Conditions d’utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- Le Conservatoire numérique communément appelé le Cnum constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d’œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s’inscrit dans le cadre de la loi nº 78-753 du 17 juillet 1978 :

- **la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue (Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - http://cnum.cnam.fr)**
- **la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l’objet d’une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.**

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- **les reproductions de documents protégés par le droit d’auteur, uniquement consultables dans l’enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l’autorisation préalable du titulaire des droits.**

4- Pour obtenir la reproduction numérique d’un document du Cnum en haute définition, contacter cnum(at)cnam.fr

5- L’utilisateur s’engage à respecter les présentes conditions d’utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d’une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d’utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

Auteur(s)	**Hauck, Guido (1845-1905)**
Titre	**Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme. II. Artikel. , Die orientirte Lage**
Adresse	**Berlin : Georg Reimer, 1884**
Collation	**1 vol. (p. [261]-276,[1] f. de pl.) : ill. ; 29 cm**
Cote	**CNAM-BIB 4 Tu 53 (P.3)**
Sujet(s)	**Photogrammétrie** **Projection (géométrie)** **Perspective**
Typologie	**Ouvrage**
Note	**Tiré à part de "Journal für die reine und angewandte Mathematik", Heft 4 Bd. 97. Recueil factice intitulé "Métrophotographie" ayant probablement appartenu à Aimé Laussedat et utilisé comme outil de travail pour ses publications.**
Langue	**Allemand**
Date de mise en ligne	**03/10/2014**
Date de génération du PDF	**25/06/2019**
Permalien	http://cnum.cnam.fr/redir?4TU53.3

4 Tu 53 (P. 3)

Ueberreicht vom Verfasser.

Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme.

II. Artikel. Die orientirte Lage.

Von

Guido Hauck.

(Sonderabdruck aus Heft 4 Bd. 97 des Journals für die reine und angewandte Mathematik.)

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Herausgegeben von **L. Kronecker** und **K. Weierstrass.**
Druck und Verlag von Georg Reimer in Berlin.

(Sonderabdruck aus Heft 4 Bd. 97.)

Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme.

II. Artikel. Die orientirte Lage.

(Fortsetzung des Aufsatzes „Neue Constructionen der Perspective und Photogrammetrie" im Band 95, S. 1.)

Hierzu Tafel III, Fig. 1—6.

(Von Herrn *Guido Hauck.*)

Einleitung.

Der gegenwärtige Artikel knüpft unmittelbar an die in § 3 des oben genannten I. Artikels gegebene Fundamentalconstruction der *projectiv-trilinearen Verwandtschaft* an, welche in folgender (für jede beliebige Lage der drei ebenen Systeme passenden) Form ausgesprochen werden kann (vgl. dazu Fig. 1):

In jedem der drei ebenen Systeme S, S', S'' sind zwei *Kernpunkte* p und q, p' und q', p'' und q''*) gegeben, deren drei Verbindungslinien die *Hauptaxen* der betreffenden Ebenen heissen. Die sechs Kernpunkte bilden die Centren von sechs Strahlenbüscheln, von welchen jedes mit einem der zwei andern Ebenen projectivisch ist, so dass sie sich zu drei Paaren projectivischer Strahlenbüschel gruppiren, deren Centren q und p', q' und p'', q'' und p je als *gegnerische* Kernpunkte bezeichnet werden. Dabei sind die projectivischen Beziehungen der Art, dass für jedes Büschelpaar die den betreffenden Ebenen zugehörigen *Hauptaxen* als entsprechende Strahlen figuriren. — Es besteht nun für die *Zuordnung* der Punkte der drei Systeme die Beziehung, dass je zwei zugeordnete Punkte auf entsprechenden Strahlen der bezüglichen gegnerischen Kernstrahlenbüschel liegen müssen. Hat man also z. B. in den Systemen S' und S'' zwei Punkte x' und x'', welche dieser Bedingung hin-

*) Vgl. I. Art. (Bd. 95) S. 11, Anmerkung.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

sichtlich der Büschel q' und p'' genügen, so findet man den dritten zugeordneten Punkt x im System S dadurch, dass man zu den nach x' und x'' gezogenen Strahlen $p'x'$ und $q''x''$ die entsprechenden Strahlen der bezüglichen gegnerischen Büschel q und p construirt und deren Schnittpunkt x markirt.

Während die Punkte *dreifach gebunden* sind, sind die geraden Linien nur *zweifach gebunden*. Zwischen je zweien von drei zugeordneten Geraden findet also keine nähere Beziehung statt. Zu zwei in S' und S'' beliebig gewählten Geraden $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ findet man die dritte zugeordnete Gerade $\mathfrak{l}$ in S, indem man auf $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ irgend zwei Paare zugeordneter Punkte x', x'' und y', y'' markirt, die dritten zugeordneten Punkte x und y construirt und diese verbindet. — Auf drei zugeordneten geraden Linien bilden die zugeordneten Punkte drei projectivische Punktreihen.

Im I. Artikel wurden die drei Ebenen ausschliesslich *in räumlich-orientirter Lage* betrachtet, das heisst in solcher Lage, dass je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel perspectivisch, jedoch nicht in der nämlichen Ebene liegen, wobei die Kanten $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_{12}$ des von den drei Ebenen gebildeten Dreikants (vgl. Fig. 1) die perspectivischen Durchschnitte bilden; dieselben wurden als *Grundschnitte* bezeichnet. Bei solcher Lage schneiden sich die drei Verbindungslinien je zweier gegnerischen Kernpunkte in drei Punkten O, O_1, O_2, welchen die Bedeutung zukommt, dass für sie als Projectionscentren je drei zugeordnete Punkte x, x', x'' die Projectionen eines bestimmten Raumpunktes X repräsentiren. (Denn die drei Verbindungslinien Ox, O_1x', O_2x'' schneiden sich in einem und demselben Punkt X.)

§ 1.

Die Transformation der orientirten Lage. Allgemeine Aufgabe.

Es wurde schon am Schluss des § 3 des I. Artikels erwähnt, dass den drei *Grundschnitten* nicht die Bedeutung von singulären Elementen ihrer bezüglichen Ebenen zukomme.

