http://cnum.cnam.fr
Conservatoire numérique des Arts & Métiers

Titre : Congrès international de chronométrie. 1900
Auteur : Exposition universelle. 1900. Paris

Mots-clés : Exposition internationale (1900 ; Paris) ; Temps*Mesure*Congrès
Description : 1 vol. (XL-254 p.) ; 27 cm
Adresse : Paris : Gauthier-Villars, 1902
Cote de l'exemplaire : CNAM 4 Xae 64

URL permanente : http://cnum.cnam.fr/redir?4XAE64

La reproduction de tout ou partie des documents pour un usage personnel ou d'enseignement est autorisée, à condition que la mention complète de la source (*Conservatoire national des arts et métiers, Conservatoire numérique http://cnum.cnam.fr*) soit indiquée clairement. Toutes les utilisations à d'autres fins, notamment commerciales, sont soumises à autorisation, et/ou au règlement d'un droit de reproduction.

You may make digital or hard copies of this document for personal or classroom use, as long as the copies indicate *Conservatoire national des arts et métiers, Conservatoire numérique http://cnum.cnam.fr*. You may assemble and distribute links that point to other *CNUM* documents. Please do not republish these PDFs, or post them on other servers, or redistribute them to lists, without first getting explicit permission from *CNUM*.

PDF créé le 14/12/2011

EXPOSITION UNIVERSELLE DE 1900.

CONGRÈS INTERNATIONAL

DE

CHRONOMÉTRIE.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
29113 · Quai des Grands-Augustins, 55.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

4° 87 4° Xae 64

EXPOSITION UNIVERSELLE DE 1900.

CONGRÈS INTERNATIONAL

DE

CHRONOMÉTRIE.

COMPTES RENDUS DES TRAVAUX

PROCÈS-VERBAUX, RAPPORTS ET MÉMOIRES

PUBLIÉS

SOUS LES AUSPICES DU BUREAU DU CONGRÈS,

PAR

MM. E. FICHOT ET P. DE VANSSAY, SECRÉTAIRES.



BIBLIOTHEQUE
DU CONSERVATOIRE NATIONAL
ARTS & MÉTIERS
No du Catalogue 4° Xae 17
Prix ou Estimation 6 f
Entrée, le 16 Juin 1902

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

AVERTISSEMENT.

Dans sa séance de clôture, le Congrès de Chronométrie a autorisé son Bureau à publier les comptes rendus des travaux.

Le Bureau s'est réuni le 22 janvier 1901 sous la présidence de M. Caspari et a chargé ses secrétaires de surveiller l'exécution de la publication (1).

Il demeure bien entendu que les opinions émises dans ces Mémoires n'engagent que la responsabilité des auteurs, et non celle du Congrès.

Au moment de livrer ces documents à l'impression, nous avons le regret de rappeler la mort de M. le vice-amiral de Fauque de Jonquières, président des Commissions d'organisation des deux Congrès de 1889 et 1900 et président d'honneur du Congrès de 1900, survenue le 12 août 1901. L'amiral de Jonquières, au cours de sa longue carrière maritime, s'était constamment intéressé aux progrès de la Chronométrie. On lui doit de nombreuses déterminations de longitudes, et durant son passage au Dépôt de la Marine il encouragea de sa haute autorité les recherches sur les chronomètres qui sont de tradition dans cet établissement.

(1) Ce volume fait suite aux *Comptes rendus* du Congrès international de Chronométrie de 1889 (Gauthier-Villars, éditeur).

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

BUREAU DU CONGRÈS.

PRÉSIDENT D'HONNEUR.

M. le Vice-Amiral de Fauque de Jonquières, membre de l'Institut.

PRÉSIDENT.

M. Caspari, ingénieur hydrographe en chef de la Marine.

VICE-PRÉSIDENTS.

MM. le professeur Vinceslas Zenger, membre de l'Académie des Sciences, à Prague.
Gautier, directeur de l'Observatoire de Genève.
le général Bassot, directeur du Service géographique de l'Armée.
Rodanet, président fondateur de l'École d'horlogerie de Paris.

SECRÉTAIRES.

MM. De Vanssay, ingénieur hydrographe de la Marine.
Faddegon, délégué de la Confédération néerlandaise des horlogers.
Borrel, horloger électricien, à Paris.

TRÉSORIER.

M. Paul Garnier, ingénieur civil, fabricant d'horlogerie.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

LISTE PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

DES MEMBRES DU CONGRÈS.

MM. Anguiano (Angel), directeur de la Commission géodésique mexicaine, à Tacubaya.
Antoine (Ernest), fabricant d'horlogerie, à Pagney (Jura).
Arago, capitaine de vaisseau, commandant le *Borda*.
Arndt (le docteur Louis), rédacteur en chef de la *Revue internationale de l'horlogerie*, à Neuchâtel (Suisse).
Baillaud (B.), directeur de l'Observatoire de Toulouse.
Bailly (J.-J.), capitaine de frégate en retraite, à Toulon.
Bassot (le général), directeur du Service géographique de l'Armée.
Battesti (F.-R.), à Paris.
Berner (Paul), Directeur de l'École d'horlogerie de la Chaux-de-Fonds (Suisse).
Berthoud (A.-L.), horloger expert de la Marine, à Argenteuil (Seine-et-Oise).
Bigourdan (G.), astronome à l'Observatoire de Paris.
Bonaparte (le prince Roland), président de la Commission centrale de la Société de Géographie de Paris.
Borrel (Georges), horloger électricien, à Paris.
Boudeaud (Emmanuel), constructeur de chronomètres, à Paris.
Bouillet, ingénieur hydrographe en chef de la Marine.
Bourgeois (le commandant), au Service géographique de l'Armée.
Brandt (César), fabricant d'horlogerie, à Paris.
Brillouin, maître de conférences à l'École Normale supérieure.
Brylinski (Émile), ingénieur des Télégraphes, à Paris.
Bureau des Poids et Mesures, à Etterbeck (Belgique).
Cattolica (P.-L.), directeur de l'Office hydrographique de Gênes.
Caspari (E.), ingénieur hydrographe en chef de la Marine.
Chambre de Commerce de Paris.
Chateau (Cyprien), horloger, à Paris.
Collangettes (Maurice), professeur à la Faculté de Médecine, à Beyrouth (Syrie).
Confédération néerlandaise des horlogers (représentée par M. Faddegon).
Contarino (Francesco), directeur de l'Observatoire de Capodimonte, à Naples.
Cornu (Alfred), membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique,
Cuénod, ingénieur-conseil, à Genève.
David (Jacques), ingénieur de la maison Francillon et C^ie^, à Saint-Imier (Suisse).
Delépine (Émile), constructeur de chronomètres, à Saint-Nicolas-d'Aliermont (Seine Inférieure).
Deslandres (H.), Astronome à l'Observatoire de Meudon.
Dietzschold, directeur de l'École pratique I. et R. d'horlogerie, à Karlstein (Autriche).

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

MM. Ditisheim (Paul), fabricant d'horlogerie, à la Chaux-de-Fonds (Suisse), délégué du gouvernement de Neuchâtel.
Dj. Saïd (Mehmed), à Paris.
Drocourt, horloger, à Paris.
Ecalle, horloger, à Paris.
École d'horlogerie de Paris.
École d'horlogerie de Genève.
Embriaco (le Père J.-B.), dominicain, professeur de physique, à Rome.
Estrada (Ramon), capitaine de vaisseau, à la Corogne (Espagne).
Favarger (Albert), ingénieur électricien, à Neuchâtel (Suisse).
Favre-Heinrich (Maurice), fabricant d'horlogerie, à Besançon.
Fénon, directeur de l'École nationale d'horlogerie, à Besançon, délégué du Ministère du Commerce, de l'Industrie, des Postes et des Télégraphes.
Féry (Ch.), chef des Travaux pratiques à l'École de Physique et de Chimie, professeur à l'École Estienne, à Paris.
Fichot, ingénieur hydrographe de la Marine.
Fitz-James (de), capitaine de vaisseau, en retraite, à Paris.
Fœrster (le professeur), directeur de l'Observatoire de Berlin.
Fourmond (C.), fabricant d'horlogerie, à Paris.
Fournier (J.-H.), horloger, à Paris.
Francillon et Cie, fabricants d'horlogerie, à Saint-Imier (Suisse).
Gabriel (Pierre), horloger, à Villeneuve-la-Garenne.
Galibert (Louis), horloger, au Havre.
Gardner (Robert), fabricant de chronomètres, à Londres.
Garnier (Paul), ingénieur civil, fabricant d'horlogerie, à Paris.
Gautier (Raoul), directeur de l'Observatoire de Genève.
Gironde, fabricant de montres de précision, à Paris.
Goedseels (P.-J.-E.), Administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique, à Uccle.
Guillaume (Ch.-Ed.), docteur ès sciences, adjoint au Bureau international des Poids et Mesures, à Sèvres.
Guyou, capitaine de frégate, membre de l'Institut, délégué du Ministère de la Marine.
Haas (Nathan), fabricant d'horlogerie, à Genève.
Hanusse, ingénieur hydrographe en chef de la Marine, délégué du Ministère de la Marine.
Harber, capitaine de frégate, attaché naval à l'ambassade des États-Unis.
Hépites, directeur du Service central des Poids et Mesures de Roumanie.
Héraud, directeur d'hydrographie, à Paris.
Hirsch (le docteur Adolphe), directeur de l'Observatoire de Neuchâtel, secrétaire du Comité international des Poids et Mesures, délégué du gouvernement de Neuchâtel.
Hoser (Victor) père, horloger, à Budapest.
Hoser (Victor) fils, horloger, à Budapest.
Irk (Aloïs), maître de réglage, à Karlstein (Autriche).
Jaeger (Edmond), horloger, à Paris.
Jaja (le docteur Florenzo), à Bari (Italie).
Jonquières (le vice-amiral de Fauque de), membre de l'Institut.
Joseph (Charles), horloger de l'Observatoire, à Paris.
Journal suisse d'horlogerie.
Jurgensen (Jules), fabricant d'horlogerie, au Locle (Suisse).

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

KAISER (le docteur), vérificateur des instruments nautiques, à Leyde, délégué du gouvernement des Pays-Bas.

KORDA (Désiré), ingénieur en chef du Service électrique de la Compagnie Fives-Lille, à Paris.

KUNZ (G.-F.), vice-président de l'Institut américain des ingénieurs des Mines, délégué du gouvernement des États-Unis d'Amérique.

LANGE (Otto), fabricant d'horlogerie, à Glashütte (Allemagne).

LA PORTE, ingénieur hydrographe en chef de la Marine, délégué du Ministère de la Marine.

LEBRET (A.), horloger, à Paris.

LE COULTRE, fabricant d'horlogerie, à la Golisse (Suisse).

LEROY (L.), constructeur de chronomètres, à Paris.

LIER (Lambertus VAN), horloger, à Amsterdam.

LINDEROTH (J.-G.), horloger de la Cour, à Stockholm.

LIPPMANN (Gabriel), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences.

LŒWY (Maurice), membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire de Paris.

MAILLARD-SALIN (Émile), directeur de la fabrique Leroy et C^ie^, à Besançon.

MARFELS (Carl), éditeur du Journal allemand d'horlogerie, à Berlin.

MAURIN (le capitaine), au Service géographique de l'Armée.

MÉAUME (J.-B.), horloger, à Paris.

MONTES (Vincento-E.), capitaine de vaisseau, délégué par le gouvernement de la République Argentine.

MORENO (Pasquale), directeur de l'Observatoire astronomique de Naples.

MORIYAMA (Keizabouro), lieutenant de vaisseau de la Marine japonaise.

MOYNET, horloger, à Paris.

MOUCHEZ (C.-E.-L.), lieutenant de vaisseau, à Brest.

NARDIN (Paul-D.), fabricant d'horlogerie, au Locle (Suisse).

NEUMAYER (Joseph), officier de la Marine autrichienne.

NOBLE (Hubert), à Paris.

PETIT (Charles), propriétaire, à Cambrai.

POULTIER (Léon), à Asnières.

REES (J.-K.), professeur d'Astronomie, à New-York, délégué du gouvernement des États-Unis d'Amérique.

REY-PAILHADE (DE), ingénieur civil des Mines, à Toulouse.

RICHARD (Jules), fabricant d'appareils enregistreurs, à Paris.

RODANET (A.-H.), président fondateur de l'École d'horlogerie de Paris.

RODRIGUEZ DE PRADA (Angel), directeur de l'Observatoire du Vatican, à Rome.

ROLLET DE L'ISLE, ingénieur hydrographe de la Marine.

ROSAT (Henri), chef régleur de la maison Paul Nardin, au Locle (Suisse), délégué du gouvernement de Neuchâtel.

ROUSSEAU (Benjamin), horloger, à Paris.

ROZÉ, professeur à l'École municipale de Physique et de Chimie industrielles; répétiteur à l'École Polytechnique.

RYKATSCHEFF (le général), délégué du gouvernement russe.

SANTERRE, horloger, à Paris.

SCHMIDT, horloger, à Paris.

SCHAR (Richard), astronome à l'Observatoire de Hambourg.

SEBERT (le général), membre de l'Institut, à Paris.

SIMART, capitaine de frégate, délégué du Ministère de la Marine.

STEIN (A.), expert, délégué du gouvernement des États-Unis d'Amérique.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

STRASSER (L.), directeur de l'École de Mécanique, à Glashütte (Allemagne).
THOMAS (Émile), horloger, à Paris.
THURY (René), ingénieur, à Genève.
TOSETTI (Joseph), horloger, à Rome.
TRIPPLIN (Julien), membre de la Société royale d'Astronomie, à Londres.
UNGERER (Jules), fabricant d'horlogerie, à Strasbourg et à Nomény (Meurthe-et-Moselle
VALENZUELA (Ed.), directeur du Bureau hydrographique, à Valparaiso.
VALLE (F.), directeur de l'Observatoire de Tacubaya (Mexique).
VANSSAY (DE), ingénieur hydrographe de la Marine.
WEIL (Gaston), fabricant d'horlogerie, à Paris.
WESTBERG, à Stockholm.
ZENGER (Ch.-V.), membre de l'Académie des Sciences, professeur de Physique et d'Astronomie physique à l'École Polytechnique, à Prague.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

COMMISSION D'ORGANISATION.

BUREAU.

Président.

M. le vice-amiral DE FAUQUE DE JONQUIÈRES, membre de l'Institut.

Vice-Présidents.

MM. CASPARI, ingénieur hydrographe en chef de la marine.
le général BASSOT, directeur du Service géographique de l'armée.
RODANET, directeur de l'École d'horlogerie de Paris.

Secrétaires.

MM. ROLLET DE L'ISLE, ingénieur hydrographe de la marine.
DE VANSSAY DE BLAVOUS, ingénieur hydrographe de la marine.

Trésorier.

M. GARNIER (Paul), horloger.

MEMBRES DE LA COMMISSION.

MM. ARAGO, capitaine de vaisseau, commandant le *Borda*.
BAILLAUD, directeur de l'Observatoire de Toulouse.
BIGOURDAN, astronome à l'Observatoire de Paris.
BOREL, fabricant d'instruments de précision.
BOUILLET, ingénieur hydrographe en chef de la marine.
BRILLOUIN, maître de conférences à l'École Normale supérieure.
CORNU, membre de l'Institut et du Bureau des longitudes.
FENON, directeur de l'École d'horlogerie de Besançon.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

FICHOT, ingénieur hydrographe de la marine.
GRUEY, directeur de l'Observatoire de Besançon.
GUILLAUME, attaché au Bureau international des Poids et Mesures.
LAUSSEDAT (le colonel), membre de l'Institut, directeur du Conservatoire des arts et métiers.
LIPPMANN, membre de l'Institut.
LŒWY, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire de Paris.
PERRIN, capitaine de frégate, attaché à l'État-Major général.
ROZÉ, répétiteur à l'École polytechnique.
SANDOZ (Ch.), vice-président de la Chambre syndicale de l'horlogerie.
SCHWERER, lieutenant de vaisseau.
SEBERT (le général), membre de l'Institut.
WOLF, membre de l'Institut.

ASSOCIÉS ÉTRANGERS

DE LA COMMISSION D'ORGANISATION.

MM. AVILA (le major A. J. D'), pair du royaume de Portugal, délégué à l'Association géodésique internationale à Lisbonne.
ANDONOVITS (M.), directeur de l'Institut royal géodésique de Serbie à Belgrade.
ANGUIANO (P.), directeur de la Commission géodésique mexicaine.
CATTOLICA (P.-L.), directeur de l'Office hydrographique à Gênes.
COPELAND (R.), directeur de l'Observatoire d'Édimbourg.
CRULS (L.), directeur de l'Observatoire de Rio-de-Janeiro.
DAVIDSON, directeur de l'Observatoire de San-Francisco.
DONNER (A.-S.), directeur de l'Observatoire d'Helsingfors.
DOUBIAGO (DE), directeur de l'Observatoire de Kasan.
EGINITIS, directeur de l'Observatoire d'Athènes.
GAUTIER, directeur de l'Observatoire de Genève.
GILL, directeur de l'Observatoire du Cap.
HEPITES (M.), directeur du Service central des poids et mesures de Roumanie.
HELMERT (le docteur F.-R.), directeur de l'Institut géodésique de Prusse à Potsdam.
JAMES (E.), directeur de l'École d'horlogerie de Genève.
KAISER (le docteur), vérificateur des instruments nautiques de la marine néerlandaise à Leyde.
LANGLEY, directeur de l'Observatoire de la *Smithsonian Institution* à Washington.
LARDET, consul général de Suisse en Espagne.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

LUANCO (Emilio), directeur d'hydrographie à Madrid.
PICKERING, directeur de l'Observatoire de Cambridge.
PORRO (F.), directeur de l'Observatoire de Turin.
PLUMMER, directeur de l'Observatoire de Liverpool.
RICCO, directeur de l'Observatoire de Catane.
RUSSEL, directeur de l'Observatoire de Sydney.
RODRIGUEZ DE PRADA, directeur de l'Observatoire du Vatican à Rome.
ROSEN (le docteur P.-J.), membre de l'Académie royale à Stockholm.
SEELIGER (le docteur H.), directeur de l'Observatoire de Munich.
STUBENDORFF (le général DE), directeur du Service topographique à Saint-Pétersbourg.
TURNER (H.-H.), directeur de l'Observatoire de l'Université à Oxford.
VALENTINER, directeur de l'Observatoire d'Heidelberg.
VALENZUELA, directeur du Bureau hydrographique à Valparaiso.
VALLE (F.), directeur de l'Observatoire de Tacubaya.
WEINEK, directeur de l'Observatoire de Prague.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

DÉLÉGUÉS.

France.

Ministère de la Marine.

MM. Guyou.
Hanusse.
MM. La Porte.
Simart.

Ministère du Commerce, de l'Industrie, des Postes et des Télégraphes.

M. Fenon.

États-Unis d'Amérique.

MM. Kunz.
Rees.
M. Stein.

Pays-Bas.

M. Kaiser.

Russie.

M. Rykatscheff.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES.

SÉANCE DU 28 JUILLET 1900.

La session du Congrès de Chronométrie a commencé le 28 juillet à 3h 30m du soir, à l'Observatoire de Paris.

M. Caspari, vice-président de la Commission d'organisation, ouvre la séance en donnant lecture d'une lettre par laquelle M. le vice-amiral de Jonquières, président de cette Commission, s'excuse de ne pouvoir assister aux séances du Congrès, retenu hors de Paris par des circonstances douloureuses; il prie M. Caspari de le remplacer et d'exprimer tous ses regrets à l'Assemblée.

M. Caspari prononce ensuite une allocution dans laquelle il souhaite la bienvenue aux Membres du Congrès; rappelant que ce Congrès est la suite de celui de 1889, il déplore les pertes qu'a éprouvées depuis cette date la science chronométrique en la personne de l'illustre président du dernier Congrès, M. Phillips, de M. Resal et de l'amiral Mouchez. Il attire l'attention de l'Assemblée sur les principaux articles du programme tracé par la Commission d'organisation et émet l'espoir que l'union des diverses sciences et de la Chronométrie produira au sein du Congrès de fructueux résultats.

Il invite l'Assemblée à constituer son bureau.

Sur la proposition de M. le général Sebert, le Congrès adopte à l'unanimité la composition du bureau ainsi qu'il suit :

Président d'honneur.

M. le vice-amiral de Fauque de Jonquières.

Président.

M. Caspari.

Vice-présidents.

MM. le professeur Vinceslas Zenger, Raoul Gautier, le général Bassot, Rodanet.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Secrétaires.

MM. DE VANSSAY, FADDEGON, BORREL.

Trésorier.

M. Paul GARNIER.

Après avoir remercié l'Assemblée au nom des membres du bureau pour l'honneur qui leur est fait, M. LE PRÉSIDENT donne la parole à M. de Vanssay, qui donne connaissance des communications annoncées.

M. le Président fait part aux Membres du Congrès de l'invitation qui leur est faite de visiter le Bureau international des Poids et Mesures.

Cette visite se fera par groupes de 15 membres les 30 et 31 juillet, 1er et 2 août dans l'après-midi.

M. le Président fait part également aux Membres du Congrès d'une lettre de leur collègue S. A. le prince Roland Bonaparte, qui les prie de passer chez lui la soirée de ce jour, et il se fait l'interprète de l'Assemblée pour remercier le prince de son aimable invitation.

M. DE VANSSAY donne lecture de son rapport sur la comparaison des divers règlements des épreuves et concours pour chronomètres de poche.

M. FADDEGON a ensuite la parole pour présenter une communication sur la compensation des balanciers. Il étudie l'influence de la température sur différentes sortes de pendules et conclut que les balanciers des horloges de précision doivent être monométalliques.

M. LE PRÉSIDENT donne lecture de la liste des Membres du Congrès présents à la séance.

Puis il propose la nomination d'une Commission chargée d'élaborer un projet d'unification des épreuves et concours pour chronomètres de poche.

Cette proposition est adoptée. Les Membres suivants sont élus à l'unanimité : MM. Antoine, Ditisheim, Favre Heinrich, Fénon, Féry, Raoul Gautier, Guillaume, Jurgensen, Kaiser, Lange, La Porte, Leroy, Maillard, Vincento-E. Montès, Rosat, Rozé, Thomas, Valenzuela, de Vanssay, Zenger.

La première séance de la Commission aura lieu lundi à 2h de l'après-midi, à l'Observatoire.

M. le Président propose la nomination d'une Commission chargée d'étudier la question des unités employées en horlogerie et de l'unification des vis.

Cette proposition est adoptée. Les Membres suivants sont élus à l'unanimité : MM. Anguiano, Antoine, Berner, Borrel, César Brandt, Faddegon, Paul Garnier, Guillaume, Jurgensen, Rodanet, Rozé, général Sebert.

La première séance de la Commission aura lieu lundi à 2h de l'après-midi, à l'Observatoire.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

M. le Président demande s'il y a lieu de nommer une Commission pour étudier la question de la décimalisation du temps.

Le Congrès décide qu'il n'y a pas lieu de nommer une Commission et que cette question sera discutée complètement en séance générale.

L'ordre du jour de la séance suivante est réglé, l'heure du début des séances est fixé à 9^h du matin, et la séance est levée à $5^h 30^m$.

SÉANCE DU 30 JUILLET 1900.

La séance est ouverte à $9^h 30^m$ du matin par M. Caspari, Président.

M. de Vanssay, Secrétaire, donne lecture du procès-verbal de la séance du 28 juillet qui est adopté.

M. le Président rappelle aux orateurs l'article 12 du Règlement, aux termes duquel ils doivent remettre aux Secrétaires un résumé de leurs communications dans les 24 heures qui suivent.

M. le Président donne ensuite lecture des lettres suivantes qu'il a reçues :

1° Lettre de M. le Président de la Société du Palais de l'Optique, à l'Exposition universelle de 1900, invitant les Membres du Congrès à visiter les instruments spéciaux de cet établissement à la date qu'ils désigneront et à $10^h 30^m$ du soir.

M. Caspari propose que cette visite ait lieu le jeudi 2 août prochain, et fixe la réunion au Palais de l'Optique, à 10^h du soir. Cette proposition est adoptée.

2° Lettre de M. le Directeur du Muséum d'histoire naturelle invitant les membres du Congrès à visiter les collections sur la simple présentation de leur carte.

3° Lettre de M. Gay, syndic du Conseil municipal de Paris, adressée le 23 courant à M. l'amiral de Fauque de Jonquières, absent de Paris, qui la retourne à MM. Caspari et de Vanssay le 27 pour y donner suite.

Par cette lettre, M. Gay informe M. le Président du désir du Bureau du Conseil municipal d'inviter les membres du Congrès à la soirée qui sera donnée le 31 juillet dans les salons de l'Hôtel de Ville, à l'occasion du Congrès de l'Association de la Presse, et lui demande de vouloir bien lui faire connaître le nombre des membres qui désirent assister à cette fête.

M. le Président prie les membres qui acceptent cette invitation de signer une liste de leurs noms, qu'il adressera à M. le Président du Conseil municipal.

Il est ensuite passé à l'audition des Communications portées à l'ordre du jour :

1° M. Rodanet donne la définition du *chronomètre*, dont il commente d'une façon très complète l'origine, la construction, les perfectionnements y apportés et les échappements. Ceux-ci sont de deux sortes : l'échappement à détente et l'échappement à ancre; il signale pour chacun d'eux les avantages et les inconvé-

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

nients et conclut en disant : « Le chronomètre est un instrument donnant la mesure exacte du temps. Il comporte l'emploi d'un échappement libre dont le caractère principal est de permettre au balancier d'opérer la vibration dans une complète indépendance de mouvement, sauf toutefois l'instant fort court de l'impulsion. Réservant les horloges d'observatoires, désignées en tout temps sous le nom de *régulateurs astronomiques,* j'estime que c'est donc à bon droit qu'on peut désigner sous le nom de *chronomètres :*

a. Les montres marines avec échappement détente à ressort;

b. Les montres de poche avec échappement à détente ou à ancre, si ces instruments ont des marches absolument régulières à l'ambiant, aux températures extrêmes et aux différentes positions. »

M. Antoine demande à revenir sur le réglage de chacun de ces échappements et à communiquer ultérieurement au Congrès le résultat de ses observations.

M. Caspari fait observer la facilité avec laquelle le public, en général, applique la désignation de *chronomètre* et la confusion qui peut en résulter.

M. Ditisheim exprime un avis identique au sujet de cette désignation et communique au Congrès les résultats obtenus dans le réglage des montres de précision et de marine munies d'échappements à détente ou à ancre. Il présente un Travail de comparaison basé sur les résultats de marche des chronomètres de première classe déposés depuis 5 ans par lui à l'Observatoire de Neuchâtel.

M. Rodanet exprime la crainte que la facilité avec laquelle certains observatoires délivrent des bulletins de marche, même pour des montres de qualité moyenne, n'abaisse la valeur de ces bulletins et n'abuse le public.

M. Gautier, Directeur de l'Observatoire de Genève, appuie ces dernières opinions et exprime le désir que le nom de *chronomètre* ne soit appliqué qu'aux pièces à *moteurs à ressorts,* c'est-à-dire aux chronomètres de marine et aux chronomètres de poche, formant deux catégories bien distinctes.

M. Antoine expose quelques opinions relatives à l'application exacte de l'appellation *chronomètre* pour des montres de fabrication mécanique courante susceptibles de fournir de bonnes marches.

M. le Président demande à M. Rodanet de vouloir bien relire la conclusion de sa Communication, d'après laquelle il propose que le nom de *chronomètre* ne soit appliqué qu'aux chronomètres de marine et aux chronomètres de poche possédant des échappements libres.

Après quelques observations de détail échangées entre MM. Rodanet, Antoine et Berner, M. le Président met aux voix la conclusion de la Communication de M. Rodanet, qui est adoptée à l'unanimité.

M. Rosat demande que cette conclusion soit renvoyée pour examen définitif à la Commission des *Épreuves et Concours.*

Cette proposition est adoptée.

2° M. Guillaume appelle l'attention du Congrès sur l'importance des services que

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

rendrait l'unification internationale des vis, basée sur le système de M. le professeur Thury, et propose l'unification internationale des calibres de montres.

Les encouragements qu'il a reçus, dit-il, aux demandes qu'il a adressées dans ce sens aux fabriques les plus importantes de montres lui font espérer une solution favorable, et il propose le renvoi de l'étude de cette question à la Commission de l'*Unification des unités et des vis*.

M. Guillaume demande qu'il soit étudié et désigné, sous le nom de *calibres du Congrès international*, une série de calibres de montre progressifs de 2^{mm} en 2^{mm} à partir d'un diamètre de 20^{mm} par exemple, auxquels correspondraient trois hauteurs : basse, moyenne et haute.

Il indique, par quelques calculs d'exemple pratique, l'incertitude existant dans la détermination exacte des trois unités fondamentales usitées en Mécanique dont relève l'horlogerie et qui sont :

La longueur, l'unité de temps, la masse ou la force.

M. Guillaume commente ensuite la différence du calcul employé, soit par le mécanicien, soit par le physicien, pour déterminer la durée d'une oscillation d'un balancier d'une montre de 18 lignes, et conclut en faveur du résultat obtenu par le physicien qui applique le système C.G.S.

Il indique une méthode simple permettant, par un numérotage du balancier (correspondant au coefficient de son moment d'inertie) et du spiral (correspondant au coefficient de son degré d'élasticité), de déterminer rapidement la durée d'une oscillation.

En concluant, M. Guillaume demande que la Commission de l'*Unification des unités et des vis* examine pour ces cas les trois questions suivantes :

Est-il nécessaire d'employer le calcul des mécaniciens?

Est-il nécessaire d'employer le calcul des physiciens?

Est-il nécessaire de numéroter les spiraux et les balanciers, suivant sa proposition?

M. LE PRÉSIDENT remercie M. Guillaume de son intéressante Communication, qui est renvoyée, suivant son désir, à la Commission de l'*Unification des unités et des vis*.

M. le Président rappelle que la réunion de la Commission des épreuves et concours doit avoir lieu le jour même, à $2^h 30^m$, à l'Observatoire.

M. GUILLAUME demande alors le renvoi au jeudi 2 août, à $2^h 30^m$, de la visite des membres du Congrès qui devaient se rendre ce jour au Bureau international des Poids et Mesures, à Sèvres. Cette proposition est adoptée. La visite du mardi, à $2^h 30^m$, décidée le 28 courant, est maintenue.

3° M. CORNU expose comment il a pu obtenir des marches très constantes avec un pendule monométallique à tige de fer de qualité courante, de 4^m de longueur, battant la double seconde, portant une lentille en fonte, de forme appropriée, calculée et expérimentée par lui pour offrir la moindre résistance à l'air, du poids de 108^{kg}.

Ce pendule, construit par M. Gauthier, est installé depuis quelques années à l'Observatoire de Nice, dans les conditions les plus favorables à sa stabilité par la

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

disposition de son support. La suspension est à ressort d'acier de 30^{mm} de long sur $0^{mm},3$ d'épaisseur.

Les oscillations de ce pendule sont entretenues par un mouvement ordinaire de pendule Comtoise à laquelle il est relié, à $0^{m},80$ de distance, par une bielle en aluminium.

La force motrice transmise est fournie par un poids de 2^{kg} descendant de 16^{cm} en 24 heures.

Toutes les dispositions ont été prises pour assurer, dans le local où est installé ce pendule, une température constante; mais, cependant, des circonstances locales apportent quelques perturbations que M. Cornu attribue à la présence du plafond qui sert de plancher à la salle du Grand Équatorial, dont l'épaisseur n'est pas suffisante pour ne pas influencer la température de la partie supérieure de la cave au moment de l'ouverture de la salle pour les observations.

Grâce à l'observation fréquente de trois grands thermomètres à alcool placés dans le voisinage du pendule et d'un baromètre, on peut corriger par l'application d'une formule très simple l'influence des variations de température et de pression sur la marche du pendule.

Les écarts diurnes de cette marche, pendant le mois de juin dernier, oscillent entre $0^{s},01$, $0^{s},03$ et $0^{s},04$.

M. Cornu préfère l'emploi d'un pendule monométallique à celui des pendules à gril, dont les points d'attache aux articulations ne présentent pas de garantie suffisante, dit-il, pour le retour à la même position après plusieurs déplacements dus à la dilatation et à la contraction des métaux.

Le pendule à mercure ne lui inspire pas plus de confiance au point de vue de l'influence inégale de la température sur le réservoir servant de lentille et sur la tige.

M. Cornu entretient ensuite le Congrès des écarts de marche observés par lui sur une montre de qualité ordinaire, fortement aimantée, suivant les positions occupées par cette montre, par rapport au Nord magnétique. Il a observé que, lorsque le *XII* du cadran était orienté dans cette direction, la montre retardait de 20 secondes par jour.

L'exposition du chiffre *III* dans la même direction donnait un retard de 7 secondes.

L'exposition du chiffre *VI* dans la même direction donnait un retard de $1^{s},5$.

L'exposition du chiffre *IX* dans la même direction donnait un retard de 16 secondes.

M. Cornu, en terminant, exprime à M. Caspari son désir de voir entreprendre au Service hydrographique quelques expériences sur des chronomètres de marine comportant spiral et pièces en acier, dont le magnétisme, acquis par la façon que ces pièces ont subie, pourrait influencer la marche par suite de l'action du magnétisme terrestre et du sens de ce magnétisme par rapport à la position du chronomètre à la mer. Il serait intéressant d'étudier les écarts de marche.

M. LE PRÉSIDENT répond qu'il a déjà demandé à M. le Ministre de la Marine l'ouverture d'un concours de montres non magnétiques, et remercie M. Cornu des observations si curieuses dont il vient de donner communication.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

M. Antoine demande si les variations de marche provenant des causes exposées par M. Cornu pour les chronomètres ont été observées à la mer, en tenant compte du sens de la marche du navire par rapport au méridien magnétique.

M. Cornu répond par quelques commentaires concluant à la nécessité de nombreuses observations.

M. Schmidt remarque qu'il a fait, il y a quelques années, les mêmes observations que M. Cornu a indiquées, et, pour diminuer l'influence que le magnétisme peut avoir sur un chronomètre placé dans la même position, il a construit une suspension tournante qui fait tourner le chronomètre et, par conséquent, diminue l'influence du magnétisme extérieur sur le balancier du chronomètre. Ce mécanisme a même fait partie de ses brevets.

M. Jurgensen s'associe aux idées émises par M. Cornu et pense que le seul moyen d'atténuer l'aimantation est d'employer des spiraux en métal non magnétique.

M. le Président prévient le Congrès qu'il vient d'être informé de l'absence de M. Cattolica, en raison de la mort de S. M. le Roi d'Italie, qui a provoqué aussi le départ, de la séance de ce jour, de MM. Contarino, Moreno et Tosetti.

