puissance est de $10\frac{1}{2}$ pouces, par conséquent la circonférence sera de 66 pouces ; de plus qu'un

des pas de la Vis est de 2 pouces, que le rayon de la première rouë est de 24 pouces, & celui de son pignon de 3, que le rayon de la seconde rouë est de 20 pouces, & celui de son pignon de 2; enfin que le rayon de la troisième rouë est de 18 pouces, & celui de son pignon d'un pouce & demi.

Cela posé, si l'on multiplie les rayons des pignons les uns par les autres, l'on aura 9 au produit, qui étant multiplié par un des pas de la Vis, qui est de 2 pouces, l'on aura 18 pour un des termes de la proportion; & multipliant aussi les rayons des rouës les unes par les autres, & ensuite le produit par la circonférence que décrira la puissance, l'on aura 570240 pour un autre terme de la proportion; ainsi la puissance sera au poids comme 18 est à 570240, ou comme 1 est à 31680. l'on pourra donc dire comme 1 est à 31680, qui est le rapport du produit des rayons des pignons par un pas de la Vis au produit des rayons des rouës par la circonférence décrite par la puissance: ainsi 50 qui est la force de la puissance, est au poids que cette puissance est capable d'enlever, l'on trouvera que ce poids est de 1584000 livres.

R E M A R Q U E.

Si un aussi grand poids que celui que nous venons de trouver, peut être enlevé par la force moyenne d'un seul homme avec une Vis à trois rouës seulement, ce n'est pas sans raison qu'Archimède disoit, pour faire voir jusqu'à quel point on pouvoit augmenter la force de la puissance, que si on lui donnoit un point fixe pour appuyer sa Machine, il ne seroit pas embarrassé d'enlever toute la Terre malgré l'immensité de son poids.

*MACHINE COMPOSEE D'UNE ROUE,
& d'un Plan incliné.*

833. Ayant un plan incliné GH, dont la hauteur est PLAN-
GI, & un poids P sur ce plan, où il est retenu par une CHEJL.
Ppp iij.

Fig. 401.

corde BP parallèle à GH, dont un des bouts est attaché au treuil d'un Tourniquet, qui est mis en mouvement par une puissance Q appliquée à un des leviers AE, AD ou AF, qui servent à faire tourner le treuil pour attirer le poids P vers le sommet G, on demande quel est le rapport de la puissance au poids.

Ayant nommé GH, a ; GI, b ; le rayon du Treuil, c ; & la longueur d'un des leviers AC, AE ou AD, d ; & l'effort que fait la puissance qui seroit appliquée dans la direction PB pour soutenir le poids P, f ; l'on aura par la propriété du plan incliné $f.p :: b.a$. & par la propriété de la rouë la puissance Q ne soutenant que l'effort f de l'autre puissance q , l'on aura $Q.f :: c.d$. Or multipliant les termes de ces deux proportions, l'on aura $Q.f.p :: bc.ad$. & divisant les deux premiers termes de cette proportion par f , il viendra $Q.P :: bc.ad$. qui fait voir que la puissance est au poids, comme le produit du rayon de l'essieu par la hauteur du plan incliné, est au produit du rayon de la rouë ou de la longueur du levier par la longueur du plan incliné.

APPLICATION.

834. Il arrive fort souvent que pour tirer des corps pesans d'une cave, comme font, par exemple, les muids de vin ou d'eau de vie, l'on se sert d'un Tourniquet pour en faciliter le transport : ainsi si les marches de la cave sont dans un même plan, l'escalier pourroit être regardé comme un plan incliné. Or si la hauteur de ce plan incliné est à sa longueur comme 4 est à 6, & qu'ayant un Tourniquet à l'entrée de l'escalier, le treuil soit, par exemple, de 6 pouces de rayon, & le levier de 36 pouces de longueur depuis le centre du treuil jusqu'à l'endroit où est appliquée la puissance, si l'on vouloit sçavoir la pesanteur du corps qu'une puissance de 50 livres peut soutenir ou attirer à soi par le moyen du Tourniquet, il faut commencer par multiplier le rayon du treuil, qui

est de 6 pouces, par la hauteur du plan incliné, qui est de 4 pieds, ou qu'on peut prendre pour telle, le produit sera 24 pouces; & multipliant la longueur du levier de 36 pouces par 6 pieds, le produit sera 2592: ainsi la puissance sera au poids qu'elle est capable de soutenir, comme 24 est à 2592, ou comme 1 est à 108: ainsi pour trouver le poids, il n'y a qu'à dire: si 1 donne 108, combien donneront 50; l'on trouvera 5400 livres pour le poids que l'on cherche.

DE LA SONNETTE.

835. Presque toutes les Machines composées augmentent la force de la puissance, excepté celle que l'on nomme communément *Sonnette*, dont on se sert pour enfoncer des pilots par le moyen d'un gros billot de bois, tel que A, que l'on nomme *Mouton*. Ce Mouton est attaché par deux mains de fer ou crampons B, suspendus à deux cordes qui passent sur des poulies G, & à ces cordes sont plusieurs bouts ON, qui sont tirés tout à la fois par des hommes qui levent le Mouton vers G, & le laissent tomber tout d'un coup sur la tête du pilot CF que l'on veut enfoncer. Mais comme il arrive qu'à mesure que le pilot s'enfonce, le Mouton tombe de plus haut, & acquiert par son acceleration un plus grand degré de force. Voici comme l'on pourra mesurer la force du Mouton à chaque coup, & même savoir combien il faudra de coups pour enfoncer un pilot à refus de Mouton.

Fig. 400.

Nous supposons que le terrain dans lequel on veut enfoncer le pilot, est homogène dans toutes ses parties, & qu'aussi-tôt que le bout du pilot est entré jusques un peu au dessus de la partie que l'on a taillée en pointe, le terrain dans lequel on l'enfonce résiste toujours également, parce que l'on compte pour rien le frottement de la terre qui entoure la surface du pilot, qui se trouve de plus couverte, à mesure que le pilot enfonce.

Cela posé, je suppose que le Mouton A. après avoir été

enlevé jusqu'au plus haut de la Sonnette , se trouve éloigné de 3 pieds de la tête C du pilot , & que l'ayant laissé tomber , le pilot se soit enfoncé de 13 pouces , de sorte que la tête sera descendue de C en D. Or pour savoir de combien le pilot sera enfoncé au second coup , qui sera plus fort que le premier , parce que le Mouton au lieu de tomber de H en C , tombera de H en D , je considère que la force ou la quantité de mouvement d'un corps est le produit de sa masse par sa vitesse *, & qu'ainsi la force du corps A en tombant de H en C , sera à la force du même corps en tombant de H en D , comme le produit de la pesanteur du Corps A par la vitesse acquise de H en C , est au produit de la pesanteur du même corps par la vitesse acquise de H en D : mais nous savons que les vitesses d'un corps qui tombe de différentes hauteurs , peuvent s'exprimer par les racines quarrées des espaces parcourus * : ainsi nommant a la masse du corps A ; b , l'espace parcouru HC ; & d , l'espace parcouru HD , l'on aura $\sqrt{b}$ pour la vitesse acquise de H en C , & $\sqrt{d}$ pour la vitesse acquise de H en D : ainsi la force du corps A tombant en C & en D , sera comme $\sqrt{ab}$ est à $\sqrt{ad}$, ou bien comme $\sqrt{b}$ est à $\sqrt{d}$. Mais les effets étant comme les causes , il s'ensuit que l'enfoncement du pilot au premier coup sera à l'enfoncement du pilot au second coup , comme la racine quarrée de l'espace parcouru par le Mouton au premier coup sera à la racine quarrée de l'espace parcouru au second coup. Or dans la supposition l'espace parcouru dans le premier coup est de 3 pieds , ou autrement de 36 pouces , dont la racine sera 6 ; & comme le pilot aura été enfoncé de 13 pouces , l'espace HD sera de 49 pouces , dont la racine est 7. Je dis donc pour trouver l'enfoncement du pilot au second coup , si la vitesse 6 a donné 13 pour l'enfoncement du pilot au premier coup , combien donnera la vitesse 7 pour l'enfoncement du pilot au second coup , l'on trouvera 15 & $\frac{1}{2}$, qui fait voir que le pilot sera enfoncé au second coup de 15 pouces 2 lignes , qui est la distance DE.

Pour

Pour ſçavoir combien il ſera enfoncé au troiſième coup, je conſidere que l'eſpace HE eſt de 64 & $\frac{1}{8}$, dont la racine quarrée eſt 8, & je dis encore : Si la vîteſſe 6 donne 13 pour l'enfoncement du pilot au troiſième coup, combien donnera 8 ; l'on trouvera 17 pouces & 4 lignes, & agiſſant toujours de même, l'on trouvera que l'enfoncement du quatrième coup ſera de 19 pouces, 6 lignes, que celui du cinquième ſera de 21 pouces, 4 lignes, & que celui du ſixième ſera de 23 pouces, 10 lignes : ainſi l'on aura pour l'enfoncement du pilot à chaque coup les ſix termes ſuivans, 13 pouces, 15 pouces plus 2 lign. 17—+4, 19—+6, 21—+8, 23—+10, qui ſont tous en progression arithmétique, puisſqu'ils ſe ſurpaſſent de 2 pouces & de 2 lignes ; ils ſe ſurpaſſeroient même encore de quelques parties de point, auſquelles je n'ai pas eu égard.

L'on ſera peut-être ſurpris de voir que les racines quarrées des eſpaces parcourus par le Mouton, ſont en progression arithmétique, de même que les quantitez qui expriment l'enfoncement du pilot à chaque coup ; mais cela ne peut arriver autrement, comme on le va voir.

Si l'on a une progression arithmétique $\div a. b. c. d. e. f.$ dont chaque terme marque le tems pendant lequel un corps tombant de différentes hauteurs, a mis à parcourir différens eſpaces, & que ces eſpaces ſoient, par exemple, g, f, i, k, l, m , ces eſpaces ſeront dans la raiſon des quarrés des tems, c'eſt-à-dire, comme aa, bb, cc, dd, ee, ff : Or ſi l'on extrait la racine quarrée de l'une & l'autre de ces progressions, l'on aura $\div a. b. c. d. e. f.$ pour les tems, & $\sqrt{g}, \sqrt{f}, \sqrt{i}, \sqrt{k}, \sqrt{l}, \sqrt{m}$, pour celles des eſpaces parcourus. Or ſi les tems a, b, c, d, e, f , ſont en progression arithmétique, les racines des eſpaces le ſeront auſſi : ainſi il n'eſt plus étonnant que ſi les tems que le Mouton met à tomber, ſont en progression arithmétique, les racines quarrées des eſpaces, qui ſont les vîteſſes acquiſes, le ſoient auſſi : mais les vîteſſes acquiſes peuvent être re-

gardées comme les causes de l'enfoncement du pilot à chaque coup ; & comme les effets sont proportionnels à leurs causes, les causes étant en proportion arithmétique, les effets le feront aussi ; ce qui fait que le pilot doit s'enfoncer plus au second coup qu'au premier, & plus au troisième qu'au second, dans la raison d'une progression arithmétique.

L'on peut tirer de ce qu'on vient de dire, la manière de connoître combien il faut donner de coups sur un pilot pour le faire entrer à refus de Mouton ; car on n'a qu'à considérer au premier coup de combien le pilot sera enfoncé, & regarder cette quantité comme le premier terme d'une progression arithmétique. Supposant donc que le Mouton tombant de 3 pieds de hauteur, le pilot se soit enfoncé de 12 pouces, & supposant aussi qu'au second coup le pilot se soit enfoncé de 14 pouces, je regarde ce nombre comme le second terme de la progression ; & comme la différence de ce terme-ci à l'autre est 2, je vois que le troisième terme sera 16, que le quatrième sera 18, le cinquième 20. Or si j'ai un pilot, par exemple, de 12 pieds de longueur, cette longueur exprimera la valeur de tous les termes de la progression pris ensemble : ainsi j'ajoute les termes que je viens de trouver pour voir s'ils valent 144 pouces ; & comme il s'en faut beaucoup, je cherche encore quelque terme, comme, par exemple, 22, 24 & 26, qui font avec les autres 152 pouces, qui surpassent la longueur du pilot de 8 pouces ; & comme ce sont 8 termes qui m'ont donné cette quantité, je vois qu'il faut 8 coups pour enfoncer le pilot jusqu'au refus de Mouton, puisque si le Mouton ne rencontroit pas la terre, il enfonceroit le pilot de 8 pouces au-delà de sa hauteur.

*APPLICATION DE LA MECANIQUE
à la construction des Magazins à poudre.*

836. De tous les Edifices militaires, il n'y en a point qui soient d'une plus grande conséquence que les Maga-

zins à poudre, & qui demandent plus de précaution pour les bien construire; car comme on les fait toujours voûtez, il faut sçavoir quelles sortes de voûtes conviennent le mieux, de la voûte *en plein ceintre*, de celle qui est *surbaiïée*, ou de celle qui est *en tiers point*, pour être capable de résister le plus à l'effort de la Bombe, quand elle tombe dessus: après cela, il faut sçavoir proportionner l'épaisseur des pieds droits, qui soutiennent les voûtes au poids, à la poussée & à la grandeur des mêmes voûtes.

L'opinion de la plupart des Ingenieurs est partagée sur la maniere de voûter les Magazins à poudre; les uns prétendent que la voûte en plein ceintre est la meilleure de routes, & les autres au contraire veulent que la voûte en tiers point soit préférable à celle-ci. Ce qu'il y a de certain, c'est que la voûte en tiers point a moins de poussées que celle en plein ceintre, & celle en plein ceintre que celle qui est surbaiïée; ce que l'on peut démontrer même géométriquement, & sans entrer dans une grande Théorie, je vais faire voir comme la voûte en plein ceintre a plus de poussée que celle en tiers point.

Considérez la Figure 402. qui est le profil d'un Magaz- Fig. 402.
zin à poudre, dont la voûte est en plein ceintre, & la & 403.
Figure 403. qui est un autre profil, dont la voûte est en tiers point; dans ces deux Figures l'on a divisé en deux également les arcs ED & VY par des lignes tirées de leurs centres. Or si l'on considère la partie supérieure BAGC de la voûte comme un coin qui agit contre les pieds droits, & contre les autres parties de la voûte pour les écarter, l'on verra que plus l'angle ABC sera aigu, & plus le coin aura de force par la loi des Mécaniques, ou bien si l'on regarde la ligne AB comme un plan incliné, l'on verra encore que plus il sera incliné, & plus le corps GAB qui tend à glisser dessus aura de force pour descendre, puisque la pesanteur relative sera moindre qu'elle ne le seroit, si le plan incliné approchoit plus d'être horizontal. Or dans la Figure 403. si l'on regarde encore TQRS comme un coin, l'on verra que l'angle QSR étant obtus,
Q q q ij

le coin fera moins d'effort pour écarter les parties RZ & QN, que dans la Figure 402. où l'angle du coin est droit ; & si l'on considère de plus la ligne QP comme un plan incliné, l'on verra que l'étant beaucoup moins que le plan AB, la partie TQS n'aura pas tant de force pour descendre, que la partie GAB ; par conséquent tous les voussours qui composent la voûte en tiers point étant regardez comme des coins, ou comme des corps qui tendent à glisser successivement sur des plans inclinez, feront moins d'effort que ceux de la voûte en plein ceintre : d'où il s'ensuit que la voûte en plein ceintre a plus de poussée que la voûte en tiers point ; & par une semblable démonstration on fera voir que la voûte surbaissée a plus de poussée que celle en plein ceintre.

Fig. 402.
& 404.

Un autre défaut de la voute en plein ceintre, est qu'elle oblige à faire le toit fort plat ; ce qui rend la voûte moins capable de résister à la chute des bombes, qui ne font point tant d'effort quand le plan sur lequel elles tombent, est plus incliné, parce qu'alors elles ne font que rouler sans faire de dommage considérable ; & si l'on veut éviter ce défaut, au lieu de faire le toit comme dans la Figure 402. le faire comme dans la Figure 404. c'est-à-dire, plus roide, l'on est obligé de charger la voûte à l'endroit de la clef d'une masse de maçonnerie qui oblige absolument de faire les pieds droits plus épais : d'ailleurs un avantage de la voute en tiers point, c'est que si l'on veut faire un Magasin qui ne soit point fort élevé, l'on peut commencer la naissance de la voûte à 4 ou 5 pieds au dessus du rez-de-chaussée, & le Magasin est assez élevé, au lieu que le faisant en plein ceintre, il faut que les pieds droits aient au moins 8 ou 9 pieds de hauteur ; ce qui oblige à les faire plus épais : car il n'y a point de doute qu'à mesure qu'on les fait plus élevez, il ne faille leur donner plus d'épaisseur. Enfin je pourrois rapporter encore plusieurs raisons en faveur des voutes en tiers point ; mais je crois que ce que j'en ai dit suffit pour faire voir combien elles sont à préférer à celles qui sont en plein ceintre.

Quoiqu'il soit presque impossible de déterminer l'épaisseur que doit avoir la voûte d'un Magasin à poudre pour être à l'épreuve de la bombe, puisque les bombes ne sont pas toutes d'égale pesanteur, & sont sujettes à tomber de différentes hauteurs, cela n'empêche point qu'on ne se soit déterminé à leur donner 3 pieds d'épaisseur à l'endroit des reins, & je crois que cette épaisseur sera suffisante, quand le toit ne sera point trop plat.

Comme il m'a paru qu'il convenoit de donner une règle pour déterminer l'angle que doit avoir le faite du toit d'un Magasin, afin qu'il ne soit ni trop obtus, ni trop aigu. Voici comme je m'y prends.

Supposant qu'on veuille faire un Magasin à poudre, dont la voûte soit en plein ceintre, je commence par déterminer la largeur du Magasin, qui sera, par exemple, la ligne AC, qui doit servir de diamètre au demi-cercle de la voûte; ensuite j'éleve sur le centre B la perpendiculaire BG, & je divise en deux également chaque quart de cercle AN & NC par les lignes BM & BE; je donne 3 pieds à chacune des lignes DE & LM, qui déterminent l'épaisseur des reins de la voûte, & puis du centre B je décris un demi-cercle à volonté, qui se trouve divisé en deux également par la perpendiculaire au point G, & dont le diamètre est la ligne FI, je tire aussi les cordes FG & GI, & par les points E & M je fais passer les parallèles OH & HK aux cordes qui sont dans le demi-cercle, & ces parallèles me donnent le toit OHK, qui forment un angle droit en H, parce que l'angle H est égal à l'angle G: ainsi sans tâtonner par cette méthode, il se trouvera toujours que l'angle du faite d'un Magasin à poudre sera droit, & cet angle me paroît convenir mieux qu'un autre, parce qu'il tient un milieu entre l'angle aigu & l'angle obtus, qui conviennent moins que celui-ci; car l'angle obtus, comme je l'ai déjà dit, rend le toit trop plat, & l'angle aigu charge trop la clef de la voûte par le grand vuide qu'il laisse au dessus de la clef, qu'on est obligé de remplir de maçonnerie.

Fig. 493.

Qq q iij

Pour tracer la voûte en tiers point, je suppose que les points V & X marquent l'endroit où doit commencer la naissance de la voûte, je tire une ligne de V en X, laquelle je divise en quatre parties égales; & du point P comme centre, & de l'intervalle PV, je décris l'arc VY, & du point O & de l'intervalle OX, je décris l'arc XY, lequel forme avec le précédent l'intrados VYX de la voûte: après cela je divise chacun de ces arcs en deux également, & je tire les lignes OR & PQ, & je donne à chacune des lignes AQ & BR 3 pieds & 3 pouces, & puis je divise la perpendiculaire LY en trois parties égales, & de l'extrémité M de la première partie, je décris un demi-cercle KTD, & je tire comme dans la Figure 403. les cordes KN, ND, & par les points Q & R je fais passer deux parallèles aux cordes qui forment le toit de la voûte, dont l'angle du faîte est encore droit.

Si j'ai donné aux lignes AQ & BR 3 pieds 3 pouces, c'est parce qu'elles sont au dessous des reins de la voûte; mais en suivant ce qui vient d'être dit, l'épaisseur des reins de la voûte se trouve dans leur plus foible avoir 3 pieds d'épaisseur: vous pouvez remarquer la différence de la maçonnerie qui se trouve au dessus de la clef de la voûte en tiers point, & celle qui est au dessus de la voûte en plein ceintre, c'est-à-dire, que l'une est beaucoup moins chargée que l'autre; car il n'y a que 6 pieds de hauteur de maçonnerie au dessus de la voûte en tiers point, au lieu que dans celle en plein ceintre, il y en a plus de 10: c'est aussi la raison pour laquelle les pieds droits de cette voûte sont bien moins épais que ceux de celles en plein ceintre; parce que d'ailleurs ils sont aussi moins élevés.

Mais pour régler l'épaisseur des pieds droits, tant pour les voûtes en tiers point, que pour les voûtes en plein ceintre, j'ai jugé à propos de rapporter ici une Table que j'ai calculée dans la rigueur géométrique, pour proportionner précisément l'épaisseur des pieds droits des voûtes des Magazins à poudre par rapport à la largeur dans œuvre

qu'on peut leur donner, & à l'élevation des mêmes pieds droits, c'est-à-dire, que j'ai cherché un juste équilibre entre leur résistance & l'effort des voûtes : j'ai fait abstraction des Contreforts que l'on fait ordinairement pour soutenir les pieds droits, parce qu'en quelque façon on pourroit s'en passer : mais comme il sembleroit que ce seroit vouloir changer ce qui se pratique ordinairement. Je laisse à la discrétion de ceux qui auront la conduite de ces sortes d'Ouvrages, d'en faire autant qu'ils le jugeront à propos, & de leur donner les dimensions qui leur conviendront le mieux. Car quoiqu'il semble qu'après avoir donné aux pieds droits des épaisseurs suffisantes pour résister à la poussée des voûtes des Magazins, il soit inutile d'y ajouter encore des Contreforts, cela n'empêche pas qu'ils ne soient très-bien placez ; puisqu'il convient même d'en faire aux murs qui n'ont point de poussée.

Il me reste à donner l'usage de la Table suivante, que j'ai calculée pour quatre sortes de Magazins à poudre. Dans la première Colonne l'on voit la largeur des Magazins, qui auroient depuis 20 pieds jusqu'à 36 dans œuvre ; & la Colonne qui est à côté, marque l'épaisseur qu'il faut donner aux pieds droits des voûtes en plein ceintre de ses Magazins. Supposant d'ailleurs que tous les pieds droits de ces différens Magazins aient toujours 9 pieds de hauteur depuis le rez-de-chaussée jusqu'à la naissance de la voûte. Ainsi voulant sçavoir quelle épaisseur il faut donner au pied droit d'un Magazin, dont la largeur seroit de 30 pieds, & dont les pieds droits auroient 9 pieds de hauteur depuis la fondation jusqu'à la naissance de la voûte : je cherche dans la première Colonne le nombre 30, & je vois qu'il correspond à 7 pieds, 7 pouces, qui est l'épaisseur qu'il faudra leur donner, pour que leur résistance soit en équilibre avec la poussée de la voûte d'un Magazin fait à l'épreuve de la bombe.

La seconde Table fait voir l'épaisseur qu'il faut donner

aux pieds droits des voûtes des Magazins à poudre, qui feroient faits en tiers points, en supposant que la naissance de la voûte commence à 5 pieds au dessus du rez-de-chaussée, comme on le voit marqué au second profil; & cela pour toutes les largeurs marquées dans la première Colonne: ainsi pour sçavoir l'épaisseur qu'il faut donner au pied droit d'une voûte en tiers point d'un Magasin, dont la largeur dans œuvres seroit de 24 pieds, & dont les pieds droits en dedans ne sont élevez que de 5 pieds au dessus du rez-de-chaussée; il faut chercher dans la première Colonne le nombre 24, & l'on verra qu'il correspond à 5 pieds, 10 pouces, qui est l'épaisseur que l'on cherche.

La troisième Table sert pour regler l'épaisseur qu'il faut donner aux pieds droits des Magazins, qui ont un étage souterrain; & j'ai supposé en la calculant que la hauteur des pieds droits seroit de 12 pieds depuis la retraite au dessus de la fondation, jusqu'à la naissance de la voûte qui doit être en tiers point.

Enfin la quatrième Table a été calculée pour les pieds droits des Magazins à poudre, qui auroient un étage pratiqué dans la voûte au dessus de celui du rez-de-chaussée, & la hauteur des pieds droits a été supposée de 9 pieds pour tous les Magazins, dont la largeur auroit depuis 20 jusqu'à 36 pieds dans œuvres, & dont les voûtes feroient en tiers points.

Le principe qui m'a servi à calculer cette Table, est une suite d'un des plus beaux Problèmes d'Architecture, que peu de personnes sçavent, non pas même les plus fameux Architectes. Ce Problème est de sçavoir donner au pied droit d'une voûte une épaisseur qui met la poussée de la voûte en équilibre avec la résistance des pieds droits, ou, ce qui a encore rapport au même, sçavoir quelle épaisseur il faut donner aux culées des ponts, pour soutenir la poussée des arches. Le P. Deran dans son Traité de la Coupe des Pierres, M. Blondel dans son Cours d'Architecture, & plusieurs autres, ont prétendu donner des

regles

TABLE

Pour régler l'épaisseur qu'il faut donner aux pieds droits des voûtes des Magazins à poudre.