In der That erkennt man zunächst leicht die Möglichkeit einer Aenderung der *orientirten Lage* vermittelst Parallelverrückung. Construirt man nämlich ein dem Dreieck OO_1O_2 ähnliches Dreieck $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2$, schneidet auf dessen Seiten von den Ecken aus die Strecken $\mathfrak{O}\mathfrak{p} = Op$, $\mathfrak{O}\mathfrak{q} = Oq$, $\mathfrak{O}_1\mathfrak{p}' = O_1p'$ u. s. f. ab und legt nun die drei Ebenen S, S', S'' so, dass ihre

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Kernpunkte in die mit gleichlautenden deutschen Buchstaben bezeichneten Punkte fallen und dass jede Ebene gegen die Ebene $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2$ unter demselben Winkel geneigt ist wie vorher gegen die Ebene OO_1O_2: so erhält man eine neue orientirte Lage, für welche die neuen Grundschnitte parallel mit den entsprechenden früheren Grundschnitten sind. Das räumliche System, dessen Projectionen die drei ebenen Systeme für diese neue Lage repräsentiren, ist mit dem der alten Lage entsprechenden räumlichen System ähnlich.

Die Möglichkeit der Transformation geht jedoch noch weiter, nämlich so weit, dass die zwei räumlichen Systeme, deren Projectionen die drei ebenen Systeme für zwei bestimmte orientirte Lagen vorstellen, zu einander collinear sind.

In dem *Scheitelpunkt A* des von den drei Ebenen bei orientirter Lage gebildeten Dreikants fallen drei zugeordnete Punkte zusammen. Man kann nun zur Bestimmung einer orientirten Lage die Bedingung aufstellen, es solle irgend ein beliebig gewähltes Tripel zugeordneter Punkte a, a', a'' in den *Scheitelpunkt* fallen. Durch diese Bedingung ist die Aufgabe, die drei Ebenen in orientirte Lage zu bringen, in der That vollständig bestimmt. Doch liefert nicht jedes Tripel eine reelle Lösung.

Um die orientirte Lage der angegebenen Bedingung gemäss herzustellen, hat man zunächst jedes Paar gegnerischer Kernstrahlenbüschel nach zwei congruenten Punktreihen zu schneiden, welche durch die in den betreffenden Ebenen liegenden Punkte des gegebenen Tripels gehen, so dass diese als entsprechende Punkte der zwei Punktreihen figuriren. Man erhält alsdann die gesuchte orientirte Lage, indem man die drei Ebenen so legt, dass je zwei congruente Punktreihen zusammenfallen und in ihrer Vereinigung einen *Grundschnitt* constituiren.

Die Sache läuft somit auf die Aufgabe hinaus: Wenn zwei projectivische Strahlenbüschel q und p' und auf zwei entsprechenden Strahlen derselben zwei Punkte a und a' gegeben sind: durch letztere zwei gerade Linien zu ziehen, welche die zwei Strahlenbüschel nach congruenten Punktreihen schneiden.

Diese Aufgabe kann auf die manchfaltigste Weise gelöst werden; namentlich ergeben sich einfache Lösungen dadurch, dass man von einer perspectivischen Lage der zwei Strahlenbüschel ausgeht. Die im Folgenden gegebene Lösung hat den Vorzug, dass sie eine Construction liefert, die bei jeder beliebigen Lage der zwei Strahlenbüschel direct ausführbar ist,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

und namentlich, dass sie ein einfaches Kriterium für die Reellität der Lösung giebt.

Da die zwei Schnittpunktreihen congruent sind, sobald die zwischen drei Strahlen des einen Büschels fallenden Strecken der einen Schnittgeraden gleich sind den zwischen die entsprechenden drei Strahlen des andern Büschels fallenden Strecken der andern Schnittgeraden, und da die Punkte a und a' auf entsprechenden Strahlen liegen, so genügt es, ausser diesen letzteren nur noch zwei Paare entsprechender Strahlen in Betracht zu ziehen. Als solche wählen wir die zwei ***rechtwinkligen*** entsprechenden Strahlenpaare. Dann reducirt sich die Aufgabe auf folgende (vgl. Fig. 2):

Gegeben zwei rechte Winkel q und p' und in der Ebene eines jeden ein Punkt a, bezw. a'. Es sollen durch a und a' zwei gerade Linien so gezogen werden, dass die zwischen a und die zwei Schenkel des Winkels q fallenden Strecken ab und ac einzeln gleich sind den zwischen a' und die zwei entsprechenden Schenkel des Winkels p' fallenden Strecken $a'b'$ und $a'c'$.

Bezeichnen wir die auf die Schenkel qb und qc als Axen bezogenen Coordinaten qr und qs des Punktes a resp. durch ϱ und σ, desgleichen die auf die entsprechenden Schenkel $p'b'$ und $p'c'$ bezogenen Coordinaten $p'r'$ und $p's'$ des Punktes a' resp. durch ϱ' und σ', und setzen wir ferner $rb = \xi$, $r'b' = \xi'$, so ergeben sich die zwei Relationen:

$$\frac{\xi}{\varrho} = \frac{ba}{ac} = \frac{b'a'}{a'c'} = \frac{\xi'}{\varrho'},$$

$$\xi^2 + \sigma^2 = ab^2 = a'b'^2 = \xi'^2 + \sigma'^2,$$

oder:

$$\frac{\xi}{\xi'} = \frac{\varrho}{\varrho'},$$

$$\xi^2 - \xi'^2 = \sigma'^2 - \sigma^2.$$

Diesen Relationen entsprechend können ξ und ξ' unter der Voraussetzung

$$\sigma' > \sigma$$

aufgefasst werden als Hypotenuse und Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem gegeben ist: das Verhältniss von Hypotenuse zu Kathete $= \frac{\varrho}{\varrho'}$ nebst der andern Kathete $= \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}$. Hiernach können ξ und ξ' leicht construirt werden:

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Legt man zunächst in den Winkel q von s aus die Strecke $st = \sigma'$ hinein, so ist: $qt = \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}$. Legt man hierauf in den Winkel p' von r' aus die Strecke $r'u' = \varrho$ hinein, so ist Dreieck $p'r'u'$ dem gesuchten Dreieck ähnlich. Schneidet man also auf $r'a'$ die Strecke $r'v' = qt = \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}$ ab und zieht durch v' eine Parallele zu $u'r'$, welche $p'r'$ in b' schneidet, so ist $r'b'v'$ das gesuchte Dreieck, also: $r'b' = \xi'$, $v'b' = \xi$. Je nachdem $r'v'$ von r' aus nach unten (s. Fig. 2) oder nach oben (s. Fig. 2a) abgeschnitten wird, fällt die Strecke $r'b'$ rechts oder links von Punkt r'. Durch Verbinden des Punkts a' mit jeder dieser zwei Lagen von b' erhält man zwei Lösungen. (Fig. 2 zeigt die eine —, Fig. 2a die andere Lösung.)