M. Guillaume propose à M. le Président d'adresser à M. le Ministre de l'Instruction publique l'expression des regrets et de la douloureuse sympathie de tous les membres.

M. le Président répond que cette proposition devance immédiatement celle semblable qu'il allait présenter, persuadé d'être ainsi l'interprète des sentiments du Congrès, et lève la séance en signe de deuil (1).

SÉANCE DU 31 JUILLET 1900.

M. Caspari, Président, ouvre la séance à $9^h 30^m$ du matin et donne la parole à M. Borrel pour la lecture de son procès-verbal de la séance du 30 juillet. Le procès-verbal est adopté sans observations.

M. le Président prévient les membres du Congrès que la soirée de l'Hôtel de Ville n'aura pas lieu, à cause du décès de S. M. le Roi d'Italie. Il annonce que la Commission chargée de l'étude des unités de calibre et de vis en usage dans l'horlogerie se réunira le mercredi 1er août, à $2^h 30^m$.

M. Cattolica, Directeur de l'Institut hydrographique de Gênes, s'adresse dans les termes suivants au Congrès :

---

(1) M. le Ministre de l'Instruction publique d'Italie a répondu à la lettre qui lui a été adressée, en priant le Président de remercier le Congrès en son nom.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

« Messieurs,

» Hier, le Congrès a décidé de lever la séance en signe de deuil, à la nouvelle de l'assassinat du roi d'Italie. Ses membres italiens, touchés de cet acte, expriment à MM. les Congressistes leurs sentiments de gratitude et remercient particulièrement M. le Président qui, en faisant la proposition, a ajouté un témoignage de sympathie à ceux que la France a donnés à leur pays dans cette douloureuse circonstance. »

M. Rodanet remet au bureau du Congrès une Communication du R. P. Embriaco sur les travaux d'horlogerie exposés par lui à la classe 96.

M. le Président porte à la connaissance de l'Assemblée la réception de deux Mémoires intitulés :

1° *L'ora esatta dappertutto,* hommage au Congrès international de Chronométrie de l'auteur, le docteur Michele Rajna, astronome à l'Observatoire de Milan;

2° *Lois des variations d'amplitude du balancier des chronomètres,* par M. Marcel Brillouin.

M. Favre Heinrich explique son appareil servant à déterminer la position du point d'attache à la virole pour une montre donnée.

Il expose que le changement du point d'attache s'obtient actuellement en coupant de petites quantités de l'extrémité intérieure des spiraux, opération qui exige beaucoup de temps, parce qu'on ne peut vérifier le résultat qu'après avoir remis le spiral, et qui entraîne souvent la perte des spiraux.

Les appareils proposés se fixent sur l'axe du balancier; ils sont destinés à soutenir deux goupilles qui viennent prendre le premier tour du spiral près de la virole; ils peuvent se déplacer et saisir à volonté n'importe quel point de la première spire.

Les retouches faites ainsi sans couper le spiral ne dérangent pas la compensation.

M. Antoine déclare qu'il trouve l'invention de M. Favre Heinrich très ingénieuse, mais il objecte qu'on fait varier le tracé du spiral et craint qu'en procédant de cette façon on ne cause un retard dans la marche.

La parole est donnée à M. Maillard, qui fait une Communication sur l'emploi des ajustements à billes dans les mécanismes d'horlogerie.

La montre à billes, construite par la maison Leroy et Cie, a été réglée par lui; il présente au Bureau, à titre de démonstration, un roulant de chronomètre sur lequel sont montées avec des billes deux roues séparées, permettant de se rendre compte de quelques-uns des avantages qu'il énonce.

Il se propose de monter avec ce système l'axe d'un balancier et croit pouvoir assurer que le réglage des positions horizontales et verticales sera facilité par ce fait que, les points de contact restant toujours les mêmes, la grandeur des arcs d'oscillation sera constante et indépendante de la position du mécanisme.

M. Leroy fait remarquer que le dispositif à billes est du domaine public, n'étant pas breveté.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

M. ANTOINE fait quelques réserves; il trouve que le frottement, acier sur acier, ne peut être considéré comme excellent; que l'espace de temps pendant lequel les montres non pourvues de billes marchent sans que les frottements produisent trop d'effet nuisible est assez long, et qu'en somme le frottement est diminué par les billes, mais non supprimé.

M. MAILLARD insiste encore une fois sur l'avantage que le système de billes offre de produire le même frottement pour toutes les positions.

M. KAISER fait ensuite une Communication sur le prix des chronomètres et leur valeur scientifique.

Il se demande s'il y a une grande différence entre les résultats fournis par des chronomètres de prix très différents achetés depuis 600^{fr} jusqu'à 2060^{fr} par la marine néerlandaise.

Ces chronomètres ont été vérifiés, ont servi à bord, puis ont été nettoyés et réparés, puis de nouveau vérifiés. L'expérience a montré depuis 40 ans que la qualité scientifique des chronomètres de prix très différents est la même si l'on a travaillé avec beaucoup de soin l'échappement, en négligeant plutôt le mouvement, qui se perfectionne à l'usage s'il est bien entretenu.

M. le PRÉSIDENT remercie M. Kaiser de son intéressante Communication; il croit comme lui que les chronomètres s'améliorent avec le temps.

MM. MÉAUME et FADDEGON pensent que la cause de cette amélioration est dans le changement des profils de l'engrenage et dans l'état moléculaire des parties de l'échappement qui sont exposées à des chocs légers et continuels, état qui deviendra stationnaire au bout d'un certain laps de temps.

M. FÉRY fait une Communication sur son pendule à restitution électrique constante.

Dans ce pendule, on a cherché :

1° A restituer une quantité constante à chaque oscillation;

2° A ne pas perturber l'isochronisme par la présence du contact qui amène le courant.

Pour obtenir la quantité d'électricité constante nécessaire au fonctionnement, l'auteur emploie les courants induits produits par un appareil spécial constituant une sorte de transformateur portant une pièce mobile en fer doux. Le courant primaire entretient le mouvement alternatif et synchrone de cet appareil; les courants induits sont envoyés au pendule, où la restitution est due à la réaction d'une bobine sur un aimant.

Les variations des marches de cette horloge, observées par M. Bigourdan, ont toujours été inférieures à 0^{s},15 par jour.

Cette erreur peut être considérée comme la somme des variations du pendule électrique et de l'horloge des caves de l'Observatoire prise comme étalon; il faut encore y ajouter l'erreur de comparaison.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Grâce à sa simplicité, cet appareil est relativement peu coûteux et pourra peut-être se répandre dans l'horlogerie civile.

La dépense d'électricité est très faible, et des précautions spéciales sont prises pour éviter les étincelles aux contacts.

M. Goedseels traite la question de la détermination des constantes des formules de marche.

Considérant le cas où le manque de temps oblige à renoncer à l'emploi de la méthode des moindres carrés pour la détermination des constantes des formules de marche des chronomètres, il examine s'il convient d'accorder la préférence à la méthode de Cauchy ou à celle de Tobie Mayer.

Il constate d'abord que la méthode dite *de Mayer*, usitée actuellement, diffère de la méthode originale.

Il montre ensuite que la méthode actuelle est susceptible d'une simplification importante équivalente à $21(n-1)$ opérations numériques, n étant le nombre des équations de condition.

La simplification de M. Goedseels permet de voir qu'il n'y a pas de différence essentielle entre la méthode actuelle et la méthode originale. Comme cette dernière est la plus simple, il y a lieu d'y revenir dans la plus large mesure possible.

M. Goedseels compare ensuite la méthode de Cauchy à la méthode originale de Mayer. A cet effet, il décompose les calculs nécessaires à chaque méthode en opérations simples de valeur.

La méthode originale de Mayer exige :

$$(m+1)(n-m)+\frac{4}{3}(m^2+3m-1)+5mn \text{ opérations,}$$

en y comprenant les calculs nécessaires pour obtenir les résidus.

La méthode de Cauchy exige :

$$mn(3m+4)+2m(2m-1) \text{ opérations.}$$

Pour $m=6$, par exemple, la première expression vaut $32n+387$; la deuxième $132n+132$.

Comme n est toujours fort grand, la méthode originale de Mayer est beaucoup plus simple que celle de Cauchy.

M. Goedseels exprime enfin l'avis que l'on n'a pas démontré jusqu'à présent que les résultats fournis par la méthode de Cauchy soient plus précis, plus probables ou plus avantageux que ceux fournis par la méthode originale de Mayer, et en conclut que, dans les cas où l'on se voit obligé à renoncer à la méthode des moindres carrés, c'est à celle de Mayer qu'il convient d'accorder la préférence.

M. Antoine désire revenir sur la question des échappements à détente discutée dans la séance précédente. Il trouve que l'accélération est une fonction de la marche; elle est fatale, mais ne peut être prévue. Cette question n'avance pas, et il semble que les théoriciens la négligent. Il prétend qu'on attribue à d'autres constantes ce qui est produit par l'accélération.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

La fusée est d'un secours énorme pour la régularité des amplitudes, mais il y a d'autres moyens.

M. Antoine trouve que la courbure Phillips s'applique au spiral plat aussi bien qu'au cylindrique.

M. Contarino, quoiqu'il apprécie beaucoup les simplifications introduites dans la méthode moderne pour l'application du calcul à la marche des chronomètres par M. Goedseels, fait des réserves à propos du retour à la formule originale de Mayer, parce que le groupement des équations sans aucune règle ne garantit pas, dans tous les cas, une exactitude égale et suffisante dans la détermination de chaque inconnue, et il propose que le Congrès renvoie à une commission l'étude de cette question.

Le Congrès adopte cette proposition et nomme, comme membres de cette commission, MM. Kaiser, Zenger, Goedseels, Rozé et Contarino.

Après avoir fixé à 2^h la seconde séance de la Commission des règlements et après avoir fait l'appel des présents, M. le Président lève la séance.

SÉANCE DU 1er AOUT 1900.

La séance est ouverte à $9^h 30^m$ du matin par M. Caspari, président. M. Faddegon, secrétaire, donne lecture du procès-verbal de la séance du 31 juillet qui est adopté.

M. Guillaume décrit l'ensemble des propriétés des aciers-nickels qui peuvent avoir des emplois importants en horlogerie.

Les études et essais des qualités de certains alliages de ces métaux prévus par M. Guillaume et fournis gracieusement par la Société anonyme des forges de Commentry-Fourchambault par l'intermédiaire particulièrement obligeant de M. Dumas, son directeur, ont été faits au Bureau international des poids et mesures.

Dilatation. — La dilatation des aciers au nickel varie considérablement avec leur teneur en nickel. Vers 25 pour 100, la dilatation est sensiblement égale à celle du laiton. A mesure que la teneur en nickel augmente, la dilatation s'abaisse, passe, pour 36 pour 100 environ de nickel, par un minimum et remonte ensuite. Au minimum, la dilatation est environ dix fois moindre que celle du platine.

M. Guillaume rend ces différences évidentes par une expérience pratique au moyen d'un dilatoscope très sensible dont il recommande l'emploi dans les écoles d'horlogerie comme appareil d'enseignement et de mesure rudimentaire.

La très faible dilatation d'une catégorie de ces alliages suggérait immédiatement l'idée de les employer à la construction des tiges de pendule.

Effectivement, M. Guillaume a construit, en mars 1897, un pendule dans lequel la lentille posée sur son écrou compense, par sa propre dilatation, le faible mouvement de descente dû à la dilatation de la tige en acier-nickel.

Un pendule du même système, construit par M. Méaume, a été mis à l'essai au

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Service hydrographique de la marine, par les soins de M. Caspari, chef du service des instruments, en mai 1898.

Les écarts de marche diurne de ce pendule pendant les périodes moyennes de six semaines environ oscillent entre $0^s,2$ et $0^s,3$, puis sautent brusquement pour revenir à ces chiffres. M. Guillaume pense qu'il doit exister dans l'ajustement des pièces du pendule des coincements. Il informe le Congrès que M. Gautier, directeur de l'Observatoire de Genève, possède depuis quelque temps déjà un pendule de même nature qui, malgré son exposition à une température peu constante, fournit une marche dont M. Gautier se déclare satisfait et fournira ultérieurement les écarts.

Plusieurs constructeurs ont adopté ce nouveau pendule en lui appliquant des formes diverses.

La Société des forges de Commentry-Fourchambault a d'ailleurs réalisé l'étirage de ces alliages en tiges droites appropriées à la construction des pendules dont M. Guillaume soumet un échantillon brut, quoique très net, aux membres du Congrès. Il prévient toutefois que le travail de ce métal réclame certains soins de la part du constructeur qui l'emploie, en raison de sa dureté. M. Méaume, consulté comme praticien expérimenté à ce sujet, répond que le tournage et le taraudage deviennent possibles par une action lente de l'outil et l'emploi abondant d'huile lubrifiante.

Spiraux. Balanciers. — D'autres études entreprises par M. Guillaume en collaboration avec M. Paul Perret, à Fleurier (canton de Neuchâtel), ont démontré la possibilité de fabriquer avec certains aciers au nickel des spiraux de haute élasticité. La variation d'élasticité avec la température est environ trois fois moindre que pour l'acier. Si on les emploie avec des balanciers ordinaires, on obtient une forte avance au chaud.

Le calcul a démontré qu'un balancier de forme ordinaire, mais coupé à angle droit du bras, devait donner une bonne compensation. Ce résultat a été confirmé par l'expérience.

M. Guillaume a ensuite abordé la question de la réduction de l'erreur secondaire des chronomètres due au fait que l'élasticité d'un spiral d'acier varie plus rapidement que la température.

La compensation par l'emploi d'une lame composée en acier et laiton est au contraire une fonction sensiblement linéaire de la température.

En combinant le laiton avec un acier au nickel dont la dilatation diminue avec l'élévation de la température, on trouve que l'erreur secondaire doit être sensiblement annulée.

La première expérience faite par M. Nardin (du Locle), en substituant au balancier ordinaire un balancier en acier-nickel dont les éléments avaient été calculés par M. Guillaume, a fait passer l'erreur secondaire de 2^s à $0^s,3$.

D'autres chronomètres de la maison Nardin, réglés par M. Rosat, ont accusé des erreurs secondaires nulles ou faiblement positives ou négatives.

M. Guillaume termine en informant le Congrès qu'il doit à son père la connaissance et le goût des choses de l'horlogerie, et qu'en reconnaissance des satisfac-

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

tions qu'il a éprouvées de ce fait il ne croit pouvoir mieux faire qu'en se dévouant à la solution des problèmes que cette science offre encore.

M. Caspari remercie M. Guillaume de son importante Communication, ainsi que des perfectionnements que sa découverte et ses efforts ont permis d'effectuer et des résultats surprenants qui en sont la conséquence.

M. Faddegon, en s'appuyant sur le calcul, fait remarquer à M. Guillaume, à propos des effets de dilatation, qu'avec un coefficient de dilatation dix fois moindre que celui des métaux ordinairement usités l'erreur sur la durée d'oscillation provenant de la dilatation est vingt fois moindre.

M. Rosat estime qu'il faut féliciter les physiciens du précieux appui qu'ils prêtent à l'horlogerie par leur concours et conclut que, si le métal Guillaume ne donne pas encore tous les résultats qu'on en attend, il espère que de nouvelles recherches permettront d'atteindre la perfection.

M. Guillaume répond que la question d'instabilité des aciers au nickel a donné lieu à de très longues et minutieuses expériences. Un alliage très peu dilatable doit être recuit à 100° pendant une centaine d'heures, puis refroidi lentement et ensuite conservé pendant quelque temps à la température ambiante avant d'être employé à des observations de pendules.

M. Boudeaud manifeste sa surprise à raison de ces précautions et des études qui ont dû les dicter.

M. Guillaume ajoute que les variations qui se produisent ensuite doivent occasionner dans le cours des années un retard graduel des horloges qui pourra modifier d'un à deux dixièmes de seconde la marche diurne.

Pour répondre à un doute exprimé par M. Caspari, M. Guillaume a déterminé l'allongement d'un fil d'acier au nickel de $0^{m},00165$ de diamètre sous une tension de 10^{kg}, soit une tension trente ou quarante fois plus grande que celle à laquelle sont soumises les tiges des pendules. Il n'a observé aucun saut brusque dans les variations de longueur du fil.

A propos de la remaque présentée par M. Faddegon, M. Guillaume fait observer qu'il existe une série d'alliages pour lesquels le rapport des deux coefficients de dilatation α et β passe par toutes les valeurs positives ou négatives, ce qui permet d'obtenir des compensations complètes sans erreurs secondaires.

M. Guillaume annonce qu'il s'est préoccupé d'augmenter l'élasticité dans les composés des alliages propres à diminuer l'erreur secondaire dans les chronomètres, et il espère obtenir dans ce sens une sensible amélioration des résultats déjà obtenus.

M. Leroy demande si les spiraux et balanciers construits avec le métal acier-nickel expérimenté par M. Guillaume sont antimagnétiques, et M. Antoine à son tour demande la valeur de l'erreur secondaire du spiral.

M. Guillaume répond qu'il ne peut pas donner de détails complets sur les spiraux, les expériences étant encore en cours et faites en collaboration avec M. Paul Perret

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Il peut dire cependant que les spiraux durcis sont assez fortement magnétiques, mais qu'il a été fait de grandes quantités de spiraux non magnétiques.

L'erreur secondaire des spiraux durcis est un peu plus forte que celle des spiraux d'acier, mais certains spiraux ont une erreur secondaire plus faible.

M. Antoine demande la parole pour remercier en son nom personnel et au nom des horlogers professionnels dont il se fait l'interprète, M. Guillaume, des services qu'il a rendus à l'horlogerie.

M. C.-W. Schmidt présente un chronographe grand modèle du type qu'il a inventé et construit pour mesurer la vitesse des projectiles et pouvant également être utilisé pour mesurer les espaces de temps correspondant aux observations de phénomènes dont la durée ne dépasse pas un cinquième de seconde.

Dans ce modèle, le balancier, placé presque au centre de l'instrument et d'un diamètre relativement grand, est construit en métal non magnétique. L'aiguille chronographique est placée sur le même axe que le balancier et elle est fixée à zéro au moyen d'une tige fixée dans la glace qui recouvre le cadran.

Cette glace est encastrée dans un cercle tournant. Le balancier est muni d'une armature qui, au moment où l'aiguille est remise à zéro, touche l'électro-aimant qu'actionne le premier déclenchement électrique de l'instrument.

Les dispositifs d'arrêt et de mise en marche du balancier présentent des agencements particuliers propres à en assurer les fonctions dans des limites de temps rapides, malgré l'épaississement des huiles : à tel point qu'avec une variation irrégulière de 5^s en 24^h, l'erreur d'observation sur une durée d'un dixième de seconde ne serait que de $0^s,0000057\overline{83}$.

M. Schmidt a construit pour le tarage des chronographes en question un appareil portatif qu'il dénomme *appareil de réglage*. Mais la pratique a démontré que le chronographe est très peu sensible aux variations d'un moment à l'autre.

L'acquisition d'un appareil de ce genre, à titre d'expérience, a été faite par le Ministère de la guerre en France en 1894 et l'instrument a supporté pendant près de deux années des essais très sérieux à des températures oscillant entre $+40°$ centigrades et $0°$, ainsi que plusieurs séries d'expériences espacées à de longs intervalles pour permettre l'observation des variations de marche.

La satisfaction obtenue aux expériences permit au Ministère de la guerre d'adresser une commande d'instruments semblables en juin 1896 et août 1897 à M. Schmidt, à la condition de réaliser certaines conditions d'épreuves de réception pour chaque chronographe et dénommées :

1° Épreuves de fonctionnement ;

2° Épreuves de justesse et de précision.

Les épreuves de fonctionnement comprenaient : un tir au fusil de 500 coups ; un tir au canon de 50 coups :

Le tir au fusil ayant pour but d'apprécier le fonctionnement de chaque appareil en prenant pour base d'appréciation le nombre des coups perdus qui, pour l'ensemble des tirs au fusil, devra rester inférieur à 1 pour 100 du nombre des coups tirés ;

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Les tirs au canon ayant pour but principal de vérifier l'insensibilité des appareils aux vibrations dues au départ du coup en faisant usage du canon de 90mm de campagne, le chronographe étant placé dans le voisinage immédiat de la bouche à feu.

Pour les épreuves de justesse et de précision, la précision était caractérisée par la valeur de l'écart moyen calculé pour chaque série de cinq, à condition que ces écarts moyens restent constamment inférieurs au $\frac{1}{600}$ de la vitesse moyenne lue pour les vitesses comprises entre 300m et 450m (soit environ 0s,000185 1) et au $\frac{1}{800}$ de la vitesse moyenne lue pour les vitesses comprises entre 450m et 700m (soit environ 0s,0001428).

M. le Président remercie M. Schmidt de son intéressante Communication, et l'orateur présente aux membres du Congrès un appareil grand modèle sur lequel il fait remarquer qu'il n'a employé qu'un métal unique afin de prévenir les inconvénients de dilatation signalés précédemment dans la séance du 30 juillet dans un autre sujet par M. Cornu.

M. de Vanssay donne lecture d'un Mémoire adressé à M. le Président du Congrès par M. le commandant E. Guyou sur l'application de chronomètres décimaux à la pratique de la navigation.

Les expériences entreprises, conformément au désir d'une commission que le Ministre de l'Instruction publique avait chargée de l'étude des questions ayant rapport à l'extension du système décimal à la mesure du temps et de la circonférence, avaient pour but de se rendre compte des difficultés et des troubles que pourrait soulever l'application d'unités nouvelles à la pratique de la navigation.

A cet effet, cinq croiseurs (le *Cécille* et le *Sfax*, remplacé depuis par le *Suchet* dans l'Atlantique; le *Protet* et le *Papin* dans l'océan Pacifique, et enfin le *Galilée* dans l'escadre de la Méditerranée) furent munis des instruments et documents nécessaires pour effectuer en unités décimales toutes les observations et tous les calculs utiles à la conduite de ces navires. Les chronomètres décimaux employés ou tropomètres ne sont pas des garde-temps : leurs indications représentent des angles exprimés en unités angulaires.

L'application de la nouvelle méthode dura environ neuf mois entre le 1er juin 1899 et le 1er mars 1900, pendant lesquels les officiers étudièrent sur toutes ses faces la question qui leur était soumise, dont l'auteur fait connaître les conclusions circonstanciées dans son Rapport détaillé, traité avec sa grande compétence, et qu'il termine en s'exprimant ainsi :

« Il est difficile de prévoir l'époque à laquelle la réforme si désirable dont nous nous occupons deviendra possible : elle rencontre encore, à l'étranger surtout, de nombreuses oppositions. La plupart des autres nations, encore habituées à l'emploi de mesures non décimalisées, éprouvent naturellement moins de gêne que nous-mêmes au maniement des nombres complexes.

» Il faudra attendre sans doute encore que la vulgarisation du Système métrique ait fait de nouveaux progrès; mais l'époque ne peut manquer de venir où cette réforme sera jugée opportune, et nous avons acquis par nos expériences la certitude que sa réalisation ne suscitera aucune difficulté insurmontable. »

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

M. le PRÉSIDENT donne la parole à M. de Rey-Pailhade.

M. DE REY-PAILHADE expose, dans une Communication rapide et précise, ses idées sur la décimalisation du jour entier.

Il montre d'abord que toutes les nations civilisées adoptent le Système métrique des poids et mesures, puis que tous les savants sont d'accord pour reconnaître tous les grands avantages des systèmes décimaux.

M. de Rey-Pailhade, adoptant le principe de la décimalisation du jour entier proposé par les créateurs du Système métrique, prend pour unité pratique de temps le centième de jour solaire moyen, valant un peu moins d'un quart d'heure, avec le nom de *cé*. Le *décicé* vaut $1^m,3o^s$ environ et le *millicé* $o^s,864$, valeur très convenable pour les usages scientifiques et civils. Il fait observer que la *Connaissance des temps* donne plusieurs documents en fractions décimales du jour.

Il est heureux d'adresser ses félicitations à M. le commandant Guyou et aux officiers de marine qui, sous sa direction, viennent de prouver, par des expériences faites avec soin, que l'art de la navigation retirera de sérieux avantages de l'emploi du système angulaire décimal du grade.

Il résulte de tous ces faits que l'emploi scientifique du temps décimal s'impose aussi à toutes les branches de la Science, telles que la Mécanique, la Physique, l'Électricité, la Géographie et la Physiologie, qui font intervenir la notion du temps.

Le rôle du Congrès de chronométrie est de les inviter à formuler leurs *desiderata*, afin d'arriver à une solution satisfaisant tout le monde dans la mesure du possible.

M. de Rey-Pailhade dépose, pour être examinées par le Congrès, deux montres divisées d'après le système décimal qu'il vient d'exposer.

M. le PRÉSIDENT remercie M. de Rey-Pailhade de son intéressante communication et confirme pour ce jour, à 2^h3o^m de l'après-midi, la réunion de la Commission de l'*unification des unités et des vis*.

M. GAUTIER, directeur de l'Observatoire de Genève, propose la réunion de la Commission des *épreuves et concours* au lendemain jeudi 2 août, à 8^h45^m du matin, à l'Observatoire. Cette proposition est adoptée.

M. le PRÉSIDENT ajoute, à la composition des membres de la Commission des *formules de marche*, MM. Vincento E. Montes, Valenzuela et Valle, et fixe l'ouverture de la séance du 2 août à 9^h3o^m du matin.

La séance est levée à 12^h10^m.

SÉANCE DU 2 AOUT 1900.

M. CASPARI, président, ayant déclaré la séance ouverte, à 9^h3o^m, donne la parole à M. BORREL pour la lecture de son procès-verbal de la séance du 1er août.

M. GAUTIER désire qu'on y ajoute une Note complémentaire. Il a reçu de Genève

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

les marches de l'horloge munie du pendule de M. Guillaume, exposée à différentes températures :

Du 5 au 15 mars + 0s15 pour une température moyenne de 4°13;

Du 1er au 11 mai + 0s12 pour une température moyenne de 14°2;

Du 21 au 31 juillet + 0s32 pour une température moyenne de 24°7.

Le procès-verbal est adopté.

M. Goedseels fait remarquer que l'adoption d'un système décimal quelconque entraînera pendant longtemps encore la nécessité de faire des calculs de conversion pour utiliser les observations et les instruments anciens. Il en conclut que la simplification des procédés de conversion constitue une des parties principales de la décimalisation du temps.

Il présente au Congrès des Tables de réduction qui sont des perfectionnements de celles qu'il a publiées dans les Tomes XXIII et XXIV de la *Société scientifique de Bruxelles*.

Ces Tables sont appliquées à la division centésimale en grades, qui correspond à la division du jour en 40 heures. Mais rien n'empêche de construire des Tables analogues pour d'autres divisions décimales.

Pour donner une idée de l'utilité de ces Tables, M. Goedseels signale qu'on peut trouver instantanément les valeurs en grades d'expressions comme $14^h51^m41^s,67$, les valeurs en heures, minutes et secondes de quantités telles que 127^g, 26943, les valeurs en heures décimalisées de grandeurs comme $37^m46^s,58$, etc.

Passant à un autre ordre d'idées, M. Goedseels signale comme un des meilleurs moyens pour arriver à l'adoption des systèmes décimaux celui qui consisterait à obtenir des gouvernements et des chefs d'institution qu'ils inscrivent la connaissance et le mode d'emploi d'un système décimal quelconque dans les programmes des examens, sans supprimer la connaissance et l'emploi des systèmes sexagésimaux.

Lorsque la jeunesse aura constaté les avantages pratiques des systèmes décimaux, elle éprouvera pour les autres une répulsion qui fera nécessairement naître un mouvement d'opinion irrésistible en faveur de la décimalisation des mesures angulaires et horaires.

M. Guillerminet dépose au bureau quatre échantillons de montres avec des cadrans décimaux de dispositions différentes et fixe l'attention sur les cadrans excentriques des trotteuses, qui laissent voir toutes les indications des heures.

Un autre cadran de 24 heures a les heures paires indiquées par des chiffres majuscules, les impaires par des signes plus petits.

M. de Rey-Pailhade croit qu'on peut introduire le temps décimal dans les pays civilisés, que l'effort de la Révolution française pour l'introduire n'était pas suffisamment préparé. Il désire la constitution d'une Commission permanente pour poursuivre l'exécution de cette réforme.

M. Antoine constate que le temps est partout divisé de la même façon; aussi

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

est-il dangereux de modifier la manière de le compter. La décimalisation n'a qu'une valeur scientifique.

M. Faddegon fait remarquer que M. de Rey-Pailhade divise l'humanité en deux catégories : savants et public; mais il croit que M. de Rey-Pailhade sera forcé de mettre l'historien et le philosophe parmi le public.

M. Faddegon trouve la division en douze signes ancienne comme le genre humain; toutes les écoles égyptiennes admettaient ce système, tout en variant les nombres secondaires.

Démolir cette division est, pour lui, détruire un monument sacré par les âges.

Si Laplace et d'autres se sont servis du système des grades, il trouve juste que les astronomes s'en servent; mais, admettre le système de décimalisation partout, c'est donner plus de poids à ces quelques illustres savants qu'aux efforts de leurs prédécesseurs.

Il constate qu'on confond souvent le temps dépendant de la rotation avec les mesures linéaires données par la Terre. Il dit que sa conception ne dépend d'aucune dimension; de plus, si cette vitesse de rotation changeait on ne pourrait pas la contrôler avec des mesures linéaires; ce mouvement n'exige pour sa connaissance aucune notion sur la forme de la Terre.

Il remarque que le cadran ordinaire, grâce à ses deux axes, se lit d'un coup d'œil; de plus, les minutes s'expriment avec grande facilité et avec un mécanisme bien simple et avantageux.

M. Schmidt fixe l'attention du Congrès sur l'intérêt qu'il y a à ce que la Commission qui étudiera la décimalisation du temps soit internationale et permanente; si les principales autorités savent tomber d'accord sur une unité décimale, l'application pratique deviendra relativement facile. La cause du grand développement du système métrique réside non seulement dans la simplicité de la division, mais aussi en grande partie dans l'accord entre le volume et le poids.

M. le Président rédige et met aux voix la proposition suivante :

« Le Congrès international de Chronométrie nomme une Commission chargée d'étudier les moyens pratiques de réaliser dans l'ordre scientifique la division décimale du temps.

» Cette Commission fera un Rapport qui sera communiqué au prochain Congrès international de Chronométrie. »

Cette proposition est adoptée.

M. Thury entretient le Congrès de mouvements électriques d'horlogerie à pendule conique et à marche continue, destinés en principe à la commande de l'axe horaire des lunettes équatoriales, mais dont la grande précision de fonctionnement permet l'application à l'horlogerie et spécialement à la distribution de l'heure.

M. Thury expose un spécimen de deux moteurs d'équatoriaux, dont l'un, construit par lui-même en 1880, a donné de très bons résultats sur l'équatorial de 6 pouces de M. le professeur Thury, son père. Une horloge motrice de ce modèle,

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

construite par la Société des instruments de physique pour l'équatorial de Plantamour, de l'Observatoire de Genève, a donné une variation moyenne de $\frac{1}{25000}$ du temps total et une variation maxima de $\frac{1}{4800}$; le déséquilibrage de la lunette le plus fort possible, obtenu par un contrepoids additionnel s'opposant à la marche du régulateur, a causé une accélération de 3 secondes par minute.

M. Thury décrit en quelques mots son dernier régulateur composé d'un électro-moteur à induit fixe disposé pour l'émission de courants polyphasés propres à la transmission à distance du mouvement de la pendule au moyen de petits moteurs synchrones à aimant permanent.

C'est la disposition qu'il adopte pour la disposition de l'heure à toute distance. Le réglage est obtenu par la variation du champ inducteur de l'électro-moteur obtenu par un enroulement secondaire que parcourt un courant de 0,03 ampères sous 2 volts. Le courant est interrompu ou rétabli par l'intermédiaire de contacts disposés sur les bras d'un double pendule conique tout près de leur suspension.

La durée d'une rotation est d'une demi-seconde; la fréquence du courant polyphasé est donc de 2 secondes, ce qui permet aux moteurs synchrones secondaires de se mettre automatiquement en marche.

L'emploi de courants polyphasés pour la transmission et la distribution à distance de l'heure est une innovation dont M. Thury attend de bons résultats pratiques.

M. LE PRÉSIDENT remercie M. Thury de son intéressante Communication; il fait ensuite donner lecture du Rapport de la Commission chargée de l'étude des épreuves et concours pour les chronomètres, dans le but d'obtenir une uniformisation des épreuves dans les Observatoires.

Le Rapport est fait par M. GAUTIER, président-rapporteur de la Commission.

En résumé, la Commission demande pour les épreuves de première classe :

1° La régularité de la marche diurne sera appréciée par le calcul de l'*écart moyen de la marche diurne,* dont la limite tolérée sera $0^s,75$ et les sauts supérieurs à 2 secondes seront une cause de renvoi;

2° Les limites pour les différences de marche aux positions seront :

Du plat au pendu, 4 secondes;

Entre les deux positions horizontales, 4 secondes;

Entre deux quelconques des périodes non thermiques, 8 secondes;

Écart moyen correspondant à un changement de position, $2^s,5$.

Il sera fait une période de 2 jours pendant en bas; elle sera seulement éliminatoire avec la limite 8 secondes pour la différence entre les marches pendant en haut et en bas;

3° Les périodes thermiques seront égales aux autres en durée;

On calculera la différence de marche aux températures extrêmes dont la limite sera $0^s,15$ par degré;

Et l'écart par rapport à la proportionnalité pour la température intermédiaire avec la limite de 3 secondes;

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

4° La limite pour la reprise de marche sera de 3 secondes;

5° La marche moyenne ne dépassera jamais 10 secondes.

Il n'y aura qu'une seule classe d'épreuves moins sévère appelée *seconde classe;* elles dureront environ 1 mois.

Après une courte discussion, le Rapport est adopté à l'unanimité.

M. LE PRÉSIDENT se déclare heureux de cette unanimité qui donne plus d'importance à ce vote d'une grande portée pratique.

M. GAUTIER est nommé mandataire du Congrès pour poursuivre l'uniformisation des règlements d'observatoires.

M. GAUTIER, vice-président, remplit les fonctions de président pendant que M. CASPARI donne lecture de sa Communication sur les chronomètres de la marine française.

Le rapporteur constate avec plaisir que la construction a fait des progrès depuis 1889; mais la navigation actuelle a des exigences nouvelles à cause des troubles qu'apportent à la marche des chronomètres les champs magnétiques et les vibrations, surtout à bord des torpilleurs.

On fait actuellement de bons spiraux en palladium.