Largeur des Magazins à poudre.	Épaisseur des pieds droits des voûtes en plein cintre pour les Magazins à un étage.			Épaisseur des pieds droits des voûtes en tiers points pour les Magazins à un étage.			Épaisseur des pieds droits pour les voûtes des Magazins qui ont un étage souterrain.			Épaisseur des pieds droits pour les voûtes des Magazins qui ont un étage au dessus de celui du rez-de-chauffée.		
pieds	pie.	pon.	lig.	pie.	pon.	lig.	pieds.	pon.	lig.	pieds.	pon.	lig.
20	5	10	0	5	2	0	7	0	0	5	5	6
21	5	11	8	5	3	0	7	2	5	5	8	6
22	6	2	2	5	5	6	7	4	10	5	10	6
23	6	4	6	5	7	4	7	7	3	6	0	10
24	6	6	0	5	10	0	7	9	8	6	2	6
25	6	8	3	6	0	4	8	0	1	6	4	6
26	6	10	0	6	2	0	8	2	6	6	5	11
27	6	11	9	6	5	0	8	4	10	6	8	0
28	7	2	6	6	8	0	8	7	3	6	10	3
29	7	4	9	6	10	6	8	9	8	7	0	0
30	7	7	0	7	1	0	9	0	1	7	2	9
31	7	9	4	7	2	4	9	2	6	7	5	6
32	7	11	10	7	4	9	9	5	11	7	8	0
33	8	2	8	7	7	0	9	8	4	7	10	6
34	8	3	11	7	9	4	9	10	9	8	2	0
35	8	5	9	7	11	0	10	1	2	8	4	2
36	8	8	0	8	0	0	10	3	7	8	6	0

R r r

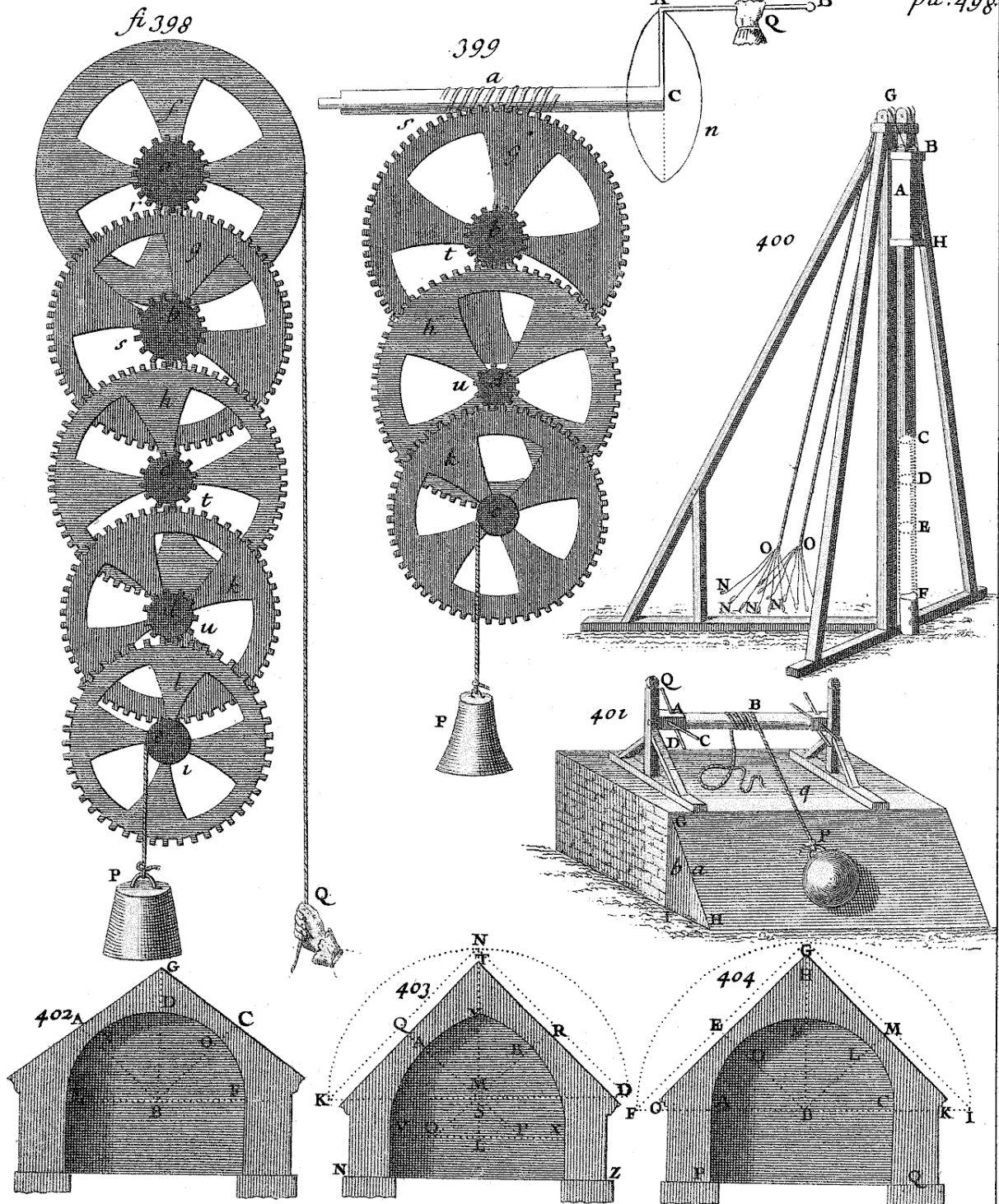
regles là-dessus ; mais leur principe est faux, en ce qu'ils n'ont point d'égard à la hauteur des pieds droits, ni à la hauteur de la voûte : mais M. de la Hire le Pere en a donné une parfaite solution dans les Memoires de l'Academie des Sciences de 1712. J'aurois pû rapporter son Memoire, & en expliquer les endroits qui m'ont paru obscurs ; mais comme il se sert d'un Calcul algebrique un peu composé, qui ne pourroit être entendu des Commencans, je me suis contenté de m'en servir pour construire la Table que je rapporte ici. Ceux qui en voudront sçavoir davantage, pourront avoir recours au Memoire de l'Académie que j'ai cité ; cela leur donnera peut-être occasion de lire les beaux morceaux qu'elle donne tous les ans, & de s'instruire des belles découvertes qu'on y trouve.

Après avoir parlé des Magazins à poudre, je crois qu'on verra avec plaisir de quelle maniere se fait le choc des bombes qui tombent sur leurs voûtes, afin qu'on sente la difference qu'il y a de considerer les choses comme elles nous paroissent, ou telles qu'elles sont en elles-mêmes, & que les Mathématiques donnent sur ce sujet des connoissances que la pratique des plus habiles Bombardiers ne peut appercevoir.

*APPLICATION DES PRINCIPES
de la Mécanique au jet des Bombes.*

Nous avons fait voir dans la derniere Proposition de la huitième Partie *, que pour trouver la force avec laquelle une Bombe tomboit sur un plan, il falloit multiplier sa pesanteur par la racine quarrée de la hauteur où elle s'étoit élevée, & nous avons agi comme si la Bombe tomboit selon une direction perpendiculaire à l'horizon, & comme si le plan qu'elle choquoit, étoit de niveau avec la batterie ; mais comme les Bombes ne tombent que rarement par des directions perpendiculaires

*Art. 837.



aux plans qu'elles rencontrent, & que le plus souvent elles tombent sur des surfaces qui sont plus élevées que la batterie. Le Problème dont je viens de parler n'est pas absolument juste, parce qu'on y fait abstraction des deux circonstances précédentes; & si on ne les y a pas fait entrer, c'est qu'on n'étoit pas encore prévenu du principe de Mécanique expliqué dans l'article 759. Mais comme il ne reste plus rien à désirer à ce sujet, voici comme il faut raisonner.

Si la ligne AB marque l'élevation du Mortier sur le plan horizontal AC, & que la parabole AHD ait été décrite par la Bombe, la ligne AB qui va rencontrer l'axe prolongé de la parabole, sera la tangente de cette courbe menée du point A, & la ligne BD sera une autre tangente menée du point D; mais quand un corps est jeté par une direction qui n'est pas perpendiculaire à l'horizon, la direction selon laquelle ce corps choque un plan, est marquée par la tangente menée par le point de la parabole, où le corps rencontre le plan: ainsi la Bombe qui aura décrit la parabole AHD, choquera le plan AC, selon la direction BD; mais comme cette ligne est oblique au plan AC, si la force de la Bombe est exprimée par la ligne FD, elle ne choquera pas le plan avec toute la force FD; car si l'on abaisse FE perpendiculaire sur AC, & qu'on fasse le parallélogramme EG, la force FD sera égale aux forces FG & FE * agissantes ensemble; mais la force FG parallèle à l'horizon, n'agit point du tout sur le plan AC, il n'y a donc que la force exprimée par FE, qui choque le plan; ce qui fait voir que le choc de la Bombe, selon la direction BD, est au choc de la même Bombe, selon la direction perpendiculaire BI, comme FE est à FD, ou comme BI est à BD, c'est-à-dire, comme la sous-tangente est à la tangente, ou bien comme la tangente de l'angle de l'élevation du Mortier est à la sécante du même angle, ou encore comme le sinus de l'angle de l'élevation est au sinus total: ainsi supposant que l'angle BAI soit de 50 degrez, l'on peut dire que le choc de la

PLAN-
CHE 32.
Fig. 404.

* Art. 759.

R r r ij

Bombe tombant selon la direction perpendiculaire BF, est au choc par la direction BD, comme 100000 est à 76604.

A ne considérer que le choc des Bombes qui tombent sur un plan horizontal, il semble que ce que l'on vient de dire ne soit pas d'une grande utilité, parce que les Bombes que l'on jette dans les ouvrages, soit de la part des Assiegez ou des Assiegeans, font toujours beaucoup plus d'effet par leurs éclats, quand elles crevent, que par le poids de leur chute ; & si le poids avoit lieu dans ce cas-ci, ce ne seroit qu'à l'occasion des souterrains que l'on pratique dans les Places sous les Remparts pour les différens usages auxquels ils sont propres ; mais comme le choc d'une Bombe mérite plus d'attention, lorsqu'elle tombe sur un édifice que les Assiegeans ont intérêt de ruiner, comme un Magasin à poudre, dont il s'agit de percer la voûte, qui est un plan incliné à l'horison, c'est particulièrement la chute des Bombes dans ce cas-ci qu'il nous faut examiner.

Fig. 405.

Si l'on a un Mortier au point A pour jeter une Bombe sur le plan incliné KL, & qu'on veuille sçavoir quel est le choc de la Bombe, qui après avoir décrit la parabole AHD, viendrait tomber à un point D du plan incliné, je considère que la Bombe frappant le point D, agit selon sa direction BD, qui est une tangente menée par le point D de la parabole. Or si l'on prend la ligne FD pour exprimer la force de la Bombe, lorsqu'elle est prête à tomber sur le plan incliné, cette force étant oblique au plan, n'exprimera pas la force avec laquelle la Bombe choquera ce plan, mais seulement la force de la Bombe en elle-même : & si du point F l'on mène la ligne FE perpendiculaire sur KL, elle exprimera la force avec laquelle la Bombe choquera le plan incliné ; car faisant le parallélogramme GE, l'on aura les côtes FE & FG, qui exprimeront deux forces, lesquelles agissant ensemble, seront égales à la seule FD ; mais la force FG, étant parallèle au plan KL, n'agit point du tout sur ce plan. Il

n'y a donc que la ligne FE qui exprime le choc de la Bombe: ainsi l'on peut dire que le choc d'une Bombe qui tombe obliquement sur un plan incliné, est au choc de la direction perpendiculaire, comme FE est à FD, ou comme le sinus de l'angle FDE, est au sinus total, étant tombée de la même hauteur.

Si l'on vouloit sçavoir quel est ce rapport, il faudroit chercher l'angle FDE, que l'on trouvera en connoissant la valeur de l'angle KDC, formé par l'horison & le plan incliné, de plus l'angle d'inclinaison BAD du Mortier, qui est égal à EDA: ainsi supposant l'angle EDA de 50 degrez, & l'angle KCD de 70: si on les ajoute ensemble, l'on aura 120 degrez, qui étant soustraits de deux droits, la difference sera 60 degrez pour la valeur de l'angle FDE, dont le sinus est 86602, par conséquent le rapport du choc de la Bombe, selon la direction perpendiculaire, est à celle, selon la direction oblique FD, comme 100000 est à 86602.

Tout le monde croit (& l'on a raison dans un sens) que plus les Bombes tombent de haut, & plus le choc sur le plan qu'elles rencontrent, est violent. Cependant ceci n'est vrai que quand le plan que la Bombe rencontre est de niveau avec la batterie, parce que tombant de fort haut, elle décrit sur la fin une ligne courbe, qui approche fort de la verticale; mais quand le plan est incliné à l'horison, la chute par la verticale même est celle qui choque le plan incliné avec moins de violence que par toutes les autres directions possibles, qui seroient entre l'horizontale & la verticale, si les Bombes tombent d'une hauteur égale; & ce n'est que quand la tangente menée au point de la parabole qui rencontre le plan incliné, est perpendiculaire à ce plan même, que la Bombe choque avec toute sa force absoluë. Or pour faire entendre qu'une Bombe tombe sur un plan incliné par une direction perpendiculaire, il faut connoître l'angle d'inclinaison que forme le plan avec l'horison, & pointer le

R r r ij

Mortier sous un angle qui soit égal au complément de celui du plan incliné.

Fig. 406.

Par exemple, si sur le plan incliné KL , on élève la perpendiculaire BD au point D , qui aille rencontrer la perpendiculaire BE , élevée dans le milieu de l'amplitude AD de la parabole, & qu'on tire la ligne AB , l'angle BAD sera celui qu'il faut donner au Mortier pour chasser la Bombe au point D ; mais cet angle est égal à l'angle BDE , lequel est complément de l'angle KDC , puisque BDK est droit, donc l'angle BAE , complément de l'angle d'inclinaison, est celui qu'il faut donner au Mortier, pour que la Bombe choque le plan incliné par une direction perpendiculaire au même plan.

Par cette Théorie l'on pourroit déterminer quelle est la charge, ou si l'on veut, quels sont les degrez de force que doit avoir un Mortier, & l'angle qu'il lui faut donner pour chasser une Bombe sur un plan incliné, en sorte que la Bombe choque ce plan avec toute la force qu'il est possible; démontrer même que lorsque les racines quarrées des différentes hauteurs d'où une Bombe tombera sur un plan incliné, seront reciproquement proportionnelles aux sinus des angles d'incidens formez par les différentes directions des Bombes, que le choc sera toujours égal, & une quantité d'autres choses, qui à la verité sont plus propres à exercer l'esprit, qu'à être mises en pratique; c'est pourquoi je ne parlerai plus que de deux cas qui me restent à expliquer; sçavoir, quel est le choc des Bombes qui seroient tirées d'un lieu plus bas ou plus élevé, que le plan incliné qu'elle doit rencontrer: & comme sçachant un de ces cas, il est aisé de concevoir l'autre, voici celui qui regarde le plan incliné plus élevé que la batterie.

Fig. 407.

Si par les regles du Jet des Bombes l'on a trouvé l'angle BAI pour donner au Mortier une élévation convenable, afin de jeter une Bombe au point D d'un plan incliné KL , plus élevé que l'horison AP , l'on connoitra l'ampli-

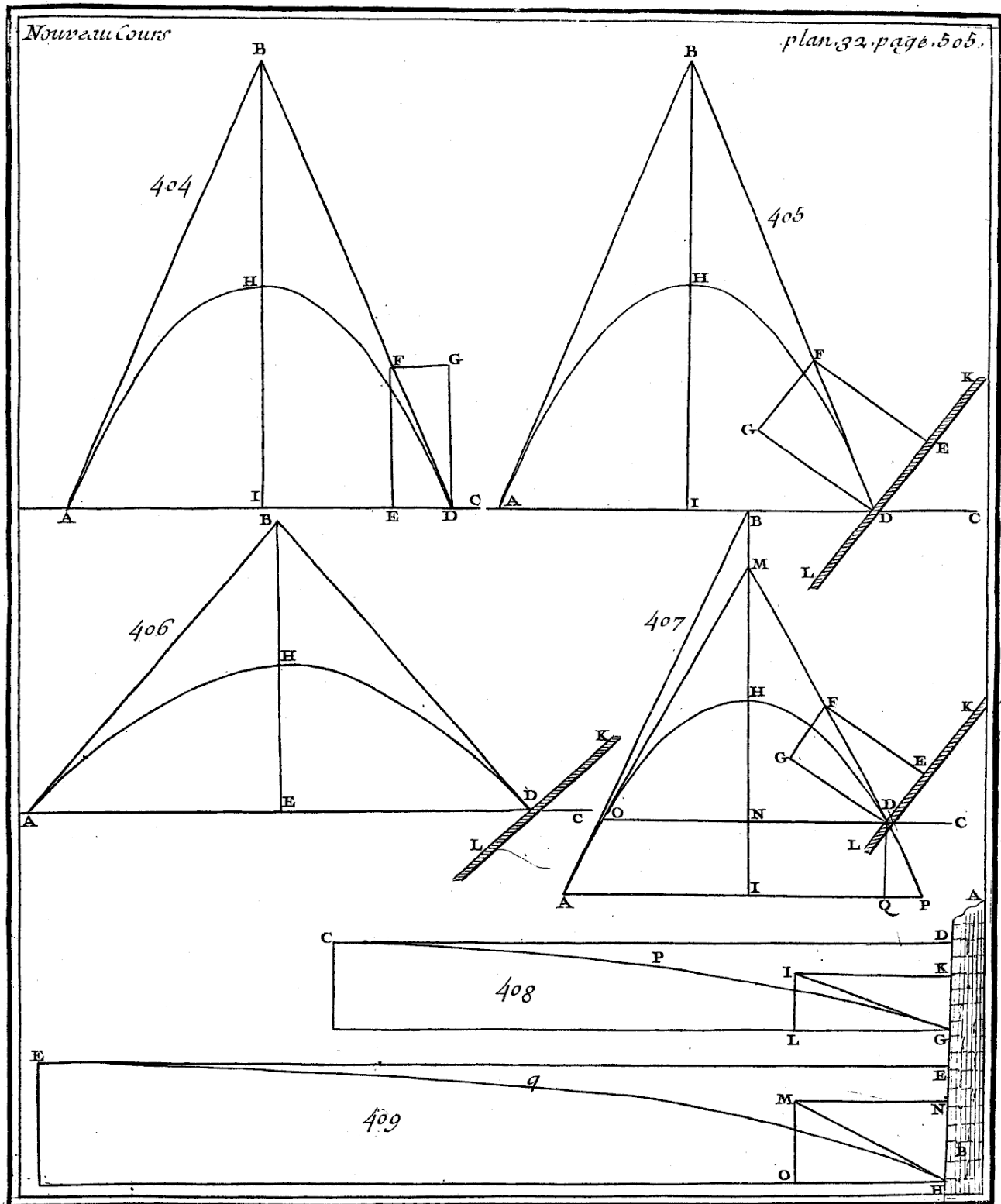
tude AP de la parabole AHP, & par conséquent son axe HI; & avant cela on aura dû sçavoir l'élevation DQ du point D, sur l'horison AP: mais si la Bombe au lieu de tomber en P, tombe en D, menant DO parallèle à PA, la vitesse de la Bombe sera exprimée par la racine quarrée de HN. Or si l'on prend la ligne FD pour exprimer cette force, & que l'on tire la ligne FE perpendiculaire au plan KL, le choc de la Bombe au point D sera exprimé par la ligne FE, & non pas par la ligne FD, comme on vient de le voir. Or le rapport du choc perpendiculaire au choc oblique, étant comme FD est à FE, ou comme le sinus total est au sinus de l'angle FDE: si l'on veut avoir ce sinus pour connoître en nombre le rapport de la ligne FD à la ligne FE, il faut chercher la valeur de l'angle MON, formé par l'ordonnée ON & la tangente OM, qui est l'angle qu'il auroit fallu donner au Mortier, si la Bombe avoit été tirée de l'endroit O, de niveau avec le point D. Pour le trouver, considerez que l'on connoît l'abcisse HN, qui est la difference de HI à HD, & que par conséquent on connoitra aussi la sous-tangente MN, qui est un des côtes du triangle rectangle MNO; & comme pour trouver l'angle que nous cherchons, il nous faut encore le côté ON. Pour le trouver, l'on dira: Comme l'abcisse HI est à l'abcisse HN, ainsi le quarré de l'ordonnée AI est au quarré de l'ordonnée ON, que l'on trouvera par la regle de proportion, dont extrayant la racine quarrée, l'on aura le côté ON, qui donnera avec le côté MN l'angle MON ou MDN son égal; & si l'on ajoute à cet angle la valeur de l'angle EDC, formé par le plan incliné & l'horison, & que l'on ôte la somme de ces deux angles de la valeur de deux droits, l'on aura pour la difference l'angle FDE, dont le sinus servira à déterminer le choc de la Bombe au point D, par rapport au sinus total qui exprime la force absolue.

L'on peut aussi tirer de tout ceci des regles pour déterminer la force d'un Boulet de canon, qui choqueroit

Fig. 40
& 409.

une surface par des batteries différemment éloignées de cette surface ; par exemple , si l'on a une surface verticale AB , & que du point C l'on tire un Boulet , en sorte que l'ame de la pièce soit pointée selon la direction CD perpendiculaire à cette surface , le Boulet au lieu de frapper au point D , frappera au point G , plus bas que le point D , parce que sa pesanteur lui fera décrire la parabole CPG , & le choc du Boulet se fera selon la direction de la ligne IG tangente à la parabole au point G : ainsi ce sera la ligne IK perpendiculaire à la surface qui exprimera le choc du Boulet , & non pas la ligne IG , diagonale du parallélogramme KL . Or si le même Boulet au lieu d'être chassé du point C , est chassé du point E , avec la même force , la distance EF étant plus grande que CA , choquera la surface au point H avec moins de force qu'il ne la choque au point G ; ce n'est pas que cette plus grande distance lui ait rien fait perdre de son degré de mouvement ; (si l'on compte pour rien la résistance de l'air) mais c'est que la parabole EQH étant plus grande que CPG , le point H où le Boulet aura choqué la surface , sera bien plus éloigné de F que le point G ne l'est de D ; par conséquent la tangente MH que l'on menera à la parabole par le point H , sera plus inclinée à la surface AB , que la tangente IG ne l'est à la même surface. Or faisant MH égal à IG , si l'on mène la ligne MN perpendiculaire à la surface AB , elle sera dans la même raison avec la perpendiculaire IK , comme le choc du Boulet tiré de l'endroit E sera à celui du Boulet tiré de l'endroit C , ou bien comme le sinus de l'angle MHN sera au sinus de l'angle IGK ; d'où il s'ensuit que quand on bat avec le canon une surface de fort loin , ce n'est pas que le Boulet ait rien perdu de sa force , qui fait qu'il ne choque pas la surface avec autant de violence , que s'il avoit été tiré de plus près , comme bien des gens le croient ; mais au contraire , c'est que ne frappant la surface que par une direction fort oblique , il n'agit pas avec autant d'effort , que s'il la frappoit par une autre direction

rection



rection qui approchât plus d'être perpendiculaire ; car si un Boulet en sortant de la pièce ne rencontroit pas des corps à qui il communique du mouvement qu'il a reçu de l'impulsion de la poudre, & que l'air ne lui fît aucun empêchement, & que la pesanteur du Boulet ne le fît pas tendre vers le centre de la Terre : en un mot qu'il pût toujours aller en ligne droite, sa force seroit toujours la même à quelque distance qu'il fût porté, puisqu'il conserveroit toujours le mouvement qu'il a reçu, s'il n'en perdoit à mesure qu'il en communique aux corps qu'il rencontre, n'y ayant point de raison que cela puisse être autrement.

M. Tufereau est celui qui m'a occasionné de rechercher ce que l'on vient de voir ; car raisonnant sur les differens effets du choc des Bombes & des Boulets, il s'est apperçû que ces corps n'agissoient pas avec toute leur force absolue : il m'a prié d'en chercher la cause

A V E R T I S S E M E N T.

Comme l'on a coûtume de comprendre sous le nom de *Mécanique*, les expériences qui se font avec la poudre, & tout ce qui est mêlé de Théorie & de pratique, je crois qu'il n'est pas hors de propos de donner ici le moyen de faire des épreuves pour connoître la charge qui convient aux Mines, selon leurs différentes lignes de moindre résistance, & de faire voir que ce que l'on pratique ordinairement à ce sujet, n'est pas juste.

*NOUVELLE MANIERE DE FAIRE
des épreuves pour sçavoir la charge qu'il convient de
donner aux Fourneaux des Mines.*

838. De toutes les parties de la Guerre, il n'y en a point où les Mathématiques & la Physique aient plus de part, que dans la Science des Mines. Si on vouloit la traiter avec toute la Théorie qui s'y trouve attachée, la plupart de ceux qui en ont eu jusqu'ici la conduite, l'ont

SSS

fait consister à sçavoir conduire une Galerie d'une certaine longueur , afin de placer des fourneaux aux endroits qu'on se proposoit de faire sauter ; & il leur suffisoit d'avoir un peu de pratique, & l'usage de quelque Table necessaire à la charge des fourneaux , pour executer ce qui se fait ordinairement ; & ne portant point leur vûë au-delà de la manœuvre ordinaire , ils n'ont pas crû qu'il y avoit des regles qui pussent mesurer les efforts de la poudre, & une industrie à conduire des Galeries des rameaux , qui rendissent une Place aussi respectable par les forces souterraines , que par les ouvrages de fortification les mieux conditionnées ; & l'on seroit peut-être encore dans ce préjugé , si M. de Valiere n'avoit fait sentir qu'il avoit dans la conduite des Mines , un Art que la Géométrie seule étoit capable de développer ; & c'est en voulant suivre ses vûës , que je vais expliquer une des choses la plus essentielle de la Science des Mines.

L'usage ordinaire pour charger les Mines , est qu'après avoir trouvé la quantité de toises ou de pieds cubes de terres qu'un fourneau doit enlever , on multiplie cette quantité par le nombre de livres de poudre qu'on juge necessaire pour chaque toise cube ; par exemple , si c'est une terre vierge , & qu'on veuille employer 16 livres de poudre par toise , voulant sçavoir combien il en faut pour un fourneau qui auroit 15 pieds de ligne de moindre résistance , on multiplie 28 toises cubes (qui est la valeur de la masse qui répond à cette ligne) par 16 ; il vient 448 livres de poudre pour la charge du fourneau.

C'est ainsi qu'on a agi jusqu'à present , pour trouver la charge des fourneaux ; mais si l'on considere que dans l'effet des Mines , il ne faut pas seulement avoir égard à la pesanteur des terres ; mais encore à leur tenacité , l'on verra qu'il ne suffit pas pour proportionner exactement la charge de deux fourneaux differens , d'avoir égard à la quantité des terres de chacune , c'est-à-dire , que si l'on a 8 toises cubes à enlever d'une part , & 16

toises cubes de l'autre dans le même terrain, la charge des deux fourneaux ne doit pas être dans la raison de 8 à 16 ; car le grand fourneau sera plus chargé à proportion que le petit, comme on le va voir.

L'on sçait que les corps semblables sont dans la raison des cubes de leurs axes : ainsi si l'on a deux fourneaux à faire joüer, dont les lignes de moindre résistance soient inégales, ces fourneaux ayant à enlever des cônes tronquez semblables, l'on peut dire que les masses sont dans la raison des cubes des lignes de moindre résistance ; mais l'on sçait aussi que les surfaces des corps semblables sont dans la raison des quarrés de leurs axes ; & comme la tenacité des terres à l'égard de l'effet d'un fourneau, répond précisément à la surface du corps qu'il doit enlever, l'on voit que s'il faut avoir égard dans l'effet des Mines au poids des terres & à leur tenacité, que ce sont les cubes & les quarrés des lignes de moindre résistance, qui déterminent le rapport de leurs poids & de leur tenacité. Or comme la poudre fait plus d'effort pour détacher les terres, qu'elle n'en fait pour les enlever : ce n'est donc point sans raison que je dis qu'il faut pour charger les fourneaux, avoir non seulement égard au rapport du poids des terres, mais encore à celui de leur tenacité. Presentement si l'on fait attention que de plusieurs corps semblables & inégaux, les plus grands ont moins de surface à proportion que les plus petits ; l'on verra que la tenacité des terres pouvant être exprimée par la surface du corps que la poudre doit enlever, ou par le quarré de la ligne de moindre résistance, qu'il y a moins de tenacité à proportion dans les Mines qui ont de grandes lignes de moindre résistance, que dans celles qui en ont de plus petites. Par exemple, si l'on suppose deux fourneaux, dont la ligne de moindre résistance du plus petit, soit de 10 pieds, & celle du plus grand de 20, la tenacité des terres sera dans la raison des quarrés de 10 à 20, c'est-à-dire, comme 100 est à 400 ; & le poids sera comme le cube de 10 est au cube de 20, c'est-à-

S ff ij

dire, comme 1000 est à 8000. Ce qui fait voir que de deux Mines, dont l'une a une ligne de moindre résistance double de l'autre, le poids des terres de la plus grande est octuple de celui des terres de la plus petite, tandis que la tenacité de la plus grande n'est que quadruple de la tenacité de la plus petite : & si l'on ne fait attention qu'à la quantité des terres pour proportionner la charge des Mines, l'on charge les grandes Mines beaucoup plus à proportion que les petites ; ce qui est une consommation de poudre superflue, qui peut devenir même nuisible, par les débris qu'une Mine trop chargée jette quelquefois sur ceux mêmes qui la font joier.