Die Construction ist immer möglich, wenn $\varrho > \varrho'$ ist. Wenigstens gilt dies unter der zu Grunde gelegten Voraussetzung $\sigma' > \sigma$. Wäre $\sigma' < \sigma$, so hätte σ als Hypotenuse —, σ' als Kathete —, und demzufolge auch ϱ' als Hypotenuse —, ϱ als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks aufgefasst werden müssen, es müsste also dann $\varrho < \varrho'$ sein. Demgemäss ergiebt sich als Bedingung für die Reellität der Lösung:

$$\varrho \gtrless \varrho', \quad \text{je nachdem} \quad \sigma \lesseqgtr \sigma'.$$

Dieses Kriterium lässt sich auch in folgender Form ausdrücken:

Bringt man die zwei rechten Winkel mit ihren entsprechenden Schenkeln zur Deckung, so darf von den zwei Coordinatenrechtecken der Punkte a und a' ($arqs$ und $a'r'p's'$) keines ganz innerhalb des andern fallen, sondern es müssen sich zwei Rechtecksseiten schneiden.

Ist demnach Punkt a' in der Ebene des Winkels p' gegeben und will man in der Ebene des Winkels q das Gebiet abgrenzen, innerhalb dessen Punkt a liegen muss, um mit a' eine reelle Lösung zu ermöglichen, so zieht man zu den Schenkeln qb und qc des Winkels q Parallelen in Abständen bezw. gleich den bezüglichen Coordinaten σ', ϱ' des Punktes a': dann muss Punkt a innerhalb desjenigen von den Parallelen gebildeten Scheitelwinkelraums liegen, in welchem der Punkt q nicht liegt. Wir wollen diesen Winkelraum kurz *das dem Punkte a' entsprechende günstige Gebiet* der Winkelebene q nennen.

Um nun mit Benutzung der vorstehenden *Fundamentalconstruction* drei gegebene projectiv-trilineare ebene Systeme in irgend welche orientirte Lage zu bringen, kann man etwa in folgender Weise verfahren:

Man schneidet zunächst ein Paar gegnerischer Kernstrahlenbüschel,

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS CNAM

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

z. B. q' und p'' beliebig nach zwei congruenten Punktreihen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ und construirt die den letzteren in der dritten Ebene S zugeordnete (mit ihnen projectivische) Punktreihe $\mathfrak{l}$. Man wählt hierauf unter den Punkten der congruenten Punktreihen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ ein Punktepaar a', a'' so aus, dass der ihnen entsprechende Punkt a der Punktreihe $\mathfrak{l}$ sowohl innerhalb des a' entsprechenden *günstigen Gebietes* des Büschels q als innerhalb des a'' entsprechenden *günstigen Gebietes* des Büschels p liegt, und führt die besprochene *Fundamental-Construction* einerseits für die Büschel q und p' mit den Punkten a und a', andererseits für die Büschel p und q'' mit den Punkten a und a'' aus. Schliesslich bringt man dann die drei Ebenen S, S', S'' in eine solche Lage, dass von den gewonnenen Schnittpunktreihen je zwei congruente sich decken und in dieser Deckung einen Grundschnitt constituiren.

Da die *Fundamentalconstruction* in Bezug auf jedes Paar gegnerischer Kernstrahlenbüschel im allgemeinen zwei Lösungen liefert, so erhält man für ein bestimmtes Punktetripel a, a', a'' im allgemeinen zweimal drei Paare congruenter Schnittpunktreihen, welche sich hinsichtlich ihrer Verwendung als Grundschnitte einer orientirten Lage auf 8-fache Weise combiniren lassen, so dass sich im allgemeinen 8 verschiedene Möglichkeiten ergeben würden, die drei Ebenen mit einem und demselben Tripel a, a', a'' als Scheitelpunkt in räumlich-orientirte Lage zu bringen. Indessen sind selbstverständlich nur solche Combinationen brauchbar, bei welchen die drei — von je zwei Punktreihen der nämlichen Ebene eingeschlossenen Winkel (welche bei der orientirten Lage als Dreikant-Seiten figuriren) der Bedingung genügen, dass ihre Summe kleiner als 360° und dass keiner derselben grösser als die Summe der zwei andern ist.

§ 2.

Die Fluchtlinien. Orientirte Lage mit parallelen Grundschnitten.

Besonders einfach gestaltet sich die Herstellung der orientirten Lage für den Fall, dass das für den Scheitelpunkt vorgesehene Tripel zugeordneter Punkte a, a', a'' im Unendlichen liegt, so dass die drei Grundschnitte parallel werden.

Wir schicken der bezüglichen Betrachtung folgende allgemeine Bemerkung voraus:

Hat man in drei projectiv-trilinearen Systemen S, S', S'' drei beliebige gerade Linien $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$, *so enthalten dieselben (falls sie nicht ein Tripel*

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

zugeordneter Geraden bilden) stets ein und nur ein Tripel zugeordneter Punkte. Man erhält dasselbe, indem man in jeder Ebene den Schnittpunkt der betreffenden Geraden mit derjenigen Linie construirt, welche den zwei andern Geraden zugeordnet ist. Denn auf drei zugeordneten Geraden bilden die zugeordneten Punkte drei projectivische Punktreihen. Schneidet also z. B. die den Linien $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}'$ zugeordnete Gerade in der Ebene S'' die Linie $\mathfrak{t}''$ in a'', und sind a und a' die dem Punkt a'' der Punktreihe $\mathfrak{t}''$ entsprechenden Punkte der Punktreihen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}'$, so bilden a, a', a'' ein Tripel zugeordneter Punkte, und es muss dann auch die den Linien $\mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{t}''$ zugeordnete Gerade in S durch a — und ebenso die den Linien $\mathfrak{t}''$ und $\mathfrak{r}$ zugeordnete Gerade in S' durch a' gehen.