Au sujet de l'isochronisme, il a remarqué avec étonnement que les chronomètres retardant aux petits arcs se sont aussi bien comportés, en moyenne, à l'usage, que ceux qui avançaient. Il serait très intéressant de vérifier si l'état d'isochronisme est resté le même après les réparations.

Depuis 1883, le retard moyen aux positions inclinées a toujours été en augmentant, ce qui paraît être le fait de l'usage des spiraux en palladium.

Les sauts aux températures artificielles ne semblent pas devoir être plus tolérés qu'à la température ambiante; il ne semble pas non plus nécessaire de négliger la marche du jour qui suit une variation de température. Enfin il semblerait préférable de donner seulement un caractère éliminatoire à l'épreuve d'isochronisme.

M. ROSAT remercie M. Caspari d'avoir renseigné le Congrès sur les exigences qu'il considère comme fondamentales pour les chronomètres de marine; ces renseignements sont précieux pour son pays, où l'emploi pratique de ces instruments ne peut venir en aide à la construction.

M. ANTOINE demande que le Service hydrographique français accepte aussi bien les chronomètres de marine à ancre que ceux à détente; M. CASPARI lui répond que le règlement n'exclut pas ce système.

M. GAUTIER demande qu'on soumette les chronomètres aux épreuves de température et d'isochronisme après chaque période de service. M. CASPARI partage ce désir; mais il regrette de n'avoir pas le personnel et les moyens nécessaires pour l'exécuter.

M. GUILLAUME attire l'attention du Congrès sur l'action de l'humidité dans les

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

chronomètres. Quelques observatoires font à ce sujet une épreuve éliminatoire. L'humidité se dépose sur le balancier et en augmente le moment d'inertie.

La séance est levée à midi.

SÉANCE DU 3 AOUT 1900.

La séance est ouverte à 9^{h} sous la présidence de M. CASPARI.

M. LE PRÉSIDENT communique une dépêche qu'il a reçue de M. le vice-amiral de Fauque de Jonquières, président d'honneur : « Je remercie membres Congrès pour leur témoignage flatteur de sympathie. »

M. FADDEGON donne lecture du procès-verbal de la séance du 2 août, qui est adopté sans observations.

M. DE VANSSAY a la parole pour la lecture d'un Mémoire de M. BIGOURDAN, sur un moyen propre à maintenir à pression constante une horloge placée dans une enceinte à peu près étanche. Ce système va être installé prochainement à l'Observatoire de Paris.

M. LE PRÉSIDENT regrette l'absence de M. Bigourdan et le remercie de l'intéressante Communication qu'il a transmise au Congrès.

L'ordre du jour appelle la Communication de M. BRILLOUIN sur les irrégularités de marche dues à l'imperfection des rouages.

Le chronomètre de marine paraît bien fixer un intervalle de temps de 24 heures environ à moins d'une seconde près, c'est-à-dire au cent-millième environ. Si la même précision relative pouvait être obtenue sur un intervalle de 30 minutes à 1 heure, le chronomètre pourrait être utilement employé à des déterminations rapides de la pesanteur relative. C'est en étudiant un appareil léger destiné à ces déterminations rapides que M. Brillouin a reconnu un défaut assez grave des chronomètres marins auxquels il importe de remédier pour l'application que l'auteur a en vue.

L'amplitude des oscillations du balancier est incessamment variable; en l'observant soit à l'œil nu, soit à l'aide d'un viseur, soit par un enregistrement photographique, on reconnaît que ces variations d'amplitude correspondent à tous les passages d'une dent d'un quelconque des mobiles, à tous les défauts de centrage des pignons, à toutes les irrégularités de taille des dents. Il n'y a pas deux oscillations consécutives de même amplitude. Dans ces conditions, il est très douteux pour le physicien que les oscillations d'inégale amplitude aient même durée.

Un cahier contenant les photographies originales est déposé sur le bureau, ainsi que le Mémoire publié dans le numéro de mai 1899 du *Bulletin de la Société d'encouragement*.

M. LE PRÉSIDENT remercie M. Brillouin et fait remarquer que son étude fait suite à celle que M. Nyren avait exposée au Congrès de 1889, mais des mé-

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

thodes moins parfaites ne lui avaient pas permis de pousser ses recherches aussi loin.

M. CASPARI pense d'ailleurs que ces changements d'amplitude à courte période ont peu d'importance dans les usages que la marine fait des chronomètres.

M. FADDEGON fait remarquer que les profils des dents des roues horlogères ne sont pas tracés d'après les règles de la Cinématique ; on leur donne une forme spéciale qui permet d'ajouter facilement des roues et des pignons de différents diamètres. Les variations d'amplitude dues aux imperfections de rouages sont périodiques; celles dues au jeu des pivots sont d'ordre irrégulier.

Après quelques observations de MM. ANTOINE, ROZÉ, FOURNIER et MÉAUME sur le mode de taille des roues dentées, la parole est donnée à M. LIPPMANN sur la question de la définition d'une unité de temps indépendante du mouvement diurne. Il fait remarquer que la seconde est sans aucun rapport avec les autres unités; c'est une unité arbitraire, dont la constance ne peut être contrôlée. Il en résulte que dans toutes les applications de la loi de Newton on est obligé de faire intervenir un facteur constant. On écrit cette loi

$$F = \frac{mm'}{r^2} f.$$

Dans les calculs on fait en général $f = 1$, ce qui revient à prendre une unité de temps absolue dont la seconde vulgaire se trouve être la $\frac{1}{3865}$ partie.

On peut définir aussi l'unité de temps rien que par des mesures de capacité et de résistance électrique.

Si l'on fait passer dans un galvanomètre deux courants contraires provenant l'un d'une pile et l'autre d'un condensateur que l'on charge et décharge rapidement; et si l'on règle la fréquence des décharges de manière à maintenir au zéro l'aiguille du galvanomètre, le nombre n de décharges dans l'unité de temps sera égal à $\frac{1}{Rc}$.

Ce procédé de mesure du temps est assez sensible, car il faut tourner la roue qui produit les décharges avec une vitesse bien déterminée et une grande régularité pour maintenir l'équilibre.

M. LE PRÉSIDENT remercie M. Lippmann et prie M. BORREL de donner lecture du Rapport de la Commission nommée pour examiner la portée de la Communication faite par M. Goedseels sur la détermination des constantes des formules des marches.

Cette Commission, après avoir entendu M. Goedseels développer sa théorie, reconnaît que l'examen complet de la question prendrait un temps considérable et sort du cadre des travaux d'un Congrès chronométrique : elle propose donc de passer à l'ordre du jour. — Adopté.

M. GUILLAUME a la parole pour la lecture des conclusions de la Commission nommée par le Congrès pour l'étude des unités employées en horlogerie et de

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

l'unification des vis horlogères. Cette Commission propose au Congrès de nommer une Commission permanente internationale chargée :

1° De poursuivre les unifications possibles dans les dimensions des organes des montres;

2° D'étudier et de répandre les améliorations que l'expérience indiquera concernant l'enseignement de l'horlogerie.

La Commission actuelle, sans vouloir lier les décisions de la future Commission, estime qu'il serait utile :

1° D'unifier les diamètres des montres en prenant, par exemple, comme point de départ le diamètre de 20^{mm}, et de progresser, pour les plus grands diamètres, par 2^{mm};

2° D'étudier la possibilité d'une unification plus complète, soit des hauteurs des montres, soit des diamètres des roues, soit des dimensions des vis, etc.

3° D'élaborer complètement le système de numérotage des balanciers et des spiraux proposé par M. Guillaume définissant le numéro d'un balancier par l'expression $\pi\sqrt{I}$ et le numéro d'un spiral par $\sqrt{M}$ en unités C. G. S. .

4° D'établir des balanciers types dont les constantes puissent être calculées d'après leurs dimensions et leurs masses, de façon à faire entrer pratiquement dans l'industrie horlogère un numérotage rationnel.

La Commission estime aussi :

1° Qu'il serait utile d'introduire dans l'enseignement de l'horlogerie l'étude approfondie du système C. G. S;

2° Que l'examen pratique des matériaux employés en horlogerie, et notamment des métaux, soit enseigné dans les écoles d'horlogerie; qu'on y introduise en particulier la mesure des constantes des métaux : module d'élasticité, limite élastique, charge de rupture, dilatation, etc.; enfin, autant que possible, un examen microscopique des métaux.

Ces conclusions ont été adoptées à l'unanimité, en remerciant la Commission pour son très utile travail.

M. LE PRÉSIDENT présente une étude de M. BERTHOUD sur les balanciers compensés; cette étude paraîtra dans les Comptes rendus.

M. POULTIER présente un appareil dans lequel il utilise la marée pour remonter une pendule.

M. GUILLAUME présente un appareil exécuté en collaboration avec M. J. Pettavel et destiné à la construction mécanique des courbes de Phillips.

La méthode consiste dans l'exécution de la courbe à l'aide d'un fil métallique flexible dont la position du centre de gravité peut être aisément déterminée. L'appareil consiste essentiellement en un disque monté sur une pointe reposant dans une cuvette d'acier trempé et susceptible d'osciller autour de la pointe. Ce disque forme donc une balance libre dans tous les sens. Il est d'abord équilibré à l'aide de deux vis placées à angle droit sur son pourtour; puis on place, dans une

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

coulisse perpendiculaire au rayon passant par l'origine de la courbe, une pièce de métal dont le poids est égal à celui du fil, à une distance de la pointe, égale à $\frac{r^2}{l}$.

On assujettit l'une des extrémités du fil sur le disque et on le contourne de façon à lui faire remplir les conditions que l'on veut imposer à la courbe terminale. On détermine le défaut d'équilibre du disque en le faisant osciller et l'on corrige la courbe successivement jusqu'à ce que l'équilibre soit obtenu. Il suffit alors de relever la forme de la courbe soit photographiquement, soit en se servant des rayons et des circonférences marqués sur le disque comme d'un système de coordonnées polaires. On peut ensuite réduire la courbe par les procédés ordinaires.

M. Caspari fait remarquer combien la pesanteur remplit souvent l'office d'un bon calculateur et rappelle que Delaunay avait proposé un moyen analogue pour les calculs de la Lune.

M. Raoul Gautier donne lecture du Travail de M. Grosclaude sur le calendrier invariable.

Tout en constatant la grande ingéniosité de la proposition de M. Grosclaude, il fait quelques réserves sur l'opportunité d'un changement dans le calendrier au moment où l'on peut espérer l'acceptation universelle du calendrier grégorien.

M. Guillaume présente le résumé d'un Travail de M. Favarger sur la distribution de l'heure. L'auteur estime que beaucoup de distributions d'heures sont défectueuses et qu'il y aurait un grand intérêt à n'employer que de bons systèmes. D'une part, on hésite à faire les frais que nécessite une bonne distribution, parce que le public n'a pas encore appris à en apprécier les avantages; d'autre part, il est souvent impossible de faire de bonnes installations, faute des fonds nécessaires. M. Favarger estime qu'il faudrait avant tout instituer une enquête sur les résultats obtenus par les divers systèmes de distribution de l'heure. Il émet le vœu que le Bureau international des Poids et Mesures soit chargé de cette enquête.

M. Guillaume ajoute que, tout en considérant cette enquête comme très désirable, il ne croit pas que le Bureau international des Poids et Mesures puisse l'entreprendre; il propose que la Commission permanente du Congrès s'adresse au Bureau international des télégraphes pour lui demander s'il serait disposé à entreprendre ce travail et, dans le cas contraire, que l'une des commissions déjà nommées par le Congrès en soit chargée.

M. de Vanssay expose à l'assemblée l'intérêt qu'il y aurait à ce que le Congrès se déclarât permanent en nommant une Commission internationale qui serait chargée des questions administratives, du choix du lieu et de la date du prochain Congrès, et de la nomination de sa Commission d'organisation. Cette Commission comprendrait les diverses Commissions que le Congrès a instituées en vue d'études spéciales, et s'occuperait en général de ce qui intéresse la science chronométrique; elle aurait également le droit de s'adjoindre de nouveaux membres quand cela lui semblerait utile.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Cette proposition est adoptée et, sur la proposition de M. CASPARI, le Congrès désigne, pour former la Commission internationale permanente du Congrès de chronométrie, le bureau du Congrès actuel, auquel elle adjoint MM. Kaiser, Dietzschold, Cattolica, Schorr, Rees, le général Sébert, Goedseels, Guyou et de Rey-Pailhade; cette Commission s'adjoint également la Commission d'organisation du présent Congrès (1).

M. JURGENSEN demande la publication, à la suite des Comptes rendus du Congrès, du savant travail de M. Caspari sur le spiral.

M. ANTOINE s'associe à cette proposition et remercie M. Caspari des services qu'il a rendus à la science chronométrique.

Cette proposition est adoptée à l'unanimité.

M. le trésorier Paul GARNIER et M. GUILLLAUME font remarquer que les ressources du Congrès sont insuffisantes pour suffire à la fois à la publication des Comptes rendus et aux expériences que nécessiteront les travaux des commissions. Le Congrès décide alors l'ouverture d'une souscription pour subvenir à ces besoins.

M. BORREL présente un modèle de démonstration du *Sémaphore électrique à signaux instantanés* qu'il a imaginé avec la collaboration de M. Hanusse, ingénieur hydrographe en chef de 1re classe, et dont il est le constructeur. Cet instrument est destiné à donner l'heure dans les ports. A cet effet, il se compose d'un écran vertical mesurant 2m de hauteur sur 1m,50 de largeur. La surface de l'écran est constituée par une série de lames montées sur des axes horizontaux leur permettant de prendre alternativement la position horizontale ou la position verticale, correspondant pour l'apparence à l'écran vide ou à l'écran plein.

Le mouvement des lames s'opère en 0s,07.

La visibilité des signaux est très nette, comme l'ont prouvé les expériences faites entre le Service hydrographique et les tours de Notre-Dame.

Le fonctionnement de l'appareil a lieu par émission de courants inversés soit par l'emploi d'un régulateur, soit par l'emploi à la main d'une clef double d'inversion.

M. JURGENSEN tient à signaler au Congrès qu'il possédait dès 1867 et avait présenté à l'Exposition une montre décimale.

M. ANTOINE remet au bureau un Travail sur le réglage pour être inséré aux Comptes rendus.

M. GUILLERMINET dépose un rapport sur le répartiteur angulaire de son invention presenté par M. Rozé à la Société d'encouragement pour l'industrie nationale (*Bulletin* d'octobre 1899).

---

(1) Dans sa séance du 22 janvier 1901, le Bureau de la Commission permanente a décidé d'adjoindre à cette Commission.

MM. Hirsch, directeur de l'Observatoire de Neuchatel (depuis décédé).
le professeur Fœrster, directeur de l'Observatoire de Berlin.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

L'ordre du jour de la session se trouvant ainsi épuisé, le Congrès autorise son Bureau à approuverle procès-verbal de la dernière séance et à publier le Compte rendu des travaux.

M. Raoul Gautier remercie, au nom des étrangers, les membres de la Commission d'organisation et particulièrement M. Caspari. C'est à leur dévouement et au soin qu'ils ont pris de la préparation du Congrès qu'est dû le succès de l'œuvre entreprise.

M. le Président prend la parole et se fait l'interprète de tous les membres du Congrès en remerciant M. le directeur de l'Observatoire, qui a mis à la disposition du Congrès une salle qui renferme tant de souvenirs de haute science, et M. le Ministre de l'Instruction publique qui a bien voulu approuver cette libérale initiative. Il remercie également les membres du Bureau pour l'assistance qu'ils ont apportée, les secrétaires dont les procès-verbaux ont fidèlement reproduit les séances, et tout particulièrement M. de Vanssay qui a eu, en outre, toute la charge de la préparation et de l'installation et au zèle duquel est due la réussite du Congrès.

Il résume ensuite les travaux du Congrès. Les bases d'une entente pour les épreuves des chronomètres, pour une simplification et une uniformisation des unités ont été posées; l'application du système décimal à la chronométrie a été mise à l'ordre du jour.

Enfin il remercie les membres du Congrès de l'honneur qu'ils lui ont fait en le nommant président et en le faisant asseoir à la place qu'avait occupée son illustre maître Phillips.

Il déclare close la session du Congrès.

La séance est levée à midi.

VISITES.

Les 30 et 31 juillet, 1er et 2 août, les membres du Congrès ont visité le Bureau international des Poids et Mesures à Sèvres, dont les honneurs leur ont été faits par M. Guillaume.

Le lundi 30 juillet, ils ont visité l'Observatoire sous la conduite de M. le directeur Lœwy.

Le jeudi 2 août, à $10^h 30^m$ du soir, a eu lieu à l'Exposition la visite du Palais de l'Optique. Le directeur, M. Deloncle, en a fait les honneurs aux membres du Congrès. Il eur a montré de très belles *photographies de la Lune* et leur a fait expliquer en détail le mécanisme de la grande lunette.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

EXPOSITION UNIVERSELLE DE 1900.

CONGRÈS INTERNATIONAL

DE

CHRONOMÉTRIE.

RAPPORTS, MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

ALLOCUTION DE M. CASPARI.

MESSIEURS ET TRÈS HONORÉS COLLÈGUES,

Ce n'est pas à moi que devait revenir l'honneur d'ouvrir cette deuxième session du Congrès international de Chronométrie, mais l'illustre savant qui a présidé la Commission d'organisation, M. le Vice-Amiral de Fauque de Jonquières, est retenu loin de Paris par des circonstances douloureuses. Il adresse au Congrès une Lettre dont je vais donner lecture :

Mouans-Sartoux (Alpes-Maritimes),
24 juillet 1900.

MESSIEURS LES MEMBRES DU CONGRÈS DE CHRONOMÉTRIE,

Empêché par de tristes circonstances de famille de me trouver à Paris au moment de notre réunion, je me vois, après vous y avoir invités, privé du grand honneur de vous recevoir et du plaisir de vous remercier verbalement, au nom de la Commission d'organisation que je préside, de l'empressement avec lequel vous avez, venus quelques-uns de très loin, répondu à notre appel.

Je vous en exprime tous mes regrets. Si quelque chose les peut tempérer en une certaine mesure, c'est chez moi la conviction que mon absence ne nuira pas à l'importance de vos conférences, ni au succès de vos travaux, et qu'elle ne saurait avoir de préjudice que pour moi seul.

Certain que vous recevrez l'accueil le plus cordial de nos Vice-Présidents et de tous mes Collègues de la Commission, il ne me reste qu'à vous offrir mes meilleurs souhaits pour que la

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

saison vous soit clémente durant votre séjour dans la capitale de la France, que l'Exposition y satisfasse votre curiosité, et qu'enfin l'écho sinistre des bruits lointains du dehors ne vienne pas troubler la sérénité de vos entretiens et de vos études, dont les caractères essentiels sont l'harmonie et la régularité.

C'est dans ces sentiments que je vous prie, Messieurs, d'agréer l'assurance de ma haute considération et l'hommage de mon sincère dévouement.

VICE-AMIRAL DE JONQUIÈRES,
Membre de l'Institut.

Je suis assuré de traduire votre pensée unanime en adressant au Vice-amiral de Jonquières l'expression de notre profonde sympathie et de tous nos regrets.

Son absence me vaut un privilège dont je sens tout le prix, c'est de vous souhaiter une cordiale bienvenue au nom de la Commission d'organisation. Merci, Messieurs, pour l'empressement que vous avez mis à répondre à notre appel. Vous avez sans doute pensé que de cette réunion il devait sortir un progrès pour la Science qui nous intéresse. Nous l'espérons fermement et nous comptons surtout que de notre rapprochement momentané résulteront des relations cordiales et suivies, et que nous emporterons d'ici des souvenirs agréables et durables.

Je suis assuré aussi de répondre à votre sentiment unanime en adressant nos remercîments les plus chaleureux à M. le Directeur de l'Observatoire de Paris, notre collègue M. Lœwy, qui a bien voulu consentir à mettre à notre disposition la belle salle où nous nous réunissons et dans laquelle nous trouvons tant de souvenirs de haute Science.

Il n'est que juste de comprendre dans ces remercîments M. le Ministre de l'Instruction publique, qui a bien voulu approuver l'initiative si libérale de M. Lœwy.

Je dois maintenant vous résumer les mesures prises par la Commission et le programme des travaux qu'elle vous propose. Mais, comme cette session est en quelque sorte la continuation directe de celle de 1889, il me semble qu'il est de mon devoir de donner tout d'abord un souvenir à ceux qui ont participé à nos premiers travaux, et dont plusieurs ont été depuis enlevés à la Science et à l'Art. Je ne citerai pas tous leurs noms : ils sont nombreux, et je craindrais d'en omettre; mais vous me permettrez d'évoquer du moins le souvenir du grand savant qui a présidé avec tant de distinction le premier Congrès, et dont la place est restée vide. Dans une réunion telle que celle-ci, quand on a prononcé le nom de Phillips, il n'y a besoin ni d'explications ni de commentaires. Son souvenir reste impérissable dans l'horlogerie de précision au même titre que le nom d'Huygens. Le premier, parmi les savants modernes, il a su mettre au service de la pratique de l'horlogerie les ressources d'une science consommée; il a fondé la Mécanique chronométrique, comme Lagrange et Laplace ont fondé la Mécanique céleste. Si d'autres, parmi lesquels j'aime à citer Yvon Villarceau et Resal, ont apporté à la Science un ample contingent de vérités nouvelles et des théories d'une grande portée, c'est toujours Phillips qui est resté l'initiateur. Sa théorie du spiral restera un monument achevé, mais elle est bien loin de constituer son seul titre de gloire; il suffit de rappeler la théorie des déformations du balancier, de la compensation, du réglage en positions, du pendule, pour que, dans cette

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

assemblée, chacun se rende exactement compte de tout ce qu'il a ajouté à la Science et du vide que sa mort fait parmi nous.

Je me reprocherais aussi de ne pas rappeler ici le souvenir de l'ancien directeur de cet Observatoire, l'amiral Mouchez, qui nous a offert à cette époque l'hospitalité ici même avec une bonne grâce que nous n'oublierons pas et dont nous lui gardons un souvenir reconnaissant.

Vous avez reçu le programme élaboré par la Commission d'organisation. Nous avons tenu à le faire aussi complet que possible et à y comprendre toutes les questions qui peuvent donner lieu à des échanges d'idées utiles. Nous avons reçu des communications nombreuses et variées : elles viendront chacune à leur tour et nous espérons qu'elles provoqueront des discussions intéressantes. Je ne veux donc pas les énumérer en ce moment; je me borne à attirer votre attention sur quelques questions qui me paraissent relever plus particulièrement d'un Congrès international.

Il y a d'abord la question des unités employées en horlogerie : masse, calibre, dimensions, etc. Si nous pouvons arriver à poser les bases d'un accord sur ces points, je crois que nous rendrons à l'horlogerie un service analogue à celui que le Congrès de 1881 a rendu aux électriciens en généralisant le système C.G.S.

Il y a ensuite la question de la division décimale du jour, qui n'a guère été discutée jusqu'ici qu'en France, et qui gagnerait beaucoup à franchir nos frontières. Cette réforme, si elle est sagement réduite à ce qui donne satisfaction aux calculateurs sans empiéter sur des domaines où elle serait gênante, semble être arrivée à peu près au point où les applications pratiques peuvent commencer.

Il serait bien désirable aussi qu'on pût préparer ici une entente internationale en ce qui concerne les épreuves et concours, et les bulletins d'observatoire, c'est-à-dire à ce qui établit officiellement la valeur des montres de précision. La question est difficile et se complique d'habitudes prises, et même de dispositions législatives en vigueur; il ne paraît pourtant pas impossible de trouver les bases d'un accord entre les divers observatoires.

Enfin, il serait à désirer que de nos délibérations pût sortir une définition claire et précise de ce que c'est véritablement qu'un chronomètre, du sens qu'on doit attacher aujourd'hui à ce mot.

Vous avez remarqué le n° 8 de notre Programme : *Applications de la Chronométrie à la Science*. En y réfléchissant, j'aimerais encore mieux dire : *Relations entre la Chronométrie et la Science*. Ces relations existent depuis longtemps; et je n'en veux pour preuve que la composition de notre assemblée, où les savants, tels qu'astronomes, physiciens, mécaniciens, sont réunis aux artistes et aux fabricants.

L'horlogerie a eu ce privilège de provoquer des recherches scientifiques d'ordre très élevé, qui ont profité à la fois à la Science et à l'Industrie; les points de contact sont innombrables. L'Astronomie nous donne l'unité de temps; elle nous fournit le moyen de la déterminer avec une précision en quelque sorte illimitée, soit que l'on envisage la perfection des méthodes d'observation, ou celle encore plus grande des calculs de la Mécanique céleste, soit que l'on tienne seulement compte des longs siècles embrassés par les observations.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Les astronomes prêtent encore leur concours pour l'étude des instruments, pour leur classement, pour l'appréciation de leur valeur.

La Mécanique et la Physique donnent aux praticiens des indications fécondes sur les formes des organes, sur les matières à employer, sur les forces à mettre en jeu : c'est grâce à leur concours, servi par l'habileté de nos artistes, qu'on arrive à reproduire matériellement la division du temps astronomique.

En retour, les savants trouvent dans le chronomètre bien construit un de leurs plus utiles instruments. La pendule est aussi indispensable à l'astronome que les lunettes et les cercles divisés : les physiciens ont basé tout leur système de mesures sur la seconde de temps. Ils trouvent même dans le chronomètre un instrument d'une précision extraordinaire pour la mesure de données physiques, dilatations, coefficients d'élasticité, sans oublier l'application du pendule à la mesure de la gravité.

Les horlogers se trouvent être ainsi les collaborateurs les plus utiles, les plus indispensables des savants; il y a là un des exemples les plus instructifs des avantages que la théorie et la pratique tirent d'une coopération constante.

Je dois me borner à ces indications : je n'insisterai même pas, comme on pourrait l'attendre de moi, sur les services rendus par l'horlogerie à la marine, et sur le haut degré de perfection qu'ont atteint nos chronomètres. Je me bornerai en terminant à émettre un vœu. C'est que, par la collaboration de plus en plus féconde de tous, nos artistes arrivent enfin à nous donner ce qui manque encore, à savoir, l'horloge impeccable, c'est-à-dire celle qui, comme on dit, règle le Soleil, et qui nous permettra à son tour de contrôler les postulata de l'Astronomie, c'est-à-dire de vérifier si notre unité, le jour, est véritablement invariable; c'est là le grand problème que nous léguerons au xx^{e} siècle et aux Congrès futurs.

Si ce but suprême doit être atteint, il le sera, soyez en sûrs, par l'union de plus en plus féconde des artistes et des savants, et c'est à quoi, Messieurs, je me permets de vous convier.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

ÉPREUVES ET CONCOURS

POUR

LES CHRONOMÈTRES DE POCHE.

COMPARAISON DES RÈGLEMENTS,

PAR

M. P. DE VANSSAY.

Depuis que l'horlogerie de précision a fait de si merveilleux progrès, les épreuves et les concours que les montres subissent dans les observatoires chronométriques prennent une importance croissante. Plus la pièce produite approche de la perfection, plus l'horloger a besoin que les épreuves lui indiquent les légers défauts qui subsistent dans son œuvre, plus l'acheteur est désireux d'avoir un bulletin de l'observatoire qui lui soit une garantie de la qualité de sa montre. Les concours excitent entre les horlogers une fructueuse émulation et permettent aux services publics qui en organisent de choisir les meilleures montres.

Dans le but de montrer l'importance qu'il y aurait à ce que les bulletins délivrés par les divers observatoires aient des valeurs équivalentes et que les nombres de classement obtenus dans les concours soient comparables, je vais passer rapidement en revue les différentes épreuves que subissent les montres.

GENRE D'ÉPREUVES.

La plupart des observatoires distinguent sur leurs bulletins trois classes d'épreuves pour les chronomètres de poche; on crée souvent une classe spéciale pour les montres de torpilleurs appelées aussi *chronomètres de bord* ou *deck-watches*. Dans quelques observatoires, les bulletins de première classe peuvent porter la mention *très satisfaisante,* ce qui constitue, en réalité, une nouvelle classe supérieure à la première. Je m'occuperai principalement des épreuves de première classe, qui sont les plus longues et les plus complètes.

La marche de la montre est observée dans les différentes conditions qui peuvent la modifier. Pour cela, on divise la durée des épreuves en un certain nombre

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

de périodes; la situation de la montre restant la même pendant toute une période.

Il y a généralement une période pour chacune des cinq positions que peut occuper une montre dans la pratique :

Horizontale, cadran en haut,
» » en bas,
Verticale, pendant en haut,
» » à droite,
» » à gauche.

L'observatoire de Hambourg est seul, je crois, à faire encore une épreuve où la montre est verticale pendant en bas.

Cette position n'a jamais lieu dans la pratique, mais cette épreuve, combinée avec les trois autres aux positions verticales, a l'avantage de permettre de séparer l'influence de l'erreur d'isochronisme de celle de l'erreur de centrage du balancier.

Pour étudier la *compensation,* on fait passer presque partout le chronomètre à la glacière vers 0° et à l'étuve vers 30°.

A *Liverpool,* on observe les montres à 10°, 18° et 27°.

A *Wilhemshafen,* on fait varier la température de 10° à 30° en passant par 15°, 20° et 25°, et on la ramène à 10° en passant par les mêmes valeurs.

A *Besançon, Genève, Neuchâtel, Saint-Imier, Bienne, Kew* et *Liverpool,* au *Service hydrographique français,* les épreuves de température se font à la position horizontale, cadran en haut.

A *Hambourg,* elles se font dans deux positions : horizontale, cadran en haut, et verticale pendant en haut.

A *Wilhemshafen,* elles se font au pendu.

A *Greenwich,* les épreuves aux positions verticales se font à 25° ou 30°, tandis que celles aux positions horizontales se font à la température ordinaire. La raison en est que la position verticale correspond au porter dans la poche de l'observateur et, par suite, à une température de 25° à 30°. On ne fait pas d'épreuves à la glacière.

Il semble cependant logique de séparer les causes de perturbation et, par suite, d'étudier l'influence de la température dans la position horizontale, lorsque aucune autre influence ne vient agir sur le balancier et le spiral.

Dans les concours spéciaux de compensation établis à Genève, les marches des montres étaient observées à sept températures variant de 5° en 5° depuis 5° jusqu'à 35°; mais on ne peut songer à faire une étude aussi complète de l'action de la température dans les épreuves courantes, dont on prolongerait la durée au delà des limites possibles.

Il y a encore quelques causes d'erreurs qu'il serait intéressant d'étudier et qui ne l'ont été qu'exceptionnellement jusqu'à ce jour.

A *Leipzig,* il y a deux périodes d'épreuves au porter.

Pour que l'usage de cette épreuve, qui n'est pas sans intérêt, se généralise, il faudrait inventer des appareils spéciaux permettant de traiter à la fois un grand nombre de montres.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

On pourrait aussi étudier l'influence des vibrations de l'hélice sur les montres de torpilleurs; l'influence d'un champ magnétique; de l'humidité.

DURÉE ET ORDRE DES ÉPREUVES.

Les épreuves de première classe durent, à *Genève, Besançon* et *Kew* 44 jours, à *Neuchâtel* 6 semaines pour la première classe et 2 mois pour les chronomètres de bord, à *Bienne* et *Saint-Imier* 15 jours, à *Hambourg* 42 jours, à *Greenwich* 16 semaines pour les deckwatches, au *Service hydrographique français* 2 mois, à *Liverpool* 48 jours, à *Leipzig* 4 semaines.

Les épreuves sont d'autant plus sérieuses qu'elles sont plus longues. Chaque période doit durer un temps suffisant pour que le chronomètre prenne bien l'état d'équilibre qui correspond à la nouvelle position et surtout à la nouvelle température; et pour que l'on puisse juger, pendant la période, de la conservation de la marche. Il faut aussi que les erreurs d'observation soient négligeables dans le calcul de la marche moyenne.

Aussi les périodes de 4 à 5 jours ne semblent pas pouvoir être diminuées, et les périodes de 1 et 2 jours donnent des renseignements insuffisants et inexacts. Il est très désirable également que les épreuves à 0° et 30° soient encadrées chacune entre deux périodes dans la même position et à la température ordinaire, ou au moins qu'elles soient séparées par une de ces périodes; on évitera ainsi de les soumettre à un saut trop brusque de température qui peut les dérégler, et l'on pourra comparer les marches aux trois températures sans avoir à craindre l'erreur appelée *reprise de marche,* qui est cause de la différence que l'on observe dans la marche d'une montre placée dans des conditions identiques pendant deux périodes séparées par d'autres où la position ou la température étaient différentes. Pour la même raison on devrait encadrer de la même manière les périodes aux positions, mais la durée limitée des épreuves ne le permet généralement pas; on remplace l'étude de la reprise de marche après chaque épreuve de position par la mesure de la différence des marches moyennes de la première et de la dernière période, en plaçant dans ces deux périodes la montre dans les mêmes conditions. On a reconnu aussi la nécessité de négliger dans les calculs la marche du premier jour d'une période qui se trouve à une température différente de la précédente. Il faut, en effet, souvent 24 heures à une montre pour prendre l'état d'équilibre qui correspond à une nouvelle température; et si l'on tenait compte de la marche du premier jour, on risquerait d'avantager les montres qui sont dans ce cas, aux dépens de celles qui prennent de suite le nouvel état d'équilibre.

CAUSES DE RENVOI.

Un chronomètre ne peut obtenir un bulletin de marche, pour la classe dont il a subi les épreuves, que s'il satisfait à certaines conditions par lesquelles on juge la bonne construction de la montre, son réglage et sa compensation.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Quoiqu'un chronomètre excellent puisse avoir une marche assez forte, cependant pour les besoins de la pratique on exige à Genève, Neuchâtel, Besançon et Kew que la *marche moyenne de chaque période* ne dépasse pas 10^s.

La *plus grande variation de marche d'un jour à l'autre* ne doit pas dépasser à Neuchâtel $1^s,5$ pour les chronomètres de bord, 2^s pour la première classe, $2^s,5$ pour la deuxième et 3^s pour la troisième; à l'observatoire de Hambourg 4^s; au Service hydrographique français 3^s; à Leipzig 8^s et à Wilhemshafen 3^s.

Cette clause de renvoi se justifie par la raison que les chronomètres qui font des sauts ont de graves défauts de construction.

A l'observatoire de Neuchâtel, on juge la bonne construction de la montre par le calcul de la *variation diurne moyenne de la marche.*

Cette variation ne doit pas dépasser, d'après le projet de nouveau règlement de Neuchâtel, $0^s,5$ pour les chronomètres de bord, $0^s,75$ pour la première classe, 1^s pour la deuxième et $1^s,5$ pour la troisième.