Si l'on vouloit examiner présentement de quelle façon l'air peut avoir part dans l'effet des Mines, il faudroit considérer la force de son ressort, quand il est dilaté dans un fourneau, dans quelle raison la force de ce ressort augmente à mesure que la poudre s'enflamme ; quelles sont les alterations qu'il peut recevoir, en agissant contre le corps qu'il pousse, calculer même le poids de l'atmosphère qui répond aux lignes de moindre résistance ; faisant voir que ce poids se trouve dans la raison des quarez des lignes de moindre résistance, tandis que celui des terres, est dans la raison des cubes des mêmes lignes ; mais comme cela me conduiroit insensiblement dans une Physique abstraite, qui demanderoit d'être précédée de certains principes, dont je ne suppose point ici la connoissance ; je me contenterai de ne parler que de ce qui a le plus de rapport à la Géométrie, afin de ne rien avancer qui ne se réduise au calcul.

Comme la méthode de se bien conduire dans l'étude des Sciences, & dans la pratique des Arts, est l'unique voye pour acquérir beaucoup de connoissance ; voici, ce me semble, ce qu'il faudroit suivre pour mesurer la force de la poudre dans les Mines, afin de sçavoir combien il en faut pour la tenacité, combien pour le poids des terres, & combien pour le poids & la tenacité ensemble.

Ayant fait plusieurs Mines, dont les lignes de moindre résistance soient égales, & cela dans un terrain de même consistance, il faudra charger trois ou quatre de ces Mines avec une quantité de poudre médiocre, estimée nécessaire seulement pour ébranler assez les terres depuis le fond du fourneau jusqu'à la surface du terrain, pour qu'on puisse y appercevoir une circonférence de cercle, formée sur la surface de la terre : & comme l'on ne pourroit peut-être pas rencontrer par hazard une charge convenable à un pareil effet, il faudroit que ces fourneaux fussent plus ou moins chargés les uns que les autres. Or supposant que ces fourneaux ayant chacun 8 pieds pour ligne de moindre résistance, il s'en rencontre un qui étant chargé avec 50 livres de poudre, ait formé le cercle que nous demandons, c'est-à-dire, qu'il ait tracé le cercle de la grandeur ordinaire de l'entonnoir, sans qu'il paroisse cependant d'entonnoir. Car je suppose que le terrain renfermé dans cette circonférence n'a fait que se soulever tant soit peu. Or si cela arrive ainsi, la quantité de poudre nécessaire pour détacher la masse, sera mesurée par 50 livres de poudre : & comme nous avons fait voir que la tenacité des terres étoit dans la même raison que les quarrés des lignes de moindre résistance, si après cette épreuve l'on vouloit sçavoir quelle est la quantité de poudre nécessaire pour faire un pareil effet à l'égard d'une Mine qui auroit 12 pieds de ligne de moindre résistance, & placée dans un terrain de même consistance, il faudra dire : Si 64 qui est le quarré d'une ligne de 8 pieds, donne 50 livres de poudre pour la tenacité, combien donneront 144, qui est le quarré d'une ligne de moindre résistance de 12 pieds pour la tenacité de la masse de cette ligne, l'on trouvera 112 livres de poudre pour faire l'effet que l'on demande. Il en sera de même pour toutes les autres.

Comme les Mines ont plusieurs fins, & qu'il y a des cas qu'elles ne sçauroient faire un trop grand déblais des terres, j'ai recours à de nouvelles épreuves, c'est-à-dire,

S f f i j

qu'ayant trois ou quatre Mines, dont les lignes de moindre résistance fussent encore de 8 pieds, je charge toutes ces Mines avec une quantité de poudre bien plus grande que celle de la première épreuve, parce que je veux avoir des grands entonnoirs bien nettoyez : & comme j'ignore la quantité de poudre nécessaire, je charge mes fourneaux plus fort les uns que les autres ; & supposant que celui dont l'effet s'est trouvé selon mon intention, a été chargé avec 70 livres de poudre, je regarde cette charge comme étant capable de vaincre la tenacité & le poids des terres d'une ligne de moindre résistance de 8 pieds. Or négligeant pour un moment la tenacité qui se trouve moindre à proportion dans une grande Mine que dans une petite ; & n'ayant plus égard qu'à la masse des terres, je me rappelle que ces masses sont comme les cubes des lignes de moindre résistance. Cela posé, si l'on me demande quelle doit être la charge d'une Mine qui auroit 15 pieds de ligne de moindre résistance, afin qu'elle fasse un effet semblable à celui de la seconde épreuve, c'est-à-dire, qu'elle fasse un entonnoir, je dis : Si le cube d'une ligne de moindre résistance de 8 pieds, qui est 512, demande 70 livres de poudre, que demandera le cube d'une ligne de moindre résistance de 15 pieds, qui est 3375, pour la quantité de poudre qu'il lui faut, l'on trouvera 461 livres ; sur quoi l'on pourra diminuer, si l'on veut, ce que la grande Mine a moins en tenacité que la petite, comme je le ferai voir dans la suite.

Faisant des semblables épreuves pour toutes sortes de terrains, il me suffira de sçavoir ce qu'il faut de poudre pour une ligne de moindre résistance, déterminé pour chaque sorte de terrain en particulier, afin de trouver, moyennant cette règle, la charge des fourneaux de telle ligne de moindre résistance que l'on voudra ; & cela d'une façon si générale, qu'il m'est indifférent de sçavoir si l'excavation d'une Mine est un paraboloïde, ou un cône tronqué, ou un solide de toute autre espèce ; puisque je n'ai pas besoin de les mesurer pour charger les Mines : ce

que je trouve de plus avantageux , c'est , comme il y a toute apparence , que ces corps changent de figure, selon les différentes consistances de la matiere à détacher ou à enlever , je ne m'embarrasse pas si la figure de l'effet d'une Mine est différente dans la maçonnerie que dans le roc, dans le roc que dans le tuf, dans le tuf que dans les terres ordinaires ; il me suffit de sçavoir que ces corps sont semblables dans les terrains de même consistance, & qu'étant semblables , ils sont par conséquent dans la raison des cubes des lignes de moindre résistance , & par ce principe je trouve avec beaucoup de facilité la charge de tous les fourneaux , comme on le peut vérifier par les Tables dont les Mineurs se servent, où je vois que pour une ligne de moindre résistance de 8 pieds dans les terres ordinaires, il faut 48 livres de poudre : si l'on demande combien il en faut pour une ligne de moindre résistance de 15 pieds, je dis : Si le cube de 8 , qui est 512 , donne 48 livres de poudre , combien donnera le cube de 15 , qui est 3376 , l'on trouvera 316 livres pour la charge que l'on cherche , qui est un terme qui répond , comme le voici, au nombre 15 dans la même Table : il en sera de même pour tous les autres ; ce qui fait voir qu'il suffit de retenir un terme seulement pour trouver toutes les charges des Mines de différentes lignes de moindre résistance.

L'on peut tirer de ce que je viens de dire une manière aisée de calculer les Tables pour la charge des fourneaux , sans s'embarrasser à la vérité de la figure du solide qu'ils ont à enlever ; mais ces Tables deviendroient semblables aux anciennes, où ceux qui les ont calculées n'ont eu égard qu'à la masse , sans penser à la tenacité : ainsi nous tomberions dans le même cas, c'est-à-dire, de trop charger les grandes Mines , à proportion des petites ; il faut donc faire voir la manière d'éviter ce défaut , & l'usage qu'on peut faire des épreuves précédentes.

Nous avons supposé que la tenacité d'une Mine qui auroit 8 pieds de ligne de moindre résistance, étoit mé-

surée par 50 livres de poudre, & que la tenacité & le poids des terres pour la même ligne, étoient mesurées par 70 livres, qui est la charge qu'il faut pour bien nettoyer l'entonnoir. Or si l'on retranche ce que l'on a estimé nécessaire pour la tenacité de la charge qui comprend le poids & la tenacité ensemble, la différence sera ce qu'il faut pour le poids seulement : ainsi soustrayant 50 de 70, l'on aura 20 livres de poudre pour le poids d'une ligne de moindre résistance de 8 pieds. Presentement si l'on demande quelle doit être la charge d'une Mine dont la ligne de moindre résistance seroit de 15 pieds, & que cette charge soit bien proportionnée à celle de 8 pieds, on doit commencer par chercher ce qu'il faut pour la tenacité, en disant : Si le quarré d'une ligne de 8 pieds, qui est 64, donne 50 livres pour la tenacité, combien donnera le quarré d'une ligne de 15 pieds, qui est 225, pour la tenacité des terres de la Mine qui répond à cette ligne, l'on trouvera qu'il faut 175 livres de poudre. Pour savoir presentement combien il en faut pour le poids, je dis : Si le cube d'une ligne de 8 pieds, qui est 512, donne 20 livres de poudre pour le poids, combien donnera le cube de 15 pieds, qui est 3375, l'on trouvera 122 : ainsi ajoutant ensemble les deux termes que l'on vient de trouver, l'on aura 307 livres de poudre pour la charge qui convient à la tenacité, & au poids des terres d'une ligne de 15 pieds : mais nous avons vû ci-devant que n'ayant égard qu'à la masse, que lorsqu'une Mine dont la ligne de moindre résistance est de 8 pieds, sera chargée avec 70 livres de poudre, qu'il en falloit 461 livres pour la Mine d'une ligne de 15 pieds : ainsi cette charge-là est bien plus forte que celle que nous venons de trouver, puisqu'elle surpasse la dernière de 154, qui est une quantité de poudre que l'on mettroit de trop dans la Mine de 15 pieds, si l'on n'avoit point égard à ce que les grandes Mines ont de moins en tenacité que les petites.

Les épreuves dont je viens de parler, paroissent assez de conséquence

conséquence pour mériter la peine d'être exécutées, & c'est à quoi l'on devroit s'attacher dans les Ecoles, sans en excepter une, parce que le terrain qui se trouvera dans le voisinage de celle-ci, ne sera peut-être pas dans celui de l'autre : ainsi l'on pourroit avoir dans la suite des Tables pour toutes sortes de terrains, au lieu que celles qui sont entre les mains de tout le monde, semblent ne regarder que les terres ordinaires ; & comme ces Tables ont été calculées par différentes personnes, celles des unes diffèrent entièrement de celles des autres : & ce qu'il y a de plus surprenant, c'est que la plupart de ceux qui en font usage, s'en servent indifféremment dans l'attaque & la défense des Places, n'y trouvant point de différence. Cependant les Mines des Assiégeans & celles des Assiégés ont un objet bien différent ; car les Mines des Assiégeans, autant qu'elles regardent le chemin couvert, & même les brèches, ne sçauroient faire de trop grandes ouvertures, pour avoir des logemens spacieux, & capables de contenir beaucoup de monde, au lieu que celles des Assiégés ne doivent que culbuter les travaux de l'Ennemi : autrement si pour faire sauter quelques gabions avec huit ou dix hommes, ils font des entonnoirs à loger des Compagnies entières de Grenadiers, c'est une conduite qui ne tendra point à leur salut. Il y a cependant des cas où il faut que les Mines des Assiégés fassent des grands effets ; mais ce n'est que lorsqu'elles sont destinées à faire sauter des batteries ; car si ces batteries se trouvent à l'unique endroit duquel on puisse faire brèche, plus les entonnoirs seront grands, & plus il faudra du tems pour les combler, & pour réparer le dommage qu'on y aura fait ; ces entonnoirs ne pouvant point d'ailleurs servir de logement, puisque dans ce tems-là l'Ennemi sera maître du chemin couvert, & aura besoin de cet endroit-là pour rétablir sa batterie.

Le discours précédent ayant été envoyé à la Cour, elle a jugé à propos que les épreuves que j'y propose, fussent exécutées ; & c'est à quoi l'on va travailler incessamment.

T t t

M. de Valiere ayant aussi examiné ce Memoire , a bien voulu me témoigner qu'il avoit bonne opinion de la maniere dont ces épreuves seroient faites , étant satisfait du principe sur lequel elles étoient établies. Il est vrai que j'ai déjà eu lieu de m'en appercevoir par le succès des Mines que nous avons fait jouër l'Esté dernier au siege de la Fortification de l'Ecole de la Fere , où j'ai fait fauter jusqu'à trois fois en 18 pieds de terre vierge , les batteries que les Assiegeans avoient faites sur le chemin couvert , avec cette circonstance , que les pieces de 24 qui étoient en batterie , ont été jettées du côté de la Place , comme je me l'étois proposé , afin que les Assiegez s'étant emparez du canon de l'Ennemi , ce dernier fût contraint d'en faire venir du nouveau toutes les fois qu'il seroit obligé de rétablir ses batteries. Ceci est arrivé aux attaques de la droite & de la gauche , avec l'applaudissement même de ceux qui avoient le plus douté de la réussite d'un dessein , qui pour n'avoir pas encore été mis en usage , sembloit demander une épreuve qui confirmât la justesse des regles que j'avois données pour la disposition des Fourneaux , & la quantité des poudres dont ils devoient être chargez , où je n'ai pas manqué d'avoir égard à ce que les grandes Mines ont moins en tenacité que les petites , & à plusieurs autres considerations que je pourrai expliquer quelque jour dans un Traité de Mines , quand les experiences que je suis à portée de faire à ce sujet , m'auront mis en état de justifier la Théorie par la Pratique , ayant l'avantage de travailler sous les yeux d'un Commandant , dont toutes les vûes tendent au bien du Service , & à l'instruction d'une Ecole composée d'un nombre d'Officiers , de la capacité & de l'application desquels on peut tout esperer.



DISCOURS

SUR L'HYDRAULIQUE.

L'*Hydraulique est une partie des Mathématiques qui tire ses principes de ceux de la Mécanique, dont elle est une suite ; car dans la Mécanique on considère (comme on vient de le voir) l'équilibre des corps durs , & l'Hydraulique nous montre l'équilibre des liqueurs , leur pesanteur , & même le rapport de leur poids à celui des corps durs , qui seroient plongez dedans : & c'est la considération de ces choses qui font ordinairement l'objet de l'équilibre des liqueurs ; cependant comme elle ne suffit pas pour l'usage qu'on en peut faire , il y a plus de raison encore de considérer les liqueurs en mouvement qu'en repos ; car comme il s'agit dans la Pratique de sçavoir conduire & estimer la dépense des eaux pour les differens usages auxquels on les destine , il m'a paru que ce ne seroit rien faire pour l'instruction de mon Lecteur , que de ne lui pas donner les principes du mouvement des eaux , afin d'en sçavoir calculer le cours & le choc , selon des directions horisontales , verticales , ou obliques à l'horison. Il est vrai que je ne m'entends pas beaucoup sur cette matiere , n'ayant rapporté que les principales regles , qui suffiront pourtant à ceux qui les entendront bien , pour appercevoir d'eux-mêmes beaucoup de petites choses sur lesquelles j'ai passé legerement. D'ailleurs j'ai appris qu'on étoit à la veille de faire imprimer un petit Manuscrit de M. Varignon sur le Mouvement des Eaux , auquel on pourra avoir recours , quand il paroitra , si l'on desiré quelque chose de plus que ce que je donne ici.*

Comme l'air est un corps fluide , dont les proprietéz ne sont connues que de peu de personnes , & qu'on ne peut sans leur secours rendre raison des effets de la plupart des Machines hydrauliques , j'ai crû qu'on me sçauroit bon gré d'expliquer la mécanique de l'air , d'autant plus qu'étant la principale cause

T t t j

516 DISCOURS SUR L'HYDRAULIQUE.

des effets de la poudre à canon, & par conséquent de la Théorie de l'Artillerie, je contribuerai peut-être à faire méditer nos esprits studieux sur la manière dont la poudre agit dans les Mines, dans le Canon, & dans les Feux d'artifices, & de les mettre dans le goût de s'appliquer à la Physique, pour être en état de raisonner sur la Nature. Ainsi l'on trouvera à la suite de l'Hydraulique un Discours sur l'Air, que j'ai rapporté particulièrement pour servir comme d'introduction à la Physique. Ceux qui voudront s'y appliquer, pourront avoir recours au Traité qu'en a donné M. Rohaut, qui est ce que nous avons de meilleur ; & l'on ne feroit pas mal de joindre à cet Ouvrage les Principes de Philosophie de Descartes, qui est l'Auteur que M. Rohaut a suivi, & qui le sera un jour universellement, selon toute apparence, quand on sera entièrement revenu (comme on l'est déjà beaucoup aujourd'hui) du fatras pedantesque de la Philosophie de la plupart de nos Ecoles. Et si l'on trouve du goût à l'étude de la Physique, après Descartes & Rohaut, on pourra voir la Recherche de la Verité du R. P. Malbranche, qui est un excellent Livre pour former l'esprit, & le rendre capable d'avoir des idées claires ; & j'ose me flatter par avance que ceux qui liront ces Ouvrages, me sçauront gré de leur en avoir donné la connoissance ; & quoiqu'un Livre de Métaphysique semble ne convenir guères entre les mains d'un Officier, j'en sçais qui en font un aussi bon usage que des Commentaires de Cesar.



NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUE.

DIXIÈME PARTIE.

Qui traite de l'Equilibre & du Mouvement des Liqueurs.

DEFINITIONS.

I.

839. **N**ous avons nommé *Corps fluides* tous ceux dont les parties se divisent, & qui étant divisées, se réunissent & se mettent facilement dans le même état qu'auparavant.

Par exemple, l'*Air*, la *Flamme*, l'*Eau*, le *Mercur*, & les autres Liqueurs, sont des corps fluides.

REMARQUE I.

840. Il faut prendre garde que tout liquide est fluide; mais que tout fluide n'est pas liquide: car le corps liquide est celui qui étant mis dans un vase, sa superficie se met de niveau, c'est-à-dire, que tous les points de cette superficie sont également éloignés du centre de la Terre, comme nous le ferons voir ailleurs, au lieu que le sable qui peut aussi passer pour un fluide, à cause que ses parties se separent aisément, ne se met pas de niveau, quand on en remplit un vase.

REMARQUE II.

841. Ce qui fait que les corps liquides se laissent traverser aisément, c'est que leurs parties sont détachées les unes des autres, & sont dans un continuel mouvement.

T t t ij

autrement elles composeroient un corps dur : car la différence du corps dur au corps liquide , vient de ce que les parties du corps dur sont en repos & unies les unes aux autres , au lieu que celles du corps liquide ne se retiennent point les unes les autres , & sont dans un continuel mouvement : aussi voyons-nous que quand les parties d'un corps liquide cessent de se mouvoir , elles composent un corps dur , comme il arrive aux liqueurs , lorsque le froid les a gelées.

Si l'on demande pourquoi les parties qui composent une liqueur , sont dans un extrême mouvement : je réponds que je n'en sçai pas d'autre raison que celle que donne M. Descartes , qui croit que dans l'eau , aussi-bien que dans l'air , il y a une matiere subtile , qui remplit les intervalles que les parties des fluides laissent entr'elles , & que cette matiere étant dans un continuel mouvement , elle met aussi en mouvement les petites parties du fluide qu'elle environne : de sorte que si le mouvement de cette matiere venoit à diminuer considerablement , ou à cesser tout-à-fait , le corps fluide deviendrait dur , comme il arrive à l'eau lorsqu'elle se gele ; ainsi l'on peut conjecturer que lorsqu'un corps dur devient liquide , comme il arrive aux métaux que l'on fond , leurs parties ne sont mises en mouvement que par cette matiere subtile qui s'introduit dans leurs intervalles.

II.

La pesanteur *specifique* des liqueurs , est celle qui procede de la densité des parties de la liqueur , ou de quelque autre cause , par laquelle une liqueur pese plus qu'une autre de pareil volume.

Par exemple , un ponce cube de mercure pese plus qu'un ponce cube d'eau : ainsi l'on peut dire que la pesanteur *specifique* de l'eau est plus grande que celle de l'air.

III.

843. Les corps fluides peuvent être sans ressort ou à

ressort comme les corps durs. L'on dit qu'ils sont à ressort, lorsque par la compression l'on en chasse la matière qui tenoit leurs parties écartées; mais aussi-tôt que la compression cesse ou diminue, la matière qui en avoit été chassée rentre entre les parties du fluide, & lui rend son premier volume, comme l'air qui est un fluide qui a du ressort, au contraire, les fluides qui ne peuvent être réduits par la compression en un moindre volume, sont sans ressort sensible, comme l'eau & la plupart des autres liqueurs.

IV.

844. Lorsque la surface d'une liqueur est horizontale, l'on dit que cette liqueur est de niveau.

COROLLAIRE I.

845. Il suit que lorsqu'un corps fluide est contenu dans un vase, sa surface supérieure se met toujours de niveau; car si l'on suppose que la surface du fluide contenu dans le vase cubique ABCD, soit divisée en un grand nombre de parties égales, & que l'on imagine des plans perpendiculaires à l'horizon, tirez par toutes ces divisions, le fluide sera divisé en autant de colonnes égales qu'il y a de divisions dans la surface: mais comme ces colonnes ont toutes des hauteurs & des bases égales, elles peseront également, & tendront au centre de la Terre avec une force égale; par conséquent la surface supérieure AB sera de niveau, puisque tous ses points seront également distans du centre de la Terre.

PLANCHE 33.
Fig. 410.

COROLLAIRE II.

846. Pour considérer les liqueurs dans l'état de l'équilibre, ce n'est pas assez que leurs superficies soient de niveau, il faut encore faire voir que si elles sont de niveau, il s'ensuit que leurs colonnes sont en équilibre, c'est-à-dire, que la colonne EFGH est en équilibre avec la colonne GHIK, & celle-ci avec la colonne IKLM;

car pour que la surface EG de la première colonne soit de niveau avec la surface GI de la seconde, il faut qu'elles se contre-balancent mutuellement ; autrement si la première l'emporte par son poids sur la seconde, la surface de cette seconde sera plus élevée que celle de la première, puisque la première colonne ne pourroit être plus pesante que la seconde, sans qu'elle ne fassé monter la seconde ; ce qui ne pourra se faire sans que la première ne descende : mais dans ce cas la surface de la seconde colonne se trouvant plus élevée que celle de la première, ne pourra se maintenir dans cette situation, parce que n'étant pas soutenue par les côtes, elle retombera à la place qu'aura laissée la première colonne en baissant : ainsi elle se mettra de niveau : ce qui rendra ces deux colonnes dans le même état qu'elles étoient auparavant, de même la seconde colonne GHIK ne peut par son poids faire monter la troisième IKLM, puisque la surface IL ne peut monter sans que la surface GI ne descende ; mais le fluide de la seconde colonne étant de même nature que celui de la troisième, & ces colonnes étant d'ailleurs égales, il n'y a pas de raison que l'une l'emporte sur l'autre ; & s'il étoit possible que cela se pût faire, il arriveroit encore qu'une colonne ne pourroit faire monter l'autre sans qu'elle ne baissât elle-même, & pour lors leurs surfaces ne seroient plus de niveau ; ce qui est contraire à la quatrième définition. Donc pour qu'une liqueur soit à niveau, ce n'est pas assez que la surface en soit horizontale, il faut de plus que ses colonnes se contre-balancent & se soutiennent mutuellement, non seulement en s'appuyant contre les côtes du vase, mais encore en faisant effort sur son fond pour s'élever mutuellement, comme feroient deux poids égaux aux extrémités d'une balance appuyée sur le fond du vase. C'est ainsi que l'eau versée sur de l'huile dans un vase, l'y force de monter, l'eau plus pesante que l'huile l'emportant sur elle dans le contre-balancement de leurs colonnes, quoiqu'égales ; l'emportant, dis-je, par son plus grand poids, & non
par

par la force de sa chute en la versant ; autrement de l'huile versée ainsi sur de l'eau , devroit de même la faire monter : ce qui est contraire à l'expérience , au lieu que le cas de l'huile élevée par l'eau versée sur elle y est conforme.

COROLLAIRE III.

847. Donc si l'on a un vase composé de deux cylindres ABCD & EFGH unis ensemble , l'ayant rempli d'eau , les colonnes , comme LM , qui répondent aux côtes AE & FD , sont dans un effort continuel contre ces mêmes côtes , pour monter jusqu'au niveau GH de la liqueur ; car la colonne IK étant plus grande que LM , elle fait effort contre cette dernière , qui cherche à s'échapper par le côté FD , laquelle fait autant d'effort pour sortir , que la colonne IN en feroit sur la base du cylindre EGHF , s'il étoit séparé de l'autre ABCD ; de sorte que si la colonne IN pesoit 4 livres sur la base que nous imaginons , la colonne LM fera un effort de 4 livres contre le côté FD du vase. Fig. 411

De même ayant un vase AEFD , dont les côtes BE & CF soient inclinées à l'horison , & forment ensuite un cylindre ABCD , si l'on remplit ce vase de telle liqueur que l'on voudra , toutes les colonnes , comme GH , sont dans un effort continuel contre les côtes inclinées , parce que les colonnes , comme IL & MN , qui répondent à ces côtes , étant plus petites que celle du milieu , elles font effort pour sortir , & se mettre au niveau des plus grandes : ainsi d'autant MN est plus petite que IL , d'autant la première fait plus d'effort que la seconde contre le côté BE ; de sorte que si l'on faisoit un trou vertical à l'endroit I , & un autre à l'endroit M , l'on verroit monter l'eau en O & en P , pour se mettre au niveau AD des plus grandes colonnes , si l'air ne résistoit pas ; ce qui est conforme à l'expérience. Fig. 412

L'expérience fait voir aussi que telle direction que l'on puisse donner à l'eau que l'on fait écouler par les trous

V u u

d'un vase, qu'elle en sort toujours avec la même force : que les trous soient horifontaux ou verticaux , pourvû qu'ils soient également éloignez de la surface de la liqueur ; ce qui prouve que les liqueurs en general font des efforts égaux pour s'échapper des vases où elles sont contenuës. M. Varignon est le seul que je sçache qui ait donné une raison mécanique de cette experience , les autres s'étant contentez de voir l'effet sans en chercher la cause.

PROPOSITION PREMIERE.

Théoreme.

848. *Si l'on verse une liqueur , par exemple , de l'eau dans un tuyau recourbé ou siphon , je dis que la surface de cette liqueur se mettra de niveau dans les deux branches du siphon.*

DEMONSTRATION.

Fig. 413.