Wenden wir diese allgemeine Bemerkung auf die drei unendlich fernen Geraden der drei Ebenen an, so entsprechen den Punkten der unendlich fernen Geraden zweier Ebenen als zugeordnete in der dritten Ebene im allgemeinen die Punkte einer endlichen Geraden, welche wir die *Fluchtlinie* der betreffenden Ebene nennen wollen, und wir gelangen somit zu folgendem Satze:

In drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen existirt stets ein und im allgemeinen nur ein Tripel zugeordneter Punkte im Unendlichen; diese Punkte sind identisch mit den unendlich fernen Punkten der drei Fluchtlinien.

In specieller Ausführung ergeben sich die Richtungslinien der drei unendlich fernen zugeordneten Punkte u, u', u'' wie folgt: Man bestimmt zunächst die Fluchtlinie einer Ebene, z. B. S, indem man zu irgend zwei im Unendlichen liegenden Paaren zugeordneter Punkte der Ebenen S' und S'' die dritten zugeordneten Punkte in S construirt und verbindet. Zieht man dann die zu der gewonnenen Fluchtlinie parallelen Strahlen der Büschel p und q und bestimmt deren entsprechende Strahlen in den gegnerischen Büscheln q'' und p', so bilden diese die Richtungslinien für die Punkte u' und u''.

Soll nun die orientirte Lage mit dem unendlich fernen Tripel u, u', u'' als Scheitelpunkt hergestellt werden, so hat man wieder jedes Paar gegnerischer Kernstrahlenbüschel nach zwei congruenten Punktreihen zu schneiden, welche durch die in den betreffenden Ebenen liegenden zwei Punkte des Tripels gehen. Um dies z. B. für die zwei Büschel q und p' auszuführen, hat man dieselben nur parallel mit den Richtungslinien von u

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

und u' so zu schneiden, dass die zwischen irgend zwei entsprechende Strahlenpaare fallenden Strecken gleich sind, — eine Forderung, die durch unendlich viele Paare von Schnittlinien befriedigt werden kann. Führt man dies bei allen drei Paaren von gegnerischen Kernstrahlenbüscheln aus, so lässt sich dabei die Wahl der bezüglichen Schnittlinienpaare leicht so treffen, dass nachher die drei Ebenen in eine Lage gebracht werden können, in welcher die congruenten Punktreihen jedes Schnittlinienpaars coincidiren. Beispielsweise kann dies auf folgende Weise geschehen (vgl. Fig. 3):

Man wählt zunächst bei den Büscheln q und p', desgleichen bei p und q'' die Schnittlinienpaare gemäss der oben gegebenen Anweisung beliebig und legt die Systeme S' und S'' in die Ebene des Systems S so, dass die congruenten Punktreihen jedes Schnittlinienpaars sich decken. Sie mögen in dieser Deckung durch $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ bezeichnet und von den ***Hauptaxen*** in den Punkten M_1 und M_2 getroffen werden. — Es sind nun noch die Schnittlinien $\mathfrak{g}'_{12}$ und $\mathfrak{g}''_{12}$ der zwei Büschel q' und p'' zu bestimmen, und zwar so, dass wenn man die Ebenen S' und S'' um $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ dreht, die zwei congruenten Punktreihen auf $\mathfrak{g}'_{12}$ und $\mathfrak{g}''_{12}$ zur Deckung gebracht werden können. Letzteres ist der Fall, wenn irgend zwei entsprechende Punkte — z. B. die Schnittpunkte der Hauptaxen M'_{12} und M''_{12} gleiche Abstände von einer beliebigen senkrecht zu $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ gezogenen Geraden haben. Um das dieser Bedingung genügende Schnittlinienpaar zu ermitteln, bestimmt man zunächst ein beliebiges zu $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ paralleles Schnittlinienpaar, welches die bezüglichen Hauptaxen in μ' und μ'' — und irgend ein Paar entsprechender Strahlen in γ' und γ'' so schneidet, dass $\mu'\gamma' = \mu''\gamma''$ ist. Zieht man dann durch q' eine Senkrechte zu $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$, welche von $\gamma'\mu'$ in ν' geschnitten wird, — verlängert $\gamma''\mu''$ um $\mu''\nu'' = \mu'\nu'$, — zieht $p''\nu''$, welche die Linie $\nu'q'$ in N'' schneidet, und zieht durch N'' eine Parallele zu $\mathfrak{g}_2$, welche $p''\mu''$ in M''_{12} und $p''\gamma''$ in G''_{12} schneidet: so stellt diese die gesuchte Schnittlinie $\mathfrak{g}''_{12}$ des Büschels p'' vor. Die zugehörige Schnittlinie $\mathfrak{g}'_{12}$ des Büschels q' ergiebt sich dann, indem man durch G''_{12} eine Parallele zu $N''\nu'$ zieht, welche den Strahl $q'\gamma'$ in G'_{12} schneidet, und durch G'_{12} eine Parallele zu $\mathfrak{g}_1$ zieht, welche $q'\mu'$ in M'_{12} und $q'\nu'$ in N' schneidet.

Durch geeignete Wahl der in $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ coincirenden Schnittlinienpaare kann im allgemeinen leicht vorgesorgt werden, dass von den Strecken $M'_{12}M_1$, M_1M_2 und $M_2M''_{12}$ nicht eine grösser als die Summe der beiden andern wird.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

§ 3.

Aehnliche und congruente zugeordnete Punktreihen.

Es fragt sich, ob es nicht möglich ist, dass von den drei — nach Anleitung des vorigen Paragraphen ermittelten — parallelen Grundschnitten je zwei in derselben Ebene liegende zusammenfallen, so dass bei Herstellung der räumlich-orientirten Lage die drei Grundschnitte sich in einer einzigen Geraden vereinigen und also die drei Ebenen ein Ebenenbüschel bilden. — Es würden alsdann in jedem Punkte des gemeinschaftlichen Grundschnittes drei zugeordnete Punkte zusammenfallen. Während also im allgemeinen die zugeordneten Punkte auf drei zugeordneten geraden Linien drei projectivische Punktreihen bilden, so würden in dem gemeinschaftlichen Grundschnitt drei zugeordnete Gerade vereinigt sein, denen die ausgezeichnete Eigenschaft zukommt, dass ihre zugeordneten Punkte drei congruente Punktreihen bilden.