Les observatoires de Genève, Besançon et Kew préfèrent calculer l'*écart moyen de la marche diurne.*

Pour chaque période, on calcule la marche moyenne, et pour chaque jour de la période la différence entre la marche diurne correspondante est la marche moyenne de la période. Cette différence s'appelle *écart de marche,* et la moyenne des valeurs numériques de ces écarts est l'écart moyen de la marche diurne.

Cet écart ne doit pas dépasser à Genève $0^s,75$ pour la première classe, 1^s pour la deuxième, $1^s,25$ pour la troisième; à Besançon $0^s,75$ pour l'obtention de la mention *très satisfaisante,* et $1^s,5$ pour les autres classes; à Kew $0^s,75$ pour l'obtention de la mention *très satisfaisante* et 2^s pour les autres classes. En outre, pour une même période, la moyenne numérique des écarts de marche ne doit pas dépasser à Genève $1^s,5$ pour la première classe, $1^s,75$ pour la deuxième, et 2^s pour la troisième; à Besançon $1^s,5$ pour obtenir la mention *très satisfaisante;* à Liverpool 2^s.

La variation de la marche diurne d'une montre pendant une même période est due, d'une part à une accélération ou un retard progressif dans la marche; de l'autre à des accidents qui proviennent de l'imperfection du chronomètre et aussi à des erreurs sur la comparaison. Pour bien caractériser ces deux imperfections, il faudrait deux coefficients.

La courte durée des périodes rend peu exacte l'évaluation du premier coefficient. Pour l'établir, on pourrait prendre la moyenne des différences de marche entre le premier et l'avant-dernier jour de la période, et entre le deuxième et dernier jour : ce coefficient établi, les erreurs accidentelles seraient caractérisées par la moyenne des différences entre les marches observées et celles que l'on calculerait pour chaque jour au moyen de la marche moyenne et de ce coefficient.

En réalité, l'écart moyen de la marche diurne d'une période donne la moyenne des valeurs absolues des erreurs que l'on commettrait chaque jour en calculant l'état de la montre avec la marche moyenne. Il se confondrait avec le deuxième coefficient dont nous venons de parler s'il n'y avait pas d'accélération.

La variation diurne moyenne, au contraire, n'aurait un sens bien défini que s'il n'y avait pas d'erreurs accidentelles.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

L'influence des positions est caractérisée :

1° Par la différence de marche entre les deux positions horizontales avec la limite, à Genève de 6^s pour la première classe et 7^s pour la deuxième, à Besançon 6^s pour obtenir la mention *très satisfaisante*.

2° La différence de marche du plat au pendu, qui ne doit pas dépasser à Genève 6^s pour la première classe, 7^s pour la deuxième et 8^s pour la troisième; à Besançon 6^s pour la mention *très satisfaisante* et 9^s pour les classes; à Neuchâtel 10^s; à Kew 2^s,5 pour les bulletins *très satisfaisants* de première classe, 5^s pour la première classe et pour le bulletin *très satisfaisant* de la deuxième, 10^s pour la deuxième classe; à Hambourg 10^s; au Service hydrographique français 6^s; à Wilhemshafen 8^s.

3° La différence entre les marches moyennes de deux quelconques des périodes à la température ordinaire, qui ne doit pas dépasser à Genève 10^s pour la première classe; à Besançon 10^s pour la mention *très satisfaisante;* à Neuchâtel (projet de nouveau règlement) 6^s pour les chronomètres de bord et la première classe, 8^s pour la deuxième classe et 10^s pour la troisième; à Kew 5^s pour la mention *très satisfaisante,* et 10^s pour la première classe; au Service hydrographique français 4^s, et 2^s pour la différence entre deux marches moyennes successives; à Liverpool 5^s entre deux marches moyennes successives.

4° L'écart moyen correspondant à un changement de position, c'est-à-dire la moyenne des différences des marches des périodes à la température ordinaire avec la moyenne générale des marches à la même température; la limite tolérée étant à Genève 2^s,5 pour la première classe, à Besançon 2^s,5 pour la mention *très satisfaisante* et 5^s pour les autres classes.

5° La reprise de marche ou différence des marches moyennes de la première et de la dernière période pendant lesquelles le chronomètre est placé dans la même position et à la même température. La limite est à Genève de 5^s pour la première classe et 6^s pour la deuxième; à Besançon 5^s pour la mention *très satisfaisante;* à Neuchâtel (nouveau projet de règlement) 3^s; à Hambourg 4^s.

L'influence de la température est caractérisée, dans plusieurs observatoires, par un coefficient appelé *variation par degré de température,* qui s'obtient en faisant la différence des marches à l'étuve et à la glacière, et en divisant cette différence par la différence des températures.

Un tel coefficient n'aurait une signification que si la marche d'un chronomètre variait proportionnellement avec la température. Il n'en est presque jamais ainsi, et l'erreur qui en résulte est appelée *erreur secondaire de compensation.* L'expérience a montré que la variation de la marche avec la température peut généralement se représenter par une équation de la forme

$$m = m_0 + a\theta + b\theta^2,$$

où m et m_0 représentent la marche aux températures θ et o. C'est l'équation d'une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des marches. Cette parabole sera définie par les marches observées aux trois températures; et comme on ne fait généralement pas d'épreuves à un plus grand nombre de températures, on n'a pas les éléments nécessaires pour représenter la marche par une courbe de degré plus élevé.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

On voit donc qu'il faudra deux coefficients pour définir la variation de la marche avec la température, par exemple, a et b; ou mieux b et $\frac{-a}{2b}$ qui porte le nom de *température de réglage;* c'est la température pour laquelle la marche passe par un maximum ou un minimum.

Dans le nouveau projet de règlement de Neuchâtel, on adopte deux coefficients : le premier est la variation par degré de température, entre 0° et 30°, définie plus haut; le second, l'écart de proportionnalité pour les températures moyennes. Si les températures d'observation sont 0°, 15° et 30°, l'expression de ces deux coefficients est

$$a + 30b \quad \text{et} \quad 225b.$$

Au Service hydrographique français, on considère les différences entre les marches à 0° et 15°, et celles à 15° et 30°; c'est-à-dire les termes

$$F = 15(a + 15b) \qquad \text{et} \qquad C = 15(a + 45b).$$

Dans le cas où l'on ne prend qu'un coefficient, on ne peut caractériser complètement la courbe, mais il semble du moins logique d'adopter un nombre qui représente l'erreur que l'on commettrait en calculant l'état avec une marche constante lorsque la température varie, proportionnellement au temps, entre deux limites données; cette erreur peut être représentée par la surface comprise entre la parabole, les deux parallèles à l'axe des marches passant par les températures extrêmes, et une parallèle à l'axe des températures passant par la marche constante employée. Une telle surface peut toujours s'exprimer par une fonction linéaire des marches à trois températures distinctes.

On peut interpréter ainsi le critérium employé à Genève et Besançon sous le nom d'*erreur de compensation pour* 1° *centigrade.*

Pour l'obtenir, on calcule la marche moyenne des trois périodes successives à 0°, 15° et 30°, et la moyenne générale de ces trois marches moyennes; puis on fait la somme arithmétique des écarts entre la moyenne de chaque période et cette moyenne générale; on fait la même somme d'écarts pour les températures, et l'on prend le quotient de la première somme par la seconde.

Dans le cas où les températures sont 0°, 15° et 30°, on obtient ainsi, à un facteur près, l'erreur que l'on commettrait en calculant l'état du chronomètre avec la moyenne des marches à 0° et 15° lorsque la température varie, proportionnellement au temps, de 0° à 30°.

On peut encore dire, plus simplement, qu'en appliquant ce mode de calcul, on traite la variation de la marche avec la température comme une erreur accidentelle, et l'on donne une valeur moyenne de cette erreur.

Si l'on appelle α et β les deux coefficients proposés par le nouveau règlement de Neuchâtel, l'erreur de compensation pour 1° centigrade, c, sera égale à

$$\begin{aligned}
&\alpha + \frac{\beta}{45} \quad \text{si} \quad \alpha > \frac{\beta}{45}, \\
&\alpha - \frac{\beta}{45} \quad \text{si} \quad \alpha < \frac{-\beta}{45}, \\
&\frac{\beta}{22{,}5} \quad \text{si} \quad -\frac{\beta}{45} < \alpha < \frac{\beta}{45}.
\end{aligned}$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

L'erreur de compensation pour 1° C. ne doit pas dépasser à Genève $0^s,2$ pour la première classe, $0^s,3$ pour la deuxième, et $0^s,4$ pour la troisième; à Besançon $0^s,2$ pour la mention *très satisfaisante* et $0^s,5$ pour la première et la deuxième classe; à Kew $0^s,27$ pour la mention *très satisfaisante* de la première classe, $0^s,60$ pour la première classe; à Bienne et Saint-Imier $0^s,25$ pour la mention *très satisfaisante* et $0^s,5$ pour la première classe; à Hambourg il faut que la différence entre la marche à la température ordinaire et la marche à la glacière aussi bien qu'à l'étuve ne dépasse pas 10^s; au Service hydrographique français les mêmes différences doivent être plus petites que 6^s, et à Liverpool que $8^s,2$.

A Neuchâtel, la variation par degré de température (calculée sur l'intervalle de 0° à 30°) ne doit pas dépasser $0^s,5$; à Hambourg et Wilhemshafen (intervalle de 10° à 30°) la limite est aussi $0^s,5$. Le projet de nouveau règlement de Neuchâtel donne les limites suivantes : variation par degré, $0^s,25$; écart de proportionnalité pour la température moyenne, 4^s pour les chronomètres de bord et la première classe de montres, 6^s pour la deuxième classe.

Quelques observatoires tiennent aussi compte de la reprise de marche après les épreuves thermiques; cette erreur ne doit pas dépasser, dans le projet de nouveau règlement de Neuchâtel, $2^s,5$ pour les chronomètres de bord, 3^s pour la première classe et 4^s pour les deux autres; à Bienne et Saint-Imier la limite est 10^s; au Service hydrographique français 4^s; à Wilhemshafen 10^s.

CONCOURS.

Dans presque tous les observatoires, on profite de ces épreuves pour classer les chronomètres entre eux, donner des prix aux meilleurs ou les acheter pour les services publics.

A Besançon, le concours a lieu entre les chronomètres qui ont obtenu la mention d'une marche très satisfaisante.

Si l'on appelle

α l'écart moyen de la marche diurne,
β l'écart pour un changement de position,
γ l'erreur de compensation pour 1° C.,

le nombre de classement est la somme

$$N = \frac{400}{3}(0,75 - \alpha) + 40(2,5 - \beta) + 500(0,20 - \gamma).$$

A Genève, on tient compte aussi de la reprise de marche; soit ρ cette erreur, on calcule la somme

$$N = \frac{400}{3}(0,75 - \alpha) + 40(2,5 - \beta) + 350(0,20 - \gamma) + 6(5 - \rho).$$

A Kew et Liverpool le procédé de classement est le même, mais les coefficients diffèrent, le maximum des points que puisse atteindre un chronomètre parfait étant 100, au lieu de 300 à Besançon et à Genève.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

A Greenwich, on appelle

a la différence entre la plus grande et la plus petite marche hebdomadaire,
b la plus grande différence entre deux marches hebdomadaires consécutives,
c la différence entre les marches *pendant en haut* et *cadran en haut*,
d la différence entre les marches *pendant à droite* et *cadran en haut*,
e la différence entre les marches *pendant à gauche* et *cadran en haut*.

Le nombre de classement est donné par la formule

$$N = a + 2b + \frac{1}{2}\left(c + \frac{d+e}{3}\right),$$

à laquelle on a été conduit par des considérations sur les rapports probables des durées pendant lesquelles une montre se trouve dans ces différentes positions dans le service courant.

Au Service hydrographique français, on calcule le nombre A, écart des marches extrêmes à la température ambiante; les nombres C et F, écarts des marches à 30° et à 0° avec la marche de la période précédente ou de la période suivante qui en diffère le plus; et l'on ajoute le nombre A au plus grand des deux nombres C et $\frac{1}{2}$ F.

A Neuchâtel, on exige des chronomètres des limites d'erreurs plus faibles que celles qui ont servi pour les épreuves, puis on classe les chronomètres d'après la variation diurne moyenne.

Dans le projet du nouveau règlement, on fixe des limites pour les différentes erreurs étudiées, et l'on affecte un certain nombre de points à chacune d'elles; la somme maxima des points qui peuvent être obtenus étant 300, dont 100 pour la variation diurne moyenne, 80 pour la compensation, 70 pour les variations de position, et 50 pour la constance de marche.

Ce procédé de classement présente l'avantage de tenir compte de toutes les imperfections constatées dans les montres pendant les épreuves.

En terminant cette revue des procédés employés dans les principaux observatoires, qui en aura montré, j'espère, la trop grande variété, je dois remercier M. Raoul Gautier, l'éminent directeur de l'observatoire de Genève, dans les travaux duquel j'ai puisé la plupart de mes renseignements.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

MÉMOIRE

SUR LA

COMPENSATION THERMIQUE DES PENDULES,

PAR

J.-M. FADDEGON.

Quoique la théorie indique depuis longtemps qu'il faut partir d'une indication mathématique très nette pour obtenir la compensation thermique du pendule, les constructeurs ne se sont rendu compte que dans très peu de cas de cette condition, que l'on peut énoncer en quelques mots :

Indépendamment de la température, le moment d'inertie du pendule divisé par son moment statique doit donner une valeur constante, qui est égale à la longueur du pendule fictif, dit *simple*, qui oscille dans le même temps. Il va sans dire que l'on regarde ici le pendule sous des restrictions : dans un vide absolu, faisant abstraction des effets mécaniques de la suspension, de l'influence du magnétisme, de la variation de l'attraction de la terre, due aux phénomènes célestes, et des différences dans le chauffage.

Les anciens pendules à compensation sont basés sur une considération fausse; leurs auteurs ne cherchaient que le maintien du centre de gravité de la lentille à une distance constante de l'axe de rotation, et plusieurs systèmes furent proposés dans ce but.

Le pendule à mercure était plus étudié que le pendule métallique, mais son fonctionnement ne fut pas très rigoureusement établi et sa construction était souvent trop compliquée pour permettre un exposé bien net.

Du reste, on peut reprocher aux pendules à mercure le niveau courbé par l'effet de forces moléculaires et la difficulté de construire des vases réguliers qui rendent ces instruments aptes à un calcul poussé.

M. Riefler, ingénieur allemand, composa quelques pendules fondés strictement sur le principe indiqué, mais il ne publiait pas ses calculs.

Son pendule en acier contenant du mercure n'est qu'un spécimen ingénieux des pendules à fluide, qui se placent à côté d'une autre catégorie compensatoire, celle à matières solides.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Avant d'étudier ces deux combinaisons, j'énoncerai quelques considérations générales.

La formule qui exprime le temps de l'oscillation du pendule fictif est

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{R}.$$

R est une série en fonction du sinus de l'angle d'écartement, mais qui pour notre but n'a pas d'intérêt; g est l'accélération due à la gravité.

Pour que t garde une valeur constante, π, g et R étant invariables, il faut que l, longueur du pendule donné, reste constante.

On sait que, dans le pendule matériel

$$l = \frac{\Sigma \mathrm{I}}{\Sigma \mathrm{S}},$$

Σ indiquant la somme des moments, soit d'inertie I, soit statiques S, de toutes les particules du pendule.

Si l'on appelle $\Sigma \mathrm{I}_t$, $\Sigma \mathrm{S}_t$ ce que $\Sigma \mathrm{I}$ et $\Sigma \mathrm{S}$ deviennent pour une température t, on aura pour condition de la compensation à cette température

$$l = \frac{\Sigma \mathrm{I}}{\Sigma \mathrm{S}} = \frac{\Sigma \mathrm{I}_t}{\Sigma \mathrm{S}_t}.$$

On peut remarquer que (sous les restrictions données) :

1° Si cette égalité est satisfaite pour toutes les valeurs de t (au besoin entre deux limites convenablement choisies) le pendule sera *absolument* compensé (entre les limites);

2° Si cette égalité est satisfaite pour une ou plusieurs valeurs réelles de t, le pendule sera compensé pour une ou plusieurs températures, ainsi que pour la température initiale o. Ces valeurs se présenteront comme les racines d'une équation en t.

Dans ce qui suit, on a exprimé les différents moments en unité de poids au lieu de masse, ce qui est sans importance, parce qu'il s'agit toujours de quotients de deux moments.

Quelquefois, quand on l'a indiqué, ces moments ont été d'abord exprimés en volume pour être multipliés ensuite par la densité.

Le moment d'inertie d'un élément du pendule, dont les coordonnées sont x, y, z, les dimensions ∂x, ∂y, ∂z et la densité D, sera par rapport à l'axe des Z

$$\mathrm{D}\,\partial x\,\partial y\,\partial z(x^2+y^2);$$

ce moment sera pour le corps entier

$$\mathrm{I} = \mathrm{D}\int \partial z \int \partial y \int \partial x (x^2+y^2).$$

Si l'on chauffe ce corps à une température quelconque t, on admettra qu'une

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

dimension linéaire a se changera en $(1+t\alpha)a$; α étant le coefficient de dilatation. En même temps que les dimensions augmentent, la densité D devient $\frac{D}{(1+t\alpha)^3}$; donc

$$I_t = \frac{D}{(1+t\alpha)^3} \int (1+t\alpha)\,\partial z \int (1+t\alpha)\,\partial y \int (1+t\alpha)\,\partial x (1+t\alpha)^2 (x^2+y^2),$$

ou

$$I_t = D(1+t\alpha)^2 \int \partial z \int \partial y \int \partial x (x^2+y^2) = (1+t\alpha)^2 I,$$

Le moment statique du même élément est, l'axe des X passant par le centre de gravité,

$$D\,\partial z\,\partial y\,\partial x\,x.$$

Le moment du corps sera

$$S = D \int \partial z \int \partial y \int \partial x\, x,$$

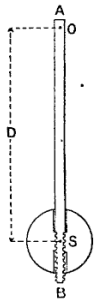
et pour une température t

$$S_t = \frac{D}{(1+t\alpha)^3} \int (1+t\alpha)\,\partial z \int (1+t\alpha)\,\partial y \int (1+t\alpha)\,\partial x (1+t\alpha)\,x,$$

$$S_t = D(1+t\alpha) \int \partial z \int \partial y \int \partial x z = (1+t\alpha)S.$$

Soit maintenant AB (*fig.* 1) la tige d'un pendule oscillant autour d'un axe passant par O.

Fig. 1.



Soit C une lentille d'une autre matière fixée à la hauteur de son centre de gravité S à la tige.

On aura

	Moment d'inertie en volume.	Moment statique en volume.	Densité.	Poids.	Coefficient de dilatation.
Lentille....	m_t^5 par rapport à S	»	a	p_1	α
Tige	m_n^5 par rapport à O	s_n^4	b	»	β

Tout ceci pour une température o.

On indiquera la distance OS par D.

Le moment d'inertie complet (par rapport à l'axe passant par O) sera pour

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

la lentille, d'après un théorème connu,

$$am_t^5 + p_1 D^2$$

et le moment statique $p_1 D$.

Le moment d'inertie de la tige est bm_n^5 et le moment statique bs_n^4.

La formule $l = \frac{\Sigma I}{\Sigma S}$ devient

$$l = \frac{bm_n^5 + am_t^5 + p_1 D^2}{bs_n^4 + p_1 D}.$$

Pour une température t on écrira (1)

$$l_t = \frac{\Sigma I_t}{\Sigma S_t} = \frac{(1+t\beta)^2 p_1 D^2 + (1+t\beta)^2 bm_n^5 + (1+t\alpha)^2 am^5}{(1+t\beta) bs_n^4 + (1+t\beta) p_1 D}$$
$$= \frac{(1+t\beta)^2 (bm_n^5 + p_1 D^2) + (1+t\alpha)^2 am_t^5}{(1+t\beta)(bs_n^4 + p_1 D)}.$$

On obtient pour condition de compensation, en posant $l_t = l$,

$$\text{(I)} \qquad \frac{bm_n^5 + am_t^5 + p_1 D^2}{bs_n^4 + p_1 D} = \frac{(1+t\beta)^2 (bm_n^5 + p_1 D^2) + (1+t\alpha)^2 am_t^5}{(1+t\beta)(bs_n^4 + p_1 D)}$$

ou bien

$$bm_n^5 + am_t^5 + p_1 D^2 + t\beta (bm_n^5 + am_t^5 + p_1 D^2)$$
$$= bm_n^5 + p_1 D^2 + am_t^5 + 2t\beta (bm_n^5 + p_1 D^2) + 2t\alpha am_t^5 + t^2 \beta^2 (bm_n^5 + p_1 D^2) + t^2 \alpha^2 am'_5,$$

ce qui se simplifie en

$$t\beta (bm_n^5 + am_t^5 + p_1 D^2) = 2t\beta (bm_n^5 + p_1 D^2) + 2t\alpha am_t^5 + t^2 (\beta^2 bm_n^5 + p_1 D^2 + \alpha^2 am_t^5),$$

et finalement en

$$\text{(II)} \qquad \beta (- bm_n^5 - p_1 D^2 + am_t^5) = 2\alpha am_t^5 + t\beta^2 (bm_n^5 + p_1 D^2 + \alpha^2 am_t^5).$$

Par conséquent, le pendule proposé sera compensé exactement, pour une température donnée, par

$$t = \frac{\beta (am_t^5 - bm_n^5 - p_1 D^2) - 2\alpha am_t^5}{\beta^2 (bm_n^5 + p_1 D^2 + am_t^5)}.$$

Représentant cette fraction par $\frac{\beta (Q - \varphi M)}{\beta^2 P} = \frac{Q - \varphi M}{\beta P}$, où $\varphi = \frac{2\alpha}{\beta}$, et considérant le cas où $\alpha = \frac{1}{2}\beta$, on aura $\varphi = 1$.

Donc

$$t = \frac{Q - M}{\beta P} = \frac{-P + M}{\beta P} = \frac{-1}{\beta N},$$

où N est un nombre positif.

Partant d'autres suppositions et remarquant que β variera pour la plupart des

(1) En observant que la distance D est obtenue avec le métal de la tige, qui a pour coefficient de dilatation β.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

métaux entre 0,00001 et 0,00002. On voit que la valeur de t contiendra certainement un facteur — 100000 et n'a aucun intérêt pratique.

Le problème de compensation n'étant donc pas strictement soluble, on tâchera d'obtenir une approximation.

Dans ce but négligeons les termes dus au développement des secondes puissances de α et β dans l'égalité (I), et la formule (II) donnera

$$(\beta - 2\alpha) am_r^5 = \beta(bm_u^5 + p_1 D^2). \tag{III}$$

Or, par ce choix il se forme une différence entre l et l_t, de sorte que $l_t = l + \varepsilon l$ et

$$\varepsilon = \frac{l_t - l}{l} = \frac{\dfrac{(1+t\beta)^2(bm_u^5 + p_1 D^2) + (1+t\alpha)am_r^5}{(1+t\beta)(bs_u^4 + p_1 D)} - \dfrac{bm_u^5 + p_1 D^2 + am_r^5}{bs_u^4 + p_1 D}}{\dfrac{bm_u^5 + p_1 D^2 + am_r^5}{bs_u^4 + p_1 D}}$$

$$= \frac{[(1+t\beta)^2 - (1+t\beta)](bm_u^5 + p_1 D^2) + [(1+t\alpha)^2 - (1+t\beta)]am_r^5}{(1+t\beta)(bm_u^5 + p_1 D + am_r^5)}.$$

Introduisant la valeur de la formule (III) $bm_u^5 + p_1 D^2 = \dfrac{\beta - 2\alpha}{\beta} am_r^5$,

$$\varepsilon = \frac{[(1+t\beta)^2 - (1+t\beta)]\dfrac{\beta - 2\alpha}{\beta} am_r^5 + [(1+t\alpha)^2 - (1+t\beta)]am_r^5}{(1+t\beta)am_r^5 + (1+t\beta)\dfrac{\beta - 2\alpha}{\beta} am_r^5},$$

$$\varepsilon = \frac{(1+t\beta)^2(\beta - 2\alpha) - (1+t\beta)(\beta - 2\alpha) + \beta(1+t\alpha)^2 - \beta(1+t\beta)}{(1+t\beta)\beta + (1+t\beta)(\beta - 2\alpha)}$$

$$= \frac{t^2\beta^3 - t^2 2\alpha\beta^2 + t^2\alpha^2\beta}{2\beta - 2\alpha + 2t\beta^2 - 2t\alpha\beta}.$$

Si l'on pose, à présent (ce que les métaux simples permettent),

$$\alpha = u\,0{,}00001, \qquad \beta = v\,0{,}00001,$$

ε devient

$$\frac{(v^2 - 2uv + vu)t^2 v}{2(100000)^2[v - u + 0{,}00001t(v^2 - uv)]};$$

ce qui prouve le grand avantage que cette disposition simple offre. La formule (III) indique $\beta > 2\alpha$ pour que la compensation soit possible, et l'on aura toujours

$$bm_u^5 + p_1 D^2 > am_r^5.$$

Les pendules anciens sont, comme on l'a remarqué, basés sur un principe de hauteur égale du centre de la lentille en supposant la tige sans poids.

Admettons un instant que cette condition soit possible; on aura

$$l = \frac{I}{S};$$

mais le moment d'inertie peut se diviser en deux parties, $I = PD^2 + I'$, I' étant le

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

moment d'inertie de la lentille par rapport à l'axe de son centre et PD^2 son poids multiplié par le carré de la distance entre le centre de la lentille et l'axe de rotation.

On aura, de plus, $S = PD$. Pour une température t on aura (D restant par hypothèse constant)

$$l_t = \frac{PD^2 + (1 + t\alpha)^2 I'}{PD} \quad \text{et} \quad l_0 = \frac{PD^2 + I'}{PD}.$$

Nommons $l_t = l_0 + \varepsilon l_0$, $\varepsilon = \dfrac{l_t - l_0}{l_0}$,

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{PD^2 + (1 + t\alpha)^2 I'}{PD} - \dfrac{PD^2 + I'}{PD}}{\dfrac{PD^2 + I'}{PD}} = \frac{2t\alpha I' + t^2\alpha^2 I'}{PD^2 + I'} \quad (1),$$

ou à peu près

$$\varepsilon = 2t\alpha \frac{I'}{PD^2 + I'}.$$

Le seul moyen que l'on posséderait pour rendre ε petit serait de prendre D^2 très grand.

Soient maintenant

A, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, C (*fig.* 3) la moitié d'un gril;
1, 2, 3, 4, 5 les centres de gravité des tiges;
i_1, i_{II}, i_{III}, i_{IV}, i_V, leurs moments d'inertie autour de leurs centres 1, 2, etc.

Figurons-nous que les centres deviennent pour une température t : 1′, 2′, 3′, 4′, 5′; de plus, le gril devient A, a', b', c', d', e', f', g', h', i', j', C.

Appelons p_1, p_{II}, p_{III}, p_{IV}, p_V les poids des tiges; D_1, D_{II}, D_{III}, D_{IV}, D_V les distances de 1, 2, 3, 4, 5 jusqu'à une horizontale passant par A.

Le moment d'inertie du gril est (en négligeant les distances horizontales des points 1, 2, etc.)

$$2(i_1 + i_{II} + i_{III} + i_{IV}) + i_V + 2(p_1 D_1^2 + p_{II} D_{II}^2 + p_{III} D_{III}^2 + p_{IV} D_{IV}^2) + p_V D_V^2.$$

Le moment statique

$$2(p_1 D_1 + p_{II} D_{II} + p_{III} D_{III} + p_{IV} D_{IV}) + p_V D_V.$$

Le moment d'inertie devient pour une température t (en négligeant les distances latérales et les pièces de combinaison)

$$[2(i_1 + i_{III})(1 + t\alpha)^2 + i_V(1 + t\alpha)^2 + 2(i_{II} + i_{IV})(1 + t\beta)^2] + 2(1 + t\alpha)^2 p_1 D_{II}^2 + 2(1 - \partial t\beta)^2 p_{II} D_{II}^2 + 2(1 \pm \varepsilon t\alpha)^2 p_{III} D_{III}^2 + 2(1 + \varkappa t\beta)^2 p_{IV} D_{IV}^2 + (1 - \lambda t\alpha)^2 p_V D_V^2.$$

---

(1) On voit que $\varepsilon = 0$ pour $t = 0$ et $t = -\frac{2}{\alpha}$; quelque chose comme — 200 000° à —100 000°; entre 0 et $-\frac{2}{\alpha}$, ε devient minimum $\left(-\frac{I'}{PD^2 + I'}\right)$ pour $t = \frac{-1}{\alpha}$.

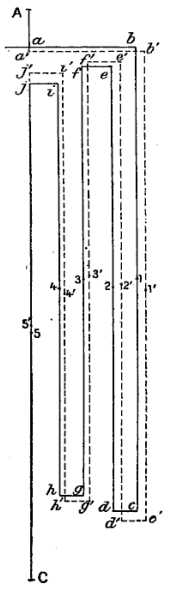
Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Le moment statique deviendra

$$2(1+t\alpha)p_{\mathrm{I}}D_{\mathrm{I}}+2(1-\partial t\beta)p_{\mathrm{II}}D_{\mathrm{II}}+2(1\pm\varepsilon t\alpha)p_{\mathrm{III}}D_{\mathrm{III}}+2(1+\varkappa t\beta)p_{\mathrm{IV}}D_{\mathrm{IV}}+(1-\lambda t\alpha)p_{\mathrm{V}}D_{\mathrm{V}}.$$

Il n'est pas évident que le moment statique s'accroisse avec la température, mais il est certain que la première partie entre accolades du moment d'inertie augmente considérablement, tandis qu'on est dans l'incertitude pour son dernier membre.

Fig. 2.



Si l'on appelle le moment d'inertie total du gril

$$\mathrm{I}'',$$

on écrira pour une température t

$$\mathrm{I}''_t=(1+tq)^2\mathrm{I}'',$$

et de même, le moment statique S'' s'écrira

$$\mathrm{S}''_t=(1+tw)\mathrm{S}'',$$

certainement $q>w$.

Introduisant un coefficient ε comme précédemment et nommant γ le coefficient de dilatation de la lentille, on a

$$\varepsilon=\frac{l_t-l}{l}=\frac{\dfrac{\mathrm{PD}^2+(1+t\gamma)^2\mathrm{I}'+(1+tq)^2\mathrm{I}''}{\mathrm{PD}+(1+tw)\mathrm{S}''}-\dfrac{\mathrm{PD}^2+\mathrm{I}'+\mathrm{I}''}{\mathrm{PD}+\mathrm{S}''}}{\dfrac{\mathrm{PD}^2+\mathrm{I}'+\mathrm{I}''}{\mathrm{PD}+\mathrm{S}''}};$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

pour simplifier on posera

$$PD + (1 + tw)S'' = (1 + tn)(PD + S'');$$

où

$$n = w\frac{PD + S''}{S''};$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{1+tn}[PD^2 + (1+t\gamma)^2 I' + (1+tq)^2 I''] - (PD^2 + I' + I'')}{PD^2 + I' + I''}$$

$$= \frac{PD^2 + (1+t\gamma)^2 I' + (1+tq)^2 I'' - (1+tn)(PD^2 + I' + I'')}{(1+tn)(PD^2 + I' + I'')}.$$

ε s'annule pour $t = 0$ et $t = \dfrac{nPD - (n-2\gamma)I' - (n-2q)I''}{\gamma^2 I' - q^2 I''}$,

c'est-à-dire pour une racine très grande (+ ou —). On voit que les grils ne possèdent que des désavantages en comparaison de la simple construction exposée plus haut.

Dans le pendule unimétallique ou homogène on aura la longueur initiale

$$l_0 = \frac{I_0}{S_0},$$

le moment d'inertie divisé par le moment statique à 0°.

Ainsi qu'on l'a démontré, on aura pour une température t

$$l_t = \frac{I_t}{S_t} = \frac{I_0(1+t\alpha)^2}{S_0(1+t\alpha)} = (1+t\alpha)l_0.$$

LE PENDULE A MERCURE.

On se rendrait facilement compte du fonctionnement du pendule à mercure, si les formules ne devenaient pas si compliquées.

Soit l'armature (*fig.* 3) faite d'un seul métal; elle porte un bocal d'une autre matière (du verre dans beaucoup de cas);

L est la distance du point de rotation au fond extérieur du bocal;
d sera son épaisseur dans toutes les directions;
h la hauteur du mercure;
H la hauteur de la paroi cylindrique du bocal;
r le rayon interne du bocal;
$(r + d)$ son rayon externe, le tout pour la température initiale 0.

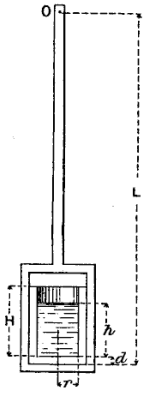
De plus on appellera

	Armature.	Bocal.	Mercure.
Moment d'inertie exprimé en volume...	$I_a = i^5$	I_b	I_m
Moment statique exprimé en volume...	S_a	S_b	S_m
Coefficient de dilatation.....	α	β	μ (linéaire)
Densité.....	a	b	m

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Le moment d'inertie du bocal I_b
= moment d'inertie cylindre extérieur — mom. d'inertie cyl. int. (formant le creux).

Fig. 3.



Or, on sait que le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à une droite perpendiculaire sur son axe est

$$\pi\left(\tfrac{1}{3}R^2x^3+\tfrac{1}{4}R^4x\right)_{x=a}^{x=b},$$

a et b étant les limites de l'intégration ; par conséquent le moment du bocal devient

$$\begin{aligned} I_b &= \pi\left\{\left[\tfrac{1}{3}(r+d)^2x^3+\tfrac{1}{4}(r+d)^4x\right]_{L-d-H}^{L}-\left[\tfrac{1}{3}r^2x^3+\tfrac{1}{4}r^4x\right]_{L-d-H}^{L-d}\right\} \\ &= \pi\left[\tfrac{1}{3}(r+d)^2L^3-\tfrac{1}{3}(r+d)^2(L-d-H)^3+\tfrac{1}{4}(r+d)^4L-\tfrac{1}{4}(r+d)^4(L-d-H)\right. \\ &\qquad \left.-\tfrac{1}{3}r^2(L-d)^3+\tfrac{1}{3}r^2(L-d-H)^3-\tfrac{1}{4}r^4(L-d)+\tfrac{1}{4}r^4(L-d-H)\right]. \end{aligned}$$

Le moment I_m du mercure est (en négligeant le ménisque)

$$\begin{aligned} I_m &= \pi\left(\tfrac{1}{3}r^2x^3+\tfrac{1}{4}r^4x\right)_{L-d-h}^{L-d} \\ &= \pi\left[\tfrac{1}{3}r^2(L-d)^3+\tfrac{1}{4}r^4(L-d)-\tfrac{1}{3}r^2(L-d-h)^3-\tfrac{1}{4}r^4(L-d-h)\right]. \end{aligned}$$

Le moment statique du bocal
= mom. statique du cylindre extérieur — mom. statique du cylindre intérieur :

$$S_b=\pi\left[(r+d)^2(H+d)\left(L-\frac{H}{2}-\frac{d}{2}\right)-r^2H\left(L-\frac{H}{2}-d\right)\right].$$

Le moment statique du mercure est

$$S_m=\pi r^2h\left(L-d-\frac{h}{2}\right).$$

La température change

$$\begin{aligned} L \text{ en } L_t &= (1+t\alpha)L, & r \text{ en } r_t &= (1+t\beta)r, \\ d \text{ en } d_t &= (1+t\beta)d, & H \text{ en } H_t &= (1+t\beta)H. \end{aligned}$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Le volume du mercure était $\pi r^2 h$, à une température t, il devient $\pi r^2 h(1+t\mu)^3$. Si maintenant on nomme x la hauteur du mercure à t dans le bocal, son volume sera aussi exprimé par $\pi r^2(1+t\beta)^2 x$, vu que le vase est dilaté.