1°. Si les deux branches du siphon sont d'égale grosseur , il est aisé de prouver que la surface de la liqueur dans chaque tuyau se trouvera renfermée dans une ligne droite horifontale AB ; puisque les colonnes de la liqueur contenuës dans chaque tuyau , se trouveront dans le même cas que si elles étoient comprises dans un vase , c'est-à-dire , de se contre-balancer également , sans faire plus d'effort l'une que l'autre pour baisser ou hausser ; car les côtez LM & NO du tuyau font le même effet pour contenir la liqueur , que le feroient les colonnes LMPQ & R N Q O , si les deux colonnes LH & NK étoient , aussi bien que les précédentes , renfermées dans un seul vase AHBK ; mais selon cette supposition , les colonnes LH & NK seroient en équilibre * , & auroient leur surface de niveau ; par conséquent si l'on supprime toutes les colonnes d'eau qui seroient entre ces deux-ci , & qu'à la place l'on substituë les côtez LM & NO du siphon , l'eau restera de niveau dans les deux tuyaux. *Ce qu'il falloit démontrer*

* Art. 846.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Pour démontrer ceci par les vitesses, supposons que la surface AL soit descendue de A en C, par exemple, de 4 pouces : cela étant, la surface NB sera montée de N en E aussi de 4 pouces, puisque les deux tuyaux sont d'égale grosseur : ainsi la quantité de mouvement du fluide dans le premier tuyau, est égale à la quantité du mouvement du fluide dans le second tuyau ; par conséquent ils sont en équilibre, & leurs surfaces sont de niveau.

COROLLAIRE I.

849. Il suit que si l'on a un siphon, dont la grosseur Fig. 414. des branches soit inégale, la liqueur qui sera versée dans le siphon se mettra encore de niveau dans les deux branches ; car si, par exemple, la branche IK est trois fois plus grosse que la branche GH, il y aura trois fois plus de liqueur dans la grosse branche que dans la petite. Or si l'on imagine que l'eau de cette branche soit partagée en trois colonnes égales, il y en aura une, comme, par exemple, OLPM, qui sera en équilibre avec celle du petit tuyau, puisqu'on suppose qu'elles ont des bases égales. Or étant en équilibre, leurs surfaces seront de niveau ; mais la colonne OLPM est en équilibre avec la colonne NLME ou NFBK, & par conséquent de niveau entr'elles : elles seront donc aussi de niveau avec la colonne du petit tuyau.

Pour prouver ceci par les vitesses, considérez que si la surface de l'eau du petit tuyau est descendue de A en C de 3 pouces, par exemple, elle sera montée de B en E d'un pouce dans le grand tuyau, puisque la base du grand tuyau est triple de celle du petit ; ainsi les vitesses seront réciproques à leurs masses, & par conséquent l'eau sera en équilibre de part & d'autre, & les surfaces de niveau.

V u u ij

COROLLAIRE II.

Fig. 415. 850. Mais si le tuyau avoit une branche perpendiculaire à l'horison, & l'autre inclinée comme dans le siphon ABC, la liqueur que l'on versera dans l'un des tuyaux, se mettra encore de niveau dans l'autre ; car si les deux branches de ce siphon sont d'égale grosseur, & que la ligne EG passe par la surface de la liqueur dans chaque tuyau, l'eau de la branche perpendiculaire sera à celle de la branche oblique, comme EB est à BG ; mais l'eau de la branche inclinée n'agit pas sur la base B avec toute sa pesanteur absolue ; & considérant que cette liqueur est appuyée sur un plan incliné, l'on pourra dire que la pesanteur relative de la liqueur est à sa pesanteur absolue, comme la hauteur GD du plan incliné est à sa longueur GB ; & comme nous avons vu que les liqueurs de chaque tuyau étoient comme EB est à BG, il s'ensuit que les hauteurs EB & GD étant égales, l'eau du siphon est en équilibre, & que par conséquent elle est de niveau ; ce que l'on démontrera encore, quand même les branches du siphon seroient d'inégale grosseur.

COROLLAIRE III.

Fig. 414. 851. Il suit encore que l'eau qui est dans le canal HSTP, fait autant d'effort contre les côtes du même canal pour s'échapper, que l'eau de chaque tuyau en fait sur la base TV, qui seroit celle du cylindre, parce que l'eau des petites colonnes QTRP tend à se mettre de niveau avec la surface de la liqueur de chaque branche ; aussi l'expérience montre-t-elle que si l'on fait un petit trou vertical au canal d'un siphon, qu'elle monte presque à la hauteur de l'eau des branches.

PROPOSITION II.

Théoreme.

Si l'on met dans les deux branches d'un siphon des liqueurs de différentes pesanteurs, je dis que les hauteurs de ces liqueurs dans les tuyaux, seront entr'elles dans la raison reciproque de leur pesanteur spécifique.

D E M O N S T R A T I O N .

852. Si l'on verse du mercure dans le siphon ABCH, il se mettra de niveau dans les deux branches, comme toutes les autres liqueurs. Or si l'on suppose que la ligne horizontale DE marque le niveau du mercure, & qu'ensuite l'on verse de l'eau dans la branche AB jusqu'à la hauteur G, il est évident que le mercure de cette branche cessera d'être de niveau avec celui de l'autre branche, aussi-tôt qu'on y aura versé de l'eau, & que s'il est descendu de D en I de 2 pouces dans la première branche, il sera monté de E en F aussi de 2 pouces dans la seconde. Presentement si l'on tire la ligne horizontale IL, l'on voit évidemment que le mercure IB de la première branche est en équilibre avec le mercure LC de la seconde. Or si l'eau se maintient en repos à la hauteur G, & le mercure à la hauteur F, il s'ensuit que l'eau GI est en équilibre avec le mercure FL, si les branches du siphon sont d'égale grosseur, & que d'autant la colonne GI est plus haute que FL, d'autant la pesanteur spécifique du mercure est plus grande que celle de l'eau, & que par conséquent la pesanteur spécifique de ces deux liqueurs est en raison reciproque de leurs hauteurs.

Fig. 416.

C O R O L L A I R E .

853. Il suit que si une des branches AB du siphon étoit plus grosse que l'autre DC, le mercure qui seroit dans la grosse branche sera encore en équilibre avec l'eau de la petite.

Fig. 417.

V u u iij

Si après avoir tiré l'horizontale FG la hauteur EF du mercure est à la hauteur HK de l'eau dans la raison reciproque de la pesanteur spécifique de ces deux liqueurs ; car si l'on imagine une colonne LF de mercure , dont la base soit égale à celle du tuyau DC , cette colonne sera en équilibre avec la colonne d'eau HK. Or si le tuyau AB est cinq fois plus gros que DC , la quantité de mercure EI contiendra cinq colonnes comme LF , qui seront toutes en équilibre entr'elles , aussi-bien qu'avec la colonne HK : ainsi il en sera de la proposition précédente pour l'équilibre des liqueurs différentes dans des tuyaux d'inégale grosseur , la même chose que dans l'article 849. soit que la liqueur la plus pesante se trouve dans le gros tuyau , ou dans le petit.

PROPOSITION III.

Théoreme.

- Fig. 418. 854. 1°. Si un corps dur est mis dans un fluide de même pesanteur spécifique , il y demeurera entièrement plongé , à quelque hauteur qu'il se trouve.
 2°. S'il est d'une pesanteur spécifique plus grande que celle du fluide , il ira au fond du vaisseau.
 3°. S'il est d'une pesanteur spécifique moindre que celle du fluide , il n'y aura qu'une partie du corps qui s'enfoncera , & l'autre partie restera au dessus de la surface du fluide.

DEMONSTRATION DU PREMIER CAS.

Si l'on a un vase ABCD , rempli de telle liqueur que l'on voudra , par exemple , de l'eau , & qu'on y plonge un corps E , dont la pesanteur soit égale à celle du volume d'eau , dont il occupe la place , il est constant que ce corps demeurera en équilibre ; c'est-à-dire , en repos , sans monter ni descendre , quelque situation qu'on lui donne ; car il a autant de force que le volume d'eau qui seroit

à sa place, pour tendre au centre de la Terre : mais les parties de l'eau sont en équilibre avec toutes celles de la même eau qui les environne ; ainsi le corps E tenant lieu d'une certaine quantité d'eau, dont il occupe la place, fera donc en équilibre avec toute celle du vaisseau, & demeurera entièrement plongé & en repos, à quelque hauteur qu'on le mette. *C. Q. F. D.*

DEMONSTRATION DU SECOND CAS.

Si le corps F plongé dans le même vase, est plus pesant que le volume d'eau, dont il occupe la place, il est aisé de concevoir qu'il descendra au fond de l'eau ; car il rendra avec plus de force au centre de la Terre, qu'un pareil volume d'eau : ainsi il ne sera plus en équilibre avec les autres parties de l'eau dont il est environné, & ira par conséquent au fond du vaisseau. *Ce qu'il falloit démontrer.*

DEMONSTRATION DU TROISIÈME CAS.

Si le corps G est plus léger qu'un pareil volume d'eau, l'on voit évidemment qu'il doit arriver tout le contraire du cas précédent, c'est-à-dire, qu'au lieu d'aller au fond de l'eau, il doit nager sur la surface, & ne s'enfoncer qu'en partie dedans, qui sera, par exemple, la partie IKMN qui occupe un volume d'eau égal en pesanteur à tout le corps G ; car si, par exemple, ce corps ne pèse que la moitié d'un pareil volume d'eau, la partie enfoncée fera la moitié du corps, & l'eau que cette moitié occupe étant d'une égale pesanteur que tout le corps, ils tendront également au centre de la Terre, & seront par conséquent en équilibre, quoique le corps ne soit pas entièrement plongé dans l'eau. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

855. Il suit du premier cas, que si une puissance Q veut sortir de l'eau un poids E attaché à une corde, si le poids est égal à la pesanteur spécifique de l'eau que

la puissance ne s'appercevra de la pesanteur du poids, que lorsqu'il commencera à sortir de l'eau, puisque tant qu'il sera plongé dedans, elle n'en soutiendra aucune partie; & c'est la raison qui fait que lorsque l'on tire de l'eau d'un puit, la puissance ne fait presque point d'effort pour soutenir le vaisseau plein d'eau, tant qu'il est plongé dedans, parce qu'elle ne soutient aucune partie de l'eau qui est dans le vaisseau, & que le vaisseau lui-même, quand il est de bois, est à peu près égal à la pesanteur spécifique de l'eau, au lieu qu'étant entièrement dehors, l'effort de la puissance devient égal au poids de l'eau & de celui du vaisseau.

COROLLAIRE II.

856. Il suit du second cas, que si une puissance Q soutient un corps O plongé dans l'eau, & que la pesanteur spécifique du corps soit plus grande que celle de l'eau, cette puissance ne soutiendra qu'une partie de la pesanteur du corps, qui sera la différence de sa pesanteur spécifique à celle du volume d'eau dont il occupe la place, parce que ce corps pèse moins dans l'eau que dans l'air du poids d'un pareil volume d'eau: ainsi l'on peut dire en general que les corps plus pesans que l'eau perdent de leur pesanteur, lorsqu'ils sont plongez dedans; & cela dans la raison de la gravité spécifique du corps à celle de l'eau, qui est un principe dont nous avons déjà parlé dans l'article 667.

COROLLAIRE III.

857. Il suit du troisième cas, que quand un corps est plus léger qu'un pareil volume d'eau, la pesanteur spécifique de l'eau est à celle du corps, comme le volume de tout le corps est à sa partie enfoncée: ainsi supposant que le corps G soit un cube ou un parallelepipedé, la pesanteur spécifique de l'eau sera à celle de ce corps, comme HK est à IK .

COROL.

COROLLAIRE IV.

858. Il suit aussi qu'un corps s'enfonce différemment dans les liqueurs dont les pesanteurs spécifiques sont différentes, étant certain qu'il s'enfoncera davantage dans une liqueur d'une certaine pesanteur spécifique, que dans une autre qui seroit plus pesante; par exemple, l'on voit qu'un vaisseau chargé s'enfonce plus dans une rivière que dans la mer, parce que l'eau des rivières est moins pesante que celle de la mer : ainsi il ne faut pas s'étonner s'il est arrivé quelquefois qu'un vaisseau après avoir cinglé heureusement en pleine mer, s'est perdu & coulé à fond en arrivant à l'embouchure de quelque rivière d'eau douce.

COROLLAIRE V.

859. L'on peut encore remarquer que quoique les métaux soient plus pesans que l'eau, cela n'empêche pas qu'ils ne puissent nager sur l'eau; car s'ils composent des corps creux, dont la pesanteur spécifique soit moindre que celle du volume d'eau dont ils occupent la place, ils surnageront sans couler à fond.

REMARQUE.

860. Nous avons déjà dit dans l'art. 667. que les métaux perdoient de leur pesanteur, lorsqu'ils étoient plongez dans l'eau : & comme c'est ici l'endroit d'en faire voir la raison, l'on remarquera qu'il n'y en a pas d'autre que celle qui fait qu'un corps étant plongé dans l'eau, est plus léger qu'il n'étoit dans l'air de toute la pesanteur spécifique de l'eau dont il occupe la place. Ainsi l'on pourra toujours trouver la raison de la pesanteur spécifique d'un métal avec celle de l'eau, ou de toute autre liqueur, en pesant dans l'air avec des justes balances une pièce de métal; ensuite on l'attachera à l'un des bras ou bassins de la balance avec un fil de soye, pour voir après que le métal sera plongé dans l'eau, combien il pesera de moins; & la différence sera celle de la pesanteur spécifique de ce métal à celle de l'eau.

X x x

C'est en suivant ce que l'on vient de dire, qu'on a trouvé que l'Or perd dans l'Eau environ la dix-neuvième partie de son poids, le Mercure la quinzième, le Plomb la douzième, l'Argent la dixième, le Cuivre la neuvième, le Fer la huitième, & l'Etain la septième.

En suivant le même principe, on peut sçavoir aussi le rapport des pesanteurs spécifiques des Liqueurs entre-elles, & des Métaux entr'eux; & par conséquent des Liqueurs avec les Métaux : par exemple, le rapport du poids d'un ponce cube d'Or avec celui d'un ponce cube de Mercure; & c'est ainsi que l'on a trouvé la pesanteur d'un ponce cube des Métaux & des Liqueurs contenus dans la Table suivante.

Poids d'un ponce cube.

<i>Matieres.</i>	<i>Onc.</i>	<i>Gros.</i>	<i>Gr.</i>	<i>Matieres.</i>	<i>Onc.</i>	<i>Gros.</i>	<i>Gr.</i>
Or.	13	2	17	Marbre blanc.	1	6	0
Mercure.	8	6	8	Pierre de taille.	1	2	24
Plomb.	7	3	30	Eau de Seine.	0	5	12
				Vin.	0	5	5
<i>Matieres.</i>	<i>Onc.</i>	<i>Gros.</i>	<i>Gr.</i>	<i>Matieres.</i>	<i>Onc.</i>	<i>Gros.</i>	<i>Gr.</i>
Argent.	6	5	25	Cire.	0	4	65
Cuivre.	5	6	36	Huile.	0	4	43
Fer.	5	1	27	Chêne sec.	0	4	22
Etain.	4	6	14	Noyer.	0	3	6

L'on peut encore par ce principe mesurer la solidité d'un corps irregulier; car si ce corps pese 90 livres dans l'air, & que dans l'eau il n'en pese que 80, c'est une marque que le volume d'eau, dont il occupe la place, pese 10 liv. ainsi il ne s'agit que de sçavoir combien 10 livres d'eau valent de ponces cubes: ce que l'on trouvera, en disant: Si 70 livres valent un pied cube d'eau, ou 1728 ponces, combien vaudront 10 livres; l'on trouvera 246 ponces & $\frac{6}{7}$ pour la solidité du corps.

*APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENS
à la Navigation.*

861. Quand on fait des transports de munitions de guerre par des bateaux, comme cela arrive souvent, lorsqu'on a la commodité des rivières ou des canaux, & que ces munitions peuvent être accompagnées de gros fardeaux; par exemple, comme du Canon, des Affûts, en un mot tout ce qui compose un équipage d'Artillerie, & qu'un Officier qui a un peu de détail, n'ignore pas le poids des munitions dont il est chargé, il faut faire voir ici comme il pourra estimer la charge que les bateaux peuvent porter, afin de sçavoir combien il lui en faudra, si l'on n'avoit égard qu'aux poids des munitions, sans s'embarasser du volume.

Comme le pied cube d'eau douce pèse environ 70 livres, & qu'un pied cube de bois de chêne ne pèse qu'environ 58, l'on voit qu'un bateau pourroit être rempli d'eau, sans pour cela couler à fond, parce que l'eau qui seroit dedans est en équilibre avec celle du dehors, & que la pesanteur spécifique du bois qui compose le bateau, est plus petite que celle de l'eau. L'on peut donc mettre dans le bateau un poids équivalent à celui de l'eau qu'il peut contenir. Or si l'on mesure la capacité du bateau, & qu'on la trouve, par exemple de 4000 pieds cubes, ce bateau pourra porter 4000 fois 70 livres, parce que nous avons dit qu'un pied cube d'eau pèse 70 livres: ainsi le bateau portera 280000 livres; mais comme l'usage sur les Ports de mer est d'estimer la charge des vaisseaux par tonneaux, & la charge des bateaux sur les rivières par quintaux, l'on sçaura que le tonneau est un poids de 2000 livres, & que le quintal est un poids de 100 livres: ainsi quand l'on dit en terme de Marine, qu'un vaisseau porte 100 tonneaux, ou est de 100 tonneaux, cela veut dire qu'il peut porter 200000 livres, ou 2000 quintaux.

Nous avons déjà dit que l'eau de la mer étoit plus
X x x ij

pesante que celle des rivières ; & comme on pourroit avoir besoin de connoître son poids , l'on sçaura que le pied cube pèse 73 livres, qui est 3 livres de plus par pied cube que l'eau douce.

Nous allons encore faire voir dans la Proposition suivante un principe de l'Equilibre des Liqueurs , qui est plus curieux qu'utile dans la Pratique : c'est pourquoi je n'en ai pas parlé plutôt ; mais comme il ne conviendrait pas de le passer sous silence , voici de quoi il est question.

PROPOSITION IV.

Théoreme.

862. *Si l'on a un vase plus gros par un bout que par l'autre , le remplissant de liqueur , cette liqueur aura autant de force pour sortir par une ouverture égale à sa base , que si cette ouverture étoit égale à celle d'en haut.*

DEMONSTRATION.

Fig. 411. Si l'on a un vase comme dans la Figure 411. plus large par la base BC que par le haut GH , il est aisé de concevoir que l'eau qui pèse sur la base BC fait autant d'effort , que si elle étoit chargée de toute l'eau du volume BOPC ; car nous avons fait voir que toutes les colonnes d'eau comme LM * , tendoient à monter à la hauteur GH ou OP , qui est la même chose , & que l'effort qu'elle faisoit étoit exprimé par le poids de la petite colonne IN ; mais l'effort exprimé par IN , se fait également à l'endroit M de la base qu'à l'endroit L , à cause du perpétuel mouvement des parties qui composent les colonnes d'eau ; mais toutes les colonnes comme LM , indépendamment de l'effort exprimé par IN , font encore effort de tout le poids de leur hauteur LM. D'où il s'ensuit que la colonne LM pèse autant sur la base que la colonne IK , & que par conséquent la base est autant pressée par l'eau qui est dans le vase , que si elle étoit chargée de tout le volume BOPC. C. Q. F. D.

*Art. 847.

863. Si le vase a ses côtes inclinées, comme dans la Fig. 412. Figure 412. l'on démontrera de même que l'eau fait autant d'effort sur la base EF, que si elle étoit chargée de toute celle qui seroit contenue dans le volume cylindrique EQRF, qui a pour hauteur celle de l'eau du vase.

L'expérience prouve ceci encore mieux que tout le raisonnement que l'on peut faire ; car si l'on a un vase plus large par en bas que par en haut, & que le fond soit fermé par un piston qui ait la liberté de se mouvoir, sans cependant que l'eau puisse se répandre ; l'on voit, dis-je, que la puissance qui soutient ce piston a besoin d'une force égale au poids de l'eau qui seroit contenue dans ce vase, s'il étoit aussi large par en haut que par en bas, à cause de l'effort que les petites colonnes d'eau font pour se mettre au niveau des plus grandes ; mais quand l'eau vient à être gelée, & que ces parties ne sont plus en mouvement, elles ne font plus d'effort contre les côtes du vase, & la puissance n'a plus besoin d'une si grande force, parce que pour lors elle ne soutient plus que la pesanteur réelle de l'eau gelée.

864. Mais si le vaisseau étoit plus large par en haut que par en bas, comme est le vase ABCD, si on le remplit de liqueur, elle ne fera pas plus d'effort contre la base BD, que si la largeur d'en haut étoit égale à celle d'en bas ; car si l'on imagine le cylindre d'eau BDEF, il sera aisé de juger que comme l'eau pèse perpendiculairement, il n'y a que celle qui est contenue dans le cylindre qui fait effort contre la base BD, parce que celle qui est contenue autour du cylindre, ne pèse pas sur la base, mais seulement sur les côtes inclinées du vase.

COROLLAIRE.

865. Il suit de cette Proposition, que quelque forme que puissent avoir plusieurs vaisseaux perpendiculaires à l'horizon, & d'égales hauteurs, si ces vaisseaux ont des bases égales, & qu'ils soient remplis d'eau, les bases seront également chargées.

REMARQUE.

Fig. 420. 866. L'effort des liqueurs se mesure à la livre comme celui des poids dans la Mécanique ; & comme on peut sçavoir la pesanteur d'un pied cube de toutes sortes de liqueurs, particulièrement de celui de l'eau, qui pèse 70 livres, l'on trouvera toujours l'effort de l'eau sur le fond d'une base, en multipliant la capacité du fond par la hauteur perpendiculaire de l'eau du vase : ainsi ayant un vase ABC perpendiculaire à l'horison, & rempli d'eau jusqu'à l'ouverture A, voulant sçavoir l'effort que fait l'eau sur la base BC, nous supposons que cette base vaut 4 pieds quarrés, & que la hauteur perpendiculaire AD est de 40 pieds : ainsi multipliant 40 par 4, l'on aura 160 pieds cubes, qui étant multipliez par 70 liv. qui est la pesanteur d'un pied cube d'eau, il viendra 11200 livres, qui est l'effort que l'eau du vase ABC fait sur la base BC ; & ce qu'il y a de surprenant, c'est que si tout le vase ne contenoit qu'un pied cube d'eau, qui est équivalent au poids de 70 livres, il faudroit que la puissance Q qui voudroit soutenir le fond CD (supposant qu'il fût détaché du reste,) eût une force de 11200 livres, pour être en équilibre avec l'effort de l'eau sur la base BC.

CHAPITRE II.

Où l'on considère la force & la mesure des Eaux courantes & jaillissantes.

PROPOSITION V.

Théoreme.

867. Si l'on a un tuyau ABCD perpendiculaire à l'horison, & rempli de telle liqueur que l'on voudra ; comme, par exemple, de l'eau, sa vitesse par l'ouverture CD de la base sera exprimée par la racine quarrée de la hauteur perpendiculaire AC.

D E M O N S T R A T I O N .

Pour faciliter la démonstration de cette Proposition, Fig. 421.
 nous supposons que la hauteur AC est divisée en un grand nombre de parties égales, comme AE, EH, &c. & que toute l'eau est partagée en autant de petites lames égales ABGE, qu'il y a de parties, comme AE, dans la hauteur AC. Cela posé, il est clair que si la lame ABEG étoit seule, la vitesse qu'elle acquerreroit en tombant de AB en CD, seroit exprimée par la racine quarrée de la hauteur AC *. Il faut donc prouver que la lame KCLD, * Art. 715
 est dans le même état étant chargée de toutes les autres lames qui sont au-dessus, que si elle étoit tombée de AB en CD. Pour cela faites attention qu'un corps qui tombe reçoit à chaque instant de sa chute un nouveau degré de force ou de pesanteur *; de sorte qu'au second instant il pèse le double de ce qu'il pesoit au premier, le triple au troisième, ainsi de suite. Or si l'on suppose que la lame CKLD est chargée d'autant d'autres lames que la première ABEG a mis d'instans à tomber de A en C, la lame CKLD aura autant de force par la pesanteur que lui donnent toutes les autres, que la première ABEG en auroit reçu en tombant de A en C; mais la vitesse de cette dernière lame pour sortir par l'ouverture CD, lorsqu'elle y sera parvenue, est exprimée par la racine quarrée de la hauteur AC: par conséquent la lame KCLD, dont la pesanteur est équivalente à celle que la précédente auroit acquise en tombant, tendra aussi à sortir par l'ouverture CD avec une vitesse exprimée par la racine de la hauteur AC, qui est celle de la hauteur perpendiculaire de l'eau. C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E .

868. Il suit qu'ayant un tuyau ABC rempli d'eau, & Fig. 422.
 un trou à l'endroit D de la base, aussi-tôt qu'on l'aura ouvert, l'eau coulera avec une vitesse exprimée par la racine quarrée de la hauteur, puisque la colonne d'eau

AD, qui a pour base la grandeur du trou D, peut être considérée divisée en un grand nombre de petites lames, dont celle qui sera près du trou, sortira avec la même vitesse que celle qu'auroit acquise la première lame A en tombant de A en D, & l'eau sortira toujours avec la même vitesse, si elle demeure à la même hauteur; ce qui ne peut se faire qu'en substituant dans le tuyau autant d'eau qu'il s'en écoule; mais si on donne à l'eau la liberté de s'écouler, sans en remplacer d'autre, sa vitesse à la sortie du trou diminuera à chaque instant, à mesure que le tuyau se vuidera; & cela toujours dans la raison des racines quarrées des différentes hauteurs de l'eau: ainsi la vitesse dans le moment qu'elle étoit à la hauteur A, fera à la vitesse qu'elle aura, quand elle sera baissée à la hauteur G comme $\sqrt{AD}$ est à $\sqrt{GD}$.

COROLLAIRE II.

Fig. 422.
& 423.

869. Donc si l'on a deux tuyaux ABC & EFG de hauteurs inégales, & dont les ouvertures D & H soient égales, si l'eau de chaque tuyau sort en même tems, les vitesses de l'eau dans ces tuyaux, seront comme les racines quarrées des hauteurs AD & EH.

COROLLAIRE III.

870. Si les tuyaux sont d'égale grosseur, & que les trous D & H soient égaux, il suit aussi que les tems que ces tuyaux mettront à se vuidier, seront comme les racines quarrées des hauteurs de l'eau des tuyaux, puisqu'il est clair que la dépense des eaux est dans la raison de leurs vitesses.

COROLLAIRE IV.

871. Mais si l'on a deux tuyaux, dont les hauteurs soient inégales, aussi-bien que les trous D & H, les vitesses de l'eau, ou leurs dépenses, seront dans la raison composée des quarrés des diamètres des ouvertures (si elles sont circulaires) & des racines quarrées des hauteurs

teurs différentes de l'eau, puisqu'il n'y a point de doute que plus les ouvertures seront grandes, & plus la dépense de l'eau sera grande.

COROLLAIRE V.

872. Comme l'eau contenuë dans un vase, fait un effort égal contre ses côtez pour s'échapper, il suit encore que si l'on a un vase AD rempli d'eau, toujours entretenue à la même hauteur, que faisant deux trous B & C, que les vîteses de l'eau à la sortie, seront encore exprimées par les racines des hauteurs AB & AC, soit que l'eau à la sortie des ouvertures soit poussée selon les directions horisontales BE & CF, ou obliques BG & CH. Cependant il est à remarquer que les vîteses de l'eau selon les directions inclinées, ne sont pas si grandes en sortant, que selon des directions horisontales, ni si grandes que selon des directions perpendiculaires à l'horison, lorsqu'elle coule de haut en bas, parce que les parties de l'eau ne s'échappent pas si aisément selon des directions obliques, que selon celles qui feroient horisontales, ni ces dernières aussi aisément que celles qui tombent perpendiculairement à l'horison.