Die zu Anfang aufgeworfene Frage ist also identisch mit der Frage, ob in drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen *congruente zugeordnete Punktreihen* existiren.

Dies ist in der That der Fall, wie sich leicht aus folgender Betrachtung ergiebt:

Sollen die zugeordneten Punkte auf drei zugeordneten Geraden zunächst drei *ähnliche* Punktreihen bilden, so müssen ihre unendlich fernen Punkte einander zugeordnet sein, das heisst: die drei Geraden müssen durch das unendlich ferne Tripel u, u', u'' gehen, oder: sie müssen den drei Fluchtlinien beziehungsweise parallel sein. Umgekehrt enthalten sämmtliche Tripel zugeordneter Geraden, welche den drei Fluchtlinien bezw. parallel sind, ähnliche zugeordnete Punktreihen.

Unter diesen unendlich vielen Tripeln ähnlicher zugeordneter Punktreihen müssten nun die Tripel *congruenter* zugeordneter Punktreihen, falls solche existiren, enthalten sein. — $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$ (vgl. Fig. 3) sei ein solches congruentes Tripel. Schneiden dann $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$ die entsprechenden Hauptaxen in den Punkten m, m', m'', und sind c, c', c'' irgend drei zugeordnete Punkte von $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$, so müsste

$$mc = m'c' = m''c''$$

sein. Ein Punktetripel c, c', c'' aber, das dieser Bedingung genügt, lässt sich leicht ermitteln: Man zieht parallel zu den Hauptaxen drei Linien r,

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

$\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ so, dass zwischen sie und die Hauptaxen gleiche, zu den betreffenden Fluchtlinien parallele Strecken fallen, und bestimmt (gemäss der allgemeinen Bemerkung zu Anfang des vorigen Paragraphen) das auf $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ liegende Tripel zugeordneter Punkte c, c', c''. — Zieht man demnächst durch c, c', c'' zu den entsprechenden Fluchtlinien Parallelen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$, welche die betreffenden Hauptaxen in m, m', m'' schneiden: so genügen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$ der aufgestellten Forderung. (Denn sie bilden als Verbindungslinien der zwei Tripel zugeordneter Punkte c, c', c'' und u, u', u'' die Träger dreier zugeordneten Punktreihen, welche congruent sind, weil $mc = m'c' = m''c''$ und $cu = c'u' = c''u''$ ist.)

Die angegebene Construction liefert vier Lösungen. Es können nämlich zu jeder Hauptaxe in einem bestimmten — in der Richtung der Fluchtlinien gemessenen — Abstande zwei Parallelen gezogen werden, welche zu beiden Seiten der Hauptaxe liegen und durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{s}'_0$, $\mathfrak{t}''$ und $\mathfrak{t}''_0$ bezeichnet werden mögen. Diese 2 mal 3 Linien lassen sich auf 8-fache Weise combiniren. Führt man mit jeder Combination die angegebene Construction aus, so liefern je zwei sich ergänzende Combinationen ($\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ und $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{s}'_0$, $\mathfrak{t}''_0$; $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''_0$ und $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{s}'_0$, $\mathfrak{t}''$, u. s. f.) das nämliche Resultat. Man erhält somit im ganzen vier verschiedene Lösungen.

Man bemerke, dass die besprochene Construction immer möglich ist, dass es aber ausser den auf diesem Wege gefundenen keine weiteren Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen geben kann, da ein congruentes Tripel nothwendig das unendlich ferne Punktetripel u, u', u'' enthalten muss. Nur in dem besonderen Falle, wo die unendlich fernen Geraden der drei Ebenen einander selbst zugeordnet sind, existiren unendlich viele Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen.

Wir können demgemäss den Satz aussprechen:

In drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen existiren jederzeit vier und im allgemeinen nur vier Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen; ihre Träger sind parallel den drei Fluchtlinien.

§ 4.

Orientirte Lage mit zusammenfallenden Grundschnitten.

Kehren wir zu der Aufgabe der Herstellung einer orientirten Lage mit zusammenfallenden Grundschnitten zurück: so hat man, um eine solche zu bewirken, die drei Ebenen so zu legen, dass eines der

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

gefundenen Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen c, c', c'' zur Deckung gelangt — es mag in dieser Deckung durch $\mathfrak{C}$ bezeichnet werden, — und ferner: dass die drei Hauptaxen pq, $p'q'$, $p''q''$ in eine Ebene zu liegen kommen. (Denn die Verbindungslinien je zweier gegnerischen Kernpunkte müssen sich schneiden.)

Um letzteres zu bewirken, kann man sich jede Ebene um den gemeinschaftlichen Grundschnitt $\mathfrak{C}$ gedreht denken, wobei jede Hauptaxe einen Rotationskegel beschreibt, dessen Spitze in dem Vereinigungspunkt M des Punktetripels m, m', m'' liegt und dessen Axe $\mathfrak{C}$ ist. Schneidet man diese Kegel durch eine beliebige — durch M gehende — Ebene und wählt von jedem Kegel eine Schnittmantellinie als Lage der betreffenden Hauptaxe: so ist dadurch die orientirte Lage bestimmt, welche durch Fig. 4 des näheren illustrirt werden mag.

Legt man die Schnittebene durch die Linie $\mathfrak{C}$ selbst, so erhält man die drei Systeme orientirt in einer und derselben Ebene. Es fallen dann auch die Projectionscentren (Schnittpunkte der Verbindungslinien der gegnerischen Kernpunktepaare) in diese Ebene. Die von ihnen nach je drei zugeordneten Punkten x, x', x'' gezogenen Strahlen schneiden sich auch dann noch in einem und demselben Punkt X; das Punktsystem, als dessen Projectionen sich nun die drei trilinearen Systeme darstellen, ist ein ebenes*). Zur näheren Erläuterung bemerke man, dass Fig. 4 ebensowohl als Abbildung des räumlichen Gebildes, in welchem der gemeinschaftliche Grundschnitt $\mathfrak{C}$ nicht in der Ebene OO_1O_2 liegt, — wie als ebenes Gebilde aufgefasst werden kann.