On aura

$$\pi r^2 h(1+t\mu)^3 = \pi r^2(1+t\beta)^2 x \qquad \text{et} \qquad x - h_t = \frac{(1+t\mu)^3}{(1+t\beta)^2} h.$$

On recalculera maintenant, pour une température t, tous les moments d'inertie et tous les moments statiques, et l'on introduira les densités (qu'on a négligées provisoirement) afin de trouver la condition de compensation.

Le moment d'inertie de l'armature devient

$$I_{a,t} = i^5(1+t\alpha)^5.$$

Le moment d'inertie du bocal devient

$$\begin{aligned} I_{b,t} = \pi \Big\{ & \tfrac{1}{3}(r+d)^2(1+t\beta)^2 L^3(1+t\alpha)^3 - \tfrac{1}{3}(r+d)^2(1+t\beta)^2[L(1+t\alpha)-(d+H)(1+t\beta)]^3 \\ & + \tfrac{1}{4}(r+d)^4(1+t\beta)^4 L(1+t\alpha) - \tfrac{1}{4}(r+d)^4(1+t\beta)^4[L(1+t\alpha)-(d+H)(1+t\beta)] \\ & - \tfrac{1}{3}r^2(1+t\beta)^2[L(1+t\alpha)-d(1+t\beta)]^3 + \tfrac{1}{3}r^2(1+t\beta)^2[L(1+t\alpha)-(d+H)(1+t\beta)]^3 \\ & - \tfrac{1}{4}r^4(1+t\beta)^4[L(1+t\alpha)-d(1+t\beta)] + \tfrac{1}{4}r^4(1+t\beta)^4[L(1+t\alpha)-(d+H)(1+t\beta)] \Big\}. \end{aligned}$$

Le moment d'inertie du mercure devient

$$I = \pi\left(\tfrac{1}{3}R^2 x^3 + \tfrac{1}{4}R^4 x\right)_a^b,$$

où

$$\begin{aligned} b &= L_t - d_t = (1+t\alpha)L - (1+t\beta)d, \\ a &= L_t - d_t - h_t = (1+t\alpha)L - (1+t\beta)d - \frac{(1+t\mu)^3}{(1+t\beta)^2} h, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} I_{m,t} = \pi \Big\{ & \tfrac{1}{3}r^2(1+t\beta)^2[L(1+t\alpha) - d(1+t\beta)]^3 \\ & + \tfrac{1}{4}r^4(1+t\beta)^4[L(1+t\alpha) - d(1+t\beta)] \\ & - \tfrac{1}{3}r^2(1+t\beta)^2\left[L(1+t\alpha) - d(1+t\beta) - \frac{(1+t\mu)^3}{(1+t\beta)^2} h\right]^3 \\ & - \tfrac{1}{3}r^4(1+t\beta)^4\left[L(1+t\alpha) - d(1+t\beta) - \frac{(1+t\beta)^3}{(1+t\beta)^2} h\right] \Big\}. \end{aligned}$$

Le moment statique de l'armature devient

$$S_{a,t} = s^4(1+t\alpha)^4.$$

Le moment statique du bocal devient, en modifiant les termes de I_b par suite de la variation de température

$$\begin{aligned} S_{b,t} = \Big\{ & (r+d)^2(1+t\beta)^2(H+d)\left[L(1+t\alpha) - \left(\frac{H+d}{2}\right)(1+t\beta)\right] \\ & - r^2 H(1+t\beta)^2\left[L(1+t\alpha) - \left(\frac{H}{2}+d\right)(1+t\beta)\right] \Big\}. \end{aligned}$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Le moment statique du mercure devient

$$\begin{aligned} S_{m,t} &= \pi r_1^2 h_t \left(L_t - d_t - \frac{h_t}{2}\right) \\ &= \pi r^2 (1+t\beta)^2 h \frac{(1+t\mu)^3}{(1+t\beta)^2}\left[L(1+t\alpha) - d(1+t\beta) - \frac{h}{2}\frac{(1+t\mu)^3}{(1+t\beta)^2}\right] \\ &= \pi r^2 h (1+t\mu)^3 \left[L(1+t\alpha) - d(1+t\beta) - \frac{h}{2}\frac{(1+t\mu)^3}{(1+t\beta)^2}\right]. \end{aligned}$$

Les densités deviennent

$$b_t = \frac{b}{(1+t\beta)^3}, \qquad a_t = \frac{a}{(1+t\alpha)^3}, \qquad m_t = \frac{m}{(1+t\mu)^3}.$$

Pour la compensation du pendule il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma I}{\Sigma S} = \frac{\Sigma I_t}{\Sigma S_t} = l &= \frac{a I_a + b I_b + m I_m}{a S_a + b S_b + m S_m} + \frac{a_t I_{a,t} + b_t I_{b,t} + m_t I_{m,t}}{a_t S_{a,t} + b_t S_{b,t} + m_t S_{m,t}} \\ &= \frac{\dfrac{a}{(1+t\alpha)^3} I_{a,t} + \dfrac{b}{(1+t\beta)^3} I_{b,t} + \dfrac{m}{(1+t\mu)^3} I_{m,t}}{\dfrac{a}{(1+t\alpha)^3} S_{a,t} + \dfrac{b}{(1+t\beta)^3} S_{b,t} + \dfrac{m}{(1+t\mu)^3} S_{m,t}}. \end{aligned}$$

Dans un Tableau (p. 14) on trouvera l'égalité qui en résulte.

Le pendule de Riefler s'étudie avec plus de facilité, ainsi que tous les autres pendules où le bocal et l'armature sont d'une seule matière, en partant des résultats donnés.

En effet, on peut remplacer le moment d'inertie du bocal + celui de l'armature par un autre i_1^5 et la somme des moments statiques de ces deux pièces par s_1^4, De plus $\beta = \alpha$ et $b = a$, et en introduisant encore de petites simplifications, l'égalité se transforme en la suivante

$$\begin{aligned} &\frac{a i_1^5 + m\pi\left[\frac{1}{3} r^2\lambda + \frac{1}{4} r^4\lambda - \frac{1}{3} r^2(\lambda - h)^3 - \frac{1}{4} r^4(\lambda - h)\right]}{a s_1^4 + m\pi r^2 h\left(\lambda - \frac{h}{2}\right)} \\ &= \frac{a i_1^5 (1+t\beta)^2 + \dfrac{m}{(1+t\mu)^3}\pi\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3} r^2\lambda(1+t\beta)^5 + \frac{1}{4} r^4\lambda(1+t\beta)^5 \\ \quad - \frac{1}{3} r^2(1+t\beta)^2\left[\lambda(1+t\beta) - \dfrac{(1+t\mu)^3}{(1+t\beta)^2} h\right]^3 \\ \quad - \frac{1}{3} r^4(1+t\beta)^4\left[\lambda(1+t\beta) - \dfrac{(1+t\mu)^2}{(1+t\beta)^2} h\right] \end{array}\right\}}{a s_1^4 (1+t\beta) + m\pi r^2 h\left[\lambda(1+t\beta) - \dfrac{(1+t\mu)^3}{(1+t\beta)^2}\frac{h}{2}\right]}. \end{aligned}$$

On exécutera la multiplication de numérateur et dénominateur du second membre par $(1+t\mu)^3(1+t\beta)^6$ pour faire disparaître les fractions.

En même temps on simplifiera en introduisant quelques nouvelles lettres

$$\mathfrak{a} = \tfrac{1}{3} r^2\lambda, \qquad \mathfrak{b} = \tfrac{1}{4} r^4\lambda, \qquad \mathfrak{c} = \tfrac{1}{3} r^2.$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Le second membre devient alors

$$\frac{ai_1^5(1+t\beta)^2(1+t\mu)^3(1+t\beta)^6+m\pi\left\{\begin{array}{l}a(1+t\beta)^5(1+t\beta)^6+b(1+t\beta)^5(1+t\beta)^6\\ \quad-c(1+t\beta)^2[\lambda(1+t\beta)^3-h(1+t\mu)^3]^3\\ \quad-cr^2(1+t\beta)^4[\lambda(1+t\beta)^3-h(1+t\mu)^3(1+t\beta)^4]\end{array}\right\}}{as_1^4(1+t\alpha)(1+t\mu)^3(1+t\beta)^6+m\pi r^2h(1+t\mu)^3\left[\lambda(1+t\beta)^7-\frac{h}{2}(1+t\mu)^3(1+t\beta)^4\right]},$$

ou encore

$$\frac{ai_1^5(1+t\beta)^{11}+m\pi\left\{\begin{array}{l}(a+b)(1+t\beta)^{11}-c\lambda^3(1+t\beta)^{11}+3c\lambda^2h(1+t\beta)^8(1+t\mu)^3\\ \quad-3c\lambda h^2(1+t\beta)^5(1+t\mu)^6+ch^3(1+t\beta)^2(1+t\mu)^9\\ \quad-cr^2\lambda(1+t\beta)^{11}+cr^2h(1+t\beta)^2(1+t\mu)^3\end{array}\right\}}{as_1^4(1+t\beta)^2(1+t\mu)^3+m\pi\left[r^2h\lambda(1+t\beta)^7(1+t\mu)^3-\frac{r^2h^2}{2}(1+t\beta)^4(1+t\mu)^6\right]}.$$

Multipliant les deux membres de l'égalité par le produit de leurs dénominateurs et développant les puissances en posant successivement

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d} &= ai_1^5,\\
\mathfrak{e} &= (a+b-c\lambda^3-cr^2\lambda)m\pi=(\tfrac{1}{3}r^2\lambda^3+\tfrac{1}{4}r^4\lambda-\tfrac{1}{3}r^2\lambda^3-\tfrac{1}{3}r^4\lambda)m\pi,\\
\mathfrak{f} &= 3c\lambda^3hm\pi=r^2\lambda^2hm\pi,\\
\mathfrak{g} &= 3c\lambda h^2m\pi=r^2\lambda h^2m\pi,\\
\mathfrak{h} &= ch^3m\pi=\tfrac{1}{3}r^2h^3m\pi,\\
\mathfrak{j} &= cr^2h=\tfrac{1}{3}r^4h,\\
\mathfrak{k} &= as_1^4h,\\
\mathfrak{l} &= r^2h\lambda m\pi l,\\
\mathfrak{m} &= \frac{r^2h^2}{2}m\pi l,
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{f}+\mathfrak{d}=\mathfrak{n},\qquad \mathfrak{j}+\mathfrak{e}=\mathfrak{o},\qquad \mathfrak{k}+\mathfrak{l}=\mathfrak{p},$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n} &= r^2\lambda^2hm\pi+ai_1^5,\\
\mathfrak{o} &= \tfrac{1}{3}r^4hm\pi,\\
\mathfrak{p} &= as_1^4l+r^2h\lambda m\pi l,
\end{aligned}$$

on obtiendra l'équation de compensation; on peut écrire cette équation sous la forme

$$\mathfrak{A}t^{11}+\mathfrak{B}t^{10}+\mathfrak{C}t^9+\ldots+\mathfrak{K}t+\mathfrak{L}=0.$$

La valeur de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... est donnée dans un Tableau (p. 15).

A présent on prendra, vu les puissances des coefficients,

$$\frac{\mathfrak{A}_1t^{11}}{(100000)^{11}}+\frac{\mathfrak{B}_1t^{10}}{(100000)^{10}}+\frac{\mathfrak{C}_1t^9}{(100000)^9}+\ldots+\frac{\mathfrak{K}_1t}{100000}+\mathfrak{L}=0;$$

on sait que $\mathfrak{K}$ doit être nul par hypothèse, donc

$$\frac{\mathfrak{A}_1t^{10}}{(100000)^{10}}+\frac{\mathfrak{B}_1t^9}{(100000)^9}+\frac{\mathfrak{C}_1t^8}{(100000)^8}+\ldots+\frac{\mathfrak{J}_1t}{100000}+\mathfrak{K}_1=0.$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Or, d'après un théorème connu, on aura neuf racines très grandes, les termes $\frac{\mathfrak{A}_1}{(100000)^{10}}$ à $\frac{\mathfrak{H}_1}{100000}$ étant très petits (par rapport à $\mathfrak{K}_1$).

Notre pendule serait compensé indifféremment pour *toutes les températures* si les coefficients $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \ldots$, et, par conséquent, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ étaient nuls, et l'erreur sera plus petite si l'on se borne à faire $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{L}$ nuls.

Prenons

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{n} + \mathfrak{o} - \mathfrak{g} + \mathfrak{h} - \mathfrak{p} + \mathfrak{m} = 0$$

ou

$$\frac{\mathfrak{n} + \mathfrak{o} - \mathfrak{g} + \mathfrak{h} - \mathfrak{p} + \mathfrak{m}}{m\pi} = 0,$$

$$(\alpha) \qquad \frac{\mathfrak{L}}{m\pi} = r^2\lambda^2 h - \frac{ai_1^5}{m\pi} + \tfrac{1}{3} r^4 h - r^2\lambda h^2 + \tfrac{1}{3} r^2 h^3 - \frac{as_1^4}{m\pi} l + r^2 h\lambda l + \frac{r^2 h^2}{2} l = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\lambda^2 - \lambda(l - h) + \frac{ai_1^5 - as_1^4 l}{r^2 h m\pi} + \frac{r^2 + h^2}{3} + hl = 0.$$

De plus, on aura $\mathfrak{K} = 0$,

$$\mathfrak{n}(8\beta + 3\mu) + \mathfrak{o}(11\beta) - \mathfrak{g}(5\beta + 6\mu) + \mathfrak{h}(2\beta + 9\mu) - \mathfrak{p}(9\beta + 3\mu) + \mathfrak{m}(4\beta + 6\mu) = 0.$$

Multipliant les deux membres par 100000, et s'occupant du cas d'acier et mercure, on trouvera

$$\beta = 0{,}00001240 \qquad \text{et} \qquad 100000\,\beta = 1{,}24 \text{ environ},$$

et, à peu près,

$$\mu = \frac{0{,}00018018}{3} = 0{,}00006006 \qquad \text{et} \qquad 100000\,\mu = 6{,}006,$$

il en résulte

$$27{,}928\, r^2\lambda^2 h + 27{,}938\, \frac{ai^3}{m\pi} + 4{,}5467\, r^4 h - 42{,}236\, r^2\lambda h^2$$
$$+ 15{,}5113\, r^2\lambda^3 - 29{,}178\, \frac{as^4 l}{m\pi} - 29.178\, r^2 h\lambda l + 20{,}498\, r^2 hl.$$

On trouve, en général, une seconde équation

$$c' r^2\lambda^2 h - c''\frac{ai_1^5}{m\pi} + c''' r^4 h - c^{IV} r^2\lambda h^2 + c^V r^2 h^3 - c^{VI}\frac{as^4 l}{m\pi} - c^{VII} r^2 h\lambda l + c^{VIII} r^2 h^2 l = 0.$$

Reprenons l'équation (α),

$$\lambda^2 r^2 h + \lambda(-r^2 h^2 + r^2 hl) + \frac{ai_1^5}{m\pi} + \frac{r^2 h}{3} + \frac{r^2 h^3}{3} - \frac{rs_1}{m\pi} l + \frac{r^2 h^2}{2} l = 0,$$

posons

$$\lambda = x, \qquad h = y, \qquad r^2 = \mathrm{A}, \qquad r^2 l = \mathrm{B},$$
$$\frac{ai_1^5}{m\pi} - \frac{as^4 l}{m\pi} = \mathrm{C}, \qquad \frac{r^2}{3} = \mathrm{D}, \qquad \frac{r^2 l}{2} = \mathrm{E}, \qquad \frac{r^2}{3} = \mathrm{F},$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

on a

$$Ayx^3+(By-Ay^2)\,x+C+Dy+Ey^2+Fy^3=0,$$

$$x^2+\frac{B-Ay}{A}\,x+\frac{C+Dy+Ey^2+Fy^3}{Ay}=0.$$

Cette équation a les racines réelles pour

$$\frac{(B-Ay)^2}{2^2A^2}-\frac{C+Dy+Ey^2+Fy^3}{Ay}\geqq 0,$$

ou

$$B^2y-2ABy^2+A^2y^3-4AC-4ADy-4AEy^2-4AFy^3\geqq 0.$$

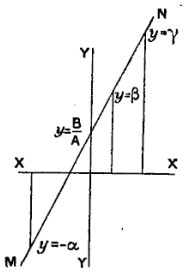
La solution de x donne

$$x=-\frac{B-Ay}{2A}\pm\sqrt{\frac{(B-Ay)^2}{4A^2}-\frac{C+Dy+Ey^2+Fy^3}{Ay}}.$$

Tirons à présent une droite MN (*fig.* 4) représentant

$$x=-\frac{B-Ay}{2A};\qquad y=2x+\frac{B}{A},$$

Fig. 4.



et considérons la valeur

$$x_1=\pm\frac{1}{2A}\sqrt{\frac{R^2y-2ABy^2+A^2y^3-4AC-4ADy-4AEy^2-4AFy^3}{y}};$$

$$x_1=\pm\frac{1}{2A}\sqrt{\frac{(A^2-4AF)y^3-(2AB+4AE)y^2+(B^2-4AD)y-4AC}{y}},$$

et, en posant,

$$A^2-4AF=r^4-4r^2\frac{r^2}{3}=-\frac{r^2}{3}=-M,$$

$$2AB-4AE=2r^2r^2l+4r^2\frac{r^2}{2}l=4r^4l=+P,$$

$$B^2-4AD=r^4l^2-4r^2\frac{r^2}{3}=4r^4l^2-\tfrac{4}{3}r^4=+R,$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

simplement

$$x_1 = \pm \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{-My^3 - Py^2 - Ry - 4AC}{y}}.$$

Prenons maintenant

$$My^3 + Py^2 - Ry + 4AC = 0.$$

Il y aura ici une racine négative et deux imaginaires ou positives; pour que les racines soient réelles (notre problème exige la connaissance des positives), il faut que les racines de la dérivée soient aussi réelles; cette dérivée est

$$3My^2 + 2Py - R.$$

Il en résulte, quand on l'égalise à zéro, que la condition à remplir est

$$\frac{P^2}{9M^2} + \frac{R}{3M} > 0,$$

qui se trouve toujours satisfaite.

Donc, il y aura une racine négative et deux positives : $+\beta + \gamma$ et $-\alpha$ indiquées dans la figure, et

$$x_1 = \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{-(y+\alpha)(y+\beta)(y-\gamma)}{y}} = \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{(y+\alpha)(y-\beta)(\gamma-y)}{y}},$$

x_1 doit rester réel et positif, ce qui arrive pour $\gamma > y > \beta$.

Pour chaque valeur de y il y a alors deux de x_1, ce qui donne une courbe fermée passant par $y = \beta$ et $y = \gamma$.

Le problème proposé était de déterminer les x et y, qui satisfont aux deux équations

$$Ayx^2 + (By - Ay^2)x + C + Dy + Ey^2 + Fy^3 = 0,$$
$$A'yx^2 + (B'y - A'y^2)x + C' + D' + E'y^2 + F'y^3 = 0.$$

Il faut résoudre la seconde équation qui donnera une courbe différente.

L'intersection des deux courbes donnera les valeurs positives de x et y.

On remarque que la construction mécanique du pendule rendrait impossible de faire d'autres coefficients nuls en plus de $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{L}$.

La condition de l'intersection est que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix}
A & B & C & D & E & F & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A & B & C & D & E & F & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & A & B & C & D & E & F & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & A & B & C & D & E & F & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & A & B & C & D & E & F \\
A' & B' & C' & D' & E' & F' & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A' & B' & C' & D' & E' & F' & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & A' & B' & C' & D' & E' & F' & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & A' & B' & C' & D' & E' & F' & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & A' & B' & C' & D' & E' & F'
\end{vmatrix} = 0.$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Il est digne d'attention que la formule (α) indique (ne contenant pas de coefficient de dilatation) qu'il y a pour un pendule à mercure deux valeurs positives de λ et deux positives et une négative de h pour qu'il satisfasse à une longueur l, ce que M. le professeur Oudemans avait déjà remarqué en calculant le pendule de l'observatoire d'Utrecht.

Remarque.

Dans ce qui précède on a supposé que la dilatation s'exprime par

$$(1 + t\alpha);$$

quoiqu'il soit assez certain que la dilatation est une fonction supérieure au premier degré de t, même la formule $(1 + t\alpha^2 + t^2\alpha_1)$ ne serait peut-être pas suffisante.

Pour un pendule homogène, on trouvera dans *tous les cas :*

$$l_0 = \frac{I_0}{s_0}, \qquad l_t = \frac{I_0(1 + t\alpha + t^2\alpha_1 + \ldots + t^n\alpha_{n-1})^2}{S_0(1 + t\alpha + t^2\alpha_1 + \ldots + t^n\alpha_{n-1})},$$

$$l_t = l_0(1 + t\alpha + t^2\alpha_1 + \ldots + t^n\alpha_{n-1}).$$

Le pendule homogène se conduit toujours comme la longueur fictive du pendule immatériel, quelle que soit la formule qui exprime la dilatation.

Fig. 5.



On peut étendre cette recherche à la compensation d'un pendule bimétallique, la lentille étant soutenue à son bord inférieur (*fig.* 5).

Appelons dans ce but :

O l'axe de rotation;
OA la tige avec un moment d'inertie I et statique S;
C le centre de la lentille;
P le poids de la lentille;
B le point de contact;
CB = R, OB = D;
I′ le moment d'inertie de la lentille par rapport à l'axe passant par C.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Nous aurons, en nous servant des dénominations adoptées

$$l_0 = \frac{I + I' + P(D-R)^2}{S + P(D-R)},$$

et

$$l_t = \frac{(1+t\alpha+t^2\alpha_1)^2 I + (1+t\beta+t^2\beta_1)^2 I' + P[D(1+t\alpha+t^2\alpha_1) - R(1+t\beta+t^2\beta_1)]^2}{S(1+t\alpha+t^2\alpha_1) + P[D(1+t\alpha+t^2\alpha_1) - R(1+t\beta+t^2\beta_1)]}.$$

Si l'on pose $l_t - l = \sigma$, on aura

$$\sigma = \frac{[s+P(D-R)]\left\{(1+t\alpha+t^2\alpha_1)I + (1+t\beta+t^2\beta_1)I' + P[D(1+t\alpha+t^2\alpha_1) - R(1+t\beta+t^2\beta_1)^2]\right\}}{[S+P(D-R)]\left\{S(1+t\alpha+t^2\alpha_1) + P[D(1+t\alpha+t^2\alpha_1) - R(1+t\beta+t^2\beta_1)]\right\}}$$
$$- \frac{\left\{S(1+t\alpha+t^2\alpha_1) + P[D(1+t\alpha+t^2\alpha_1) - R(1+t\beta+t^2\beta_1)]\right\}[I+I'+P(D-R)^2]}{[S+P(D-R)]\left\{S(1+t\alpha-t^2\alpha_1) + P[D(1+t\alpha+t^2\alpha_1) - R(1+t\beta+t^2\beta_1)]\right\}}$$

Posant le dénominateur A on peut écrire

$$\begin{aligned}
A\sigma = {} & (IS + IPD + PD^2S + P^2D^2)(1+2t\alpha+t^2\alpha^2+2t^2\alpha_1+2t^3\alpha\alpha_1+t^4\alpha^2-1-t\alpha-t^2\alpha_1) \\
& - (IPR + P^2D^2R)(1+2t\alpha+t^2\alpha^2+2t^2\alpha_1+2t^3\alpha\alpha_1+t^4\alpha^2-1-t\beta-t^2\beta_1) \\
& - (I'PR + P^2R^3)(1+2t\beta+t^2\beta^2+2t^2\beta_1+2t^3\beta\beta^1+t^4\beta^2-1-t\beta-t^2\beta_1) \\
& + (I'S + I'PD + PR^2S + P^2DR^2)(1+2t\beta+t^2\beta^2+2t^2\beta_1+2t^2\beta\beta_1+t^4\beta_1^2-1-t\alpha-t^2\alpha_1) \\
& - (2PDRS + 2P^2D^2R)[1+t(\alpha+\beta)+t^2(\alpha_1+\alpha\beta+\beta_1)+t^3(\alpha_1\beta+\alpha\beta_1)] \\
& + t^4\alpha_1\beta_1 - 1 - t\alpha - t^2\alpha_1) \\
& + 2P^2DR^2[1+t(\alpha+\beta)+t^2(\alpha_1+\alpha\beta+\beta_1)+t^3(\alpha\beta+\alpha\beta_1)+t^4\alpha_1\beta_1-1-t\beta-t^2\beta_1).
\end{aligned}$$

On voit de suite qu'un tel pendule serait compensé pour les températures données par une équation qu'on en déduit en t en prenant $A\sigma = 0$.

Si l'on introduit à présent les dénominations :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= IS + IPD + PD^2S + P^2D^2, \\
\mathfrak{b} &= IPR + P^2D^2R, \\
\mathfrak{c} &= I'PR + P^2R^3, \\
\mathfrak{d} &= I'S + I'PD + PR^2S + P^2DR^2, \\
\mathfrak{e} &= 2PDRS + 2P^2D^2R, \\
\mathfrak{f} &= 2P^2DR^2,
\end{aligned}$$

on obtient pour une compensation *absolue* les conditions

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}\alpha - \mathfrak{b}(2\alpha+\beta) - \mathfrak{c}\beta + \mathfrak{d}(2\beta-\alpha) - \mathfrak{e}\beta + \mathfrak{f}\alpha &= 0, \\
\mathfrak{a}(\alpha^2+\alpha_1) - \mathfrak{b}(\alpha^2+2\alpha_1-\beta_1) - \mathfrak{c}(\beta^2+\beta_1) + \mathfrak{d}(\beta^2+2\beta_1-\alpha_1) - \mathfrak{e}(\alpha\beta+\beta_1) + \mathfrak{f}(\alpha\beta+\alpha_1) &= 0, \\
(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})2\alpha\alpha_1 - (\mathfrak{e}-\mathfrak{d})2\beta\beta_1 - (\mathfrak{e}-\mathfrak{f})(\alpha_1\beta+\alpha\beta_1) &= 0, \\
(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\alpha_1^2 - (\mathfrak{e}-\mathfrak{d})\beta_1^2 - (\mathfrak{e}-\mathfrak{f})\alpha_1\beta_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Il va sans dire que tous les pendules bimétalliques donneraient lieu à des équations semblables, si leurs parties composantes suivent une formule $(1+t\alpha+t^2\alpha_1)$.

On voit aussi que les pendules à mercure donnent lieu à des équations de

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

degré supérieur à dix, si l'on y introduit des coefficients du second degré de la température.

Quand on porte sur l'axe des x (*fig.* 6, 7, 8) les différentes températures; sur la partie négative de l'axe des y, les variations de la longueur l correspondante du pendule, on trouve :

A. En supposant la formule de dilatation en général de la forme $(1 + t\alpha)$:

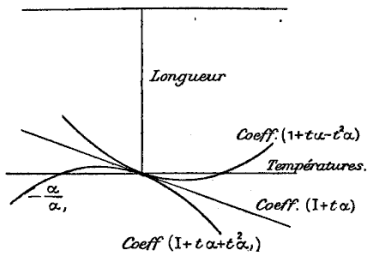
1° Pour un pendule homogène une droite;

2° Pour le pendule bimétallique une branche de parabole qui passe par un minimum entre o et la racine, généralement négative;

B. En supposant les coefficients de dilatation de la forme $(1 + t\alpha + t^2\alpha_1)$:

1° Pour le pendule homogène une branche de parabole (*fig.* 6) coupant l'axe des x en $-\frac{\alpha}{\alpha_1}$ et ayant son sommet en $\frac{-\alpha}{2\alpha_1}$;

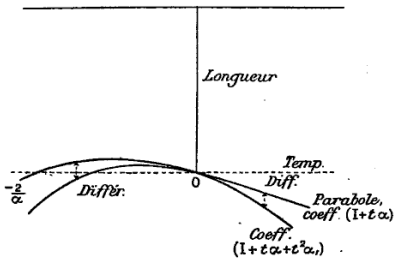
Fig. 6.



Pendule homogène.

2° Pour le pendule à tige invariable une courbe approchant de la parabole décrite sous A. 2, s'écartant plus dans la partie positive que dans la partie négative (*fig.* 7);

Fig. 7.



Pendule dont la tige est invariable, le centre de la lentille restant au même niveau.

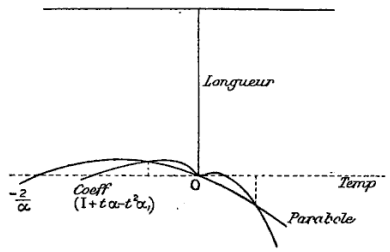
C. En supposant les coefficients de dilatation $(1 + t\alpha - t^2\alpha_1)$:

1° Pour le pendule homogène une branche de parabole de direction opposée

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

à celle de B.1 passant par $\frac{\alpha}{\alpha_1}$ et ayant son sommet au milieu de cette valeur (*fig.* 6).

Fig. 8.



Pendule dont la tige est invariable, le centre de la lentille restant au même niveau.

2° Pour le pendule à mercure une courbe qui coupe la parabole A.2 pour $t=\frac{\alpha}{\alpha_1}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}+\frac{2}{\alpha_1}}$, on suit facilement la marche en écrivant sa distance à la parabole sous la forme $t^2(-\alpha_1^2t^2+2t\alpha\alpha_1+2\alpha_1)$.

CONCLUSION.

Il semble que, pour l'usage des Sciences, on devrait rejeter la compensation, recourir au pendule homogène, dont on trouve facilement la variation, sur lequel on pourra étudier l'influence de la densité et de la pression atmosphérique et dont on peut corriger les effets par des formules qui ne seraient plus purement empiriques, mais qui reposeraient sur une base analytique.

Non seulement ce serait d'une utilité directe pour celui qui se sert du pendule, mais on obtiendrait des connaissances plus parfaites sur la résistance de l'air, la transmission de force vive par l'échappement, la question de l'huile et l'influence remarquable de la suspension.

Mais l'horloger qui désire un instrument s'approchant d'une compensation absolue pour son usage et celui du public fera bien de laisser la grande complication que le mercure entraîne et de chercher à arriver à son but par la combinaison d'une tige et d'une lentille de deux métaux différents.