Fig. 424.

COROLLAIRE VI.

873. Il suit encore que si l'eau sort selon une direction BD parallèle à l'horison, le jet BGE de l'eau sera une parabole, qui aura pour sublimité la hauteur AB; car nous avons démontré* que si l'on a un demi-cercle AFC, dont le diamètre AC soit perpendiculaire à l'horison, si un corps étoit poussé selon une direction BD avec une force exprimée par la racine de AB (qui est celle qu'il auroit acquise en tombant de A en B) décriroit une parabole BGE, dont l'amplitude CE feroit double de la perpendiculaire BF. Or si l'on considère toutes les parties de l'eau comme autant de petits globes, qui sont tous poussés selon la direction BD avec une force exprimée par la ra-

Fig. 425.

*Art. 727.
& 728.

Y y

cine quarrée de la hauteur AB de l'eau, l'on verra qu'ils doivent décrire la parabole BGE.

Fig. 426.

De même si l'eau sort selon une direction CG avec une vitesse exprimée par la racine quarrée de la hauteur AC, que je suppose être celle de l'eau même, le jet décrira la parabole CEF, dont la sublimité sera la ligne AC, puisque nous avons aussi fait voir que le corps qui seroit poussé selon une direction CG oblique à l'horison avec une force exprimée par $\sqrt{AC}$, qui est ici la force de l'eau à sa sortie, décriroit une parabole.

R E M A R Q U E I.

Quoique nous ayons supposé que les vaisseaux dont nous venons de parler, fussent cylindriques, cela n'empêche pas que s'ils étoient de toute autre figure, les mêmes choses ne subsistassent également.

Toricelli, M. Mariotte & plusieurs autres, ayant reconnu par des expériences que les vitesses de l'eau étoient dans la raison des racines quarrées de leurs hauteurs, ont conclu que la cause de cet effet venoit de ce que les parois de l'eau acceleroient en venant de la surface pour sortir par le trou du vaisseau; mais ils se sont trompez: car l'eau de la surface n'est pas celle qui sort d'abord par le trou, elle n'y arrive qu'à son tour, après que celle qui est au fond est sortie.

R E M A R Q U E II.

Fig. 427.

Si l'on a un réservoir ABCD, & qu'à l'endroit D soit une ouverture qui réponde au tuyau recourbé DE, aussi haut que le réservoir; il est constant que si l'on remplit d'eau le réservoir, elle montera dans le tuyau à la même hauteur E, puisque le réservoir & le tuyau composent ensemble une espèce de siphon, & que par conséquent à quelque hauteur que soit l'eau dans le réservoir, elle montera toujours à la même hauteur dans le tuyau *.

Art. 849.

ainsi l'eau d'une fontaine pourra monter à la hauteur de sa source, quand elle sera contenue dans un tuyau, mais

il n'en sera pas de même quand la hauteur du tuyau sera Fig. 428.
beaucoup plus petite que celle de la source ; par exemple, si l'on a un vaisseau GB avec un tuyau recourbé BC, dont l'ouverture C soit parallèle à l'horison, & que le vaisseau GB soit toujours plein d'eau, celle qui sortira par C, pour former un jet, ne montera pas à la hauteur AB du réservoir, parce que l'air résiste contre les petites parties de l'eau, à mesure qu'elles sortent du trou C, lequel on nomme *Ajutage*. Or M. de Mariotte a fait voir dans son *Traité du Mouvement des Eaux*, que les jets dont les ajutages étoient égaux, diminuoient de leur hauteur, selon la raison des quarrés de celles des réservoirs.

M. de Mariotte a trouvé aussi qu'ayant un réservoir GB, toujours rempli d'eau, & dont la hauteur AB étoit de 13 pieds, & le diamètre de l'ajutage C de 3 lignes, il sort en une minute par l'ajutage C 14 pintes d'eau, mesure de Paris, la pinte pesant deux livres : ainsi étant prévenu de cette règle, il sera facile de résoudre le Problème suivant.

PROPOSITION VI.

Problème.

874. *Trouver la dépense d'un jet d'eau pendant une minute par un ajutage de 4 lignes de diamètre, l'eau du réservoir étant de 40 pieds de hauteur.*

Nous sçavons que lorsque les ajutages sont égaux, la dépense des eaux est dans la raison des racines quarrées des hauteurs différentes de l'eau, & que quand les ajutages sont inégaux, les dépenses de l'eau sont dans la raison composée des racines quarrées des hauteurs de l'eau, & des quarrés des diamètres des ajutages : ainsi en nous servant de l'expérience de M. Mariotte, l'on pourra dire : Si le produit du quarré de 3 lignes, qui est 9, par la racine quarrée de 13, donne 14 pintes pour la dépense de l'eau pendant une minute, combien donnera le produit

Y v v ij

du carré du diamètre de l'ajutage de 4 lignes, qui est 16, par la racine carrée de 40., pour la dépense de l'eau pendant le même tems, l'on trouvera par la règle de proportion un quatrième terme qui fera la quantité des pintes d'eau que l'on demande.

CHAPITRE III.

Où l'on considère le mouvement & le choc des Eaux.

PROPOSITION VII.

Théoreme.

875. **S**I l'on a deux surfaces égales exposées perpendiculairement au courant de deux fluides homogènes, qui aient des vitesses inégales, les chocs de ces fluides contre ces surfaces seront entr'eux comme les quarrés de leurs vitesses.

DEMONSTRATION.

Fig. 429.
430. &
431.

Supposant que les Figures 429. & 430. soient deux parties d'Aqueducs, que BC & TV représentent des surfaces égales à LM, il faut démontrer que l'eau rencontrant ces surfaces selon des directions perpendiculaires avec des vitesses inégales, les chocs de l'eau seront dans la raison des quarrés de leurs vitesses.

Si l'on imagine deux lames d'eau GH & RS, que je suppose verticales, parallèles & égales aux surfaces BC & TV, comme feroit, par exemple, LM, & que ces lames d'eau soient également éloignées des surfaces BC & TV, il est évident que ces deux lames étant égales, que venant de G en B, & de R en T avec des vitesses différentes, elles choqueront les surfaces opposées dans la raison de leurs vitesses. Or si la vitesse de la lame RS est triple de l'autre GH, & qu'il lui faille une seconde pour venir de R en T d'un mouvement uniforme, il faudra trois se-

condes à la lame GH pour aller de G en B : ainsi la lame RS aura choqué la surface TV dans le moment que GH fera arrivé de G en I , & le courant de l'eau continuant toujours de part & d'autre une seconde lame encore comme RS aura frappé la surface TV dans le moment que la lame GH sera arrivée de I en K : enfin une troisième lame aura frappé la surface TV dans le moment que GH fera arrivé de K en B pour frapper la surface BC ; ainsi cette surface n'aura été frappée que par une lame dans le tems que la surface TV aura été choquée par trois lames ; ce qui fait voir que la quantité d'eau dont ces deux surfaces sont frappées dans le même tems , sont dans la raison des vitesses du courant : mais nous avons dit aussi que le choc des lames GH & RS étoit dans la raison des vitesses : ainsi l'on peut dire en general que les chocs de l'eau contre des surfaces égales , sont dans la raison doublée des vitesses & des quantitez d'eau qui choquent en même tems , ou , ce qui est la même chose , comme les quarrés des vitesses de l'eau. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

876. Si les vitesses de l'eau sont égales , & que les surfaces qu'elles rencontrent soient inégales les chocs perpendiculaires à ces surfaces seront dans la raison des surfaces mêmes.

COROLLAIRE II.

877. Si les surfaces sont inégales , aussi-bien que les vitesses de l'eau , les chocs seront dans la raison composée des quarrés des vitesses de l'eau & des surfaces opposées , ou comme les produits des quarrés des vitesses de l'eau par la valeur des surfaces.

COROLLAIRE III.

878. Si l'on a une surface TV perpendiculaire , & une autre NO oblique au courant , & que les lames d'eau RS & AB soient égales , de même que leurs vitesses , le

Fig. 43.
& 43b.

V v v iii

choc contre la surface perpendiculaire sera à celui contre la surface oblique, comme le quarré du sinus total est au quarré du sinus de l'angle d'incident de la surface oblique ; car si CD exprime le choc de l'eau contre la surface perpendiculaire faisant le parallelogramme rectangle EF, le côté CF exprimera la force de l'eau contre la surface oblique NO : ainsi les chocs seront comme $\overline{CD}$ est à $\overline{CF}$.

COROLLAIRE I V.

Fig. 432.
& 433.

879. Si les surfaces sont toutes deux obliques au courant, les chocs de l'eau seront dans la raison des quarrés des sinus des angles d'incidens ; c'est-à-dire, qu'ayant les deux surfaces obliques NO & PQ, leurs chocs seront comme les quarrés des perpendiculaires CF & IM, en supposant toujours les vîteses de l'eau égales.

REMARQUE.

M. de Mariotte ayant fait plusieurs experiences pour mesurer le choc de l'eau, a trouvé que l'eau ayant un pied de vîtesse par seconde, fait un effort d'une livre & demie contre une surface d'un pied quarré. Or pour se servir de cette experience à l'égard du choc que l'eau fait contre une surface, il faut avoir une Pendule ou une Montre qui marque les minutes bien exactement ; ensuite attacher au bout d'un fil de soye un corps fort léger, comme, par exemple, un morceau de liege, qu'il faudra faire surnager dans le milieu du courant de l'eau, marquer un piquet à l'endroit où le corps aura commencé à suivre le courant, & faire en sorte d'accompagner ce corps le long du bord de l'eau ; & quand on aura parcouru une longueur raisonnable, on prendra garde combien il se sera écoulé de minutes depuis le moment qu'on sera parti jusqu'à l'endroit où l'on aura cessé d'accompagner ce corps ; & supposant qu'on ait mis 3 minutes, on mesurera bien exactement le chemin qu'a fait le corps

pendant ce tems, que je suppose être, par exemple, de 120 toises. Or pour sçavoir le chemin que le corps a parcouru pendant une seconde, je multiplie 60 par 3, pour avoir 180 secondes (parce qu'une minute vaut 60 secondes) & voulant connoître la vîtesse de l'eau pendant une seconde, je réduis les toises en pieds pour avoir 720 pieds, que je divise ensuite par 180 secondes, qui donnent 4 au quotient : ainsi la vîtesse de l'eau pendant une seconde sera de 4 pieds.

PROPOSITION VIII.

Problème.

880. *Connoissant la vîtesse de l'eau, trouver le choc de cette eau contre une surface donnée.*

Nous servant de l'expérience de M. de Mariotte, rapportée dans la Remarque précédente, on demande quel est le choc de l'eau contre une surface de 20 pieds quarrés, en supposant que cette eau a 4 pieds de vîtesse par seconde. Pour cela il faut se rappeler que les chocs de l'eau avec des vîtesses différentes contre des surfaces inégales & perpendiculaires au courant, font comme les produits des quarrés des vîtesses par les surfaces opposées. L'on pourra donc dire : Si le quarré d'une seconde, qui est 1, multiplié par une surface de 1 pied, qui est encore 1, donne une livre & demie pour l'effort de l'eau contre la surface d'un pied quarré, que donnera le produit du quarré de la vîtesse de 4, qui est 16, par la surface de 20 pieds quarrés, qui est 320 pour le choc de l'eau contre la surface de 20 pieds, l'on trouvera 480 : ce qui fait voir que la surface fait un effort de 480 livres, pour être en équilibre avec le choc de l'eau.

APPLICATION.

Si l'on vouloit trouver l'effort de l'eau contre les aubants d'un Moulin, exposez perpendiculairement à son courant, il faut connoître d'abord la vîtesse de l'eau, & la gran-

deux des aubants : ainsi supposant que la vitesse de l'eau soit de 5 pieds par seconde, & les aubants de 6 pieds quarrés, l'on dira : Si le produit du quarré de la vitesse d'un pied par un pied quarré, fait un effort d'une livre & demie en une seconde, que fera le produit du quarré de la vitesse de 5 pieds par la surface de 6 pieds, l'on trouvera pour l'effort que l'on cherche 225 livres.

PROPOSITION IX.

Théoreme.

881. *Si l'on a un vaisseau rempli d'eau qui soit toujours entretenu à la même hauteur, je dis que les chocs de l'eau à la sortie de deux ajutages égaux, seront dans la raison des hauteurs de l'eau au-dessus du centre des deux ajutages.*

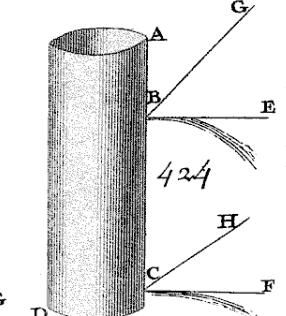
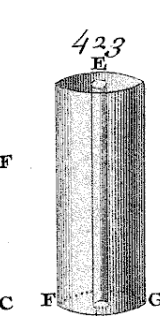
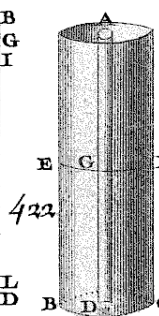
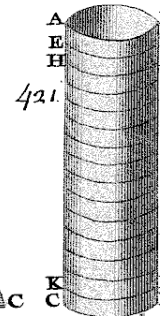
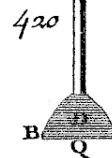
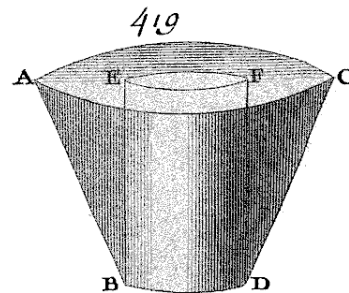
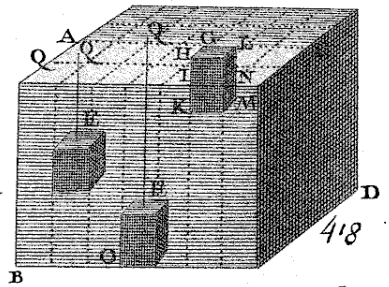
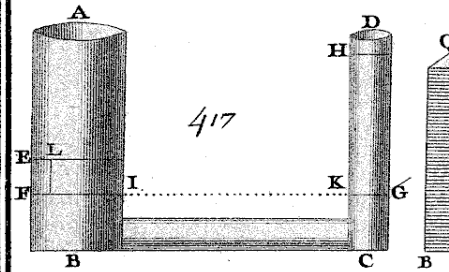
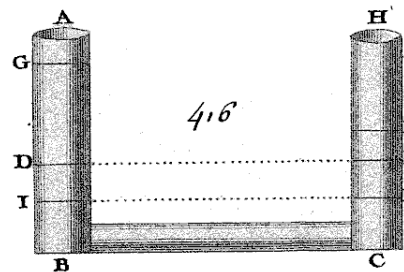
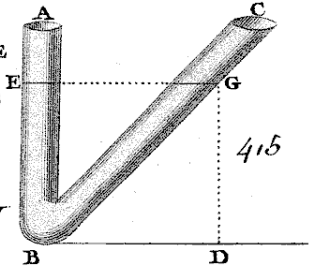
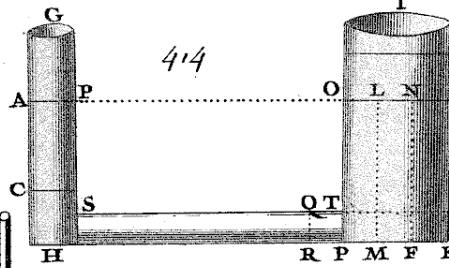
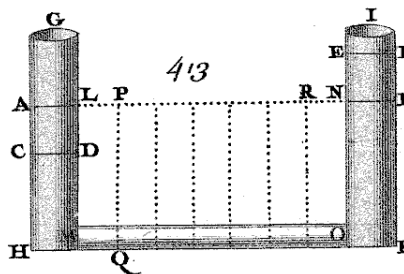
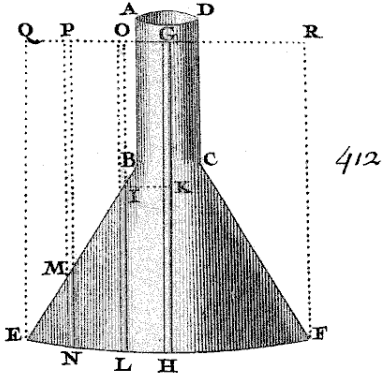
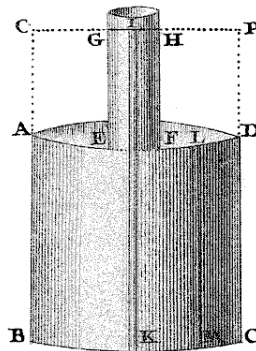
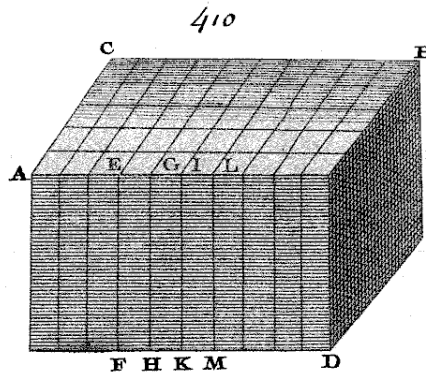
DEMONSTRATION.

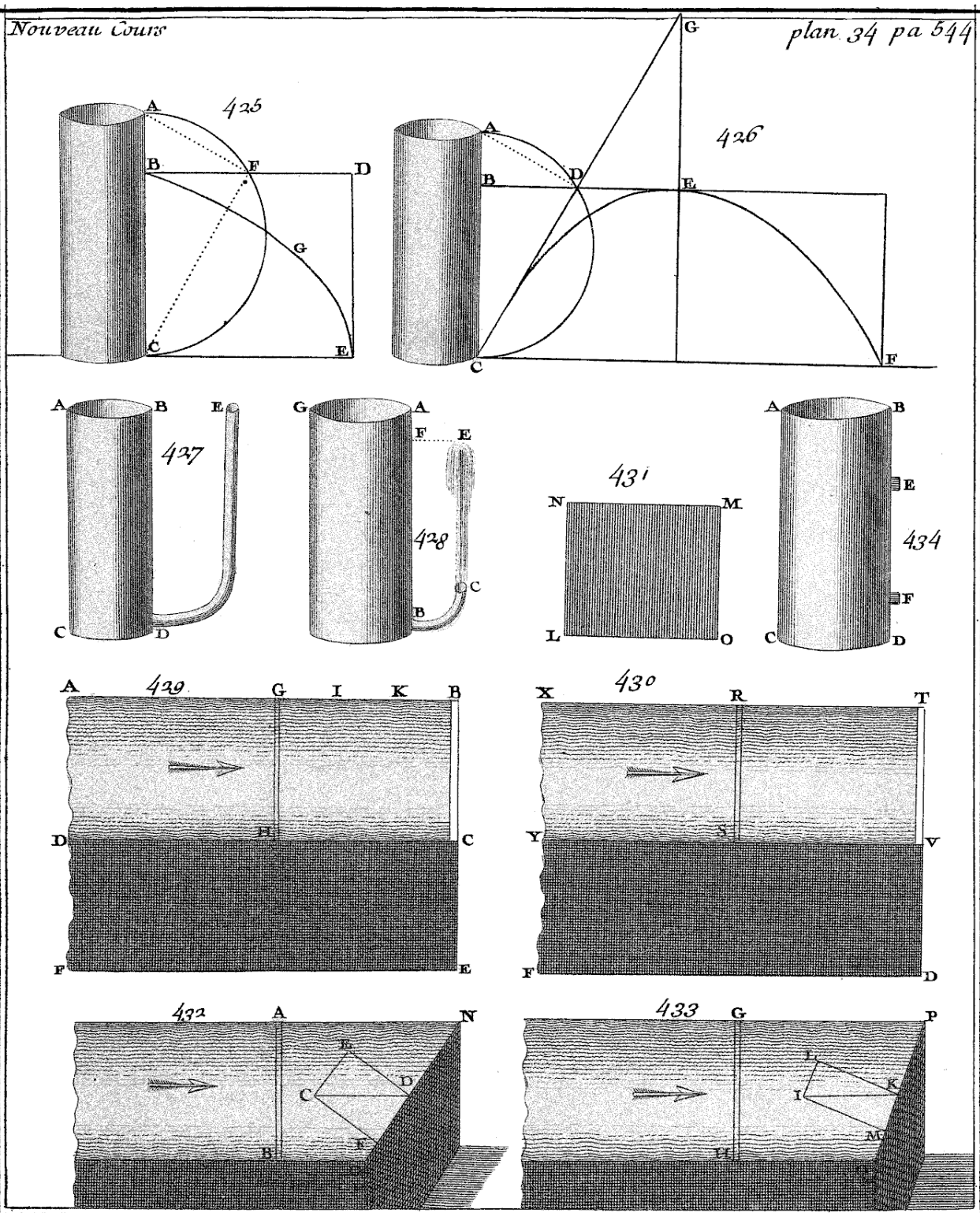
Fig. 434. Si le vaisseau ABCD est rempli d'eau, & qu'elle sorte par les deux ajutages E & F, les vitesses de l'eau seront comme $\sqrt{BE}$ est à $\sqrt{BF}$; & si les ajutages sont égaux, les quantitez d'eau qui sortiront dans le même tems, seront encore comme $\sqrt{BE}$ est à $\sqrt{BF}$: mais ces quantitez d'eau peuvent être regardées comme les masses, & les racines de BE & BF comme leurs vitesses; par conséquent le choc dont l'eau sera capable à la sortie des deux ajutages, sera égale au produit de $\sqrt{BE} \times \sqrt{BE}$ est à $\sqrt{BF} \times \sqrt{BF}$, c'est-à-dire, comme le quarré des racines des hauteurs de l'eau au dessus du centre des ajutages; mais ces deux produits ne sont autre chose que BE & EF: par conséquent les chocs de l'eau à la sortie des ajutages égaux, sont comme les hauteurs de l'eau au dessus du centre des ajutages.

COROLLAIRE.

882. Il suit que si les ajutages sont de différentes grandeurs, les chocs de l'eau à leurs sorties, seront comme les produits des quarrés des diamètres des ajutages par la hauteur de l'eau qui répond à leur centre, s'ils sont circulaires; mais s'ils sont de toute autre figure, il faudra multiplier leur capacité par la hauteur de l'eau qui répond au centre.

DISCOURS







DISCOURS

SUR LA NATURE ET LES PROPRIÉTÉZ

DE L'AIR.

POUR SERVIR D'INTRODUCTION
à la Physique ; servant aussi à rendre raison de l'effet
des Machines Hydrauliques.

Quoique les Anciens nous aient laissé beaucoup de belles connoissances, il semble qu'on pourroit leur reprocher de n'avoir point assez étudié la nature, sur tout quand on fait reflexion aux idées fausses qu'ils avoient de l'Air : ce n'est pourtant pas manque qu'ils n'aient eu assez de tems pour en découvrir les propriétés ; mais apparemment qu'il en étoit de ceci comme d'une infinité d'autres choses qui étoient réservées aux découvertes de notre tems ; & pour ne parler que de l'Air, nous allons faire voir qu'il a de la pesanteur, qu'il a du ressort, & qu'il est capable d'être condensé & dilaté.

Avant M. Descartes & M. Pascal, si l'on demandoit aux Philosophes pourquoi, en tirant le piston d'une seringue ou d'une pompe, l'eau monte & suit comme si elle adhéroit ; pourquoi quand on remplit d'eau un siphon, & qu'on met chaque jambe dans un vaisseau plein d'eau, si un des vaisseaux est un peu plus élevé que l'autre, l'eau monte par le siphon, sort du vaisseau qui est le plus élevé pour descendre dans celui qui est un peu plus bas, tant que toute l'eau de celui d'en haut soit entrée dans celui d'en bas ; ils répondoient que la nature

Z z z

avoit de l'horreur pour le vuide, ou bien que la nature abhorroit le vuide, comme si elle étoit capable de passion, pour avoir de l'horreur pour quelque chose : car à leur sens ils parloient comme si la nature faisoit de grands efforts pour éviter le vuide ; quoiqu'on voye parfaitement qu'elle ne fait aucune chose pour l'éviter, ni pour le rechercher, & que le vuide ou le plein lui sont fort indifferens.

Il est bien vrai que l'eau monte dans une pompe, quand il n'y a point de jour par où l'air puisse entrer, & qu'ainsi il y auroit du vuide, si l'eau ne suivoit pas le piston, & même qu'elle n'y monte pas, quand il y a des fentes par où l'air peut entrer pour la remplir. De même si l'on fait une petite ouverture au haut d'un siphon, par où l'air puisse s'introduire, l'eau de chaque branche tombe dans son vaisseau, & le tout demeure en repos. D'où l'on a conclu que la nature avoit de l'horreur pour le vuide, puisqu'aussi-tôt qu'il n'y avoit point d'air dans un tuyau, l'eau montoit d'elle-même, & que l'air survenant, l'eau se remettoit dans son premier état ; ce qui a fait croire qu'elle n'y montoit que pour empêcher le vuide.

Mais si l'on fait voir que ces effets (de même que beaucoup d'autres que nous expliquerons dans la suite) ne sont causez que par la pesanteur de l'air, l'on n'aura plus lieu de douter que la nature n'a point d'horreur pour le vuide, qu'elle suit les loix de la Mécanique aussi-bien par rapport à l'air que par rapport aux liqueurs de différentes pesanteurs, & que ce que l'on peut dire de l'air n'est qu'une suite des principes que l'on a démontrez dans le Traité précédent.

Pour être convaincu de la pesanteur de l'air par une expérience dont il est aisé de se convaincre, prenez un tuyau de verre de 20. ou 24. pouces, bien bouché par une de ses extrémités, après qu'on l'aura rempli de mercure ; bouchez ensuite le bout qui est ouvert avec le doigt, & soutenez le tuyau perpendiculairement, en sorte que le bout ouvert soit en bas : si vous plongez dans

un vase où il y aura du mercure le bout que vous aurez bouché avec le doigt, & qu'après cela vous laissiez la liberté au mercure de descendre, vous verrez que bien loin qu'il retombe dans le vase pour se mêler avec l'autre, il demeurera suspendu de lui-même. La raison de cet effet vient de la pesanteur de l'air, qui presse le mercure qui est dans le vase, & qui ne presse pas celui qui est dans le tuyau, qui est moins pesant qu'une colonne d'air qui aura la même base : ainsi c'est le poids de l'air qui force le mercure de rester dans le tuyau ; & pour en être plus certain, il n'y a qu'à ouvrir le bout d'en haut qu'on a bouché, & aussi-tôt vous verrez le mercure descendre, & se mêler avec celui qui est dans le vase.

Si l'on prend un tuyau encore de 20 ou de 24 pouces rempli de mercure bouché par une de ses extrémités, & que l'autre extrémité soit recourbée, vous verrez que le mercure, quoique le tuyau ne soit pas plongé dans un vase, se maintiendra suspendu sans sortir par le bout recourbé, à cause que le poids de l'air qui pèse sur le mercure du bout recourbé, est plus pesant que le mercure qui est dans le tuyau.