Hat man eine solche ebene orientirte Lage und dreht eines der drei Systeme um den gemeinschaftlichen Grundschnitt um einen Winkel von 180°, so erhält man eine neue ebene orientirte Lage vom nämlichen Charakter**). Wendet man dies auf jedes einzelne der drei Systeme an, so erhält man zusammen mit der ursprünglichen Lage vier verschiedene orientirte Lagen. (Würde man zwei Ebenen, z. B. S und S' drehen, so würde man dieselbe Lage erhalten wie durch Drehung der einzigen dritten S''.) Es giebt folglich vier verschiedene ebene orientirte Lagen mit einem und dem-

*) Man achte wohl auf den wesentlichen Unterschied dieser *(trilinearen)* Art der ebenen Projection im Gegensatz zur *collinearen* ebenen Projection.

**) Man bemerke, dass die neue Lage der gedrehten Hauptaxe identisch ist mit der zweiten Schnittmantellinie des betreffenden Rotationskegels.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

selben gemeinschaftlichen Grundschnitt. Da aber jedes der vier Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen als gemeinschaftlicher Grundschnitt verwendet werden kann, so gilt der Satz:

Drei projectiv-trilineare ebene Systeme können im allgemeinen auf 16 verschiedene Arten in orientirte Lage in einer und derselben Ebene mit gemeinschaftlichem Grundschnitt gebracht werden. Von diesen 16 Lagen haben je vier den nämlichen Grundschnitt.

Man bemerke, dass die Herstellung einer räumlich-orientirten Lage mit gemeinschaftlichem Grundschnitt auf die oben angegebene Weise stets möglich ist. Nur in einem besonderen Falle bieten sich (und zwar sowohl bei der orientirten Lage mit zusammenfallenden — als auch mit parallelen Grundschnitten) gewisse Eigenthümlichkeiten dar, nämlich in dem Falle, wo in zwei Ebenen, z. B. S und S' die Hauptaxen mit den Fluchtlinien und also auch mit den Linien $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ rechte Winkel bilden. Von den oben betrachteten drei Rotationskegeln gehen dann zwei in — zur Axe $\mathfrak{C}$ senkrechte Ebenen über, welche zusammenfallen und also von der durch M gelegten Schnittebene nach einer und derselben Geraden geschnitten werden. Demgemäss ist die orientirte Lage hier nur in der Art möglich, dass die Hauptaxen der Ebenen S und S', und somit auch die Ebenen S und S' selbst, zusammenfallen, während die dritte Ebene S'' jede beliebige Stellung einnehmen kann. Fig. 5 mag als Illustration dieses Falles dienen. Die zwei Projectionscentren O und O_1 fallen unter solchen Umständen mit den Kernpunkten p und q' zusammen, und das Punktsystem, dessen Projectionen die drei Systeme in dieser Lage vorstellen, ist ein ebenes.

Damit ist indessen nicht gesagt, dass drei derartige Systeme nicht auf andere Weise in solche orientirte Lage gebracht werden können, in welcher sie sich als Projectionen eines räumlichen Punktsystems darstellen. Z. B. kann man in dieser Beziehung folgende Erwägung anstellen:

Ist c, c', c'' irgend ein den drei congruenten Punktreihen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$ zugehöriges Punktetripel, so gehen z. B. durch c' und c'' die zwei congruenten Schnittpunktreihen $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}''$ der zwei gegnerischen Kernstrahlenbüschel q' und p''; das in § 1 gegebene Kriterium für die reelle Lösung der *Fundamentalaufgabe* ist somit bezüglich der Punkte c' und c'' erfüllt, und es muss folglich ausser dem Schnittlinienpaar $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$ noch ein zweites reelles Schnittlinienpaar $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ existiren, das nach den bezüglichen Ausfüh-

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

rungen des § 1 leicht gefunden werden kann. Ebenso ergiebt sich für die zwei Büschel q'' und p noch eine zweite Lösung e'', e, während bei den Büscheln q und p' die zwei Lösungen zusammenfallen. Es kann somit durch Zusammenlegen von c und c', $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{d}''$, e'' und e eine räumlich-orientirte Lage hergestellt werden, wofern die von e und c, c' und $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ und e'' eingeschlossenen Winkel zusammen kleiner als 360° sind und keiner derselben grösser als die Summe der beiden andern ist.

Man erkennt bei näherer Ausführung der bezüglichen Construction leicht, dass hiebei die verschiedenen Linienpaare $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ und e'', e, welche den verschiedenen zugeordneten Punktetripeln der Punktreihen c, c', c'' zugehören, sämmtlich bezw. unter sich parallel sind, und zwar dies für alle vier Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen c, c', c''.

§ 5.

Schlussfolgerungen.

Wir sind bei unsern seitherigen Betrachtungen ausgegangen von der Definition der *projectiv-trilinearen Verwandtschaft* als der Beziehung zwischen drei solchen ebenen Systemen, welche drei verschiedene Projectionen eines und desselben räumlichen Originalsystems vorstellen. Es war hiebei nicht von vornherein ausgemacht, ob zwischen den projectiven Beziehungen der drei Paare gegnerischer Kernstrahlenbüschel nicht eine gewisse beziehliche oder beschränkende Bedingung bestehe. Nun ergiebt sich aber, dass die im vorigen Paragraphen besprochenen Constructionen zur Herstellung der *orientirten Lage mit zusammenfallenden Grundschnitten* immer ausgeführt werden können, wie auch jene projectiven Beziehungen beschaffen sein mögen *), — dass folglich die letzteren von einander vollkommen unabhängig sind. Die projectiv-trilineare Verwandtschaft ist somit durch die drei Paare von Kernpunkten und die drei projectiven Beziehungen zwischen je zwei gegnerischen Kernstrahlenbüscheln, welche willkürlich gewählt werden können, vollständig bestimmt, und es kann demgemäss

*) Es ist wohl zu beachten, dass bezüglich der allgemeinen Aufgabe der Orientirung noch nicht bewiesen ist, dass es jederzeit ein Punktetripel a, a', a'' giebt, für welches die in § 1 besprochene Construction zur Herstellung der orientirten Lage mit a, a', a'' als Scheitelpunkt — möglich ist. Wohl aber ist die im vorigen Paragraphen besprochene Construction zur Orientirung mit zusammenfallenden Grundschnitten immer möglich.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

diese Bestimmung als Definition der trilinearen Verwandtschaft an die Spitze gestellt werden, in der Weise, wie es schon in der *Einleitung* (Al. 2) vorgreifend geschehen ist. Wir haben dann den Satz, dass drei gemäss dieser Definition einander zugeordnete ebene Punktsysteme in gestaltlicher Hinsicht stets als Projectionen eines und desselben — im allgemeinen räumlichen — Original-Punktsystems aufgefasst werden können.