C'est M. Guillaume qui m'a donné l'idée d'étudier la condition exposée dans la remarque, et, quoique je me sois borné aux cas où la lentille repose sur son bord inférieur (ce que les horlogers font généralement) et ensuite à la supposition d'une tige immatérielle, on voit certainement que le résultat que l'on peut obtenir est plus favorable qu'on n'oserait l'espérer.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Équation du pendule à mercure.

$$l = \frac{\left\{\begin{array}{l} ai^5 \\ +b\pi\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}(r+d)^2\mathrm{L}^3 - \frac{1}{3}(r+d)^2(\mathrm{L}-d-\mathrm{H})^3 \\ +\frac{1}{4}(r+d)^4\,\mathrm{L} - \frac{1}{4}(r+d)^4(\mathrm{L}-d-\mathrm{H}) \\ -\frac{1}{3}r^2(\mathrm{L}-d)^3 - \frac{1}{3}r^2(\mathrm{L}-d-\mathrm{H})^3 \\ -\frac{1}{4}r^4(\mathrm{L}-d) + \frac{1}{4}r^4(\mathrm{L}-d-\mathrm{H}) \end{array}\right. \\ +m\pi\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}r^2(\mathrm{L}-d)^3 + \frac{1}{4}r^4(\mathrm{L}-d) \\ -\frac{1}{3}r^2(\mathrm{L}-d-h)^3 - \frac{1}{4}r^4(\mathrm{L}-d-h) \end{array}\right. \end{array}\right.}{as^4\left\{+b\pi\left[(r+d)^2\,d\left(\mathrm{L}-\frac{d}{2}\right)+(r+d)^2\mathrm{U}\left(\mathrm{L}-d-\frac{\mathrm{H}}{2}\right)-r^2\mathrm{H}\left(\mathrm{L}-d-\frac{\mathrm{H}}{2}\right)\right]+m\pi\left[r^2h\left(\mathrm{L}-d-\frac{h}{2}\right)\right]\right\}}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{(1+t\alpha)^3}\,i(1+t\alpha)^5 \\ +\frac{b}{(1+t\beta)^3}\pi\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}(r+d)^2(1+t\beta)^2\mathrm{L}^3(1+t\alpha)^3 - \frac{1}{3}(r+d)^2(1+t\beta)^2[\mathrm{L}(1+t\alpha)-(d+\mathrm{H})(1+t\beta)]^3 \\ +\frac{1}{4}(r+d)^4(1+t\beta)^4\mathrm{L}\,(1+t\alpha) - \frac{1}{4}(r+d)^2(1+t\beta)^4[\mathrm{L}(1+t\alpha)-(d+\mathrm{H})(1+t\beta)] \\ -\frac{1}{3}r^2(1+t\beta)^3[\mathrm{L}(1+t\alpha)-d(1+t\beta)]^3 + \frac{1}{3}r^2(1+t\beta)^2[\mathrm{L}(1+t\alpha)-(d+\mathrm{H})(1+t\beta)]^3 \\ -\frac{1}{4}r^4(1+t\beta)^4[\mathrm{L}(1+t\alpha)-d(1+t\beta)] + \frac{1}{4}r^4(1+t\beta)^4[\mathrm{L}(1+t\alpha)-(d+\mathrm{H})(1+t\beta)] \end{array}\right. \\ +\frac{m}{(1+t\mu)^3}\pi\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}r^2(1+t\beta)^2[\mathrm{L}(1+t\alpha)-d(1+t\beta)]^3 \\ \frac{1}{4}r^4(1+t\beta)^4[\mathrm{L}(1+t\alpha)-d(1+t\beta)] \\ -\frac{1}{3}r^2(1+t\beta)^2\left[\mathrm{L}(1+t\alpha)-d(1+t\beta)-\frac{(1+t\mu)^3}{(1+t\beta)^2}h\right]^3 \\ -\frac{1}{4}r^4(1+t\beta)^4\left[\mathrm{L}(1+t\alpha)-d(1+t\beta)-\frac{(1+t\mu)^3}{(1+t\beta)^2}h\right] \end{array}\right. \end{array}\right.}{\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{(1+t\alpha)^3}\,s^4(1+t\alpha)^4 \\ +\frac{b}{(1+t\beta)^3}\pi\left\{\begin{array}{l} (r+d)\,d(1+t\beta)^3\left[\mathrm{L}(1+t\alpha)-\frac{d}{2}(1+t\beta)\right] \\ +(r+d)^2\mathrm{H}(1+t\beta)^3\left[\mathrm{L}(1+t\alpha)-\left(d+\frac{\mathrm{H}}{2}\right)(1+t\beta)\right] \\ -\quad r^2\quad \mathrm{H}(1+t\beta)^3\left[\mathrm{L}(1+t\alpha)-\left(d+\frac{\mathrm{H}}{2}\right)(1+t\beta)\right] \end{array}\right. \\ +\frac{m}{(1+t\mu)^3}\pi\left\{r^2h(1+t\mu)^3\left[\mathrm{L}(1+t\alpha)-d(1+t\beta)-\frac{(1+t\mu)^3}{(1+t\beta)^2}\,\frac{h}{2}\right]\right\} \end{array}\right.}.$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Tableau des valeurs $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... *de l'équation du pendule, système Riefler.*

$$\mathfrak{A} = n\beta^8\mu^3 + o\beta^{11} - g\beta^5\mu^6 + b\beta^2\mu^9,$$

$$\mathfrak{B} = n(3\beta^8\mu^2 + 8\beta^7\mu^3) + o.11\beta^{10} - g(6\beta^5\mu^5 + 5\beta^4\mu^6) + b(9\beta^2\mu^8 + 2\beta\mu^9) - p\beta^7\mu^3 + m\beta^3\mu^6,$$

$$\mathfrak{C} = n(3\beta^8\mu + 16\beta^7\mu^2 + 28\beta^6\mu^3) + o.55\beta^9 - g(\beta^5\mu^4 + 30\beta^4\mu^5 + 10\beta^3\mu^6) + b(36\beta^2\mu^7 + 18\beta^8 + \mu^9) - p(3\beta^7\mu^2 + 9\beta^6\mu^3) + m(6\beta^4\mu^5 + 4\beta^3\mu^6),$$

$$\mathfrak{D} = n(\beta^8 + 16\beta^7\mu + 84\beta^6\mu^2 + 56\beta^5\mu^3) + o.165\beta^8 - g(20\beta^5\mu^3 + 75\beta^4\mu^4 + 60\beta^3\mu^5 + 10\beta^2\mu^6) + b(84\beta^2\mu^6 + 72\beta\mu^7 + 9\mu^8) - p(3\beta^7\mu + 27\beta^6\mu^2 + 21\beta^5\mu^3) + m(15\beta^4\mu^4 + 24\beta^3\mu^5 + 6\beta\mu^6),$$

$$\mathfrak{E} = n(8\beta^7 + 84\beta^6\mu + 168\beta^5\mu^2 + 70\beta^4\mu^3) + o.330\beta^7 - g(15\beta^6\mu^2 + 100\beta^4\mu^3 + 150\beta^3\mu^4 + 60\beta^2\mu^5 + 5\beta\mu^6) + b(126\beta^2\mu^5 + 168\beta\mu^6 + 36\mu^7) - p(\beta^7 + 27\beta^6\mu + 63\beta^5\mu^2 + 35\beta^4\mu^3) + m(20\beta^4\mu^3 + 60\beta^3\mu^4 + 36\beta^2\mu^5 + 4\beta\mu^6),$$

$$\mathfrak{F} = n(28\beta^6 + 168\beta^5\mu + 210\beta^4\mu^2 + 56\beta^3\mu^3) + o.462\beta^6 - g(6\beta^5\mu + 75\beta^4\mu^2 + 200\beta^3\mu^3 + 150\beta^2\mu^4 + 30\beta\mu^5 + \mu^6) + b(126\beta^2\mu^4 + 252\beta\mu^5 + 84\mu^6) - p(9\beta^6 + 63\beta^5\mu + 115\beta^4\mu^2 + 35\beta^3\mu^3) + m(15\beta^4\mu^2 + 80\beta^3\mu^3 + 90\beta^2\mu^4 + 24\beta\mu^5 + \mu^6),$$

$$\mathfrak{G} = n(56\beta^5 + 200\beta^4\mu + 168\beta^3\mu^2 + 28\beta^2\mu^3) + o.462\beta^5 - g(\beta^5 + 40\beta^4\mu + 150\beta^3\mu^2 + 200\beta^2\mu^3 + 75\beta\mu^4 + 6\mu^5) + b(84\beta^3\mu^3 + 252\beta\mu^4 + 126\mu^5) - p(21\beta^5 + 115\beta^4\mu + 115\beta^3\mu^2 + 21\beta^2\mu^3) + m(6\beta^4\mu + 60\beta^3\mu^2 + 120\beta^2\mu^3 + 60\beta\mu^4 + 6\mu^5),$$

$$\mathfrak{H} = n(70\beta^4 + 168\beta^3\mu + 84\beta^2\mu^2 + 8\beta\mu^3) + o.330\beta^4 - g(5\beta^4 + 60\beta^3\mu + 150\beta^2\mu^2 + 100\beta\mu^3 + 15\mu^4) + b(36\beta^2\mu^2 + 168\beta^3 + 126\mu^4) - p(35\beta^4 + 115\beta^3\mu + 63\beta^2\mu^2 + 9\beta\mu^3) + m(\beta^7 + 24\beta^3\mu + 90\beta^2\mu^2 + 80\beta\mu^3 + 5\mu^4),$$

$$\mathfrak{I} = n(56\beta^3 + 24\beta^2\mu + 16\beta\mu^2 + u^3) + o.165\beta^3 - g(10\beta^3 + 60\beta^2\mu + 25\beta\mu^2 + 20\mu^3) + b(9\beta^2\mu + 72\beta\mu^2 + 84\mu^3) - p(35\beta^3 + 63\beta^2\mu + 27\beta\mu^2 + \mu^3) + m(4\beta^3 + 36\beta^2\mu + 60\beta\mu^2 + 20\mu^3),$$

$$\mathfrak{J} = n(28\beta^2 + 16\beta\mu + 3\mu^2) + o.55\beta^2 - g(10\beta^2 + 40\beta\mu + 15\mu^2) + b(\beta^2 + 18\beta\mu + 36\mu^2) - p(21\beta^2 + 27\beta\mu + 3\mu^2) + m(16\beta^2 + 24\beta\mu + 15\mu^2),$$

$$\mathfrak{K} = n(8\beta + 3\mu) + o.11\beta - g(5\beta + 6\mu) + b(2\beta + 9\mu) - p(9\mu + 3\mu) + m(4\beta + 6\mu),$$

$$\mathfrak{L} = n + o - g + b - p + m.$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

RAPPORT SUR LA QUESTION :

DÉFINITION DU CHRONOMÈTRE,

GENRE D'ÉCHAPPEMENT QU'IL COMPORTE,

PAR

M. A.-H. RODANET.

MESSIEURS,

Le Comité d'organisation du Congrès chronométrique de 1900 a bien voulu me faire le grand honneur de me confier le soin de préparer un Rapport sur un sujet fort modeste touchant notre art. J'en suis très heureux, mais, en même temps, je suis fort effrayé d'avoir à parler devant une réunion aussi nombeuse de savants illustres et de praticiens distingués.

Définir le chronomètre. Indiquer le genre d'échappement qu'il comporte.

Définir le chronomètre, mais ne pensez-vous pas, Messieurs, que cette définition est depuis longtemps connue?

Chronomètre (du grec *Chronos, temps; Métron, mesure*) est un nom générique qui s'applique aux machines de toutes formes et de toutes grandeurs donnant exactement la mesure du temps.

Le chronomètre est donc un instrument d'horlogerie conçu et exécuté d'une façon parfaite, et pourvu en outre de tous les perfectionnements susceptibles de garantir absolument que, dans l'usage, les influences extérieures ou autres, si nombreuses et si variées, ne pourront en aucune façon altérer la régularité de sa marche diurne.

Toutes les pièces d'horlogerie marchant avec régularité sont donc de véritables chronomètres.

RÉGULATEURS OU HORLOGES ASTRONOMIQUES.

Vous savez tous, Messieurs, les services considérables, d'un ordre véritablement supérieur, que rendent journellement à la Science et aux chronométriers les régulateurs astronomiques. Ces horloges gardiennes du temps sont utilisées pour les

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

observations astronomiques les plus complexes et les plus variées. Grâce à leur concours, les astronomes ont pu, non seulement déterminer rigoureusement les longitudes des points terrestres, mais encore les positions respectives des astres, et les lois suivant lesquelles les corps célestes se meuvent.

Les chronométriers se servent des régulateurs astronomiques, dont les marches diurnes sont constantes et presque nulles, pour le réglage de précision des pièces diverses d'horlogerie.

Au commencement du siècle l'échappement à chevilles fut très en faveur dans la construction des régulateurs de précision. Aujourd'hui cet échappement est fort peu employé. Les régulateurs sont généralement pourvus d'un échappement à ancre et à repos de Graham.

Winnerl, et après lui Fenon et Pierre Gabriel établirent un certain nombre de belles pièces avec un échappement libre à repos, dont l'idée première, trouvée en 1821 par Reid, a été revendiquée en 1840 par Henry Kater, horloger anglais.

La précision véritablement surprenante des régulateurs astronomiques permet de considérer ces pièces d'horlogerie comme le type le plus parfait du chronomètre.

MONTRES MARINES OU CHRONOMÈTRES DE BORD.

Dès le commencement du XVII^e^ siècle, les gouvernements des divers pays possédant une marine importante comprirent les immenses services que pouvaient rendre à la navigation des pièces portatives d'horlogerie donnant la mesure exacte du temps. Aussi, par la création de prix d'une grande valeur, encouragèrent-ils les efforts des praticiens dans cette voie.

Le programme fut d'obtenir à l'aide d'horloges portatives les longitudes en mer. En 1610, les États de Hollande décidèrent la création d'un prix de 100000 florins. A la même époque, Philippe III, roi d'Espagne, offrit dans le même but 100000 écus. Le Régent de France, par une lettre adressée à l'Académie des Sciences, en date du 15 mars 1716, constituait dans les mêmes conditions un prix de 100000 livres.

En 1714, par acte du Parlement, le Gouvernement anglais promit 20000 livres sterling (500000^fr^) au constructeur d'un chronomètre de marine ne donnant pas, en six mois, une erreur supérieure à un demi-degré. Toutes ces récompenses ne furent pas décernées; aucun artiste n'ayant produit d'instrument assez parfait pour remplir les conditions du programme. C'est seulement en 1736, que Harisson, sujet anglais, construisit un premier chronomètre dont les services furent si hautement appréciés dans la traversée de Lisbonne en Angleterre, que le Gouvernement accorda à l'habile horloger, à titre de récompense, la médaille Copley, réservée aux inventions les plus utiles.

Le prix fondé en 1714 fut plus tard modifié de la façon suivante par les actes de la reine Anne, et de la deuxième année du règne de George III : pour une erreur de *un degré,* 5000 livres sterling; de *un demi-degré,* 10000 livres sterling; et de *un quart de degré,* 20000 livres sterling.

Harisson reçut une somme de 10000 livres sterling pour sa quatrième montre marine emportée par le capitaine Jean Byron dans son voyage autour du monde,

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

de 1764 à 1766. Cette pièce avait fait une erreur de un demi-degré. Elle portait, pour la première fois, une lame compensatrice permettant de corriger les erreurs provenant des changements de la température.

En France, M. Rouillé de Meslay fonda en 1718 le prix de l'Académie des Sciences qui devait être décerné principalement pour la découverte des longitudes en mer. Un accessit de ce prix fut accordé en 1720 à Nicolas Massy, Hollandais, établi à Paris.

Quelques années avant le milieu du XVIII^e^ siècle, Pierre Le Roy, fils de Julien Le Roy, introduisit en France la construction des chronomètres de marine.

En 1754, Pierre Le Roy déposa à l'Académie des Sciences un paquet cacheté contenant la description d'une montre marine projetée. En 1763, il mit sous les yeux de cette même Compagnie, une montre exécutée, qu'il considérait comme un essai. L'année suivante, il montra une deuxième montre plus petite que la première. Enfin, en 1766, il présenta à Louis XV une troisième montre plus petite encore, et qu'il déclara propre à donner les longitudes en mer. Dès cette époque, Pierre Le Roy fut considéré comme l'égal de Harisson.

En 1767, les deux chronomètres de Pierre Le Roy furent embarqués sur la corvette l'*Aurore*, qui fit un voyage aux frais du marquis de Courtanveaut. L'Académie jugea que le manque d'authenticité des observations et la durée très courte du voyage (21 jours, dont une partie fut passée à l'ancre dans un port) étaient des titres insuffisants pour concourir au prix.

En 1768, Pierre Le Roy obtint un prix de 3000 livres à la suite du voyage de Cassini, mais l'Académie, qui avait jugé que son programme n'avait pas été rempli, remit le sujet au concours. Cependant, pour laisser plus de latitude aux concurrents, elle recula de deux ans la date des épreuves et porta à 6000 livres la valeur de la récompense à recevoir. Pierre Le Roy obtint le prix à la suite du voyage de Borda, et Arsendeau l'accessit de 1500 livres (tous les deux à titre d'encouragement).

Si l'Académie ne remit pas une troisième fois la question au concours, c'est que, dans l'intervalle de l'annonce et de la distribution des prix, la Marine française, par les soins du Ministère, se trouvait en possession d'instruments conformes et pareils à la montre Harisson.

Ces instruments étaient les horloges marines 6 et 8 de Ferdinand Berthoud, qui sont actuellement au Conservatoire des Arts et Métiers.

En 1770, Ferdinand Berthoud fut nommé horloger-mécanicien de la Marine et obtint du Ministère de la Marine une rente viagère de 3000 livres.

Louis Breguet vint ensuite qui construisit un grand nombre de chronomètres de marine en y apportant de nombreux perfectionnements. Les résultats obtenus devinrent le point de départ d'efforts considérables dus à une pléiade d'artistes, parmi lesquels je citerai : Motel, Winnerl, Vissière, Dumas, Rodanet père, Leroy père, Delépine. Ces praticiens furent puissamment aidés par les remarquables travaux scientifiques de Laugier, Yvon Villarceau, Resal, Philippe, Rozé, Bouquet de la Grye, Wolff, de Magnac et Caspari.

La résultante des efforts communs des savants et des horlogers fut de mettre au point le réglage de la Chronométrie de marine.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Le mouvement d'un chronomètre de marine est fort simple. On le construit d'après les mêmes principes dans tous les pays.

Afin d'obtenir une force motrice toujours égale, l'usage de la fusée est universellement admis. Cette invention remonte à la fin du XVI^e^ siècle, elle fut complétée par l'adjonction d'un ressort supplémentaire, dont l'idée appartient à Harisson, qui permet de produire une force auxiliaire pendant le remontage. Le rouage, comme celui de toutes les montres, est composé de trois mobiles; l'échappement libre, détente à ressort, le spiral à boudin, le balancier compensateur et la minuterie complètent le mécanisme d'un mouvement de chronomètre de marine.

Le premier échappement libre à détente a été construit par Jean-Baptiste Dutertre. Il fut perfectionné par Pierre Leroy et Ferdinand Berthoud. J. Arnold, horloger anglais, substitua un ressort de flexion isolé à celui porté par le cercle d'échappement, ce qui permet l'usage des balanciers circulaires d'un petit diamètre. L'échappement actuel, détente à ressort, a été créé par Thomas Earnshaw, horloger anglais, qui reçut du Parlement un prix de 3000 livres sterling.

L'échappement, détente à ressort, se compose :

1° D'une roue à dents très aiguës;

2° D'une pièce en acier, appelée *détente à ressort,* parce que, fixée solidement sur la petite platine, elle fait ressort sur son centre de flexion.

Cette détente porte un demi-cylindre plein en rubis, qui sert de repos à la roue d'échappement, et un ressort très faible en or, dit *ressort de dégagement.* Ce ressort dépasse légèrement l'extrémité de la détente et s'appuie sur elle. Poussé de gauche à droite, le ressort de dégagement entraîne la détente; poussé de droite à gauche, la détente étant appuyée contre un point fixe, le ressort de dégagement fléchit sans produire aucune modification dans les pièces d'échappement;

3° D'un axe qui porte, avec le balancier, un grand plateau ayant une levée en rubis et, au-dessous, un rouleau d'acier beaucoup plus petit, dans lequel est fixé, en saillie, un rubis qu'on désigne sous le nom de *doigt de dégagement.*

Lorsque le balancier vibre de droite à gauche, le doigt en rubis, entraînant la détente vers la droite, dégage du repos la dent de la roue d'échappement. Cette roue tourne à droite, entraînée par la force motrice, et une des dents située en arrière de la précédente tombe sur la grande levée, à laquelle elle imprime par un choc brusque une vigoureuse impulsion qui se transmet au balancier. La détente ayant repris sa position fixe, la dent de la roue d'échappement qui vient après celle qui a été dégagée fait repos sur le rubis de la détente.

Par l'effet du spiral, le balancier revient sur lui-même, ramené vers la gauche, le doigt de dégagement soulève en passant le petit ressort en or sans produire aucun déplacement dans les autres pièces de l'échappement.

Il est impossible d'obtenir plus simplement et avec plus de sûreté des effets mécaniques absolument précis.

Les actions mutuelles ont lieu par chocs, ce qui permet de supprimer l'huile au point de contact. La roue d'échappement agit directement sur l'axe du balancier et le repos se produit à la tangente. Ces conditions sont les meilleures pour obtenir une marche réduite et constante.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

MONTRES DE PRÉCISION, OU CHRONOMÈTRES DE POCHE.

En même temps que le réglage des chronomètres de marine devenait de plus en plus précis, il se produisait dans le réglage des montres des résultats identiques.

Les premiers chronomètres de poche étaient construits sur le même modèle que les chronomètres de marine. La fusée et l'échappement détente à ressort ou sur pivots furent adoptés; mais vite on s'aperçut des inconvénients qui résultaient de l'emploi de ce mécanisme pour des montres mises dans la poche pendant de longues heures. En effet, l'échappement à détente, dit *à coup perdu,* est susceptible de s'arrêter et de repartir seul au porté. Cela tient à ce que le balancier reçoit le choc de la roue d'échappement une fois seulement par deux vibrations, d'où il résulte un temps mort pendant lequel le balancier deviendrait inerte, si la force d'impulsion acquise est annulée par une secousse ou un mouvement brusque en sens contraire de la vibration.

Aussi un grand nombre de fabricants d'horlogerie renoncèrent-ils à l'emploi de l'échappement à détente pour le chronomètre de poche.

Les principes du réglage de précision furent alors appliqués à la montre échappement à ancre, et les résultats constatés par les observatoires astronomiques français ou étrangers sont de telle nature qu'ils ne laissent aucun doute sur la grande précision qu'on peut obtenir avec cet échappement.

L'échappement libre à ancre a été inventé par Mudge, sujet anglais.

Il se compose :

1° D'une roue plate, dont les dents, d'une forme dite *en tête,* sont terminées par un plan incliné;

2° D'une pièce intermédiaire ayant la forme d'une ancre de marine, désignée sous le nom d'*ancre.* Cette pièce, montée sur un axe, porte deux bras dans lesquels sont enchâssées deux levées en rubis. L'ancre est terminée d'un côté par une fourchette, de l'autre par un contrepoids qui maintient l'ensemble de cette pièce en équilibre sur son axe;

3° D'un axe portant le balancier, et d'un plateau rond sur lequel est fixé un doigt saillant ou cheville en rubis, pénétrant entre les cornes de la fourchette de l'ancre.

Lorsque par le jeu des pièces la dent arrêtée par l'ancre est dégagée du repos, la roue d'échappement est poussée par la force motrice. Les dents de cette roue glissent sur les inclinés des levées en rubis placées sur l'ancre et les repoussent tantôt à droite, tantôt à gauche. L'ancre prend ainsi sur son axe un mouvement oscillatoire qui est transmis au balancier par l'intermédiaire de la fourchette, dont les côtés intérieurs frappent alternativement le doigt en rubis du plateau fixé sur l'axe du balancier. Ces actions successives impriment au balancier un mouvement circulaire de va-et-vient au cours duquel il n'a de contact avec aucune pièce de l'échappement.

L'échappement à ancre est très précis; ses fonctions sont sûres. Les frottements sont minimes et toujours les mêmes, parce qu'ils ont lieu sur des rubis dont l'usure est nulle. Le seul inconvénient de l'échappement à ancre est qu'il nécessite

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

la présence de l'huile aux divers points de contact, ce qui peut, à l'usage, modifier les conditions des frottements.

Les résultats obtenus dans les divers observatoires français et étrangers avec des montres pourvues d'un échappement à ancre sont excellents à tous les points de vue. Ils indiquent une constance et une régularité parfaites dans la marche diurne.

Je me résume, Messieurs, et je conclus en disant que le chronomètre est un instrument donnant la mesure exacte du temps. Il comporte l'emploi d'un échappement libre dont le caractère principal est de permettre au balancier d'opérer sa vibration dans une complète indépendance du mouvement, sauf toutefois l'instant fort court de l'impulsion. Réservant les horloges d'observatoires appelées de tout temps *régulateurs astronomiques*, j'estime que c'est donc à bon droit qu'on peut désigner sous le nom de *chronomètres :*

1° Les montres marines avec échappement détente à ressort;

2° Les montres de poche avec échappement à détente, ou à ancre, si ces instruments ont des marches absolument régulières à l'ambiant, aux températures extrêmes et aux différentes positions.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

CLASSIFICATION DES ÉCHAPPEMENTS,

PAR

M. PAUL DITISHEIM.

De toutes les parties de la montre, l'échappement est sans contredit la plus importante; c'est celle qui lui assure sa justesse et contribue à lui donner sa véritable valeur. Les horlogers se sont transmis, de génération en génération, la tâche de rechercher les solutions mécaniques les plus favorables, assurant à l'organe régulateur une liberté aussi complète que possible, condition nécessaire pour obtenir l'isochronisme des oscillations.

Les fonctions de l'échappement comprennent trois périodes :

1° Période de dégagement;

2° Période d'impulsion;

3° Période d'arrêt.

Dans le mouvement de l'organe régulateur, on distingue deux périodes appelées *angle* ou *arc de levée* et *angle* ou *arc supplémentaire*.

L'arc de levée est décrit pendant le dégagement et l'impulsion; l'arc supplémentaire est parcouru par le balancier pendant la période d'arrêt de l'échappement.

Selon les conditions dans lesquelles l'organe régulateur accomplit l'arc de levée et l'arc supplémentaire, les échappements peuvent être répartis en trois classes principales :

1° Les *échappements à recul*, dans lesquels un organe de l'échappement fixé ou relié au régulateur imprime un mouvement de recul à l'échappement pendant la période d'arrêt;

2° Les *échappements à repos*, où, pendant la période d'arrêt, un organe de l'échappement, fixé ou relié au régulateur, reste en contact avec la roue par une partie concentrique de la surface d'appui;

3° Les *échappements libres*, caractérisés par l'interposition d'une pièce intermédiaire contre laquelle la roue est maintenue au repos, pendant que le régulateur accomplit librement l'arc supplémentaire, sans aucun contact avec l'échappement.

En principe, dans une pièce portative, l'action du moteur sur le régulateur

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

devrait être complètement suspendue pendant l'arc supplémentaire; mais, si les effets de la force motrice continuent à se produire, l'isochronisme en sera inévitablement altéré. Il est à remarquer que l'isochronisme est altéré également par l'action de l'échappement pendant l'arc de levée.

Les deux premières catégories d'échappements ne pouvant assurer la liberté des oscillations du régulateur, les échappements libres seuls donnent satisfaction aux exigences de plus en plus sévères de l'art chronométrique.

ÉCHAPPEMENTS LIBRES.

Parmi les échappements libres employés dans la construction des chronomètres portatifs, on peut dire que l'échappement à détente et l'échappement à ancre ont supplanté aujourd'hui tous les autres dispositifs. Tout au plus pourrait-on citer encore l'échappement à force constante, ou remontoir d'égalité, si la théorie et l'expérience ne s'accordaient à prouver que, sauf un petit nombre de cas particuliers, l'emploi de ces compositions coûteuses et difficiles à réaliser offre dans les pièces de volume restreint des inconvénients qui ne sont contre-balancés par aucun autre avantage sérieux.

L'échappement à détente construit par des mains expertes excelle pour le réglage et la conservation de la marche; l'échappement à ancre partage de très près cette supériorité, et, par le fait de sa solidité et de la sûreté de ses fonctions, il tend de plus en plus à le supplanter dans le chronomètre de poche.

Les Tableaux statistiques très complets publiés annuellement par l'Observatoire de Neuchâtel dans ses *Rapports sur les concours de chronomètres*, fournissent des données du plus haut intérêt.

En effet, les constructeurs neuchâtelois présentent chaque année au concours un chiffre de chronomètres à détente considérable, qu'on ne rencontre pas dans d'autres observatoires.

Voici un extrait du dernier Tableau paru des variations diurnes classées d'après le genre d'échappement :

	Ancre.	*Détente* Bascule.	*Détente* Ressort.	*Détente* Tourbillon.	Moyenne de l'année.
	s	s	s	s	s
1862.....	1,51	1,80	1,02	2,30	1,61
1899.....	0,58	0,68	0,28	0,315	0,57
Variation moyenne de 38 ans (1862-1899) donnée par le nombre de chronomètres....	0,566	0,631	0,450	0,511	0,574
	6001	1526	336	163	8035

Les chiffres qui précèdent comprennent les variations moyennes des *quatre classes* de chronomètres observés.

Les Tableaux généraux ont permis de comparer rigoureusement, pour les cinq dernières années *et dans la même classe*, les marches des chronomètres munis des

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

divers échappements libres en usage dans la construction du chronomètre de poche, et d'en apprécier les éléments essentiels de comparaison :

1° Variation diurne moyenne;

2° Différence entre les marches extrêmes;

3° Constance de marche.

Ces moyennes ont été fournies par les chronomètres ayant subi les épreuves les plus complètes :

Première Classe.

	1. Variation diurne moyenne.	2. Différence entre les marches extrêmes.	3. Différence de marche entre la première et la dernière semaine.
	s	s	s
19 chronomètres à détente.....	0,46	6,86	0,72
20 chronomètres à détente tourbillon.	0,37	5,25	0,80
39 chronomètres à détente.....	0,42	6,54	0,74
255 chronometres à ancre.....	0,50	6,43	1,23

Les 255 chronomètres à ancre suivent donc de près les 39 chronomètres à détente, pour le chiffre de la variation diurne moyenne, critère le plus important des qualités chronométriques.

L'échappement à ancre accuse un léger avantage pour la différence entre les marches extrêmes (influencée surtout par le réglage des positions et des températures).

Cette supériorité s'accentuera au *porter*, de sorte que l'avantage évident des chronomètres à détente au point de vue de la constance de la marche (0s,74 contre 1s,23) devient illusoire si le chronomètre est en poche, exposé aux chocs inhérents à sa destination, tandis que l'échappement à ancre bien construit est moins influencé par les secousses violentes et ne s'arrête pas au doigt.

En instituant des concours spéciaux pour la fourniture de montres *à ancre* pour torpilleurs (Deckwatches) à l'usage de la marine de guerre, le Service hydrographique de la Marine française et l'Amirauté anglaise ont, de leur côté, donné une sanction de fait aux qualités éminentes de l'échappement à ancre.

Ces chronomètres sont utilisés sur le pont des navires, afin d'éviter le transport des chronomètres de marine du bord ou, en lieu et place de ceux-ci, sur les torpilleurs et autres vaisseaux de petit tonnage qui, par le fait de leur construction, ont des mouvements violents et des vibrations nuisibles aux instruments délicats.

Les instruments présentés au concours remplissent largement les conditions posées par la Marine française; le numéro 1 du concours, du 1er octobre au 1er décembre 1899, donne les résultats suivants :

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

N° 12873.

A (Différence des marches extrêmes à la température ambiante)...	$0^{s},50$
C (Écart au chaud).....	$+0,15$
$\frac{1}{2}$F (Écart au froid).....	$-0,86$
P (Écart au pendu).....	$-1,21$

Nous devons à l'obligeance de notre éminent président, M. Caspari, ingénieur en chef de la Marine, la communication de résultats extraits des carnets matricules d'un certain nombre de montres pour torpilleurs (Annexe).

Les périodes de marche s'étendant jusqu'à quatre années, à terre et à la mer, démontrent que ces montres présentent, au point de vue de la stabilité de marche avec le temps, toute la sécurité désirable.

Depuis de nombreuses années, on constate aussi que, à de rares exceptions près, l'échappement à ancre est exclusivement employé dans les montres primées aux concours annuels de chronomètres de Genève et de Besançon.

Au Concours international de réglage de 1896, où la liberté la plus grande était laissée aux fabricants pour le choix de la nature d'échappement, un seul sur 142 chronomètres classés ne possédait pas l'échappement à ancre.

Le numéro 298255, sorti premier, a fourni les résultats suivants :

Écart moyen de la marche diurne.....	$\pm 0^{s},17$
Écart moyen de position.....	$\pm 0,49$
Erreur de compensation.....	$\pm 0,046$
Reprise de marche.....	$-0,08$

Au Congrès de 1889, M. Alexis Favre avait signalé les avantages de l'échappement à ancre en faisant ressortir que les montres qui en sont munies rendent aux voyageurs par caravanes, en Afrique, des services qu'on ne saurait demander à des chronomètres à détente.

L'ensemble des résultats fournis par l'échappement à ancre démontre donc que les constructeurs possèdent dans ce mécanisme le plus précieux auxiliaire. Sa réalisation pratique est à la portée de tout horloger quelque peu doué et bien dirigé, tandis que l'échappement à détente ne tolère aucun vice de principe, aucune médiocrité dans l'exécution; il doit être manié soigneusement et ne réussit que dans les pièces destinées à des observations scientifiques; ceux qui ont appliqué l'échappement à détente à des chronomètres à l'usage journalier ou à des montres de bas prix n'ont jamais recueilli que des déceptions.

Malgré les résultats concluants de l'observation du réglage, un grand nombre d'horlogers et, avec eux, une partie du public, se basant sur une classification surannée admise à une époque où l'échappement à ancre n'atteignait pas le degré de perfection que nous lui connaissons, réservent l'appellation de *chronomètres* aux seules pièces munies de l'échappement à détente.

La définition si précise que vient de donner M. Rodanet sort ce terme du cadre étroit où l'avaient enfermé les anciens auteurs, et assure aux instruments munis d'*un système quelconque d'échappement libre* leur rang et leur titre de chrono-

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

mètres. Ce terme s'appliquera à tous les mécanismes portatifs que l'expérience a reconnus capables de mesurer le temps avec une précision réelle et durable.

Quelle que soit l'étymologie du mot, la qualité du réglage, et non pas exclusivement le type de mécanisme, définira ainsi un chronomètre.

Appuyée de l'autorité et de la compétence qui s'attachent à une réunion aussi considérable de savants et de praticiens, la définition proposée fera cesser toute équivoque et contribuera certainement à rendre au public la confiance que méritent à si juste titre les produits de la chronométrie moderne.

RÉSUMÉ.

Variation diurne des chronomètres

		à ancre.		à détente simple.		à détente tourbillon.
		s		s		s
1895.....	20 pièces.	0,48	4 pièces.	0,44	3 pièces.	0,50
1896.....	70 »	0,57	5 »	0,59	6 »	0,41
1897.....	53 »	0,54	2 »	0,55	2 »	0,28
1898.....	45 »	0,50	1 »	0,56	2 »	0,39
1899.....	67 »	0,41	7 »	0,36	7 »	0,31
Moyenne sur	255 pièces.	0,50	19 pièces.	0,46	20 pièces.	0,37
			Sur les 39 chronomètres à détente ..			0,42

Différence des marches extrêmes sur 5 positions extrêmes et aux températures.

		Ancre.		Détente simple.		Détente tourbillon.
		s		s		s
1895.....	20 pièces.	7,01	4 pièces.	5,44	3 pièces.	5,36
1896.....	70 »	6,77	5 »	9,26	6 »	5,86
1897.....	53 »	5,86	2 »	6,50	2 »	3,55
1898.....	45 »	7,43	1 »	9,50	2 »	5,70
1899.....	67 »	5,70	7 »	5,69	7 »	5,50
Moyenne sur	255 pièces.	6,43	19 pièces.	6,86	20 pièces.	5,25
			Sur les 39 chronomètres à détente..			6,34

Constance de marche (différence entre les marches diurnes moyennes de la première et de la dernière semaine).

		Ancre.		Détente simple.		Détente tourbillon.
		s		s		s
1895.....	20 pièces.	1,16	4 pièces.	0,81	3 pièces.	0,51
1896.....	70 »	1,31	5 »	1,00	6 »	0,94
1897.....	53 »	1,15	2 »	0,65	2 »	0,45
1898.....	45 »	1,20	1 »	0,26	2 »	2,03
1899.....	67 »	1,26	7 »	0,56	7 »	0,56
Moyenne sur	255 pièces.	1,23	19 pièces.	0,72	20 pièces.	0,80
			Sur les 39 chronomètres à détente..			0,74

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Extraits des carnets matricules du Service hydrographique de la Marine française.

MONTRES DE TORPILLEURS A ANCRE.

Marche de la montre A.

Huiles d'août 1894.....	1895. — Service hydrographique, avril, + 4ˢ,2; Toulon, observatoire du Port, juillet, + 6ˢ,0; septembre, 7ˢ,0; décembre, 8ˢ,0.
Retouché.....	1896. — S. H., mars, + 1ˢ,0; Toulon, observatoire du port, mai, + 0ˢ,5; août, + 2ˢ.3.
Embarquée.....	1896. — Septembre, + 7ˢ,0; décembre, + 8ˢ,0.
Embarquée.....	1897. — Janvier, + 7ˢ,0; mars, + 4ˢ,6; mai, + 6ˢ,0; juillet, + 8ˢ,6; août, + 8ˢ,0; novembre, 0ˢ,0.
Embarquée.....	1898. — Janvier, 2ˢ,0; février, + 4ˢ,6; mars, + 3ˢ,0; mai, + 9ˢ,0.

Marches de la montre B.