Si au lieu d'un tuyau de 20 ou 24 pouces, l'on se sert d'un qui ait 25 ou 26 pieds, & qu'au lieu de le remplir de mercure, on le remplisse d'eau, l'on verra que l'eau demeurera suspendue comme le mercure, quoique le tuyau soit plus grand ; car comme l'eau est beaucoup plus légère que le mercure, on en mettra une bien plus grande hauteur dans un tuyau que de mercure ; car nous savons que les hauteurs de différentes liqueurs sont comme les poids des mêmes liqueurs.

Cependant quoique la pesanteur de l'air soutienne suspendu le mercure & l'eau dans des tuyaux de la grandeur que nous venons de dire, il ne faut pas croire que si l'on remplissoit d'eau un tuyau qui auroit beaucoup plus de 25 ou 26 pieds, comme, par exemple, de 40 pieds, que l'eau y demeurera toute suspendue ; car l'air ne peut

Z z z ij

pas soutenir un plus grand poids que le sien : & c'est par le moyen des tuyaux remplis de mercure ou d'eau que l'on mesure la pesanteur de l'air, comme on le verra.

Si l'on a un tuyau de verre de 40 pouces, que l'on remplisse de mercure, en sorte qu'il y ait toujours une de ses extrémités bouchée, & que l'autre bout auquel on aura mis le doigt, soit plongé dans un vase où il y ait du mercure, ou que ce bout soit seulement recourbé, & qu'on le soutienne perpendiculairement dans l'air ou dans le mercure, car cela ne fait rien ; l'on verra qu'aussi-tôt qu'on aura ôté le doigt qu'on avoit appliqué sur le bout ouvert, le mercure baissera tant qu'il fera parvenu à la hauteur de 28 pouces, qui est la hauteur où une colonne de mercure est en équilibre avec la colonne d'air qui lui répond.

Si l'on prend un tuyau de 40 pieds, conditionné comme ceux dont nous avons parlé, l'on verra que l'ayant rempli d'eau, elle descendra tant qu'elle soit à la hauteur de 31 pieds, parce qu'une pareille colonne d'eau est en équilibre avec celle de l'air qui lui répond, ou bien avec une colonne de vif-argent de 28 pouces : mais comme nous sçavons qu'un pied cube d'eau pèse 72 livres, si l'on multiplie 31 par 72, l'on aura 2232, qui est la quantité de livres que pèse une colonne d'air, qui auroit un pied quarré de base, & pour hauteur celle de l'atmosphère.*

* L'on nomme atmosphère l'étendue de l'air qui est renfermé dans le tourbillon de la terre.

Cette épreuve est encore confirmée par les pompes aspirantes & les seringues ; car aussi-tôt qu'on tire le piston d'une pompe, l'eau suit le piston ; & si l'on continue à lever le piston, l'eau suivra toujours, mais non pas à la hauteur que l'on voudra ; puisqu'elle ne passe pas 31 pieds ; car aussi-tôt qu'on veut la tirer plus haut, le piston ne tire plus l'eau, & elle demeure immobile & suspendue à cette hauteur, où elle se trouve en équilibre avec le poids de l'air qui pèse au dehors du tuyau sur l'eau qui l'environne. L'on peut remarquer ici, pour desabuser ceux

qui croient que l'eau monte dans les pompes, parce que la nature a de l'horreur pour le vuide, que quand on a haussé le piston au-delà de 31 pieds, l'eau demeure à cette hauteur, & il se trouve un intervalle entre l'eau & le piston, où il n'y a point, ou que très-peu d'air que l'eau ne peut remplir, ne pouvant être poussée plus haut par l'air extérieur. Si nos Philosophes avoient pris garde à cela, ils auroient sans doute été fort étonnez de voir que la nature cesse d'avoir de l'horreur pour le vuide au-delà de 31 pieds de hauteur, & ils auroient pû l'accuser d'avoir du caprice, puisqu'à une certaine hauteur elle ne peut supporter le vuide, & qu'après cela le vuide lui devient indifférent.

Si l'on se sert d'une seringue longue de 3 pieds ou de 3 pieds & demi, l'on verra encore que mettant le bout du tuyau qui est ouvert dans un vase de vif-argent, qu'en tirant le piston, le vif-argent montera à la hauteur de 28 pouces, & qu'inutilement on levera le piston pour faire monter le vif-argent plus haut, qu'il demeurera toujours à la hauteur qui le met en équilibre avec le poids de l'air : ainsi l'eau, le vif-argent & l'air demeurent en équilibre, quand les hauteurs sont entr'elles comme leurs poids ; & cela de quelque grosseur que soient les tuyaux, parce que les liqueurs ne pesent pas selon la grandeur de leurs bases, mais selon leurs hauteurs.

Pour expliquer comme la pesanteur de l'air fait monter l'eau dans les siphons, nous supposerons un siphon dont une des jambes soit environ haute d'un pied, & l'autre d'un pied un pouce. Si on le remplit d'eau, & qu'on bouche bien les deux ouvertures, pour qu'elle ne puisse pas sortir ; & qu'après cela l'on ait deux vaisseaux dont l'un soit un peu plus élevé que l'autre, & que le plus élevé soit rempli d'eau, mettant la plus courte jambe du siphon dans le vaisseau plus élevé, & la plus longue dans celui qui est un peu plus bas, la courte jambe trempant dans l'eau, aussitôt qu'on aura débouché les ouvertures, l'eau qui est dedans, au lieu de descendre, cherchera à monter ; car

l'eau qui est dans les deux vaisseaux étant pressée par l'air, & non pas celle qui est dans le siphon, la forcera d'y entrer pour monter bien plus haut, s'il se pouvoit, puisqu'elle ne montera que d'un pied, au lieu que le poids de l'air est capable de la faire monter de 31 pieds.

D'où il arrive que l'eau de chaque jambe étant poussée au haut du siphon, elle se combat à cet endroit ; de sorte qu'il faut que celle qui a le plus de force l'emporte sur celle qui en a moins : mais comme l'air a plus de hauteur d'un pouce sur le vaisseau plus bas que sur le vaisseau plus élevé, il pousse en haut l'eau de la longue jambe plus fortement que celle qui est dans l'autre ; d'où il semble d'abord que l'eau doit être poussée de la plus longue jambe dans la plus courte ; mais le poids de l'eau de chaque jambe, quoiqu'il résiste à l'air, ne résiste pas également : car comme l'eau de la longue jambe a plus de hauteur d'un pouce que celle de la petite, elle résiste plus fortement de la force que lui donne la hauteur d'un pouce d'eau. Or elle n'est poussée en haut plus que celle de l'autre jambe, que par la hauteur d'un pouce d'air ; mais le pouce d'eau qui est dans la plus longue jambe, a plus de force pour descendre que le pouce d'air n'en a pour la faire monter, puisqu'un pouce d'eau est plus pesant qu'un pouce d'air : ainsi l'eau de la plus courte jambe est poussée en haut avec plus de force que celle de la plus grande ; ce qui fait qu'elle monte pour passer dans l'autre vaisseau, & continuera à monter tant qu'il y aura de l'eau dans le vaisseau qui lui répond.

C'est ainsi que toute l'eau du vaisseau le plus élevé, montera & se rendra dans le plus bas, tant que la branche du siphon qui y trempe, sera au-dessous d'une hauteur de 31 pieds ; car comme nous l'avons dit, le poids de l'air peut bien hauffer & tenir suspenduë l'eau à cette hauteur ; mais dès que la branche qui trempe dans le vaisseau élevé excédera cette hauteur, il arrivera que le siphon ne fera plus son effet, j'entens que l'eau du vaisseau élevé ne montera plus au haut du siphon pour se

rendre dans l'autre, parce que le poids de l'air ne peut pas l'élever au-delà de 31 pieds ; de sorte que l'eau se divisera au haut du siphon, & tombera de chaque jambe dans son vaisseau jusqu'à ce qu'elle soit restée à la hauteur de 31 pieds au-dessus de chaque vaisseau, où elle demeurera en repos suspendue à cette hauteur par le poids de l'air qui la contre-pèse.

Il arrive plusieurs autres choses dans la nature, que les Anciens ont toujours attribuées à l'horreur du vuide, mais qui n'ont cependant d'autre cause que la pesanteur de l'air ; par exemple, si deux corps fort polis sont appliquez l'un contre l'autre, l'on trouve une extrême résistance à les séparer, & cette résistance même est si grande, que l'on a crû qu'il n'y avoit point de force humaine qui puisse les desunir. Cependant si l'on fait attention que n'y ayant point d'air entre ces deux corps, si l'on tient celui d'en haut avec la main, il doit arriver que celui d'en bas demeurera suspendu, puisqu'il est pressé par tout le poids de l'air qui le touche par dessous, & qui fait qu'on ne peut les séparer qu'on n'employe une force plus grande que celle du poids de l'air ; tellement que si ces deux corps, sont, par exemple, chacun d'un pied cube, & qu'ils en aient la figure, ils seront pressés l'un contre l'autre par une force de 2232 livres, qui est le poids d'une colonne d'air, qui auroit un pied quarré de base : ainsi pour vaincre la force de l'air, afin de séparer ces deux corps, il faut employer une force plus grande que celle de 2232 livres, & pour lors ces deux corps se desuniront sans aucune difficulté, puisqu'il importe fort peu à la nature qu'ils soient séparés, ou non.

L'expérience nous fait voir encore qu'un soufflet, dont toutes les ouvertures sont bien bouchées, est très-difficile à ouvrir, trouvant de la résistance, comme si les aîles étoient collées : si on demande la cause de cet effet, on n'en trouvera pas d'autre que celle de la pesanteur de l'air ; car comme il presse les aîles du soufflet, sans pouvoir s'introduire dedans, l'on ne peut lever une des aîles

sans lever aussi toute la masse de l'air qui est au dessus, qui résistera d'autant plus, que les aîles du soufflet auront de capacité, tellement que si elles avoient un pied & demi de superficie, il faudroit une force plus grande que celle de 3348 livres, qui est égale au poids de l'air qui répond à un plan d'un pied & demi de superficie; mais dès que l'on fait une ouverture au soufflet, l'air qui entre dedans fait équilibre avec celui de dehors; & l'on ne trouve plus de difficulté à l'ouvrir.

De même si l'on demande pourquoi en mettant la bouche sur l'eau, elle monte lorsque l'on suce; comme cela arrive aussi avec un chalumeau de paille. Il n'y a qu'à considérer que l'eau étant pressée de toute part par le poids de l'air, excepté à l'endroit de la bouche où le chalumeau est appliqué, parce qu'en suçant il arrive que les muscles de la respiration élevant la poitrine, font la capacité du dedans plus grande; ce qui donne à l'air du dedans plus de place à remplir qu'il n'avoit auparavant, & lui donne moins de force pour empêcher l'eau d'entrer dans la bouche, que l'air du dehors n'en a pour l'y faire monter: ce qui devient le même cas que celui qui fait que l'eau monte dans les pompes & dans les seringues.

Comme la pesanteur de l'air n'est pas toujours la même, & qu'elle varie selon qu'il est plus ou moins chargé de vapeurs, ses effets varient aussi continuellement dans un même lieu; & c'est ce qu'on remarque par le Barometre, où le mercure s'élève quelquefois au dessus de 28 pouces, & quelquefois descend & se met au dessous; quelque tems après il remonte, & toujours dans une vicissitude continuelle qui suit celle de l'air. La même chose arrive par conséquent dans les pompes où l'eau monte quelquefois dans un tems à 31 pieds & demi, puis elle revient à 31 pieds, puis elle baisse, & n'est plus qu'à la hauteur de 30 pieds & quelques pouces, étant assujetties comme le Barometre aux différentes pesanteurs de l'air.

Comme

Comme l'air sur les montagnes fort élevées, ne pèse pas tant que sur le bord de la mer, que nous prendrons pour le lieu le plus bas de la terre, l'expérience fait voir que les pompes qui sont sur les lieux fort élevez ne font pas monter l'eau si haut; l'on a même remarqué que sur une montagne élevée de 600 toises, l'eau au lieu de monter à 31 pieds, comme nous l'avons dit, ne montoit qu'à 26 pieds quelques pouces: le même changement arrive dans les lieux qui sont fort bas, où l'eau monte quelquefois jusqu'à 32 ou 33 pieds; mais ces changemens s'observent bien mieux avec le Barometre, qui peut servir non seulement à connoître la pesanteur de l'air dans les lieux différemment élevez, mais encore à mesurer la hauteur des montagnes, & même celle de l'atmosphère.

Car si on est au pied d'une montagne, & que le mercure à cet endroit soit élevé de 28 pouces, l'on verra qu'à mesure que l'on montera pour en gagner le sommet, le mercure au lieu de rester à la hauteur de 28. pouces, baissera, parce qu'étant soutenu par une moindre colonne d'air, il faut nécessairement qu'il baisse pour se mettre en équilibre avec cette colonne: ainsi il demeure suspendu à une hauteur d'autant moindre, qu'on le porte à un lieu plus élevé; de sorte que s'il étoit possible d'aller jusqu'au haut de l'atmosphère pour en sortir entièrement dehors, le vif-argent tomheroit, sans qu'il en resta aucune partie, puisqu'il n'y auroit plus aucun air pour le contre-peser.

L'on a fait plusieurs belles expériences sur la pesanteur de l'air. La première a été sur une des plus hautes montagnes d'Auvergne proche Clermont, que l'on nomme *la montagne du Puy de Dome*, & a fait voir qu'ayant un tuyau plein de mercure, bouché par un bout & recourbé par l'autre, le mercure étant à la hauteur de 26. pouces 5. lignes au pied de la montagne, que partant de là pour aller au sommet, à 10 toises le mercure étoit descendu d'une ligne, qu'à 20 toises il étoit descendu de 2. lignes, qu'à 100 toises il étoit descendu de 9. lignes, & qu'é-

A a a a

tant monté de 500 toises, il étoit descendu de 3 pouces, 10 lignes ; & l'on a trouvé qu'en descendant pour venir au pied de la montagne, à chaque endroit où le mercure étoit descendu, il est remonté à la même hauteur, & s'est retrouvé à 26 pouces 5 lignes, au pied de la montagne, à l'endroit d'où l'on étoit parti. Il ne faut pas être surpris si après avoir dit ailleurs que la hauteur du mercure étoit ordinairement de 28 pouces pour être en équilibre avec l'air, qu'on ne la trouve que de 26 pouces 5 lignes au plus bas lieu de la montagne du Puy de Dome, c'est que cet endroit-là est apparemment plus élevé que le bord de la mer, où effectivement le mercure est à la hauteur de 28 pouces : mais quand le Barometre se trouve dans un lieu plus élevé que le bord de la mer, le mercure est toujours au dessous de 28 pouces, selon que la colonne d'air qui y répond, est moindre que sur le bord de la mer.

Ceux qui ne raisonnent pas ont de la peine à s'imaginer que l'air a de la pesanteur, parce qu'ils n'en sentent pas le poids ; mais si on leur fait remarquer qu'un animal qui est dans l'eau a la liberté de se mouvoir sans sentir le poids de l'eau, à cause qu'il en est pressé également de toutes parts, ils ne s'étonneront plus si on ne s'apperçoit pas du poids de l'air qui nous presse aussi également de toutes parts, & qui est en équilibre avec celui que nous avons dans les poulmons & dans le sang, & avec celui qui est généralement répandu par tout le corps.

Si l'on a crû si long-tems que l'air étoit léger, c'est parce que les anciens Auteurs l'ont dit, & que ceux qui font profession de les croire, les suivent aveuglément, aux dépens même de la vérité & de la raison : l'on a même été si éloigné de penser que la pesanteur de l'air fût la cause de l'élevation de l'eau dans les pompes, qu'on a crû qu'il suffisoit de tirer l'air avec un piston pour faire monter l'eau aussi haut que l'on voudroit, & qu'on pouvoit faire passer l'eau d'une rivière par dessus une montagne pour la faire rendre dans le vallon opposé, pourvu qu'il soit un peu plus bas que la rivière, par le moyen d'un siphon.

placé sur la montagne ; dont l'une des jambes répondroit dans la rivière ; puisque pour cela il ne faudroit que pomper l'air du siphon , & il n'y a pas plus de quatre-vingt ans que l'on étoit encore dans cet erreur.

L'air a encore la propriété de pouvoir être extrêmement condensé & dilaté , & de conserver toujours une vertu de ressort , par laquelle il fait effort pour repousser les corps qui le pressent , jusqu'à ce qu'il ait repris son existence naturelle. L'air se dilate aussi très-facilement par la chaleur , & se condense par le froid , comme on le remarque dans le Thermometre , où l'on voit que l'air qui est dans l'esprit de vin fait monter cette liqueur à vue d'œil dans le tuyau , quand on l'approche du feu , ou quand le soleil donne dessus ; & au contraire on s'aperçoit qu'elle baisse beaucoup , quand il fait fort froid , ou quand on met le tuyau dans de l'eau froide.

L'air qui est proche de la surface de la terre , est fort condensé , parce qu'il n'a pas son étendue naturelle ; car puisque celui qui est au dessus est pesant , & qu'il a une vertu de ressort , celui que nous respirons étant chargé du poids de tout l'atmosphère , est plus condensé que celui qui est tout au haut ; par conséquent celui qui est entre ces deux extrêmes , doit être moins condensé que celui qui touche la terre , & moins dilaté que celui qui est au haut de l'atmosphère. Mais pour avoir une idée claire de ceci , supposons un grand amas de laine cardée de la hauteur de 80 ou 100 toises ; il est constant que la laine qui est en bas étant chargée de toute la pesanteur de celle qu'elle porte , ne sera pas si étendue que celle qui est tout au haut , & celle qui est dans le milieu ne sera pas si comprimée que celle qui est au dessous , ni si étendue que celle qui est au dessus. Or si l'on prend une poignée de la laine qui est en bas , & qu'on la porte au dessus , en la tenant toujours pressée de la même façon qu'elle l'étoit dans l'endroit d'où on l'a tirée , elle s'élargira d'elle-même , & prendra la même étendue que celle qui est tout en haut ; & au contraire si on prend dans la main de

A a a ij

celle qui est en haut , en lui laissant son étendue naturelle, sans la presser aucunement , l'on verra que la mettant sous celle qui est en bas , elle se comprimera de la même façon que celle qui est en bas. L'on peut dire la même chose de l'air ; car si on prend une vessie bien sèche, soufflée à la moitié de la grosseur qu'elle devoit avoir, si on l'avoit bien remplie d'air, si après l'avoir bien fermée, on la porte au haut d'une montagne fort élevée, l'on verra qu'à mesure que l'on montera la vessie deviendra plus enflée qu'elle n'étoit auparavant , & lorsqu'on sera parvenu au sommet , on la verra ronde & toute aussi enflée qu'elle eût été au pied de la montagne , si on l'avoit soufflée autant qu'on fait ordinairement pour la rendre sphérique. Cependant il est à remarquer que l'air qui est dans la vessie est toujours le même qu'il étoit au pied de la montagne , n'étant point augmenté ni diminué ; tout le changement qui lui est arrivé, c'est de s'être dilaté considérablement , c'est-à-dire, qu'il occupe un bien plus grand espace qu'auparavant ; & il est à presumer que si on avoit porté cette vessie au haut d'une montagne beaucoup plus élevée que celle que je suppose ici , l'air se seroit dilaté jusqu'au point de crever la vessie par la force de son ressort. La raison de cette dilatation vient sans doute de ce que l'air qu'on a mis dans la vessie au pied de la montagne , étant pressé par le poids de l'air extérieur , celui de dedans n'a pas plus de liberté de prendre son étendue naturelle que celui de dehors , puisqu'ils sont également chargés du poids de l'atmosphère ; mais quand la vessie se trouve au haut de la montagne, l'air qui est à cette hauteur n'étant point si chargé que celui d'en bas , ne presse pas tant les corps qu'il environne ; ce qui fait que celui qui est dans la vessie ne trouvant pas une si grande résistance pour s'étendre qu'auparavant , se dilate & occupe un bien plus grand espace que celui où il étoit renfermé dans le lieu d'où on l'a sorti.

Il arrive tout le contraire , si on remplit autant qu'il est possible une vessie au sommet d'une haute montagne ; car

si l'on descend pour venir dans un lieu beaucoup plus bas, l'on voit que la vessie de bien tendue qu'elle étoit auparavant, devient flasque & molle à mesure que l'on descend, tant qu'il ne paroît presque plus qu'elle ait été enflée; ce qui ne peut manquer d'arriver par les raisons que nous venons de dire; car l'air qui est dans la vessie se trouvant comprimé de tous côtes par celui qui l'environne, qui est beaucoup plus pesant que sur la montagne, il est forcé de se ramasser, c'est-à-dire, de se condenser pour occuper un plus petit espace que celui qu'il tenoit dans l'endroit d'où on l'a tiré.

C'est sans doute à la dilatation & à la condensation que l'air prend, quand il est porté dans un lieu plus élevé ou plus bas que celui d'où il est sorti, qu'on doit attribuer l'incommodité que ressentent ceux que le besoin conduit sur des hautes montagnes; car comme ils ont dans les poulmons & dans le sang un air plus condensé que celui de l'endroit où ils se trouvent, les chairs n'étant plus pressées si fortement par l'air que de coutume, laisse à celui qui est dans le corps la liberté de se dilater; ce qui ne peut se faire sans déranger le temperament de ceux à qui cela arrive. L'on pourra expliquer par un raisonnement tout contraire à celui-ci la peine que ressentent ceux qui d'un lieu haut viennent habiter un lieu bas.

La rarefaction de l'air est très-considérable par les conséquences que l'on a tirées de plusieurs expériences; & M. de Mariotte qui en a fait plus que personne, fait voir qu'un certain volume d'air que nous respirons, peut se rarefier de 4000 fois pour être dans son étendue naturelle, c'est-à-dire, que s'il étoit possible de porter un pied cube d'air de dessus la surface de la terre au haut de l'atmosphère, il occuperoit un espace de 4000 pieds cubes, & peut-être même d'une bien plus grande étendue. Si cette estimation approche de la vérité, il en sera la même chose de la rarefaction de l'air naturel, c'est-à-dire, de l'air qui est au haut de l'atmosphère sur la surface de la terre, que lorsqu'il sera comprimé par l'air du

A a a iij

dehors , il occupera un volume quatre mille fois plus petit pour devenir semblable à celui que nous respirons : mais comme l'expérience fait voir que celui-ci peut être extrêmement condensé , celui du haut de l'atmosphère qui se feroit condensé de quatre mille fois pour devenir pareil au nôtre , peut donc l'être bien davantage de quatre mille fois pour devenir aussi serré que le nôtre peut être réduit.

Nous avons fait voir que quand on portoit un Barometre du pied d'une montagne au sommet , qu'à mesure que l'on montoit , le mercure baïssoit pour se mettre en équilibre avec la colonne d'air , qui devient d'autant moindre , que la montagne est plus élevée ; & en parlant de l'expérience qui a été faite sur le Puy de Dome , nous avons dit qu'étant monté de 10 toises , le mercure étoit descendu d'une ligne ; qu'étant monté de 20 toises , il étoit descendu de 2 lignes ; qu'étant monté de 100 toises , il étoit descendu de 9 lignes : enfin qu'étant monté de 500 toises , il étoit descendu de 8 pouces , 10 lignes , ou autrement de 46 lignes ; où l'on peut remarquer que la diminution du mercure n'est pas dans la raison des différentes hauteurs où le Barometre a été porté sur la montagne ; car pour que cela fût ainsi , il faudroit qu'à 100 toises le mercure fût descendu de 10 lignes , & qu'à 500 toises il fût descendu de 50 lignes , pour lors l'on auroit deux progressions arithmétiques ; l'une pour le Barometre , & l'autre pour les différentes hauteurs sur lesquelles il seroit porté , & les termes de la première progression se surpasseroient d'une unité , & les termes de la seconde se surpasseroient de 10 toises ; ce qui seroit fort commode pour mesurer la hauteur des montagnes & celle de l'atmosphère , puisque le mercure descendant d'une ligne de 10 toises en 10 toises , l'on n'auroit qu'à observer de combien de lignes il seroit descendu en allant du pied de la montagne au sommet ; ensuite multiplier cette quantité de lignes par 10 toises , & le produit donneroit la hauteur de la montagne au dessus du vallon qui seroit au

piéd : de même pour ſçavoir la hauteur de l'atmoſphere , il n'y auroit qu'à multiplier 336 lignes , qui eſt la hauteur du mercure ſur le bord de la mer , par 10 toifes , l'on auroit 3360 toifes pour la hauteur de l'atmoſphere : mais comme la peſanteur de l'air ne ſuit point une ſemblable progression , & qu'elle en ſuit une autre toute différente , voici ce que Meſſieurs Caſſini & Maraldi ont fait pour la trouver , que j'ai tiré des Memoires de l'Académie Royale des Sciences de l'année 1703.

Ils prirent d'abord géométriquement la hauteur des montagnes qui ſe trouverent ſur le chemin de la Meridienne ; & quand ils purent ſe transporter juſqu'au haut , ils observerent quelle étoit la deſcente du Barometre. Ils avoient fait le même jour , lorsqu'il avoit été poſſible , une Obſervation du Barometre ſur le bord de la mer , ou dans un lieu dont ils connoiſſoient l'élevation ſur le niveau de la mer , où en tout cas ils ne pouvoient manquer de trouver à leur retour des Obſervations perpetuelles du Barometre qu'on fait à l'Obſervatoire , que l'on ſçait être plus haut que la mer de 46 toifes.

Par les comparaiſons des différentes hauteurs des montagnes avec les différentes deſcentes du mercure ſur ces montagnes , ces Meſſieurs jugerent que la progression ſuivant laquelle les colonnes d'air qui répondoient à une ligne de mercure , qui vont en augmentant des hauteurs , quand on deſcend de la montagne , pouvoient être telles que la premiere colonne ayant 61 pieds , la ſeconde en eût 62 , la troiſième 63 ; & ainſi toujours de ſuite , du moins juſqu'à la hauteur d'une demi lieuë ; car ils n'avoient pas obſervé ſur des montagnes plus élevées.

En obſervant cette progression , ils retrouvèrent toujours , à quelques toifes près , par la deſcente du mercure ſur une montagne , la même hauteur de cette montagne qu'ils avoient eüe immédiatement après l'operation géométrique.

On peut donc en admettant cette progression , meſurer par un Barometre qu'on portera ſur une montagne ,

combien elle sera élevée sur le niveau de la mer, pourvu qu'on puisse sçavoir à quelle hauteur étoit à peu près en même tems le Barometre sur le bord de la mer, ou dans un lieu dont l'élevation au dessus de la mer soit connu; & cette méthode réussira le plus souvent, quand même la montagne seroit fort éloignée de la mer; que si cette progression regnoit dans tout l'atmosphère, il seroit bien facile d'en trouver la hauteur; car les 28 pouces de mercure étant la même chose que 336 lignes, on auroit une progression arithmétique de 336 termes, dont la différence seroit l'unité, & le premier terme de 61: mais comme l'on n'est pas sûr que la pesanteur de l'air suit une semblable progression, le principe paroît trop incertain pour qu'on puisse en rien conclure pour la hauteur de l'atmosphère, qui ne se trouveroit que de 6 lieues & $\frac{1}{2}$, selon cette progression, au lieu que M. de Mariotte a fait voir par une nouvelle maniere de calculer la hauteur de l'atmosphère, qu'elle avoit environ 25 lieues, qui est la hauteur que tous les Physiciens lui donnent presentement: mais la progression précédente peut être fort utile pour mesurer la hauteur d'une montagne qui ne passe point 1200 toises.