Erinnern wir uns ferner, dass die projective Beziehung zwischen zwei Strahlenbüscheln durch drei Paare entsprechender Strahlen bestimmt ist, welche willkürlich gewählt werden können, und nehmen wir bei unsern drei gegnerischen Büschelpaaren als solche entsprechende Strahlen ausser den *Hauptaxen* noch die Kernstrahlen, die nach irgend zwei Tripeln zugeordneter Punkte führen, so ergiebt sich der Satz:

Drei projectiv-trilineare ebene Systeme sind bestimmt durch die sechs Kernpunkte und zwei Tripel zugeordneter Punkte, welche willkürlich gewählt werden können, mit der Beschränkung, dass von den in einer Ebene liegenden zwei Tripelpunkten und zwei Kernpunkten keine drei Punkte in gerader Linie liegen dürfen *).

§ 6.

Ebene Orientirung im weiteren Sinn.

Knüpft man den Begriff der *orientirten Lage* an die blosse Bedingung der perspectivischen Lage der gegnerischen Kernstrahlenbüschel, so ist auch eine solche Lage als orientirt zu bezeichnen, wo in einer und der-

*) Im I. Artikel wurde die Methode der *photogrammetrischen Aufnahme* mit Benützung einer für photogrammetrische Zwecke besonders eingerichteten Camera besprochen. Steht nun nur eine gewöhnliche photographische Camera zur Verfügung, so kann zufolge des obigen Satzes der Grundriss (bezw. Aufriss) aus zwei photographischen Bildern ermittelt werden, sobald jede Aufnahme die Abbildung des gegnerischen Standpunktes enthält, und ferner die Grundriss- (bezw. Aufriss-) Projectionen der zwei Standpunkte sowie zweier aufgenommenen Punkte bekannt sind. Man wird also, um z. B. den Grundriss zu finden, in jedem Standpunkt mittelst eines Winkelmessinstrumentes die horizontalen Winkel messen, welche die nach zwei bestimmten Punkten gehenden Visirlinien mit der *Standlinie* machen, alsdann die *Standlinie* in irgend welchem Massstabe auf's Papier auftragen und durch Anlegen der gemessenen Winkel die Grundriss-Projectionen der zwei Punkte fixiren. Dadurch sind von den zwei Paaren gegnerischer Kernstrahlenbüschel p und q'', q und p' je drei Paare entsprechender Strahlen bekannt; also kann zu einem beliebigen vierten Strahl des Büschels q'' oder p' der entsprechende Strahl von p oder q leicht (am bequemsten durch Vermittelung einer perspectivischen Lage) gefunden werden.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

selben Ebene je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel perspectivisch sind, ohne dass die perspectivischen Durchschnitte *(Grundschnitte)* durch den nämlichen Punkt gehen (vgl. Fig. 6). Als Projectionen eines und desselben Originalsystems stellen sich aber die drei Systeme in solcher Lage nicht dar. Denn zieht man nach drei zugeordneten Punkten x, x', x'' Strahlen von den entsprechenden Schnittpunkten der Verbindungslinien der gegnerischen Kernpunkte, so schneiden diese sich nicht in dem nämlichen Punkt. Letzteres ist nur dann der Fall, wenn sich auch die Grundschnitte in einem und demselben Punkte schneiden.

Eine solche *orientirte Lage im weiteren Sinn* lässt sich leicht auf folgende Weise herstellen:

Man legt zunächst die Systeme S' und S'' so in die Ebene des Systems S, dass einerseits das Kernstrahlenbüschel p' mit seinem gegnerischen Büschel q, andererseits das Kernstrahlenbüschel q'' mit seinem gegnerischen Büschel p perspectivisch ist. Und zwar können diese zwei perspectivischen Lagen immer so gewählt werden, dass das dritte Paar gegnerischer Kernstrahlenbüschel q' und p'' zwei parallele entsprechende Strahlenpaare besitzt. Dieselben lassen sich leicht bestimmen als Doppelstrahlen des Büschels q' mit dem durch Parallelverschiebung nach q' verlegten Büschel p''. Verschiebt man dann das System S'' entlang des gemeinschaftlichen Strahls pq'' so lange, bis eines jener parallelen entsprechenden Strahlenpaare zur Coincidenz gelangt, so ist damit auch zwischen den Büscheln q' und p'' die perspectivische Lage hergestellt, ohne dass durch die Verschiebung die perspectivische Lage von p und q'' verloren gegangen wäre.

Als von besonderem Interesse und besonderer Einfachheit der Herstellung ist speciell derjenige Fall der *ebenen Orientirung im weiteren Sinn* hervorzuheben, wo die drei Systeme so gelegt werden, dass die drei Hauptaxen (und also sämmtliche Kernpunkte) in eine und dieselbe gerade Linie fallen. —

Wenn hiemit gezeigt ist, wie drei vorhandene projectiv-trilineare Systeme stets in die genannte Lage gebracht werden können, so folgt aus den Erörterungen des vorigen Paragraphen umgekehrt, dass, wenn man in einer Ebene irgend drei beliebige Linien als Grundschnitte — und irgend drei Punktepaare, deren Verbindungslinien sich auf den Grundschnitten schneiden oder in gerader Linie liegen, als Kernpunkte wählt, dadurch stets drei projectiv-trilineare Systeme bestimmt sind, das heisst: drei solche

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Systeme, welche in gestaltlicher Hinsicht als Projectionen eines und desselben Original-Punktsystems betrachtet werden können.