Huiles de juillet 1897.....	1897. — S. H., août, 0ˢ,0.
Embarquée.....	1898. — Août, + 2ˢ,7.
Embarquée.....	1899. — Avril, + 4ˢ,6; août, + 6ˢ,2.
Embarquée.....	1900. — S. H., janvier, + 5ˢ,7.

Marches de la montre C.

Huiles de janvier 1894....	1896. — S. H., juin, — 2ˢ,4; août, — 2ˢ,4; décembre, 0ˢ,0. 1897. — S. H., janvier, + 1ˢ,5; juin, — 0ˢ,7; novembre, + 1ˢ,5. 1898. — S. H., janvier, 0ˢ,0; juillet, — 1ˢ,0; novembre, + 2ˢ,0. 1899. — S. H., mai, + 4ˢ,0; décembre, + 6ˢ,0.

Marches de la montre D.

Huiles de septembre 1895..	1895. — S. H., novembre, + 0ˢ,5; décembre, + 1ˢ,4. 1896. — Toulon, observatoire du port, avril, + 3ˢ; octobre, 0ˢ,0; décembre, + 5ˢ,8. 1897. — Mars, + 1ˢ,6; avril, + 2ˢ,9; mai, — 1ˢ,6; juin, — 2ˢ,0, juillet, 0ˢ,0.
Embarquée.....	1897. — Août, + 2ˢ,0; septembre, — 1ˢ,6; novembre, + 7ˢ,5.
Embarquée.....	1898. — Février, + 6ˢ,8; juillet, + 4ˢ,8; août, + 5ˢ,0.

Marches de la montre G.

Huiles de janvier 1896....	1896. — S. H., mai, 0ˢ,4; Rochefort, observatoire du port, juin, 0ˢ,0; août, + 2ˢ,4; novembre, + 2ˢ; décembre, + 1ˢ. 1898. — Février, + 4ˢ; juin, + 3ˢ,2; juillet, + 4ˢ,0; septembre, + 3ˢ,0; décembre, + 2ˢ,0. 1899. — Juin, — 2ˢ,0.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Marches de la montre F.

Huiles de septembre 1894..	1894.	— S. H., $+1^s$.
	1895.	— Toulon, observatoire du port, $-0^s,4$.
	1896.	— Janvier, $-2^s,4$.
Embarquée.....	1897.	— Janvier, $-4^s,9$; juin, -3^s2.

Marches de la montre G.

Huiles de décembre 1895.	1895.	— S. H., décembre, $+1^s,0$.
	1896.	— Brest, observatoire du port, janvier, $+0^s,3$.
	1897.	— Janvier, $+11^s,0$; juin, $+13^s,9$.
Embarquée.....	1897.	— Septembre, $+1^s,5$.
Embarquée.....	1898.	— Mars, $+0^s,5$; juillet, $+2^s,5$; octobre, $+2^s,2$.
Embarquée.....	1899.	— Janvier, $+3^s,0$; mai, $+2^s,4$.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

SUR

L'HORLOGE A GRAND BALANCIER

DE L'OBSERVATOIRE DE NICE,

PAR

M. A. CORNU.

Sur la proposition de M. Perrotin, directeur de l'Observatoire de Nice, M. R. Bischoffsheim a bien voulu me charger d'organiser le système de synchronisation électromagnétique que j'ai décrit sommairement en 1889 au Congrès international de Chronométrie (*voir* les *Comptes rendus* de ce Congrès, p. 179 et suivantes) pour régler synchroniquement les horloges des trois équatoriaux et du petit méridien.

Cette installation a été décrite en détail par M. A. Prim, astronome à l'Observatoire de Nice (*Annales de l'Observatoire de Nice,* t. I, p. 301); elle a fonctionné aussitôt et sans interruption depuis le début (29 avril 1891) de la manière la plus régulière et a donné lieu à des études intéressantes, en dehors des simplifications considérables qu'elle a apportées dans le service de l'heure, si important dans un grand observatoire.

L'horloge directrice a été établie sur un plan différent de celui qui est généralement adopté : après avoir reconnu les conditions susceptibles de donner les résultats les plus précis, j'ai cherché à les réaliser en réduisant au minimum la part du travail de précision et d'élégance qu'on exige d'ordinaire pour le mécanisme des horloges astronomiques et à obtenir, au moyen des lois connues de la Mécanique et de la Physique, la rigueur qui, suivant l'usage, résulte de l'habileté de l'artiste.

Au lieu d'organes délicats et de rouages soignés, j'ai voulu essayer, au contraire, des pièces massives et robustes : comme la précision des horloges repose essentiellement sur l'isochronisme des petites oscillations, j'ai pensé que la pièce principale était le balancier et que c'était la régularité théorique du mouvement oscillatoire qu'il fallait avant tout assurer. J'ai donc songé à employer un pendule beaucoup plus long et beaucoup plus lourd que ceux dont on fait ordinairement usage et, d'autre part, j'ai cherché à réduire au minimum les résistances passives du mouvement de ce pendule : dans ces conditions, le travail mécanique de restitution est extrêmement petit et influence aussi peu que possible la régularité de

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

la période oscillatoire. En conséquence, le balancier est formé d'une barre de fer de 5^m de longueur soutenant une lentille de fonte de $0^m,40$ de diamètre ; le poids total du système est de 108^{kg} environ ; ce balancier est suspendu par une double lame de ressort d'acier à une potence en fer solidement encastrée dans un gros mur, il bat la double seconde sidérale avec une amplitude de $\pm 35'$ à $38'$, soit $1°,\frac{1}{4}$ d'arc *total*. J'aurais préféré la suspension sur couteau, qui absorbe moins de travail que les ressorts, si je n'avais redouté les accidents pouvant survenir au tranchant du couteau dans le maniement et le réglage d'une masse si considérable. Mais, d'autre part, j'ai réduit la résistance de l'air au minimum par le choix de la forme de la lentille et du plan d'oscillation du balancier : cette forme, dont on paraît peu se préoccuper en général : est très importante; on s'imagine volontiers que la forme de lentille aplatie est la plus favorable, il n'en est rien; une lentille plate éprouve dans l'air ambiant une grande résistance, ce qui force à augmenter le poids moteur du rouage, par suite les chances d'irrégularité par l'accroissement des frottements dans le rouage. Des essais méthodiques m'ont conduit à adopter pour cette lentille une épaisseur moitié de celle du diamètre : c'est celle qui donne le minimum de résistance de l'air; de plus, j'ai écarté autant que possible le balancier de la paroi devant laquelle il oscille, pour diminuer le frottement de l'air, qui est considérable lorsque la distance à la paroi est faible.

Il résulte de toutes ces dispositions que le travail de restitution nécessaire à l'entretien de la faible amplitude précitée est extrêmement petit : aussi le poids moteur du rouage est-il seulement de $2^{kg},5$ avec une chute diurne de $0^m,16$, soit $\frac{4}{10}$ de kilogrammètre par jour. J'aurais pu réduire encore dans une grande proportion le travail de restitution en attelant ce balancier à un rouage de précision absorbant très peu de force motrice : mais j'ai cru utile d'essayer un rouage grossier (celui d'une horloge commune, dite *comtoise*, à échappement à chevilles) pour constater que, conformément aux prévisions, l'imperfection du mécanisme n'influe pas d'une manière appréciable sur la régularité de la période oscillatoire d'un balancier offrant un si grand moment d'inertie.

Effectivement, l'amplitude des oscillations du balancier relevée tous les jours est sensiblement constante (1), les variations accidentelles sont de l'ordre des erreurs d'observations ou des variations de la résistance de l'air causée par les fluctuations de la pression barométrique.

En résumé, la grossièreté du rouage n'a jusqu'à présent laissé apercevoir aucune influence fâcheuse, de sorte que l'horloge directrice est, en réalité, constituée par des pièces qui pourraient être prises, les unes dans l'atelier d'un serrurier, les autres dans le magasin d'une fabrique d'horlogerie commune (2) : toute la préci-

(1) La régularité de cette amplitude est même assez grande pour mettre en évidence de petites variations systématiques s'élevant à $\pm 3'$ à $4'$, introduites par le régime périodique des températures, conformément à une loi générale dont il sera question plus loin (forme cyclique de la loi des erreurs résiduelles).

(2) C'est la conclusion à laquelle on arrive après les études très soignées faites dans les ateliers de M. P. Gautier, l'habile constructeur, membre du Bureau des Longitudes, qui a été chargé de la construction de ce balancier. On voit maintenant que, à part la suspension à ressort exigeant une certaine délicatesse, toutes les pièces accessoires finement travaillées en vue des essais méthodiques sont devenues inutiles et pourraient être remplacées par des pièces ordinaires.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

sion est due à l'emploi d'un pendule invariable ayant un grand moment d'inertie et exécutant des oscillations de très faible amplitude avec le minimum de résistance de la part du milieu ambiant.

Correction de la marche diurne par l'observation du thermomètre et du baromètre. — Contrairement à l'usage adopté dans les horloges de précision, ce balancier n'est pas compensé pour la température; j'ai préféré obtenir la correction par un calcul fondé sur l'observation directe de la température de la tige du balancier plutôt que d'avoir recours aux dispositifs ordinaires de compensation automatique. C'est que j'adresse à ces systèmes des critiques qui eussent été particulièrement applicables aux conditions où fonctionne le grand balancier: je les indiquerai plus loin.

Il faut dire d'ailleurs que, dans le projet primitif, l'horloge directrice devait être installée dans le rocher, chambre creusée daus le roc sur lequel repose le grand équatorial où la température aurait peu varié : la correction diurne prévue devait donc être très faible et très sûre, car le fer qui constitue le balancier est l'un des métaux dont la dilatation est la plus régulière et dont le coefficient est le mieux connu; l'accroissement de 1°C. de température produit une demi-seconde de retard par jour (exactement $0^s,449$). Il aurait donc suffi d'ajouter de temps à autre, sur le milieu de la tige du balancier, la charge additionnelle (1) corrigeant l'effet de la température moyenne de la saison : l'observation de la différence diurne entre la température moyenne et la température réelle permettant d'achever la correction.

Mais, au dernier moment, la construction de cette chambre fut repoussée par l'architecte dans la crainte de compromettre la solidité de l'édifice : force fut donc d'installer le grand balancier dans le sous-sol du grand équatorial, dont la température varie de 10° à 12° de l'hiver à l'été, ou plutôt du printemps à l'automne.

Bien que fort contrarié par cette détermination subite, je n'hésitai pas à persister dans la méthode de correction projetée et, en définitive, l'expérience a prouvé qu'elle s'applique encore très aisément, même dans ces conditions défavorables : on en est quitte pour modifier plus souvent la charge additionnelle du balancier.

On serait tenté, au premier abord, de considérer la suppression de la *compensation* comme un pas en arrière dans la voie du progrès de la mesure du temps : mais, lorsqu'on y regarde de plus près, on reconnaît que, dans un observatoire où un astronome est chargé du service de l'heure, la complication due au calcul quotidien de la correction diurne est insignifiante et qu'on y gagne une sécurité que la compensation automatique n'assure pas au même degré.

D'abord le calcul est d'une simplicité extrême. Voici la formule que j'ai déduite de plusieurs années d'observations pour calculer la correction diurne ΔC.

$$\Delta C = [0^s,5374 - 0,11313p + \tfrac{1}{2}\theta + 0,02(h - 700)],$$

(1) Le poids total du balancier avait été fixé aux environs de 100^{kg}. Le choix de 108^{kg} a été déterminé par la condition que la charge additionnelle placée au milieu de la tige du balancier, nécessaire pour produire une avance de 1 seconde sexagésimale, par jour fût de 1^{cgr}.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

p étant la charge additionnelle du balancier exprimée en grammes;
θ la température moyenne de la tige du balancier en degrés centigrades;
h la pression barométrique en millimètres de mercure.

La charge p étant en général un multiple exact de 5^{gr}, une petite table auxiliaire donne le binome $6^{s},5374 - 0,11313p$. Le retard diurne pour 1° d'élévation de température étant $0^{s},499$, il suffit d'ajouter la moitié de la température moyenne du balancier; quant à l'effet de la pression atmosphérique, pour lequel on n'a pas trouvé de bon dispositif compensateur, on en calcule la correction en doublant l'excès de la hauteur barométrique diurne moyenne sur 700^{m} et reculant la virgule de deux rangs.

Le calcul de la correction diurne se fait donc à vue. L'erreur (obs.-calc.), obtenue d'après la détermination astronomique de l'heure, n'est jamais que de quelques centièmes de seconde (1).

Il reste à montrer que, dans les conditions où se trouve ce grand balancier, l'un ou l'autre des deux dispositifs compensateurs eût introduit des incertitudes au moins aussi grandes.

Compensation au mercure. — Outre le prix et la difficulté de maniement d'une centaine de kilogrammes de mercure, ce dispositif a le grand inconvénient de ne pas remplir la condition théorique qui le caractérise. La correction, pour être parfaite, exige que la température de la tige et celle du mercure soient égales à tout instant : or, il n'en est jamais ainsi; il s'établit inévitablement dans l'espace clos où se meut le balancier une différence de température entre le haut et le bas; le plus souvent, c'est la disposition des couches d'air par ordre de densité qui fait que le mercure est plus froid que la tige; mais l'inverse peut également se présenter lorsque le refroidissement a lieu par la partie supérieure, c'est ce qui arrive pendant l'hiver dans le sous-sol du grand équatorial où l'appareil est installé. La différence peut atteindre jusqu'à 1° : l'erreur de compensation pourrait donc s'élever au demi-degré, ce qui correspond à $0^{s},25$ par jour : ainsi la compensation au mercure ne dispenserait ni de l'observation des températures ni du calcul de correction.

Aussi ai-je considéré comme indispensable de mesurer aussi exactement que possible la température moyenne des couches d'air sur toute la hauteur du balancier : ce que l'on réalise par l'observation de thermomètres à alcool permettant d'estimer le $\frac{1}{100}$ de degré, dont les réservoirs ont $0^{m},80$ de longueur; à l'aide de deux, et plus récemment de trois semblables thermomètres, on obtient avec une grande approximation la température moyenne θ de la tige qui entre dans la formule précitée.

Compensation par un gril. — La disposition en gril n'est pas au même degré sujette à l'objection précédente, mais elle offre un autre genre d'inconvénients provenant des articulations, au nombre de 17, et des guidages, au nombre de 12, nécessaires lorsqu'on emploie le laiton comme compensateur du fer. On est alors

(1) Déduction faite de l'erreur périodique annuelle ou saisonnière dont il a déjà été question plus haut.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

placé entre deux dangers : celui de laisser trop de jeu aux attaches et au guidage des 9 tiges, ce qui altère la stabilité de la forme du balancier, ou, au contraire, celui de rendre le système trop invariable en gênant les dilatations relatives des diverses tiges qui composent le gril.

Si le système n'est pas entièrement libre de se dilater, on a à redouter des erreurs d'une grandeur indéterminée.

Supposons que, dans le jeu imparfait des articulations des tiges et de leurs guidages, il se produise un coincement altérant de $\frac{1}{100}$ de millimètre la longueur du balancier, l'erreur relative sur la longueur du pendule synchrone sera ici de $\frac{1}{400000}$; ce qui, d'après la formule

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l}; \qquad dT = \frac{T}{2}\frac{dl}{l} = \frac{86400}{800000} = 0^s,108,$$

donnera une erreur diurne de plus d'un dixième de seconde, avec un signe qu'on ne peut pas prévoir.

On voit, d'après cet exemple, les dangers inhérents à l'emploi d'un pendule à gril.

Sur l'existence constante de causes d'erreurs suivant une loi cyclique. — L'analyse des phénomènes mécaniques qui se passent dans le pendule à gril au contact des pièces inégalement dilatables m'a fourni l'explication d'un genre d'erreurs que j'ai rencontrées dans diverses observations chronométriques : la cause de ce type d'erreurs est si générale qu'elle me paraît exister non seulement dans les appareils compensateurs fondés sur le même principe, mais encore dans tous les systèmes où l'effet d'une variation de température éprouve, pour un motif quelconque, un retard systématique.

Le cas le plus simple à considérer est celui où l'appareil est formé de pièces de dilatabilité différente accolées par une pression plus ou moins forte : dans ces conditions, la dilatation ne peut pas s'effectuer librement, puisque les surfaces en contact ne varient pas en tous leurs points de la même quantité; de là une déformation inévitable. Cette déformation est parfois utile, comme dans les lames bimétalliques des balanciers de chronomètre; mais elle est fâcheuse dans tous les cas où les surfaces ne sont pas forcées, par une soudure solide, de conserver un contact permanent sur toute leur étendue; c'est ce qui se présente dans le pendule à gril aux points de clavetage des tiges longitudinales ou aux surfaces de guidage dans les barres transversales; il en est de même aux surfaces de contact des vis d'acier pénétrant dans du laiton ou de vis de laiton dans des pièces d'acier, ou encore aux points d'attache du spiral d'acier dans la platine de laiton, etc., en un mot, à toutes les jonctions similaires des pièces bimétalliques.

Il résulte de cette disposition que la dilatation inégale des surfaces met en jeu l'élasticité des deux pièces en contact : la pièce plus dilatable est arrêtée dans son expansion et se contracte; l'autre, au contraire, est dilatée par extension. De là un état d'équilibre forcé maintenu par le frottement des surfaces pressées l'une contre l'autre. La compensation calculée dans l'hypothèse d'une libre expansion n'est donc pas réalisée; mais ce qui est beaucoup plus grave, c'est que la loi résultant

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

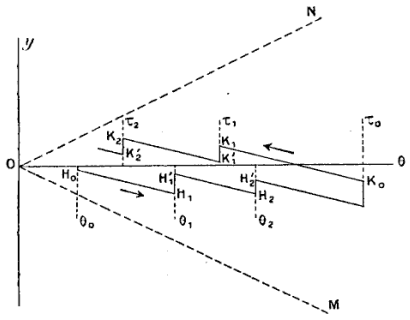
de dilatation ne peut pas être régulière : en effet, elle demeure bien continue tant que le frottement équilibre les réactions, mais il arrive un moment où le frottement est vaincu; de là un saut brusque dans la position relative des pièces en contact et un nouvel état d'équilibre également forcé. La loi de la dilatation résultante est donc non seulement altérée, mais remplacée par une série de variations discontinues dépendant de circonstances fortuites.

En résumé, la compensation, au lieu de s'effectuer suivant la régularité prévue, se produit par soubresauts et se trouve toujours plus ou moins en *retard* sur ce qu'elle devrait être à la température correspondante.

Un tracé graphique représentant l'allure du phénomène montrera que la série des discontinuités est finalement l'origine d'une erreur systématique provenant de l'*irréversibilité* des déplacements entre chaque position relative d'équilibre.

Soit $O\theta$ l'axe des températures (*fig.* 1) et Oy l'axe de la variation résultante de la longueur du balancier ou du pendule synchrone. Si l'appareil bimétallique

Fig. 1.



n'était sensible qu'à l'action de la pièce la plus dilatable (pièce compensatrice), la variation de longueur Oy (contraction) serait proportionnelle à la variation de température et serait représentée par la droite OM; si, au contraire, il n'était sensible qu'à l'action de la pièce la moins dilatable (allongement), la droite représentative serait ON symétrique de OM.

L'appareil étant, en réalité, sensible aux deux actions et les deux dilatations calculées de manière à être égales et de signe contraire, la variation résultante de longueur aurait été nulle, c'est-à-dire représentée pour toutes les températures par l'axe $O\theta$.

Supposons maintenant que les dilatations ne puissent pas s'effectuer librement et que ce soit la pièce la plus dilatable qui ait l'influence prédominante, la variation de longueur pour une élévation de température de θ_0 à θ_1 sera comprise entre l'axe $O\theta$ et la droite OM, puisque la compensation est imparfaite. La loi de variation sera représentée par un élément sensiblement rectiligne, tel que H_0H_1, jusqu'au moment où la température s'élevant à θ_1, la rupture de l'équilibre élastique s'effectue brusquement. La variation de longueur est représentée par la droite

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

$H_1H'_1$, parallèle à l'axe Oy, dirigée vers l'axe $O\theta$; le point représentatif H'_1 du nouvel état d'équilibre reste en dessous de cet axe, car le frottement des surfaces en contact empêchera évidemment les pièces d'arriver exactement à la longueur qui correspond à une libre dilatation.

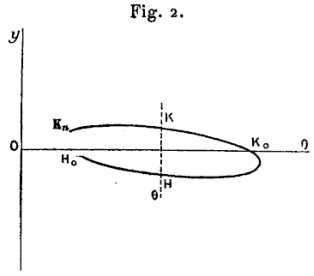
Si la température continue à s'élever, un nouvel élément H'_1H_2 figurera la loi de dilatation résultante jusqu'à la rupture de l'équilibre élastique à la température θ_2; l'élément rectiligne $H_2H'_2$ représentera la variation brusque qui amène la longueur du système à une valeur voisine de la valeur compensée, mais toujours en dessous de l'axe $O\theta$, et ainsi de suite.

La même loi discontinue se prolongera tant que la température ira en croissant; la compensation sera toujours incomplète et la longueur du balancier inférieure à ce qu'elle devrait être si la dilatation avait été libre.

Lorsque la température sera décroissante, une série de phénomènes analogues se produira : elle sera représentée par une série de dentelures analogues mais situées au-dessus de l'axe $O\theta$. En effet, la prédominance de l'action de la pièce la plus dilatable aura pour effet de produire une contraction compensatrice insuffisante; la longueur du balancier ira donc en croissant avec l'abaissement de température de τ_0 à τ_1, suivant une direction comprise entre celle de OM et celle de l'axe $O\theta$, soit K_0K_1. Un ressaut brusque $K_1K'_1$ à la température τ_1 ramènera, après rupture de l'équilibre forcé, à un autre équilibre K'_1 des forces élastiques, mais qui ne correspondra pas tout à fait à la longueur compensée; le point K'_1 sera donc au-dessus de l'axe $O\theta$. La continuation de la température décroissante donnera lieu à une série de dentelures $K_1K'_1$, $K_2K'_2$, etc., correspondant à une compensation moyenne incomplète et la longueur du balancier sera supérieure à ce qu'elle serait si la dilatation était libre.

Ces dentelures que la figure représente en petit nombre mais avec une grande amplitude seront, en réalité, très fines et très nombreuses; elles seront, en général, inobservables directement (1); elles se traduisent par leur trajectoire moyenne $H_0HK_0KK_n$ (*fig.* 2) qui consiste en une courbe continue composée d'un arc

Fig. 2.



H_0HK_0 situé au-dessous de l'axe $O\theta$ lors de la température croissante et d'un arc

(1) Regnault les a pourtant observés en examinant le déplacement de la colonne capillaire des thermomètres à mercure qui s'opérait par soubresauts : le frottement de la colonne et l'élasticité du réservoir réalisent les conditions mécaniques auxquelles j'attribue les phénomènes décrits ci-dessus.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

K_0KK_n situé au-dessus lorsque la température est décroissante. Il n'est pas certain que cette courbe se ferme rigoureusement lorsque la température reviendra à sa valeur primitive; en effet, d'après la configuration de cette ligne, on voit qu'en général la longueur du balancier ne dépend pas seulement de la température θ, mais du sens dans lequel cette température varie.

De là une loi d'erreur systématique qu'on peut appeler *cyclique,* puisqu'elle est représentée par une sorte de cycle qui caractérise le retard moyen de l'effet de la température sur la longueur du balancier.

Le même mode de raisonnement s'applique à des dispositifs très différents de celui qui vient d'être analysé.

On voit, en effet, que, quelle que soit l'origine de ce retard (frottements, réactions élastiques, irréversibilité des déplacements, conductibilité inégale des diverses pièces, etc.), la loi de l'erreur systématique sera de la même forme; le signe de l'erreur dépendra, toutes choses égales d'ailleurs, du sens de description du cycle, sens qui dépendra lui-même de la prédominance de l'une des causes en présence.

On reconnaîtra, par exemple, que l'inégalité de température le long d'un balancier compensé au mercure amène successivement une loi cyclique d'erreur. On verra aussi que les balanciers de chronomètres, par différents détails, entraînant des contacts bimétalliques, sont susceptibles de présenter des anomalies cycliques irrégulières; aussi me paraît-il nécessaire d'attirer l'attention des observateurs qui surveillent la compensation des chronomètres en les portant alternativement de l'étuve et à la caisse froide, sur la possibilité de ces erreurs cycliques, c'est-à-dire sur l'existence inévitable d'une différence de marche à une même température, selon qu'on y arrive par une variation ascendante ou descendante.

De là résulterait un classement des systèmes de balanciers compensés et une voie nouvelle dans les précautions à prendre dans l'emploi des métaux de nature diverse. Ainsi on devra, en particulier, éviter autant que possible la juxtaposition des pièces inégalement dilatables dont l'invariabilité de contact ne serait pas absolue; on trouvera peut-être dans la discussion de ces dispositifs l'origine et le moyen d'éliminer les petites anomalies brusques dont l'apparition inopinée déconcerte les artistes les plus habiles.

Je sortirais de mon rôle et de ma compétence si je voulais aller plus loin dans les conseils à donner sur cette matière; mais l'examen des résultats obtenus à l'occasion des études relatives à l'installation des appareils de l'observatoire de Nice m'ont conduit à ces remarques que les membres du Congrès ont écoutées avec une bienveillance dont je leur suis très reconnaissant.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

ACTION DU CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE

SUR LA

MARCHE D'UN CHRONOMÈTRE AIMANTÉ,

PAR

M. A. CORNU.

La marche des chronomètres, dont certaines pièces en acier trempé sont toujours plus ou moins magnétiques, est nécessairement influencée par le magnétisme terrestre et par celui des masses aimantées situées au voisinage.

Les observations suivantes, quoique très incomplètes, me font penser qu'il y a lieu d'introduire la considération de cette influence dans la discussion des causes régulières qui modifient la marche des chronomètres : la question intéresse particulièrement les montres embarquées à bord des navires où le fer, la fonte et l'acier constituent la presque totalité du bâtiment ou des agrès. L'action du magnétisme terrestre donnerait peut-être la clef et par suite la correction de certaines anomalies que présente la marche des chronomètres à la mer.

Ces observations ont été effectuées sur une montre de poche, dite *demi-chronomètre* (échappement à ancre, balancier compensé, spiral en palladium, marche antérieurement très satisfaisante), qui a été aimantée par mégarde à l'approche d'un gros électro-aimant. Cet accident a naturellement introduit de fortes perturbations dans la marche et causé des arrêts fréquents au début (1); malgré ces difficultés, j'ai persisté à étudier les diverses circonstances qui pouvaient éclairer

(1) C'est l'effet ordinaire produit par l'aimantation; je suis porté à croire que les arrêts plus ou moins fréquents des montres aimantées (excepté celles dont l'échappement est à cylindre) ne proviennent, en général, qu'indirectement du magnétisme subitement développé. Je les attribuerais volontiers à l'attraction de poussières magnétiques qui viennent coincer les engrenages ou les pièces très mobiles de l'échappement. J'ai remarqué, en effet, qu'un léger choc fait repartir le balancier avec son amplitude ordinaire et, d'autre part, que le nettoyage pur et simple du rouage, sans essai de désaimantation, fait disparaître les arrêts pendant longtemps, probablement jusqu'à ce que d'autres poussières magnétiques s'introduisent par les fissures du boîtier; l'usure des pièces d'acier du remontage suffit d'ailleurs à les produire.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

sur la nature de ces perturbations. Je suis arrivé finalement à mettre en évidence l'existence d'un régime régulier et, par suite, à montrer la possibilité de corriger l'action d'un champ magnétique sur un chronomètre aimanté, soit par une formule de correction, soit par des dispositifs compensateurs.

Ce résultat est en contradiction avec l'opinion commune qu'une montre aimantée s'arrête constamment et qu'elle est devenue inutilisable à moins d'une désaimantation complète : mais la confiance dans la recherche d'un régime régulier m'avait été inspirée par les réflexions suivantes :

Les pièces d'acier *aimantables* sont les pivots, le ressort, l'ancre, le balancier et ses annexes de l'échappement. Or, en général, dans les montres de précision, tout contact direct dans les pièces d'acier est soigneusement évité; ces contacts ont lieu par l'intermédiaire d'une pierre dure. Donc il ne peut se produire aucune adhérence magnétique, par suite, aucun arrêt de ce chef. Toutes les actions mutuelles sont des actions à distance : beaucoup d'entre elles, comme celles des pivots, se compensent ou s'atténuent par suite de la direction de la ligne de leurs pôles vis-à-vis des pièces oscillantes de l'échappement. En tout cas, ces actions sont de deux sortes : les forces permanentes, dont la résultante peut augmenter le frottement des pivots sur les pierres, et les forces périodiques; les premières peuvent effectivement entraver la mobilité des pièces et causer leur arrêt, mais les autres agissent alternativement comme retardatrices et accélératrices : elles ont pour effet d'altérer la période du balancier, c'est-à-dire la marche diurne ainsi que son amplitude moyenne : il peut arriver cependant que cette amplitude tombe au-dessous d'une certaine limite, ce qui entraîne un arrêt. Mais si le rouage a fonctionné sans interruption pendant vingt-quatre heures, il n'y a aucun motif pour que le mouvement ne continue pas indéfiniment d'une manière identique, car le remontage quotidien remet toutes les pièces dans la même position relative. S'il se produit un arrêt, c'est qu'on a fait intervenir une force étrangère (choc, trépidation, poussières, approche d'objets aimantés).

Donc si l'on écarte toutes ces causes perturbatrices en disposant la montre aimantée sur un support stable, bien horizontal, dans une orientation fixe, elle ne doit plus s'arrêter et doit acquérir une marche diurne aussi constante que le permet la perfection du mécanisme.

C'est ce que je n'ai pas tardé à constater après avoir fait nettoyer soigneusement cette montre et remplacer le ressort (1) qui avait été cassé par accident : l'horloger avait eu ordre de ne rien faire pour désaimanter les pièces d'acier. Le magnétisme paraît d'ailleurs se conserver sans altération, car la montre est restée très magnétique depuis trois ans : ainsi, aujourd'hui comme à l'époque de son aimantation (janvier 1898), l'aiguille d'une petite boussole breloque placée au-dessus du balancier vibre synchroniquement comme lui par oscillations de deux cinquièmes de seconde, ou encore fait un tour complet synchroniquement à la roue d'échappement lorsqu'on approche la boussole dans le plan de cette roue à une distance et suivant une orientation convenables.

Dans ces conditions, la seule force étrangère au rouage pouvant agir sur la montre est celle du champ magnétique terrestre : j'ai donc été amené à rechercher

(1) Ce ressort était beaucoup moins aimanté que je ne l'eusse supposé : il ne présentait que des traces de magnétisme périodiquement distribuées sur chaque spire d'enroulement dans le barillet.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

si la marche de cette montre aimantée ne variait pas avec l'orientation du balancier relativement au méridien magnétique.

A cet effet, le support horizontal a été rendu mobile autour d'un axe vertical et la montre a été maintenue pendant un nombre de jours sensiblement constant successivement dans les quatre orientations rectangulaires N, S, E, W magnétiques, c'est-à-dire dans des positions telles que les rayons menés du centre du cadran aux heures XII, III, VI, IX fussent successivement dirigés vers le nord magnétique.

Voici les résultats des comparaisons effectuées dans ces azimuts avec une horloge à secondes (Callier n° 767, échappement à ancre, balancier compensé au mercure) dont la marche très régulière n'est que de quelques dixièmes de secondes par jour.

Dates.		Marche diurne moyenne dans les orientations.				Paramètre de la sinusoïde moyenne.	
		XII.	III.	VI.	IX.	A.	ω_0.
		s				s	o
1898. Juin 20.	à 1898. Juillet 12..	— 5,75	—21,88	—19,68	— 8,23	9,85	225.35
1898. Oct. 24.	1899. Janvier 22.	4,54	5,78	0,66	5,12	7,89	226.19
1899. Avril 12 (1).	1899. Mai 29.....	21,76	4 53	1,22	21.47	13,31	230.29
1899. Juin 24.	1899. Juillet 11..	24.81	14,40	4,56	21,20	10,68	251.27
1899. Nov. 14.	1900. Avril 17...	21,24	6,00	7,05	20,42	10,12	224.32
1900. Avril 23.	1900. Juillet 5...	22,13	9,25	5,87	17,98	9,23	241.46
1900. Nov.	1900. Nov. 17...	28,39	13,67	6,26	19,90	11,50	254.17
					Moyenne...	10,37	136.21

Ainsi la variation systématique de la marche diurne avec l'orientation de la montre est d'une netteté parfaite. Ce Tableau est curieux (malgré de fortes irrégularités dans les observations partielles), lorsque l'on songe à quel degré cette montre est magnétique : le régime est devenu régulier surtout à partir du deuxième nettoyage. La variation systématique est assez précise pour que les moyennes données ci-dessus représentent d'une manière satisfaisante les quatre ordonnées y_0, y_1, y_2, y_3 de la fonction sinusoïdale

$$y = A \sin(\omega - \omega_0) + C, \tag{1}$$

correspondant aux azimuts $\omega = 0$, 90°, 180°, 270°,

$$\begin{cases} y_0 = -A \sin\omega_0 + C, & y_1 = A \cos\omega_0 + C, \\ y_3 = A \sin\omega_0 + C, & y_3 = -A \cos\omega_0 + C; \end{cases} \tag{2}$$

on en déduit les deux paramètres A et ω_0 de la sinusoïde

$$\operatorname{tang}\omega_0 = -\frac{y_0 - y_2}{y_1 - y_3}, \qquad A^2 = \left(\frac{y_0 - y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_3}{2}\right)^2. \tag{3}$$

Le nombre des données étant supérieur d'une unité au nombre des paramètres de l'équation (1), il existe une relation nécessaire entre les quatre données

$$y_0 + y_2 = y_1 + y_3 = 2C. \tag{4}$$

(1) La montre a été de nouveau nettoyée après quelques arrêts : depuis cette époque, aucun arrêt spontané n'a eu lieu.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Cette relation n'est satisfaite qu'approximativement dans le Tableau précédent : mais le peu de précision des données ne m'a pas paru justifier l'emploi de la méthode des moindres carrés pour le calcul des deux paramètres intéressants A et ω_0.

Le calcul simple par les formules (3) suffit d'ailleurs pour montrer que l'état magnétique de la montre est resté sensiblement constant : la demi-amplitude moyenne des variations avec l'orientation est $10^s,37$ et l'azimut moyen du nœud ascendant de la sinusoïde, qui a peu varié, est égal à 260°21′. Cette direction est sensiblement celle que prend le rayon de l'heure VIII (240°), lorsqu'il est dirigé vers le nord; ou celui de l'heure II vers le sud; l'axe du balancier est sur l'heure IV.