Fin du Cours de Mathématique.

TABLE



TABLE

DES TITRES CONTENUS
dans cet Ouvrage.

PREMIERE PARTIE.

Qui traite de la Géométrie.

LIVRE PREMIER.

Où l'on donne l'Introduction à la Géométrie.

D éfinitions ,	page 1
Première Règle pour réduire les quantitez algebriques à leurs moindres termes ,	10
Addition des quantitez algebriques incomplexes & complexes ,	ibid.
Soustraction des quantitez algebriques incomplexes & complexes ,	11
Eclaircissement sur la Soustraction litterale ,	12
Multiplication des quantitez incomplexes ,	ibid.
Multiplication des quantitez complexes ,	13
Eclaircissement sur la multiplication des quantitez complexes ,	15
PROPOSITION I. Théoreme. Le quarré de toutes grandeurs exprimées par deux lettres positives, est égal au quarré de chacune de ces lettres , plus à deux rectangles compris sous ces mêmes lettres ,	16
PROP. II. Théoreme. Le cube de toutes grandeurs positives exprimées par deux caracteres , est égal au cube du premier, plus au cube du second , plus à trois parallelepipedes du quarré du premier par le second ; plus enfin à trois autres	

a

TABLE.

<i>parallelepipedes du quarré du second par le premier,</i>	ibid.
PROP. III. Théoreme. <i>Si l'on a une ligne divisée également & inégalement, je dis que le rectangle compris sous les parties inégales, avec le quarré du milieu, est égal au quarré de la moitié de la ligne,</i>	17
PROP. IV. Théoreme. <i>Si l'on a une ligne droite divisée en deux également, & qu'on lui en ajoute une autre, je dis que le rectangle compris sous la composée de deux, & sous l'ajoutée, avec le quarré du milieu, sera égal au quarré de la ligne composée de la moitié & de l'ajoutée,</i>	18
PROP. V. Théoreme. <i>Si l'on a deux lignes, dont la premiere soit double de la seconde, je dis que le quarré de la premiere sera quadruple du quarré de la seconde,</i>	19
<i>Division des quantitez algebriques incomplexes & complexes,</i>	ibid.
<i>Maniere d'extraire la racine quarrée,</i>	23
<i>Maniere d'approcher le plus près qu'il est possible de la racine d'un nombre donné par le moyen des decimales,</i>	28
<i>Maniere d'extraire la racine quarrée des quantitez algebriques,</i>	29
<i>Démonstration de la racine quarrée,</i>	31
<i>Maniere d'extraire la racine cube,</i>	33
<i>Maniere d'approcher le plus près qu'il est possible de la racine cube d'un nombre donné par le moyen des decimales,</i>	38
<i>Maniere d'extraire la racine cube des quantitez litterales,</i>	39
<i>Démonstration de la racine cube,</i>	40
<i>Methode de dégager les quantitez inconnues des équations,</i>	43
<i>Usage de l'addition & de la soustraction pour le dégagement des inconnues,</i>	ibid.
<i>Usage de la multiplication pour dégager les inconnues, & pour délivrer de fractions les équations,</i>	45
<i>Usage de la division pour dégager les inconnues,</i>	46
<i>Usage de l'extraction des racines pour dégager les inconnues,</i>	48
<i>Maniere de substituer dans une équation la valeur des inconnues,</i>	50

T A B L E.

<i>Maniere de faire évanouir toutes les inconnues d'une équation,</i>	52
<i>Application des regles precedentes à la resolution de plusieurs Problèmes curieux,</i>	54

L I V R E I I.

Qui traite des Proportions, des Rapports & des Fractions.

D éfinitions,	62
PROP. I. Théoreme. Si quatre grandeurs sont en proportion géométrique, le produit des extrêmes sera égal à celui des moyens,	66
PROP. II. Théoreme. Si quatre grandeurs sont disposées de telle sorte que le produit des extrêmes soit égal à celui des moyens, ces quatre grandeurs seront proportionnelles,	68
PROP. III. Théoreme. Lorsque quatre grandeurs sont en proportion arithmétique, la somme des deux extrêmes est égale à la somme des deux moyens,	70
PROP. IV. Théoreme. Lorsque plusieurs grandeurs sont en proportion géométrique, ou qu'elles forment des rapports égaux, la somme des antecedens est à la somme des consequens, comme celui des antecedens que l'on voudra est à son consequent,	71
PROP. V. Théoreme. Lorsque deux raisons ont même raison à une troisième, ces deux raisons sont égales entr'elles,	72
PROP. VI. Théoreme. Deux grandeurs demeurent en même raison, quoique l'on ajoute à l'une & à l'autre, pourvu que ce que l'on ajoute à la premiere soit à ce que l'on ajoute à la seconde, comme la premiere est à la seconde,	ibid.
PROP. VII. Théoreme. Deux grandeurs demeurent en même raison, quoique l'on retranche à l'une & à l'autre, pourvu que ce qu'on retranche à la premiere soit à ce qu'on retranche à la seconde, comme la premiere est à la seconde,	73
PROP. VIII. Théoreme. Si l'on multiplie les deux termes d'une raison par une même quantité, les produits seront	a ij

T A B L E.

<i>dans la même raison que ces termes étoient avant d'être multipliés ,</i>	ibid.
PROP. IX. Théoreme. <i>Si l'on divise les deux termes d'une raison par une même quantité , les quotiens seront dans la même raison que les grandeurs que l'on a divisées ,</i>	74
PROP. X. Théoreme. <i>Dans toutes équations les racines des produits qui forment chaque membre , sont reciproquement proportionnelles , c'est-à-dire , qu'en prenant les racines d'un des membres pour les extrêmes , & les racines de l'autre pour les moyens , on formera une proportion géométrique ,</i>	75
<i>Maniere de reduire les fractions en même denomination ,</i>	76
<i>Addition des fractions ,</i>	77
<i>Soustraction des fractions ,</i>	ibid.
<i>Multiplication des fractions ,</i>	78
<i>Division des Fractions ,</i>	80
<i>Regle de proportion des fractions ,</i>	81
<i>Extraction des racines des quantitez fractionnaires ,</i>	82

L I V R E I I I.

Où l'on considere les différentes positions des lignes droites.

D éfinitions ,	85
PROP. I. Problème. <i>D'un point donné hors d'une ligne donnée , tirer une perpendiculaire sur cette ligne ,</i>	87
PROP. II. Problème. <i>D'un point donné dans une ligne donnée , élever une perpendiculaire ,</i>	88
PROP. III. Problème. <i>Diviser une ligne donnée en deux parties égales ,</i>	ibid.
PROP. IV. Théoreme. <i>On ne peut élever à un même point dans une ligne donnée , plus d'une perpendiculaire .</i>	89
PROP. V. Théoreme. <i>D'un point donné hors d'une ligne , on ne peut faire tomber qu'une seule perpendiculaire sur cette ligne ,</i>	ibid.
PROP. VI. Théoreme. <i>Une ligne perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes que l'on peut mener d'un point à une ligne ,</i>	90

T A B L E.

- PROP. VII. Théoreme. *Quand une ligne tombe obliquement sur une autre, elle forme deux angles, qui pris ensemble, valent deux droits,* ibid.
- PROP. VIII. Théoreme. *Lorsque deux lignes droites se coupent, elles forment les angles opposés aux sommets égaux,* 91
- PROP. IX. Théoreme. *Lorsque deux lignes droites & parallèles viennent aboutir sur une troisième, elles forment des angles égaux du même côté,* ibid.
- PROP. X. Théoreme. *Lorsque deux lignes parallèles sont coupées par une troisième ligne, elles forment les angles alternes égaux,* 92
- PROP. XI. Problème. *D'un point donné mener une parallèle à une ligne,* ibid.

L I V R E IV.

Qui traite des propriétés des Triangles & des Parallelogrammes.

- D**éfinitions, 93
- PROP. I. Théoreme. *L'angle extérieur d'un triangle est égal aux deux intérieurs opposés, & les trois angles d'un triangle valent deux droits,* 94
- PROP. II. Théoreme. *Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun avec l'angle compris égal,* 95
- PROP. III. Théoreme. *Deux triangles sont égaux, quand ils ont un côté égal, & que les angles sur le côté égal sont égaux chacun à chacun,* 96
- PROP. IV. Théoreme. *Les parallelogrammes qui ont la même base, & qui sont renfermez entre les mêmes parallèles, sont égaux,* ibid.
- PROP. V. Théoreme. *Les triangles sont égaux, lorsqu'ayant la même base, ils sont renfermez entre les mêmes parallèles,* 98
- PROP. VI. Théoreme. *Les complemens des parallelogrammes sont égaux,* 99

T A B L E.

- PROP. VII. Théoreme. *Les parallelogrammes qui ont la même hauteur, sont dans la même raison que leurs bases.*
100
- PROP. VIII. Théoreme. *Si l'on coupe les deux côtéz d'un triangle par une ligne parallele à la base, les côtéz du triangle seront coupeç proportionnellement,* ibid.
- PROP. IX. Théoreme. *Les triangles semblables ont leurs côtéz proportionnels,* 101
- PROP. X. Théoreme. *Si l'on abaisse de l'angle droit d'un triangle rectangle une perpendiculaire sur le côté opposé, elle divisera ce triangle en deux autres triangles, qui lui seront semblables,* 103
- PROP. XI. Théoreme. *Dans un triangle rectangle le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des deux autres côtéz pris ensemble* ibid.
- PROP. XII. Théoreme. *Dans un triangle obtus-angle, le quarré du côté opposé à l'angle obtus, est égal au quarré de deux autres côtéz pris ensemble, si on leur ajoute deux rectangles compris sous le côté qui a été prolongé pour la perpendiculaire, & sous la partie qui est entre la perpendiculaire & l'angle obtus,* 105
- PROP. XIII. Théoreme. *Dans tous triangles le quarré du côté opposé à un angle aigu, avec deux rectangles compris sous le côté où tombe la perpendiculaire, & sous le segment entre la perpendiculaire & l'angle aigu, est égal au quarré de deux autres côtéz pris ensemble,* 106

L I V R E V.

Où l'on traite des proprietéç du Cercle.

- D**éfinitions, 108
- PROP. I. Théoreme. *Si du centre d'un cercle on abaisse une perpendiculaire sur une corde, elle la divisera en deux également,* 109
- PROP. II. Théoreme. *Si du centre d'un cercle on mene une ligne au point où une tangente touche le cercle, je dis que*

TABLE.

- cette ligne sera perpendiculaire sur la tangente,* 110
- PROP. III. Théoreme. *L'angle qui est à la circonference d'un cercle, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il s'appuye, ibid.*
- PROP. IV. Théoreme. *Si l'on a un angle formé par une corde & une tangente, cet angle aura pour mesure la moitié de l'arc soutenu par la corde,* 111
- PROP. V. Théoreme. *Si deux lignes se coupent indifferement dans un cercle, je dis que le rectangle compris sous les parties de l'une, est égal au rectangle compris sous les parties de l'autre,* 112
- PROP. VI. Théoreme. *Si d'un point pris hors d'un cercle, l'on tire deux lignes qui aillent se terminer à la circonference concave, je dis que le rectangle compris sous l'une des lignes entieres & sous sa partie extérieure au cercle, est égal au rectangle compris sous l'autre ligne entiere, & sous sa partie extérieure,* ibid.
- PROP. VII. Théoreme. *Si l'on eleve une perpendiculaire à tel point que l'on voudra du diametre d'un cercle, le quarré de la perpendiculaire sera égal au rectangle compris sous les parties du diametre,* 113
- PROP. VIII. Problème. *Mener une tangente à un cercle par un point donné,* ibid.
- PROP. IX. Théoreme. *Si d'un point hors d'un cercle l'on mene une tangente & une secante, je dis que le quarré de la tangente sera égal au rectangle compris sous la secante & sa partie extérieure au cercle,* 114
- PROP. X. Théoreme. *Si l'on a une tangente perpendiculaire au diametre d'un cercle, je dis que si l'on tire autant de lignes qu'on voudra de l'extrémité du diametre à la tangente, le quarré du diametre sera égal au rectangle compris sous l'une des lignes, telle que ce soit, & sous sa partie intérieure au cercle,* ibid.
- PROP. XI. Problème. *Diviser une ligne en moyenne & extrême raison,* 115

TABLE.

LIVRE VI.

Qui traite des Polygones reguliers inscrits & circonscrits au cercle.

D éfinitions ,	116
PROP. I. Problème. <i>Inscrire un exagone dans un cer-</i> <i>cle ,</i>	117
PROP. II. Problème. <i>Decrire un dodecagone dans un cer-</i> <i>cle ,</i>	118
LEMME. <i>Si l'on a un triangle isoscele , dont chaque angle de</i> <i>la base soit double de celui du sommet , je dis que divisant</i> <i>l'un des angles de la base en deux également par une ligne</i> <i>qui aille rencontrer le côté opposé , qu'elle divisera ce côté en</i> <i>moyenne & extrême raison au point de rencontre ,</i>	ibid.
PROP. III. Problème. <i>Inscrire un decagone dans un cercle ,</i>	119
PROP. IV. Théoreme. <i>Si l'on a une ligne droite composée du</i> <i>côté de l'exagone & du decagone inscrit dans le même cer-</i> <i>cle , elle sera divisée en moyenne & extrême raison au point</i> <i>où se joignent les deux lignes ,</i>	120
PROP. V. Théoreme. <i>Le quarré du côté du pentagone inscrit</i> <i>dans un cercle , est égal au quarré du côté de l'exagone ,</i> <i>plus celui du côté du decagone inscrit dans le même cercle ,</i> <i>ibid.</i>	
PROP. VI. Problème. <i>Inscrire un pentagone dans un cer-</i> <i>cle ,</i>	121
PROP. VII. Problème. <i>Inscrire un quarré dans un cercle ,</i>	122
PROP. VIII. Problème. <i>Inscrire un octogone dans un cer-</i> <i>cle ,</i>	ibid.
PROBLEME I. <i>Diviser une ligne droite en autant de parties</i> <i>égales que l'on voudra ,</i>	123
PROBLEME II. <i>Diviser un arc de cercle en un nombre de par-</i> <i>ties égales pairement paires ,</i>	124
<i>Maniere de decrire la quadratrice ,</i>	ibid.
PROP. IX.	

T A B L E.

PROP. IX. Problème. <i>Diviser un angle en trois parties égales,</i>	125
PROP. X. Problème. <i>Décrire un enneagone dans un cercle,</i>	126
PROP. XI. Problème. <i>Décrire un eptagone dans un cercle,</i>	ibid.
PROP. XII. Problème. <i>Décrire un ondecagone dans un cercle,</i>	127
PROP. XIII. Problème. <i>Circonscrire un polygone autour d'un cercle,</i>	ibid.

L I V R E V I I.

Où l'on considère le rapport qu'ont les circuits des figures semblables, & la proportion de leurs surfaces.

D <i>Éfinitions,</i>	129
PROP. I. Théoreme. <i>Si l'on a deux polygones réguliers & semblables, je dis que le circuit du premier polygone est au circuit du second, comme le rayon du premier est au rayon du second,</i>	ibid.
PROP. II. Théoreme. <i>Si du centre d'un polygone régulier l'on abaisse une perpendiculaire sur l'un de ses côtés, je dis que la superficie de ce polygone sera égale à un triangle rectangle, qui auroit une hauteur égale à la perpendiculaire, & pour base une ligne égale au circuit du polygone,</i>	130
PROP. III. Théoreme. <i>La superficie d'un cercle est égale à un triangle qui auroit pour hauteur le rayon du cercle, & pour base la circonférence,</i>	131
PROP. IV. Théoreme. <i>Si l'on a deux polygones semblables, la superficie du premier sera à celle du second, comme le carré de la perpendiculaire tirée du centre sur l'un des côtés dans le premier, est au carré de la perpendiculaire, semblablement tirée dans le second, ou comme le carré du rayon du premier, est au carré du rayon du second,</i>	133
PROP. V. Théoreme. <i>Les superficies des cercles sont dans la même raison que les carrés de leurs rayons,</i>	134

b

TABLE.

- PROP. VI. Théoreme. *Les triangles semblables sont dans la même raison que les quarrés de leurs côtez homologues*,
ibid.
- PROP. VII. Théoreme. *Les quadrilateres qui ont leurs bases & leurs hauteurs reciproques, sont égaux*, 135
- PROP. VIII. Théoreme. *Les parallelogrammes sont dans la raison composée de leurs bases & de leurs hauteurs*, 136
- PROP. IX. Théoreme. *Si l'on a trois lignes en proportion continuë, je dis que le quarré fait sur la premiere, est au quarré fait sur la seconde, comme la premiere ligne est à la troisième*, 137
- PROP. X. Théoreme. *Si l'on a deux lignes droites inégales, je dis que le rectangle compris sous ces deux lignes, est moyenne proportionnelle entre le quarré de chacune de ces lignes*, 138
- PROP. XI. Théoreme. *Si l'on a quatre grandeurs en proportion géometrique, il y aura même raison du quarré de la premiere au quarré de la seconde, que du quarré de la troisième au quarré de la quatrième*, ibid.
- PROP. XII. Problème. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données*, ibid.
- PROP. XIII. Problème. *Trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données*, 139
- PROP. XIV. Problème. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données*, 140
- PROP. XV. Problème. *Faire un quarré égal à un rectangle*, 141
- PROP. XVI. Problème. *Trouver un quarré qui soit à un autre selon une raison donnée*, 142
- PROP. XVII. Problème. *Trouver le rapport de deux figures semblables*, ibid.
- PROP. XVIII. Problème. *Faire un rectangle égal à un autre qui ait un côté déterminé*, 143

T A B L E.

L I V R E V I I I.

Qui traite des Corps & de leurs surfaces.

- D**éfinitions, 145
- PROP. I. Théoreme. La surface de tout prisme, sans y comprendre les bases, est égale à celle d'un rectangle, qui auroit pour base une ligne égale à la somme de tous les côtes du polygone qui sert de base au prisme, & une hauteur égale à celle du prisme, 147
- PROP. II. Théoreme. La surface d'une pyramide droite est égale à celle d'un triangle qui auroit pour base une ligne égale à la somme des côtes du polygone regulier, qui sert de base à la pyramide, & pour hauteur une ligne égale à une perpendiculaire tirée du sommet de la pyramide sur un des côtes de sa base, 148
- PROP. III. Théoreme. Les parallelepipèdes & les prismes droits, sont en raison composée des raisons de leurs trois dimensions, 149
- PROP. IV. Théoreme. Toute pyramide est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur, 150
- PROP. V. Théoreme. Les pyramides de même hauteur sont dans la raison de leurs bases, 152
- PROP. VI. Théoreme. Si l'on a deux prismes, dont les bases & les hauteurs soient reciproques, je dis qu'ils sont égaux, 153
- PROP. VII. Théoreme. Une pyramide tronquée est égale à une pyramide qui auroit pour base un plan égal aux deux quarrés qui lui servent de base pris ensemble, plus un plan qui seroit moyenne géométrique entre ces deux quarrés, & pour hauteur l'axe de la pyramide tronquée. 154
- LEMME. La ligne qui sera moyenne proportionnelle entre les deux parties du diamètre d'un grand cercle d'une couronne, sera égal au rayon d'un cercle égal à la couronne, 155
- PROP. VIII. Théoreme. Si l'on a une demi-sphere inscrite dans un cylindre, je dis que la demi-sphere est égale aux deux tiers du cylindre, 156

bij

T A B L E.

PROP. IX. Théoreme. Les soliditez des spheres sont dans la même raison que les cubes de leurs diametres ,	158
PROP. X. Théoreme La surface d'une demi-sphere est égale à celle d'un cylindre où elle est inscrite ,	159
PROP. XI. Théoreme. La solidité d'une zone est égale aux deux tiers du cylindre qui a pour base le plus grand cercle de la zone , plus au tiers du cylindre , qui a pour base son plus petit cercle ,	162
PROP. XII. Théoreme. Si l'on coupe une demi-sphere inscrite dans un cylindre par un plan parallele à la base du cylindre , je dis que la surface de la zone est égale à celle du cylindre correspondant ,	163
PROP. XIII. Théoreme. Lorsque trois lignes sont en proportion continuë , le parallelepipedé fait sur ces trois lignes , est égal au cube fait sur la moyenne ,	164
PROP. XIV. Théoreme. Lorsque quatre lignes sont en progression géométrique , le cube fait sur la premiere est au cube fait sur la seconde , comme la premiere ligne est à la quatrième ,	ibid.
PROP. XV. Problème. Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données ,	165
PROP. XVI. Problème. Trouver entre deux nombres donnez deux moyennes proportionnelles ,	166
PROP. XVII. Problème. Faire un cube qui soit à un autre dans une raison donnée ,	168
PROP. XVIII. Problème. Faire un cube égal à un parallelepipedé ,	169

TRAITE' DES SECTIONS CONIQUES.

C H A P T R E I.

Où l'on considere les proprietéz de la Parabole.

D éfinitions ,	173
PROP. I. Théoreme. Le rectangle compris sous l'abscisse & le parametre est égal au quarré de l'ordonnée ,	174

T A B L E.

PROP. II. Théoreme. Dans la parabole, les quarez des ordonnées sont dans la même raison que les abscisses,	175
PROP. III. Problème. Mener une tangente à une parabole par un point donné,	176
PROP. IV. Théoreme. Si on élève une perpendiculaire sur la tangente d'une parabole à l'endroit où elle touche cette courbe, & que de ce même point on tire une ordonnée à l'axe, je dis que la partie de l'axe compris entre la perpendiculaire & l'ordonnée, sera égale à la moitié du parametre, ibid.	
PROP. V. Théoreme. La sous-tangente d'une parabole, est double de l'abscisse correspondante,	177
PROP. VI. Théoreme. Si l'on tire une ligne parallèle à la tangente d'une parabole, je dis que cette ligne sera divisée en deux également par le diametre de la tangente,	178
PROP. VII. Théoreme. Le quarré d'une ordonnée quelconque au diametre d'une parabole, est égal au rectangle compris sous l'abscisse & sous le parametre du diametre,	180
PROP. VIII. Théoreme. Si l'on coupe un cone par un plan parallèle à un de ses côtes, la section sera une parabole,	182
PROP. IX. Problème. Décrire une parabole, le parametre étant donné,	183
PROP. X. Problème. Trouver l'axe d'une parabole donnée, ibid.	
PROP. XI. Problème. Trouver le parametre d'une parabole donnée,	184
PROP. XII. Problème. Trouver le foyer d'une parabole dont on connoît le parametre,	ibid.

C H A P I T R E I I.

Qui traite de l'Ellipse.

D éfinitions,	185
PROP I. Théoreme. Dans l'Ellipse le rectangle compris sous les parties du grand axe, est au quarré de l'ordonnée correspondante, comme le quarré du grand axe est au quarré du petit,	186

b iij

TABLE.

- PROP. II. Théoreme. *Si des extrémités de deux diamètres d'une Ellipse l'on tire des ordonnées à l'axe, je dis que le quarré de la partie de l'axe comprise entre le centre & une des ordonnées, sera égal au rectangle compris sous les parties de l'axe coupé par l'autre ordonnée,* 189
- PROP. III. Théoreme. *Le rectangle compris sous les parties d'un diamètre de l'Ellipse, est au quarré de l'ordonnée correspondante, comme le quarré du même diamètre est au quarré de son conjugué,* 190
- PROP. IV. Théoreme. *La somme des quarrés des deux axes d'une Ellipse, est égale à la somme des quarrés des deux diamètres conjugués,* 193
- PROP. V. Théoreme. *Si par l'extrémité d'un des axes de l'Ellipse, l'on mène une tangente qui aille rencontrer deux diamètres prolongés, je dis que le rectangle fait des parties de la tangente, est égal au quarré de la moitié de l'autre axe,* 194
- PROP. VI. Théoreme. *Si l'on coupe un cône par un plan obliquement à la base, la section sera une Ellipse,* 195
- PROP. VII. Théoreme. *Si l'on coupe un cylindre par un plan obliquement à la base, la section sera une Ellipse,* 197
- PROP. VIII. Problème. *Deux axes conjugués d'une Ellipse étant donnez, la décrire par un mouvement continu,* ibid.
- PROP. IX. Problème. *Trouver le centre & les deux axes conjugués d'une Ellipse donnée,* 198

CHAPITRE III.

Qui traite de l'Hyperbole.

- D**éfinitions, 199
- PROP. I. Théoreme. *Dans l'Hyperbole le rectangle des parties du grand axe prolongé, est au quarré de l'ordonnée correspondante, comme le quarré du grand axe est au quarré du petit,* 200
- PROP. II. Théoreme. *Si l'on mène une ligne droite parallèle au second axe, en sorte qu'elle coupe une des Hyperboles, &*

T A B L E.

- qu'elle soit terminée par les asymptotes, je dis que le rectangle compris sous la plus grande partie & sous la plus petite, sera égal au quarré de la moitié du second axe, 201.*
- PROP. III. Théoreme.** *Si l'on mene par deux points quelconques de deux Hyperboles opposées, deux lignes droites paralleles entr'elles, & terminée par les asymptotes, je dis que le rectangle compris sous les parties d'une des lignes, sera égal au rectangle compris sous les parties de l'autre, 202.*
- PROP. IV. Théoreme.** *Si l'on mene par deux points quelconques d'une Hyperbole, ou deux Hyperboles opposées, deux lignes droites paralleles entr'elles d'une part, & deux autres lignes droites d'un autre aussi paralleles entr'elles, & terminées par les asymptotes, je dis que les rectangles compris sous les lignes tirées des mêmes points, sont égaux, 203.*
- PROP. V. Problème.** *Par un point donné d'une Hyperbole, mener une Tangente, les asymptotes étant données, 204.*
- PROP. VI. Théoreme.** *Le quarré d'une ordonnée quelconque, menée parallele à la tangente d'une Hyperbole, est au rectangle compris sous les parties du grand diametre prolongé, comme le quarré du petit diametre est au quarré du grand, 205.*
- PROP. VII. Théoreme.** *Si l'on coupe un cone droit par un plan parallele à l'axe, je dis que la section sera une Hyperbole, 206.*
- PROP. VIII. Problème.** *Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, 207.*

SECONDE PARTIE.

Qui traite de la Trigonometrie rectiligne.

- D**éfinitions, 213.
- Calcul des triangles rectangles,
- PROP. I. Problème.** *Dans un triangle rectangle, dont on*

TABLE.