Ein Blick auf die Fig. 6 zeigt, dass dies auch in folgender Form ausgesprochen werden kann:

Bewegt sich ein veränderliches Sechseck so, dass drei nicht aufeinanderfolgende Ecken auf drei festen Leitgeraden laufen, während die sechs Seiten sich um sechs feste Punkte drehen, und liegen diese sechs Punkte so, dass die Verbindungslinien je zweier solcher, um welche sich die einer freien Ecke anliegenden Seiten drehen, sich auf den Leitgeraden schneiden, oder dass sie in gerade Linie fallen: so stehen die drei ebenen Systeme, welche unter diesen Umständen von den noch freien Ecken beschrieben werden können, in projectiv-trilinearer Verwandtschaft.

Es ist damit die *projectiv-trilineare Verwandtschaft* in Beziehung gebracht zu dem *MacLaurin-Braikenridge*'schen Theorem, bezw., falls die sechs Drehpunkte in gerader Linie liegen, zu dem Theorem des *Pappus*. Wir werden auf diesen Gegenstand im III. Artikel zurückkommen.

Berlin, Juni 1884.

(Fortsetzung folgt.)

CNAM

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires

Hauck, Theorie der trilinearen Verwandtschaft II.

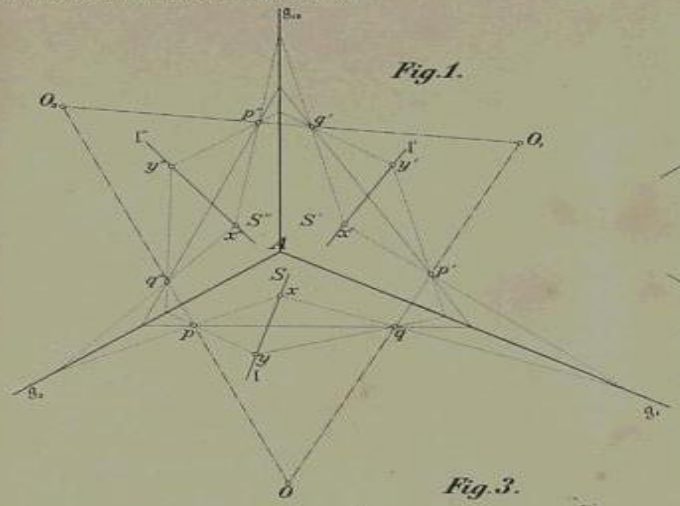


Fig. 1.

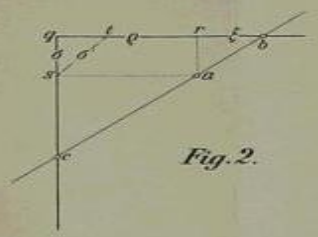


Fig. 2.

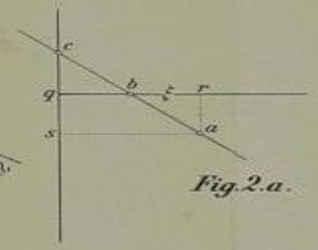
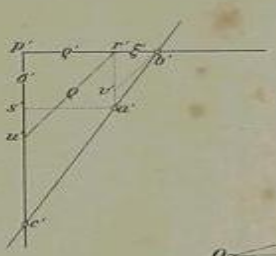
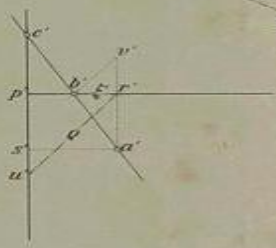


Fig. 2.a.





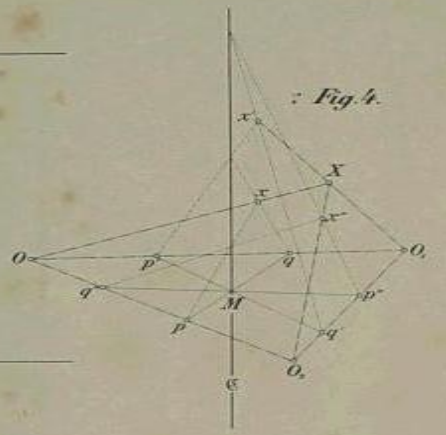


Fig. 4.

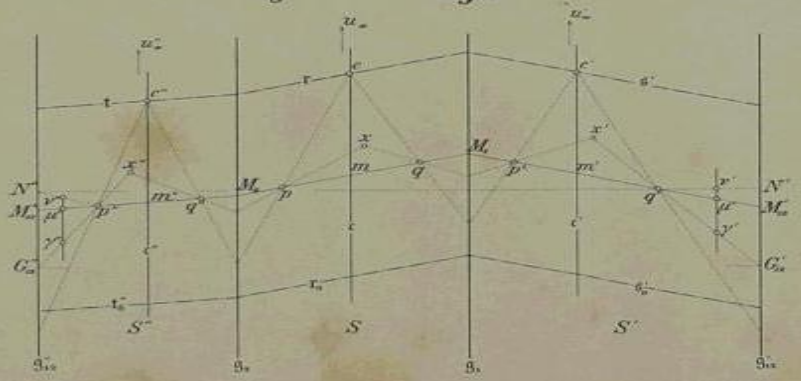


Fig. 3.

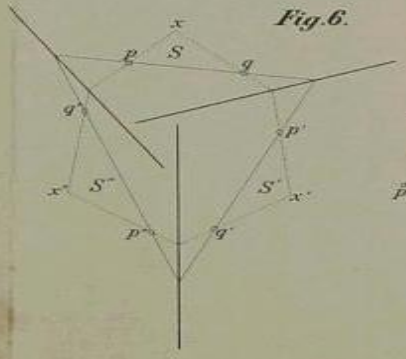


Fig. 6.

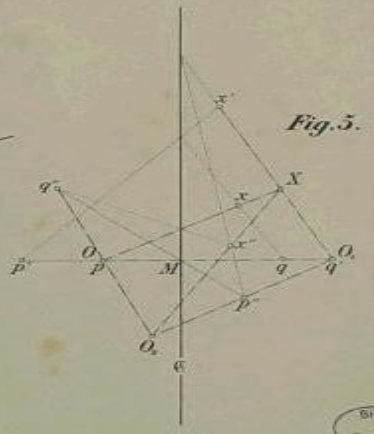


Fig. 5.

Bib CNAM

Lith. Anst. v. Leop. Kraatz, Berlin.

Droits réservés au Cnam et à ses partenaires