- connoît un angle aigu, & le côté opposé à l'autre angle aigu, trouver le côté opposé à l'angle connu, 218*
- PROP. II. Problème. *Connoissant dans un triangle un angle aigu, & le côté opposé à l'autre angle aigu, trouver l'hypoténuse, 219*
- PROP. III. Problème. *Dans un triangle rectangle, dont on connoît un angle aigu, & le côté opposé à cet angle, trouver le côté opposé à l'autre angle aigu, ibid.*
- PROP. IV. Problème. *Dans un triangle rectangle, dont on connoît les deux côtés qui comprennent l'angle droit, trouver un angle aigu, 220*
- PROP. V. Problème. *Dans un triangle où l'on connoît deux côtés qui comprennent un angle aigu, trouver la valeur de cet angle, ibid.*
- PROP. VI. Théoreme. *Dans tous triangles les sinus des angles sont dans la même raison que leurs côtés opposés, 221*
- PROP. VII. Théoreme. *Dans un triangle obtus-angle le sinus de l'angle obtus, est le même que celui de son supplément, ibid.*
- PROP. VIII. Problème. *Dans un triangle dont on connoît deux angles & un côté, on demande de trouver les deux autres côtés, 222*
- PROP. IX. Problème. *Dans un triangle dont on connoît deux côtés avec un angle opposé à l'un de ces côtés, trouver les deux autres angles 223*
- PROP. X. Théoreme. *Dans tous triangles dont on connoît deux côtés avec l'angle compris, la somme des deux côtés connus est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme de deux angles inconnus, est à la tangente de la moitié de leur différence, 224*
- PROP. XI. Problème. *Dans un triangle dont on connoît deux côtés avec l'angle compris entre ces deux côtés, trouver les autres angles, 225*
- PROP. XII. Théoreme. *Dans tous triangles dont on connoît les trois côtés, la base est à la somme de deux autres côtés, comme la différence de ces deux mêmes côtés est à la différence*

TABLE.

<i>différence des segmens, coupé par la perpendiculaire tirée du sommet sur la base,</i>	226
PROP. XIII. Problème. Connoissant les trois côtez d'un triangle, l'on demande de trouver la valeur d'un des segmens de la base,	227
Usage des Logarithmes pour le calcul des triangles,	ibid.
Premier Exemple. Ayant un triangle rectangle, dont on connoît un angle aigu avec le côté opposé à l'autre angle aigu, trouver le côté opposé à l'angle connu,	228
Second Exemple. Si l'on a un triangle rectangle, dont on connoît les deux côtez qui renferment l'angle droit, trouver un angle aigu,	229
Troisième Exemple. Dans un triangle dont on connoît un côté avec les deux angles sur la base, trouver l'autre côté, ibid.	
Application de la Trigonometrie à la Pratique,	230
PROP. XIV. Problème. Trouver une distance qui ne soit accessible que par une de ses extrémités,	ibid.
PROP. XV. Problème. Trouver une distance entièrement inaccessible,	233
PROP. XVI. Problème. Tirer une ligne parallèle à une autre inaccessible,	ibid.
PROP. XVII. Problème. Mesurer une hauteur inaccessible,	235
Maniere de lever une Carte par le moyen de la Trigonometrie,	236
Des attentions qu'il faut faire pour lever une Carte particulière,	239
Application de la Trigonometrie à la Fortification,	240
Maniere de tracer les fortifications sur le terrain,	245
Autre maniere de tracer en se servant de la Planchette,	246
Application de la Trigonometrie à la conduite des Galeries des Mines,	247

TABLE.

TROISIEME PARTIE.

Où l'on donne la Théorie & la Pratique du Nivellement.

D éfinitions,	251
CHAP. I. Où l'on donne l'usage du Niveau d'eau,	252
CHAP. II. Où l'on donne la maniere de faire le Nivellement composé,	255
CHAP. III. Où l'on donne la maniere de niveler deux termes entre lesquels il se trouve des hauteurs & des fonds,	257
CHAP. IV. Où l'on fait voir la maniere de connoître de combien le niveau apparent est élevé au dessus du vrai, pour une ligne de telle longueur qu'on voudra,	261
CHAP. V. Où l'on fait la description du Niveau de M. Huguens,	264
CHAP. VI. Où l'on donne la maniere de se servir du Niveau de M. Huguens,	268
CHAP. VII. Où l'on donne la maniere de faire le Nivellement composé avec le Niveau de M. Huguens,	270

QUATRIEME PARTIE.

Du Toisé en general, où l'on enseigne la maniere de faire le calcul du Toisé des Plans, des Solides, & de la Charpente.

C HAP. I. Où l'on fait voir comment on multiplie deux dimensions, dont la premiere est composée de toises & de parties de toises, & la seconde de toises seulement,	278
CHAP. II. Où l'on donne la maniere de multiplier deux dimensions, dont chacune est composée de toises, pieds, ponces, &c.	285
CHAP. III. Où l'on donne la maniere de multiplier trois dimensions exprimées en toises, pieds, ponces, &c.	291

TABLE.

CHAP. IV. Où l'on donne la manière de calculer le Toisé de la Charpente, 298

CINQUIÈME PARTIE.

Où l'on applique la Géométrie à la mesure des Superficies & des Solides.

CHAP. I. De la mesure des Superficies,	307
PROP. I. Problème. Mesurer les figures triangulaires,	
ibid.	
PROP. II. Problème. Trouver la superficie des figures quadrilateres,	308
PROP. III. Problème. Mesurer la superficie des polygones réguliers & irréguliers,	309
PROP. IV. Problème. Mesurer la superficie des cercles & de leurs parties,	310
PROP. V. Problème. Mesurer la superficie d'une Ellipse,	311.
PROP. VI. Problème. Mesurer l'espace renfermé par une parabole,	ibid.
Application de la Géométrie à la mesure des surfaces des corps,	312
PROP. VII. Problème. Mesurer les surfaces des prismes & des cylindres,	ibid.
PROP. VIII. Problème. Mesurer les surfaces des pyramides & des cones,	313
PROP. IX. Problème. Mesurer les surfaces des spheres, celles de leurs segmens, & celles de leurs zones,	314
CHAP. II. Où l'on applique la Géométrie à la mesure des corps solides,	315
PROP. X. Problème. Mesurer la solidité des cubes, des parallépipèdes, des prismes & des cylindres,	ibid.
PROP. XI. Problème. Mesurer la solidité des pyramides & des cones,	317
PROP. XII. Problème. Mesurer la solidité des pyramides	

c ij

TABLE.

<i>des cones tronquez,</i>	318
PROP. XIII. Problème. <i>Mesurer la solidité des secteurs des cylindres & des cones tronquez,</i>	320
PROP. XIV. Problème. <i>Mesurer la solidité d'une sphere,</i>	321
PROP. XV. Problème. <i>Mesurer la solidité d'un paraboloidé,</i>	323
PROP. XVI. Problème. <i>Mesurer la solidité d'un spheroidé,</i>	324
PROP. XVII. Problème. <i>Mesurer la solidité d'un hyperboloidé,</i>	326
<i>Application de la Géométrie aux Mines,</i>	327
<i>Application de la Géométrie au toisé des voûtes,</i>	ibid.
PROP. XVIII. Problème. <i>Mesurer la solidité de la maçonnerie de toutes sortes de voûtes,</i>	331
<i>Application de la Géométrie à la maniere de toiser le revêtement d'une Fortification,</i>	335
<i>Maniere de mesurer la solidité de l'onglet d'un bâtardeau,</i>	342
<i>Principe general pour mesurer les surfaces & les solides,</i>	345
PROP. I. Problème. <i>Connoissant le centre de gravité d'une ligne droite, trouver la valeur de la surface qu'elle décrira, après avoir fait une circonvolution autour de l'axe,</i>	347
PROP. II. Problème. <i>Si on a une demi-circonference de cercle dont on a le centre de gravité, je dis que cette demi-circonference ayant fait une circonvolution sur l'axe que la surface décrira, qui est celle d'une sphere, sera égal à un rectangle compris sous une ligne droite égale à la demi-circonference, & sous celle qui seroit égale à une circonference qui auroit pour rayon la perpendiculaire tirée du centre de gravité sur l'axe,</i>	348
PROP. III. Problème. <i>Si l'on a un rectangle qui fasse une circonvolution autour de l'axe, je dis que la solidité du corps qu'il décrira, sera égal au produit du rectangle par la circonference du cercle qui auroit pour rayon la perpendiculaire tirée du centre de gravité sur l'axe,</i>	349
PROP. IV. Problème. <i>Si l'on a un triangle isoscele, qui fasse</i>	

T A B L E.

une circonvolution autour de sa base , qui sera ici regardé comme l'axe , je dis que le solide qu'il décrira sera égal au produit du triangle par la circonférence du cercle , qui auroit pour rayon la perpendiculaire tirée du centre de gravité sur l'axe ,

350

PROP. V. Problème. *Si l'on fait faire à un demi-cercle une circonvolution autour de l'axe , je dis que le solide qu'il décrira , qui est une sphere , sera égal au produit de la superficie du demi-cercle par la circonférence qui auroit pour rayon la perpendiculaire tirée du centre de gravité sur l'axe ,*

353

SIXIEME PARTIE.

Où l'on applique la Géométrie à la division des Champs.

PROP. I. Problème. *Diviser un triangle en autant de parties égales qu'on voudra par les lignes tirées de l'angle opposé à la base ,*

355

PROP. II. Problème. *Diviser un triangle en deux parties égales par une ligne tirée d'un point donné sur un des côtez du triangle ,*

ibid.

PROP. III. Problème. *Diviser un triangle en trois parties égales par des lignes tirées d'un point pris sur un de ses côtez ,*

356

PROP. IV. Problème. *Diviser un triangle en trois parties égales par des lignes tirées dans les trois angles ,*

357

PROP. V. Problème. *Diviser un triangle en deux parties égales par des lignes tirées d'un point donné à volonté dans la superficie du triangle ,*

ibid.

PROP. VI. Problème. *Diviser un triangle en deux parties égales par une ligne parallele à la base ,*

358

PROP. VII. Problème. *Diviser un trapezoïde en deux parties égales par une ligne parallele à la base ,*

359

PROP. VIII. Problème. *Diviser un trapeze en deux également par une ligne parallele à l'un de ses côtez ,*

360

T A B L E.

PROP. IX. Problème. <i>Diviser un trapezoïde en trois parties égales,</i>	ibid.
PROP. X. Problème. <i>Diviser un trapeze en deux parties égales,</i>	361
PROP. XI. Problème. <i>Diviser un trapeze en deux parties égales par une ligne tirée d'un de ses angles,</i>	ibid.
PROP. XII. Problème. <i>Diviser un trapezoïde en deux parties égales par une ligne tirée d'un point pris sur l'un de ses côtés,</i>	362

SEPTIEME PARTIE.

Où l'on applique la Géométrie à l'usage du Compas
de proportion. 364

PROP. I. Problème. <i>Diviser une ligne droite en autant de parties égales qu'on voudra,</i>	365
PROP. II. Problème. <i>Trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données,</i>	ibid.
PROP. III. Problème. <i>Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données,</i>	366
<i>Usage de la ligne des polygones,</i>	367
PROP. IV. Problème. <i>Inscrire un polygone dans un cercle,</i>	ibid.
PROP. V. Problème. <i>Décrire un polygone regulier sur une ligne donnée,</i>	ibid.
<i>Usage de la ligne des cordes,</i>	368
PROP. VI. Problème. <i>Prendre sur la circonference d'un cercle un angle d'autant de degrez qu'on voudra,</i>	ibid.
PROP. VII. Problème. <i>Un angle étant donné sur le papier, en trouver la valeur par le moyen de la ligne des cordes,</i>	ibid.
PROP. VIII. Problème. <i>Connoissant la quantité de degrez d'un arc de cercle, trouver son rayon,</i>	369
PROP. IX. Problème. <i>Ouvrir le Compas de proportion, de</i>	

TABLE.

<i>maniere que les lignes des cordes fassent tel angle que l'on voudra,</i>	ibid.
PROP. X. Problème. <i>Le Compas de proportion étant ouvert d'une grandeur quelconque, connoître la valeur de l'angle formé par les lignes des cordes,</i>	370
<i>Usage de la ligne des plans,</i>	ibid.
PROP. XI. Problème. <i>Faire un quarré qui soit à un autre selon une raison donnée,</i>	ibid.
PROP. XII. Problème. <i>Connoître le rapport d'un quarré à un autre,</i>	371
PROP. XIII. Problème. <i>Ouvrir le compas de proportion de maniere que les lignes des plans forment un angle droit,</i>	ibid.
PROP. XIV. Problème. <i>Faire un quarré égal à deux autres donnez,</i>	372
<i>Usage de la ligne des solides,</i>	ibid.
PROP. XV. Problème. <i>Faire un cube qui soit à un autre selon une raison donnée,</i>	ibid.
PROP. XVI. Problème. <i>Trouver le rapport qui est entre deux cubes,</i>	ibid.
<i>Application de la Géométrie à l'artillerie,</i>	373
PROP. I. Problème. <i>Faire l'analyse de l'alliage du métal dont on fait les pieces de canon,</i>	ibid.
PROP. II. Problème. <i>Trouver le calibre des boulets & des pieces de canon,</i>	377
PROP. III. Problème. <i>Trouver le diametre des lignes servant à mesurer la poudre,</i>	379
PROP. IV. Problème. <i>Trouver quelle longueur doivent avoir les pieces de canon par rapport à leurs calibres,</i>	381
PROP. V. Problème. <i>Où l'on donne la maniere de connoître le nombre des boulets qui sont en pile,</i>	390
PROP. VI. Problème. <i>Où l'on donne la maniere de dégorger les embrasures des batteries de canon dans les sieges,</i>	394

TABLE.

HUITIÈME PARTIE.

Qui traite du Mouvement & du Choc des Corps.

CHAPITRE I.

Du Choc des Corps.

- D**éfinitions, 401
- PROP. I.** Théoreme. *Si deux corps semblables de même matière & égaux, sont mûs avec des vitesses inégales, l'effort du corps qui aura le plus de vitesse sera plus grand sur le corps qu'il rencontrera, que celui dont la vitesse sera plus petite,* 404
- PROP. II.** Théoreme. *Si deux corps inégaux & de même matière, sont poussés avec des vitesses égales, le plus grand corps fera plus d'impression sur le corps qu'il rencontrera, que le plus petit,* ibid.
- PROP. III.** Théoreme. *Si deux corps ont des masses & des vitesses qui soient en raison reciproque, ces deux corps auront une même quantité de mouvement,* 406
- PROP. IV.** Théoreme. *Lorsque deux corps sans ressort se meuvent dans la même détermination & vers un même côté, le corps qui a le plus de vitesse ayant rencontré celui qui en a moins, & ces deux corps allant ensemble, ils auront une quantité de mouvement égale à la somme de celle qu'ils avoient avant le choc,* 407
- PROP. V.** Théoreme. *Si deux corps se meuvent dans un sens opposé sur une même direction, ces deux corps venant à se rencontrer, & n'en faisant plus qu'un, la quantité de mouvement de ces corps sera la différence des quantitez de mouvemens que les deux corps avoient avant le choc,* 408

CHAP. II.

TABLE.

CHAPITRE II.

Du Mouvement des Corps jettez.

- D**éfinitions, 409
- PROP. I.** Théoreme. *Si rien ne s'opposoit au mouvement des corps jettez, chacun de ces corps conserveroit toujours avec une vitesse égale le mouvement qu'il auroit reçu, & suivroit toujours une même ligne droite,* 410
- PROP. II.** Théoreme. *Un corps qui tombe reçoit des parties égales de vitesse dans des tems égaux, de sorte que dans le second instant il a une vitesse double de celle qu'il avoit dans le premier instant de sa chute; & dans le troisième il en a un triple, & ainsi de suite.* 412
- PROP. III.** Théoreme. *Les espaces que parcourt un corps en tombant dans quelque tems que ce soit, sont entr'eux comme les quarrés des mêmes tems,* ibid.
- PROP. IV.** Théoreme. *L'espace qu'un corps parcourt dans un tems donné, lorsqu'étant en repos il commence à tomber, est la moitié de l'espace que ce corps parcoureroit d'un mouvement égal dans un pareil tems avec la vitesse qu'il a acquise dans le dernier moment de sa chute,* 415
- PROP. V.** Théoreme. *La force qui porte un corps perpendiculairement en haut, se diminue également,* 416
- PROP. VI.** Problème. *Connoissant l'espace qu'un corps pesant parcourt en un tems déterminé, trouver l'espace qu'il parcourra dans un tems donné,* 417
- PROP. VII.** Problème. *Connoissant le tems qu'un corps a mis à parcourir un espace déterminé, connoître le tems qu'il mettra à parcourir un espace donné,* ibid.

CHAPITRE III.

De la Théorie & de la Pratique du Jet des Bombes, pour servir à la construction & à l'usage d'un Instrument universel pour le Jet des Bombes.

- P**ROP. VIII. Théoreme. *Si un corps est jeté selon une direction quelconque, pourvu qu'elle ne soit point per-*
d

T A B L E.

- pendiculaire à l'horison , je dis qu'il décrira par son mouvement composé de celui d'impression & de sa pesanteur , une parabole ,* 418
- PROP. IX. Problème. Connoissant la ligne de projection (qu'on suppose parallèle à l'horison) & la ligne de chute d'une parabole décrite par un mobile , on demande de quelle hauteur ce mobile doit tomber pour avoir à la fin de sa chute une vitesse avec laquelle il puisse d'un mouvement uniforme parcourir la ligne de projection , dans le même tems qu'il parcourra par sa pesanteur la ligne de chute , 421
- PROP. X. Théoreme. Le parametre de toute parabole décrite par un mobile , est quadruple de la ligne de hauteur de cette parabole , 424
- Application des principes précédens à l'art de jeter des Bombes ,* 426
- PROP. XI. Problème. Etant donnée la ligne de but , l'angle formé par le parametre & la direction du mortier , & l'angle formé par la direction du mortier & la ligne de but , trouver le parametre , la ligne de projection & la ligne de chute , *ibid.*
- PROP. XII. Problème. Trouver quelle élévation il faut donner à un mortier pour jeter une bombe à tel endroit que l'on voudra , pourvu que cet endroit soit de niveau avec la batterie , 427
- PROP. XIII. Problème. Trouver quelle élévation il faut donner à un mortier pour chasser une bombe à une distance donnée , en supposant que la batterie n'est pas de niveau avec l'endroit où l'on veut jeter la bombe , c'est-à-dire , en supposant que cet endroit est beaucoup plus élevé , ou plus bas que la batterie , 429
- PROP. XIV. Problème. Construction d'un Instrument universel pour jeter les bombes sur toutes sortes de plans , 431
- Usage de l'Instrument universel pour le jet des bombes ,* 432
- PROP. XV. Problème. Trouver par le moyen de l'Instrument universel , quelle hauteur il faut donner à un mortier pour jeter une bombe à une distance donnée , supposant que le lieu où l'on veut la jeter soit de niveau avec la batterie , *ibid.*

T A B L E.

- PROP. XVI. Problème.** *Trouver quelle élévation il faut donner au mortier pour chasser une bombe à une distance donnée, supposant que l'endroit où l'on veut jeter la bombe soit beaucoup plus élevé ou plus bas que la batterie, & cela en se servant de l'Instrument universel,* 434
- PROP. XVII. Théoreme.** *Si l'on tire deux bombes avec la même charge à différentes élévations de mortier, je dis que la portée de la première bombe sera à celle de la seconde, comme le sinus double de l'élévation du mortier pour la première bombe, est au sinus de l'angle double de l'élévation pour la seconde,* 436
- PROP. XVIII. Théoreme.** *Si l'on tire deux bombes à différens degrez d'élévations avec la même charge, il y aura même raison du sinus de l'angle double de la première élévation au sinus du double de la seconde, que de la portée de la première élévation à la portée de la seconde,* 438
- PROP. XIX. Problème.** *Connoissant l'amplitude d'une parabole décrite par une bombe, sçavoir quelle est la hauteur où la bombe s'est élevée au dessus de l'horison,* 439
- PROP. XX. Problème.** *Connoissant la hauteur où une bombe s'est élevée, sçavoir la pesanteur ou le degré de mouvement qu'elle a acquis en tombant par son mouvement accéléré,* ibid.

NEUVIEME PARTIE.

Qui traite des Mécaniques.

CHAPITRE PREMIER.

Où l'on donne l'introduction à la Mécanique.

D^E*finitions,* 443
LEMME. *Si l'on a deux puissances, & que dans le même tems elles fassent parcourir à un corps deux lignes qui seroient les côtez d'un parallelogramme, je dis que*
dij

TABLE.

ces deux forces agissant ensemble sur le corps, lui feront parcourir la diagonale du même parallélogramme dans un tems égal à celui que chaque puissance en particulier aura employé à faire parcourir au corps chacun de ses côtes,
445

Théoreme servant de principe general pour
la Mécanique.

Si l'on a trois puissances appliquées à des cordes qui soient attachées à un corps, je dis que pour être en équilibre, il faut que les deux puissances que l'on compare soient dans la raison reciproque des perpendiculaires menées d'un des points de la direction de la puissance qui n'entre point dans la proportion sur les directions de celles que l'on compare,
449

CHAPITRE II.

Où l'on fait voir le rapport des puissances qui soutiennent
des poids avec des cordes. 451

PROPOSITION. Théoreme. *Si deux puissances soutiennent un poids par des cordes, je dis que ces deux puissances seront en équilibre entr'elles, si elles sont en raison reciproque des perpendiculaires tirées d'un des points de la direction du poids sur celles des puissances,* 452

CHAPITRE III.

Du Plan incliné.

DÉFINITIONS, 455
PROP. Théoreme. *Si une puissance soutient un poids sur un plan incliné par une direction parallele au plan, je dis, 1°. que la puissance sera au poids comme la hauteur du plan est à sa longueur. 2°. Que si la direction de la puissance est parallele à la base du plan incliné, la puissance sera au poids comme la hauteur du plan incliné est à la longueur de sa base,* ibid.

TABLE.

CHAPITRE IV.

Du Levier.

- D**éfinition, 458
PROP. Théoreme. Deux puissances que l'on compare, seront en équilibre, si elles sont en raison reciproque des perpendiculaires tirées du point d'appui sur les lignes de direction des puissances, ibid.

CHAPITRE V.

De la Rouë dans son Effieu.

- D**éfinition, 465
PROP. Théoreme. Si une puissance soutient un poids à l'aide d'une rouë par une ligne de direction tangente à la rouë, je dis que la puissance sera au poids comme le rayon du treuil est au rayon de la rouë, 466

CHAPITRE VI.

De la Poulie.

- D**éfinition, 467
PROP. Théoreme. Si une puissance soutient un poids à l'aide d'une poulie, dont la chappe soit immobile, je dis, 1°. que la puissance sera égale au poids. 2°. Que si la chappe est mobile, de sorte que le poids qui y seroit attaché soit enlevé par la puissance, cette puissance sera la moitié du poids, lorsque la direction de la puissance & celle du poids seront paralleles, 468

CHAPITRE VII.

Du Coin.

- D**éfinition, 471
PROP. Théoreme. 1°. La force qui chasse le coin est à la résistance du bois comme la moitié de la tête du coin est

TABLE.

à la longueur d'un de ses côtez. 2°. Que si une puissance soutient un poids à l'aide d'un coin, la puissance sera au poids comme la hauteur du coin est à sa longueur, 472

CHAPITRE VIII.

De la Vis.

D éfinition,	473
<i>PROP. Théoreme. Si une puissance presse ou enleve un poids à l'aide d'une vis, la puissance sera au poids, comme la hauteur d'un des pas de la vis est à la circonference du cercle que décrira la puissance appliquée au levier, par le moyen duquel on meut la vis,</i>	
	478

CHAPITRE IX.

Des Machines composées.

D éfinitions,	480
<i>Analogie des Poulies mouflées. Si une puissance soutient un poids à l'aide de plusieurs poulies, je dis que la puissance est au poids comme l'unité est au double du nombre des poulies d'en bas, qui sont toujours les poulies mobiles,</i>	
<i>Application de l'effet des poulies aux manœuvres de l'Artillerie,</i>	478
<i>Des Rouës dentées. Définition,</i>	480
<i>Analogie des Rouës dentées. La puissance est au poids comme le produit des rayons des effieux au produit des rayons des rouës,</i>	
	481
<i>Du Cric,</i>	482
<i>De la Vis sans fin, appliquée aux rouës dentées,</i>	483
<i>Machine composée d'une rouë & d'un plan incliné,</i>	485
<i>De la Sonnette,</i>	487
<i>Application de la Mécanique à la construction des Magazins à poudre,</i>	
	490
<i>Table pour regler l'épaisseur qu'il faut donner aux pieds droits des voûtes des Magazins à poudre,</i>	
	497

TABLE.

<i>Application des principes de la Mécanique au jet des bombes.</i>	498
<i>Nouvelle maniere de faire des épreuves pour sçavoir la charge qu'il convient de donner aux Fourneaux des Mines ,</i>	505

DIXIEME PARTIE.

Qui traite de l'Equilibre & du Mouvement des Liqueurs.

D <i>Éfinition,</i>	517
PROP. I. Théoreme. <i>Si l'on verse une liqueur, par exemple, de l'eau dans un tuyau recourbé ou siphon, je dis que la surface de cette liqueur se mettra de niveau dans les deux branches du siphon,</i>	522
PROP. II. Théoreme. <i>Si l'on met dans les deux branches d'un siphon des liqueurs de différentes pesanteurs, je dis que les hauteurs de ces liqueurs dans les tuyaux, seront entre-elles dans la raison reciproque de leur pesanteur spécifique,</i>	525
PROP. III. Théoreme. 1°. <i>Si un corps dur est mis dans un fluide de même pesanteur spécifique, il y demeurera entierement plongé, à quelque hauteur qu'il se trouve.</i>	
2°. <i>S'il est d'une pesanteur spécifique plus grande que celle du fluide, il ira au fond du vaisseau.</i>	
3°. <i>S'il est d'une pesanteur spécifique moindre que celle du fluide, il n'y aura qu'une partie du corps qui s'enfoncera, & l'autre partie restera au dessus de la surface du fluide.</i>	526
<i>Application des principes précédens à la Navigation,</i>	531
PROP. IV. Théoreme. <i>Si l'on a un vase plus gros par un bout que par l'autre, le remplissant de liqueur, cette liqueur aura autant de force pour sortir par une ouverture égale à sa base, que si cette ouverture étoit égale à celle d'en haut,</i>	532

TABLE.

CHAPITRE II.

Où l'on considère la force & la mesure des Eaux courantes & jaillissantes.

PROP. V. Théoreme. *Si l'on a un tuyau perpendiculaire à l'horison, & rempli de telle liqueur que l'on voudra ; comme, par exemple, de l'eau, sa vitesse par l'ouverture de la base sera exprimée par la racine quarrée de la hauteur perpendiculaire du tuyau,*

534

PROP. VI. Problème. *Trouver la dépense d'un jet d'eau pendant une minute par un ajutage de 4 lignes de diamètre, l'eau du reservoir étant de 40 pieds de hauteur,*

539

CHAPITRE III.

Où l'on considère le mouvement & le choc des Eaux.

PROP. VII. Théoreme. *Si l'on a deux surfaces égales, exposées perpendiculairement au courant de deux fluides homogènes, qui ayent des vitesses inégales, les chocs de ces fluides contre ces surfaces, seront entr'eux comme les quarrés de leurs vitesses,*

540

PROP. VIII. Problème. *Connoissant la vitesse de l'eau, trouver le choc de cette eau contre une surface donnée,*

543

PROP. IX. Théoreme. *Si l'on a un vaisseau rempli d'eau qui soit toujours entretenu à la même hauteur, je dis que les chocs de l'eau à la sortie de deux ajutages égaux, seront dans la raison des hauteurs de l'eau au dessus du centre des deux ajutages,*

544

Discours sur la nature & les propriétés de l'Air, pour servir d'introduction à la Physique, servant aussi à rendre raison de l'effet des Machines Hydrauliques.

545

Fin de la Table.

Fauves