Cette loi sinusoïdale est identique à celle que doit présenter la marche d'une montre dont le cadran est vertical et orienté dans divers azimuts, lorsque le balancier est insuffisamment équilibré.

En effet, la pesanteur produit alors, si l'amplitude moyenne reste constante, un couple proportionnel à la projection verticale de l'excentricité du centre de gravité.

J'avais précisément fait, en 1890, une étude superficielle de cette erreur sur cette montre avant qu'elle eût été aimantée; voici la série d'observations la plus complète :

	XII.	III.	VI.	IX.	A.	ω_0.
1890 oct. 26 à 1891 janv. 25.....	$6^s,26$	$10^s,28$	$16^s,96$	$9^s,22$	$5^s,38$	264°,21

Cette série assez médiocre [car la condition (4) n'est qu'approximativement remplie] suffit cependant à vérifier que le couple dû à la pesanteur seule produit une variation du même genre que celle due au couple magnétique terrestre : les paramètres A et ω_0 n'ont naturellement aucune relation avec ceux qui précèdent.

Cette vérification est très intéressante et bien utile, parce qu'elle fait voir que la condition découverte par Phillips (*Annales des Mines*, 6e série, t. IX, p. 321; 1866) pour éliminer l'influence de la pesanteur, doit s'appliquer à l'élimination de l'influence du magnétisme.

Bien que la variation systématique de la marche de la montre aimantée posée horizontalement (par conséquent soustraite à l'action perturbatrice de la pesanteur) soit visiblement due à l'action du magnétisme terrestre, j'ai voulu obtenir une vérification directe de son influence en annulant l'action terrestre sur le balancier par celle d'un barreau aimanté compensateur; j'y suis parvenu de la manière suivante :

J'ai taillé en liège un disque exactement de même forme que la montre, et marqué sur l'une des faces les heures XII, III, VI et IX, ainsi que la projection de l'axe du balancier situé sur le rayon de l'heure IV à 12^{mm} du centre du cadran.

Ce point a été pris comme centre d'une entaille cylindrique dans laquelle la petite boussole précitée a été encastrée. Ce liège fixé sur le support horizontal tournant décrit plus haut permet donc de placer le centre de la boussole exactement à la place où se trouve l'axe du balancier dans toutes les orientations de la montre. A l'aide d'un bras articulé convenablement assujetti sur la partie fixe du support, on approche un petit barreau aimanté vertical, de manière à rendre astatique l'aiguille de la boussole, on est ainsi assuré d'avoir annulé l'influence de la terre, dans le petit espace où se meut le balancier, lorsqu'on remplace le liège par la montre

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

orientée dans le même azimut. A chaque changement d'orientation, la même substitution de la boussole est faite et le même réglage astatique opéré.

Conformément aux prévisions, la marche diurne de la montre observée dans les quatre azimuts est restée sensiblement la même, c'est-à-dire indépendante de l'orientation :

	XII.	III.	VI.	IX.
1900. Nov. 19 — nov. 27.....	$17^s,60$	$18^s,95$	$17^s,10$	$17^s,20$

Les irrégularités sont de l'ordre des erreurs inhérentes au mécanisme et à l'imperfection de la compensation magnétique : la vérification est donc aussi satisfaisante que possible.

Ces observations conduisent aux conclusions suivantes :

1° Les chronomètres de précision sont influencés par les variations du champ magnétique où ils sont placés dans une mesure qui dépend du degré d'aimantation du balancier et du spiral.

Cette influence est particulièrement à craindre à bord des bâtiments en fer, surtout par les changements de route qui modifient le champ magnétique en direction et en intensité.

2° Il importerait donc, avant de procéder à l'étude de la marche des chronomètres, de déterminer le moment magnétique du balancier (1), muni ou non de son spiral : il est probable qu'on n'en trouvera aucun absolument dépourvu de magnétisme.

3° Dans les observatoires où l'on étudie la marche des chronomètres, il serait nécessaire de faire régulièrement (2) les comparaisons dans quatre azimuts rectangulaires et de noter, s'il y a lieu, les variations systématiques correspondantes pour calculer la formule de correction.

4° En tout cas, il importe de régler à 440° l'amplitude totale des oscillations du balancier, suivant la règle découverte par Phillips, afin d'éliminer l'action du couple magnétique terrestre : malheureusement, dans les chronomètres, cette amplitude est difficile à atteindre et surtout à conserver.

5° Enfin, par sucroît de précaution, il y aurait lieu d'essayer, dans les observatoires aussi bien qu'à bord des navires, d'envelopper chaque chronomètre dans une épaisse boîte de fonte ou de fer (comme le galvanomètre cuirassé de Lord Kelvin) pour soustraire l'instrument à l'action magnétique de la terre et du navire.

Grâce à ces études ou à ces précautions, on pourrait sinon faire abstraction du magnétisme inévitable des pièces d'acier des chronomètres, du moins déterminer, par des mesures préalables, l'importance de l'action résiduelle et la correction qui peut l'annuler.

---

(1) Il suffit d'observer, à une distance convenable, la déviation exercée sur un petit aimant suspendu à un fil sans torsion et muni d'un miroir. Pour ramener la mesure aux unités C. G. S., on comparera avec la déviation produite par un barreau de moment connu.

(2) Cette opération se fait quelquefois dans le cas d'anomalies extraordinaires, mais non d'une manière courante.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

RÉGLAGE DES CHRONOMÈTRES DE POCHE

AUX POSITIONS VERTICALES.

APPAREILS SERVANT A DÉTERMINER EXACTEMENT ET PRATIQUEMENT LA POSITION DU POINT D'ATTACHE DU SPIRAL A LA VIROLE, POUR UNE MONTRE DONNÉE,

PAR

M. FAVRE HEINRICH.

Le changement de position du point d'attache du spiral à la virole, dans le but d'obtenir le réglage d'un chronomètre aux positions verticales, est assurément une des retouches entraînant le plus de complications et occasionnant le plus de perte de temps. En effet, ce changement de positions s'obtenant en coupant le spiral au centre, le régleur est tenu à une grande prudence, vu la difficulté d'arriver à couper la spire juste de la quantité nécessaire pour obtenir la véritable place du point d'attache pour le chronomètre qu'il observe. Il n'y arrive qu'en coupant chaque fois une faible longueur du spiral, ce qui l'oblige à répéter souvent cette opération. Or, considérant qu'après chaque opération le régleur ne peut vérifier le résultat de sa retouche qu'en observant la marche de la montre aux quatre positions verticales, il en résulte une grande perte de temps. De plus, si l'opérateur dépasse la mesure, il lui est très difficile, si ce n'est impossible, de revenir en arrière ; neuf fois sur dix le spiral est perdu ainsi que tout le travail préalable. C'est la raison pour laquelle bien des régleurs se contentent d'un à peu près comme point d'attache et rectifient les écarts au moyen de procédés enseignés par la routine, mais bannis par la théorie.

Le système que je vais essayer de décrire supprime toutes difficultés et fait réaliser une grande économie de temps.

Il permet de déterminer, avec une grande précision, la position convenable du point d'attache à la virole pour un chronomètre donné, sans avoir à couper à

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

plusieurs reprises le spiral. Il peut, à volonté, ou rester fixé dans la montre ou être supprimé une fois que le point est déterminé.

Dans le premier cas, le spiral n'a pas à être coupé, quel que soit le point où ce dernier est goupillé.

Dans le second cas, le spiral est *coupé à coup sûr à la bonne place sans erreur possible.*

L'appareil étant très léger, il peut rester à demeure sans inconvénients.

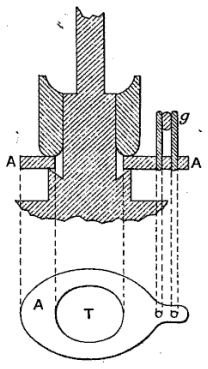
De plus, ce système pouvant s'appliquer à n'importe quelle montre peut rendre d'importants services pour la retouche de petits écarts d'un chronomètre relativement bien réglé et dont la compensation est bonne.

Sans aucun risque on peut, dans ce cas, tenter d'obtenir la perfection, et il n'y a pas de raisons pour ne pas pouvoir l'obtenir avec une pièce où il n'y aurait que les positions verticales à corriger. Je dis *sans aucun risque,* car dans ce cas il va de soi que l'appareil doit rester en place et par conséquent que la retouche se fait sans couper le spiral, la compensation reste donc intacte, la longueur du spiral ne variant pas. C'est là un très grand avantage sur lequel j'insiste. Les retouches de réglage aux positions verticales, telles qu'elles se font habituellement, *détruisent la compensation.* Les retouches faites au moyen de mon appareil et sans couper le spiral ne *dérangent absolument pas la compensation.*

DESCRIPTION DU SYSTÈME.

Mes appareils se fixent sur l'axe du balancier. Ils peuvent être disposés de différentes façons et varier comme forme.

Fig. 1.



Ils sont destinés à soutenir deux becs ou goupilles qui viennent prendre le premier tour du spiral près de la virole. Les appareils pouvant se déplacer peuvent saisir à volonté n'importe quel point de la première spire. Le changement de posi-

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

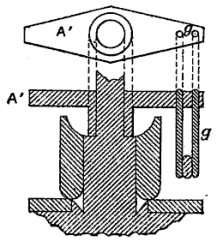
tion des goupilles équivaut à un changement de position du point d'attache du spiral.

La *fig.* 1 représente un appareil A fixé au moyen de la pression de la virole.

Cette disposition est simple et pratique, elle peut s'appliquer à n'importe quelle montre, à condition de diminuer la hauteur de la virole par-dessous, afin que le spiral ne soit pas rehaussé au centre. Le poids de cet appareil est insignifiant. Il offre de plus l'avantage de pouvoir se déplacer en tout sens, le trou T étant ovale. Les goupilles prennent par conséquent d'elles-mêmes l'écartement voulu pour ne pas décentrer le spiral.

La *fig.* 2 représente un appareil A′ fixé à ajustement gras sur le tigeron supérieur de l'axe B.

Fig. 2.



En pratique, nous employons, suivant le cas, plusieurs autres dispositions dont la description ne peut offrir aucun intérêt, attendu que le principe ne varie pas.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

ÉTUDE SUR LA MONTRE A BILLES,

PAR

M. MAILLARD-SALIN.

Ayant été chargé du réglage de la montre à billes qui a figuré à l'Exposition dans la vitrine de MM. L. Leroy et Cie, j'ai pensé pouvoir intéresser MM. les Membres du Congrès de Chronométrie en leur communiquant mes observations sur ce sujet.

Ma première impression en entreprenant le réglage de cette montre, tellement différente de ce qui s'est fait jusqu'à ce jour, n'a pas été exempte de la défiance instinctive qu'inspire tout ce qui est vraiment nouveau. Si donc au début je n'étais pas enthousiasmé, cela est une preuve que les qualités que je puis affirmer aujourd'hui ne sont pas le fait d'une idée préconçue, mais le résultat de constatations absolument probantes.

Cette montre ayant été mise en marche par les procédés habituels, je constatai d'abord que le réglage était grandement facilité par suite d'une régularité de marche peu commune. Déposée à l'observatoire de Besançon après très peu de temps et peu de retouches, cette montre obtint un bulletin de 1re classe constatant que l'écart moyen de la marche diurne n'avait atteint que $\frac{26}{100}$ de seconde.

Ce résultat était suffisant pour intéresser quiconque sait mettre de côté une présomption devant une preuve. Aussi, persuadé que je n'étais pas en face d'une simple curiosité, mais bien dans la voie d'un réel progrès, j'entrepris l'étude approfondie des nouvelles conditions dans lesquelles se trouve cette montre par suite de l'introduction des ajustements à billes dans son rouage.

Je vais avoir l'honneur de vous signaler les avantages que j'ai pu constater et résultant de la substitution du roulement sur billes au frottement des pivots habituels :

Premier avantage. — Une liberté de chacun des mobiles inconnue jusqu'ici; et cela malgré la suppression de tout jeu et en tout sens.

De plus, si l'on considère que la résistance due au frottement est proportionnelle aux pressions exercées sur les surfaces en contact, tandis que la résistance

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

au roulement d'une bille est sensiblement constante quelle que soit la pression, on conclura que la différence de liberté de deux mobiles ajustés l'un sur billes et l'autre à friction s'augmentera d'autant plus que ces mobiles dans leur travail subiront des pressions plus considérables.

Deuxième avantage. — La position de l'axe d'un mobile ajusté sans aucun jeu est parfaitement assurée; par suite, la fonction de ce mobile sera plus régulière et plus constante; que ce soit pour la transmission de la force quand il s'agit du rouage, ou lorsque l'application en sera faite aux mobiles de l'échappement pour le travail si important et si précis de ces organes.

Troisième avantage. — Les diverses applications des roulements sur billes qui ont été faites depuis environ quinze ans ont prouvé que ce système entraîne la suppression presque complète de l'usure.

On peut donc s'attendre à une grande stabilité des conditions de liberté, de meilleur rendement et de régularité énumérées ci-dessus.

Quatrième avantage. — Une conservation de l'huile qui ne dépend plus que de la nature de l'huile elle-même, le roulement n'étant pas comme le frottement capable d'en modifier la composition, et l'huile ne se chargeant plus des atomes de métal désagrégés par l'usure. Du reste, le déplacement des billes empêche la stagnation toujours si défavorable à la conservation de l'huile et une couronne de billes peut retenir beaucoup d'huile sans qu'il soit à craindre qu'elle se répande au dehors.

Les divers éléments de supériorité que je viens d'énumérer sont rendus probants par l'expérience de la première montre à billes, ce sont des faits acquis. Voyons maintenant ceux que j'espère obtenir ultérieurement par la construction d'une seconde pièce dans laquelle les organes de l'échappement seront eux-mêmes ajustés sur billes.

Au point de vue du réglage de précision qui est, en Chronométrie, le but, le couronnement de l'édifice, les avantages précités réduisent naturellement l'écart moyen de la marche diurne; je suis certain de réduire encore cet écart en ajustant sur billes l'axe même d'un balancier.

Il est évident que le jeu qui est nécessaire à la liberté d'un balancier avec pivots à friction a une influence sur le réglage. Ce jeu atteint généralement $\frac{2}{100}$ de millimètre; les pivots font plus ou moins parfaitement le tour des parois des trous dans lesquels ils sont retenus, ce qui produit sur le réglage le même effet qu'un agrandissement du rayon de giration du balancier, soit un retard. Cet effet varie suivant la position de la montre, les secousses qu'elle reçoit et pour une quantité d'autres motifs qu'il serait trop long d'énumérer et qui, tous, produisent inévitablement des variations qui disparaîtront lorsque j'aurai obtenu un balancier libre et sans aucun jeu.

Enfin, un point sur lequel je me permets d'attirer particulièrement votre attention et qui me semble des plus intéressants à constater est relatif au réglage de la montre observée en position horizontale, puis en position verticale, c'est-à-dire ce que les régleurs nomment le *réglage du plat au pendu.*

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Comme on sait, l'axe d'un balancier est muni actuellement de deux pivots qui reposent sur leurs côtés cylindriques lorsque la montre est placée verticalement et sur l'extrémité d'un pivot dans les positions horizontales. De là une différence très appréciable dans la longueur des arcs d'oscillation du balancier dans l'un ou l'autre cas. C'est pour ce motif que les régleurs éprouvent certaines difficultés à amener la moyenne des marches en positions verticales égales à celle des marches en positions horizontales.

Avec le roulement sur billes cette différence disparaîtra entièrement, les points de contact étant exactement les mêmes, quelle que soit la position de la montre.

Il en résulte que le réglage du plat au pendu ne dépendra absolument plus que de l'équilibre des organes régulateurs : balancier et spiral.

Le degré de précision atteint par les instruments actuels et la difficulté croissante, en raison même de cette précision, qu'il y a de dépasser les résultats déjà obtenus, font que le plus petit pas dans la voie du progrès peut être considéré comme un pas de géant. C'est pourquoi la Maison L. Leroy et C^ie^, à laquelle j'ai l'honneur d'appartenir, n'a pas hésité à tenter l'assaut de la perfection par cette voie toute nouvelle. Cette tentative me semble intéressante et je crois qu'on ne peut qu'applaudir à l'initiative qui dirige ces efforts et souhaiter que le succès vienne les couronner.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

LE PRIX D'UN CHRONOMÈTRE

ET

SA VALEUR SCIENTIFIQUE,

PAR

Le Dr KAISER.

Messieurs,

Depuis l'année 1889, la recherche des chronomètres et la manière de s'en servir à bord des navires de guerre n'ont pas changé chez nous. J'ai eu alors le grand plaisir d'expliquer aux membres du Congrès chronométrique en quoi consiste la manière d'agir en cette matière.

L'application continue des méthodes expliquées dans ce temps-là a donné des résultats inattendus, lesquels me semblent dignes d'être soumis au jugement des membres du Congrès chronométrique de ce nouveau siècle.

Le but à atteindre avec ces instruments de précision, la connaissance de la longitude du lieu quand l'heure locale à bord est déterminée, doit être obtenu, de nos jours, avec une très grande précision et à bon marché, si possible.

Un facteur principal est le prix d'un chronomètre, de sorte qu'on puisse demander de quoi dépend la qualité de la somme qu'on a payée. Je crois avoir le droit de me former une opinion arrêtée sur cette question importante, à cause des résultats que j'ai obtenus, depuis 1889 et avant, avec des chronomètres d'un prix très différent.

La Marine néerlandaise fait usage de chronomètres de :

	Prix fr
Negus, de New-York	2060
Leroy, de Paris	1000 et 1500fr
Russell, de Liverpool	984
Mc Gregor, de Glasgow	960
Hohwü, d'Amsterdam de Casseris, d'Amsterdam Seckel, de Rotterdam	860
Bröcking, de Hambourg	796
Parkinson and Frodsham, de Londres	720
Pennington, de Londres	600

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Pendant longtemps, j'ai examiné des chronomètres de tous ces fabricants à la Vérification des instruments nautiques, après quoi ils ont servi à bord. Après nettoyage et réparation, ils ont été de nouveau examinés à la Vérification pour les remettre en état de servir à bord une seconde fois et ainsi de suite.

Une dizaine de chronomètres de Pennington ont été achetés en 1868 et d'autres sont d'une date postérieure. Les plus anciens chronomètres, dont les observations ont assez de valeur, ont été achetés en 1860.

C'est un fait bien connu que la confection des chronomètres dépend de leur prix. En général, on peut dire qu'on ne s'est pas donné autant de peine pour les chronomètres d'un bas prix que pour les chronomètres d'un haut prix, et la question est de savoir à quelles parties inférieures on a sacrifié. Si l'on a la prudence de travailler avec beaucoup de soin l'échappement et avec moins de soin le mouvement proprement dit, il est possible de satisfaire aux conditions requises, pourvu que le balancier et le spiral soient de forme ancienne, sans les appareils, pour la compensation auxiliaire.

Le résultat obtenu de mes observations, depuis quarante ans, m'a dit qu'il n'existe pas de différence en qualité scientifique entre les chronomètres à bas prix et ceux à haut prix, pourvu qu'on ait le soin de faire un usage pratique des pièces longtemps après l'achèvement; de les faire nettoyer et réparer à temps et de les entretenir proprement.

Il reste toujours des défauts dans l'exécution des chronomètres, que les constructeurs peuvent éviter par une très grande prudence, et ces défauts-là sont probablement les causes des sautes singulières qui gâtent plus ou moins quelques chronomètres. Malheureusement l'homme est imparfait et, par suite, l'œuvre qu'il produit est imparfaite. Beaucoup de ces défauts mécaniques deviennent moindres quand le chronomètre a été plusieurs fois nettoyé et réparé, et c'est pourquoi on peut conjecturer que les chronomètres qui ont servi longtemps, et pourvu qu'ils soient bien entretenus, satisfont beaucoup mieux au but que les chronomètres neufs.

Il est évident que la méthode de Lieussou ne peut satisfaire si l'accélération n'a pas encore cessé et que le spiral ne soit pas encore venu dans l'état où l'élasticité ne s'augmente ou se diminue graduellement.

S'il est possible de donner aux axes mobiles une friction roulante, comme M. Leroy l'a en effet exécuté dans ses montres à billes, on a fait faire de grands pas à la pratique; une partie de l'erreur dans la marche diurne, à cause de l'isochronisme imparfait, est alors amoindrie et ces marches diurnes obéissent beaucoup mieux à la formule de Lieussou.

Naturellement je ne parle ici que des fabricants de chronomètres d'une renommée indiscutable, qui prétendent construire des pièces d'une exactitude mathématique et scientifique; mais les défauts mécaniques, qui se trouvent dans leurs chronomètres, sont d'un ordre tellement supérieur, qu'un simple horloger ne s'en puisse même faire une idée. Après un examen préalable, on découvre assez vite les grands défauts; mais, ceux qui sont presque invisibles, ce sont les défauts presque incorrigibles qui puissent rendre un chronomètre parfaitement inutile pour la détermination des longitudes.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

La marche diurne d'un chronomètre de bonne qualité doit rester de la même valeur pendant plusieurs années ou bien pouvoir être représentée par une formule simple, dans laquelle ne se trouvent que des facteurs qu'on peut déterminer aisément. Si la marche dépend seulement de la température ambiante et qu'on puisse déterminer cette température avec une assez grande exactitude, la question est, à mon avis, résolue. D'ailleurs, on peut conserver la même température artificiellement et réduire l'influence de la température à la marche diurne, de telle manière que le chronomètre, comme j'ai eu le plaisir de le démontrer en 1889, obtient une marche presque égale à celle d'une excellente pendule astronomique et, par conséquent, l'usage d'une formule ne sera plus nécessaire. La chose importante à faire, c'est de construire un appareil dans lequel la température se maintient bien à la température de compensation. La difficulté à vaincre, c'est de faire fonctionner l'appareil à bord d'un navire de guerre.

Le moyen pour indiquer minutieusement, et avec le secours de chronomètres, les différences en longitude est donc de donner aux chronomètres la simplicité nécessaire et aux parties principales une exécution aussi parfaite que possible; de mettre ces pièces dans une enceinte dont la température ne varie que très peu et de ne faire usage de chronomètres qu'assez longtemps après leur achèvement.

Je n'ai pas tenu compte de l'influence du magnétisme, de l'humidité et de la pression de l'air, parce que ces influences-là sont trop petites pour pouvoir être déterminées avec une exactitude satisfaisante dans l'état actuel de la Science et de la pratique.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

PENDULE A RESTITUTION ÉLECTRIQUE CONSTANTE,

PAR

M. C. FÉRY.

L'application de l'électricité à l'horlogerie n'a généralement pas pour but la recherche d'un réglage meilleur; on se propose le plus souvent de maintenir en concordance un certain nombre de cadrans récepteurs, ou de supprimer l'opération du remontage à la main par l'emploi d'électromoteurs appropriés.

Cependant, quelques tentatives ont été faites dans le but d'annuler certaines causes perturbatrices inhérentes à l'horlogerie mécanique et, en particulier, les frottements variables avec l'oxydation de l'huile.

Le pendule de Froment, créé dans ce but, peut servir de type à un certain nombre d'appareils où le principe commun est de soulever un poids ou bander un ressort au moyen d'un électro-aimant et d'employer le travail constant ainsi accumulé à l'entretien du mouvement.

J'ai étudié en détail, il y a quelques années, les causes pour lesquelles ce principe n'a pas donné les résultats qu'on en attendait. Les deux principaux défauts de ce genre d'appareils sont les suivants :

1° La présence du poids ou du ressort servant à la restitution et qui viennent peser sur le pendule pendant une partie de sa course trouble complètement l'isochronisme;

2° Il est très difficile de supprimer tout frottement entre le pendule et la pièce flexible qui amène le courant; or, le point de contact ne pouvant être lubrifié, il en résulte un grippement assez grand et éminemment variable entre les deux parties métalliques qui viennent en contact.

Ces deux causes perturbatrices suffisent à expliquer les variations obtenues qui peuvent être considérables.

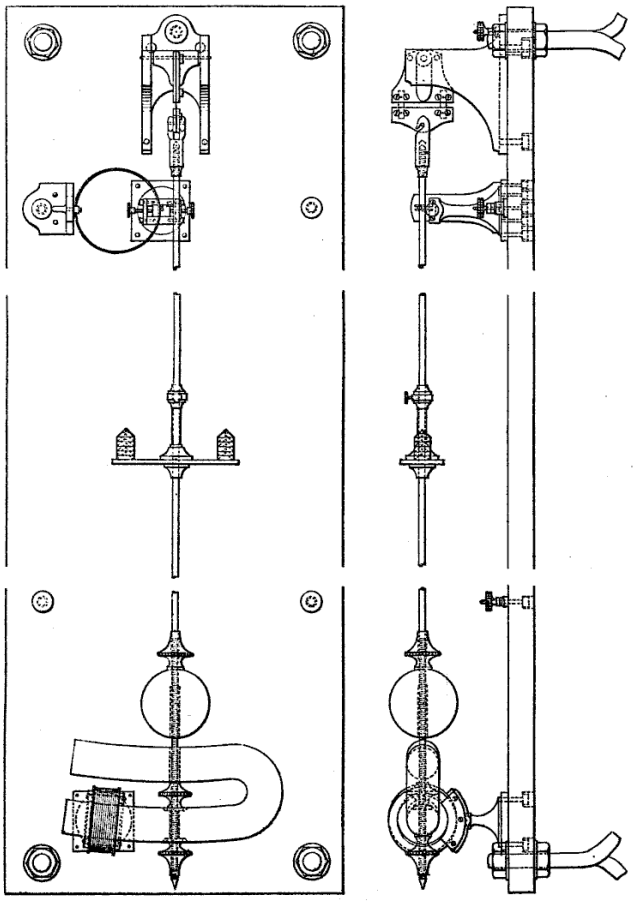
Aussi, pour éviter tous ces ennuis, ai-je abandonné complètement tous les moyens mécaniques d'entretien; néanmoins, la restitution purement électrique que j'emploie a la propriété de fournir, à chaque oscillation, une impulsion constante au pendule, et cela indépendamment de la constance de la pile qui peut même être du type Leclanché.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Aucune des pièces fixées sur le bâti du pendule n'est mobile, ce qui évite toute vibration de la suspension.

Dans son mouvement, le pendule vient simplement pousser le petit ressort rond R (constitué par un fil d'acier méplat servant à la fabrication des spiraux des chronomètres), puis le dépose sur la goupille G_1 qu'on peut régler horizontalement au moyen d'une glissière visible sur la *fig.* 2.

Fig. 1. Fig. 2.



Ce léger ressort ne permet aucun frottement au point de contact, grâce à sa mobilité dans tous les sens; d'autre part, on peut le régler de manière à améliorer

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

l'isochronisme pour les grands arcs (1), ce qui est toujours une bonne condition, la puissance réglante croissant comme la force vive emmagasinée.

Mais la partie intéressante et nouvelle de l'appareil réside surtout dans le restituteur. Les deux contacts que fait le ressort K du pendule avec les points P et G (*fig.* 1) ont pour effet de donner à la palette C_1C_2, mobile en O, un mouvement synchrone de celui du pendule. Ce mouvement résulte des attractions et des répulsions qui s'exercent entre les pôles de l'aimant A_1 et la partie de l'armature entourée par la bobine B_1 qui la polarise par les courants reçus du pendule. La rupture du courant a lieu sur les ressorts r_1 et r_2 et des précautions spéciales sont prises pour éviter les étincelles destructives.

Quoi qu'il en soit, les contacts du pendule ne servent qu'à fermer le courant qui se trouve rompu au restituteur, *il n'y a donc pas d'étincelle au pendule* qui peut être mis dans un vase clos, car on n'a jamais à nettoyer ses contacts; on peut, d'ailleurs, les mettre en route, sans ouvrir la caisse qui le renferme, en exécutant de l'extérieur des mouvements rythmés convenables avec un aimant ou une pièce de fer qui réagit sur l'aimant NS formant la masse oscillante.

On conçoit facilement qu'il soit possible d'utiliser le mouvement de la palette C_1C_2 à l'entretien du pendule. Dans ce but, un second aimant, A_2, placé à l'autre extrémité de la palette, induit, par le déplacement de cette dernière, des courants dans la bobine B_2 qui est reliée électriquement à la bobine B fixée au bâti du pendule.

La quantité d'électricité induite à chaque oscillation de la palette est donc constante et tout à fait indépendante du courant de la pile circulant dans l'autre circuit.

Grâce à cet arrangement, j'ai pu réaliser les conditions théoriques nécessaires à un entretien rationnel :

1° Restituer au pendule une quantité constante à chaque oscillation et cela dans la verticale;

2° Perturber le moins possible l'isochronisme par la prise du contact.

Voici quelques marches obtenues en prenant comme horloge étalon le pendule des caves de l'Observatoire. Les comparaisons ont été faites par M. Bigourdan.

On voit qu'à part les deux premiers jours l'erreur n'a jamais été supérieure à $0^s,15$; il faut en retrancher une variation possible de quelques centièmes de seconde que peut faire l'horloge des caves, et aussi l'erreur inévitable de comparaison.

---

(1) Ce fait était connu et avait déjà été employé par certains horlogers. Voici les résultats obtenus sur un pendule à demi-secondes de mon système :

Amplitude en millimètres.	Marche du pendule libre.	Pendule avec ressort.	Le même (autre réglage du ressort).
	s		
14	+11,5	+9,0	+9,0
16	+ 6,0	+4,0	+2,0
18	0,0	0,0	0,0
20	— 6,5	—2,0	+1,0
22	—14,0	—4,0	+6,0

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Dates.	Heure sidérale.	Différence avec l'horloge étalon.	Différence calculée.	Erreur.
	h m s	s		s
10 juillet.....	4.58.24	6,60	6,38	+0,22
	12.40.24	6,40	6,28	+0,12
11 »	4. 8. 9	6,35	6,10	+0,25
	16.32.30	6,00	5,96	+0,04
12 »	3.37.14	5,80	5,82	—0,02
	17.23.40	5,60	5,66	—0,06
13 »	3.52.35	5,50	5,54	—0,04
	18.47.15	5,40	5,38	+0,02
14 »	4. 8. 0	5,30	5,26	+0,04
16 »	4. 6. 6	4,60	4,70	—0,10
	11.29.53	4,60	4,60	0,00
17 »	5.22.56	4,40	4,40	0,00
18 »	5.29.42	4,10	4,12	—0,02
	11.28.40	4,00	4,03	—0,03
19 »	5.25.11	3,70	3,83	—0,13
20 »	4.40.17	3,65	3,58	+0,07
	12.48.20	3,50	3,48	+0,02
21 »	4.39.32	3,40	3,30	+0,10
	15.49.37	3,30	3,17	+0,13
23 »	14.41.18	2,60	2,62	—0,02
24 »	4.27.53	2,60	2,45	+0,15
25 »	3.55.54	2,15	2,19	—0,04

Il serait bien intéressant, ainsi que M. Lippmann et M. Bigourdan lui-même m'y ont engagé, de comparer entre eux deux pendules identiques de ce système, et cela au moyen d'un chronographe électrique; la plus grande erreur observée représenterait alors le double de la variation d'un des appareils.

La marche de ce pendule est, comme on le voit, comparable à celle des meilleures horloges astronomiques; ce résultat est atteint d'une façon très simple et à peu près indépendante du fini de la construction. Au contraire, dans les pièces mécaniques, la précision est subordonnée à l'exécution matérielle, ce qui explique le prix élevé des régulateurs.

J'espère que le bon marché relatif auquel mon appareil peut atteindre, joint aux avantages présentés par les systèmes électriques, permettra d'en étendre l'emploi et de faire bénéficier l'horlogerie civile d'une précision qui, sans être indispensable, est toujours avantageuse.

Qu'il me soit permis, en terminant, de remercier bien vivement M. le Directeur de l'Observatoire de l'autorisation qu'il m'a donnée d'installer mon appareil dans les caves, et aussi M. Bigourdan qui a bien voulu s'intéresser à cette expérience et n'a pas craint même de faire deux comparaisons par jour.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

DÉTERMINATION

DES

CONSTANTES DES FORMULES DES MARCHES

PAR LE CALCUL.

ÉTUDE SUR LES MÉTHODES DE TOBIE MAYER ET DE CAUCHY,

PAR

M. GOEDSEELS.

I. — Préliminaires.

M. Caspari termine dans les termes suivants le Chapitre relatif aux formules et lois des marches de son intéressant Aide-Mémoire intitulé : *Les chronomètres de marine :*

« Mais au total, et en éliminant les perturbations accidentelles, la formule de Lieussou ou celle d'Yvon Villarceau,

$$m = m_0 + at + a't^2 + b\theta + c\theta^2 + dt\theta \tag{1}$$

représentera généralement très bien, après coup, et pour des périodes pouvant aller à dix-huit mois ou deux ans, l'ensemble des marches observées. »

Lorsqu'on veut déterminer les constantes m_0, a, a', b, c, d par le calcul, on doit nécessairement faire usage de l'une ou l'autre des méthodes qui font l'objet de la théorie des erreurs d'observation.

On sait que la méthode des moindres carrés, surtout lorsqu'elle est appliquée à des équations telles que (1), à six inconnues, donne lieu à des calculs tellement laborieux qu'on dispose rarement du temps ou du personnel nécessaire pour les entreprendre, et qu'on est obligé d'avoir recours, dans ces conditions, soit à la méthode de Cauchy, soit à celle de Tobie Mayer.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

On sait aussi que ces deux dernières méthodes, quoique moins compliquées que celle des moindres carrés, donnent cependant lieu à des calculs suffisamment importants pour qu'on se demande, avant de les entreprendre, si les avantages qu'on peut espérer en tirer valent bien la peine de préférer les méthodes en question aux procédés beaucoup plus simples basés sur les tracés graphiques.

Notre étude a pour but d'exposer le fruit de nos recherches sur la méthode de Tobie Mayer et sur celle de Cauchy, et de fournir ainsi au lecteur tous les éléments d'appréciation nécessaires pour se prononcer en connaissance de cause, le cas échéant, entre ces méthodes et les procédés graphiques. Elle contient, outre les préliminaires, cinq paragraphes distincts :

Le paragraphe II est consacré à l'exposé de quelques principes communs aux deux méthodes.

Le paragraphe III traite de la méthode de Tobie Mayer, telle que l'inventeur l'a exposée.

Le paragraphe IV s'occupe d'une forme de la méthode de Mayer, exposée par M. Caspari, dans son *Cours d'Astronomie pratique* (2e Partie, p. 301), et qui a complètement détrôné, à tort selon nous, la forme primitive. Nous distinguerons ces deux formes en donnant à la première le nom de *méthode originale* et à la seconde le nom de *forme moderne*.

Le paragraphe V fait connaître une simplification importante que nous avons introduite dans la forme moderne.

Enfin le paragraphe VI traite de la méthode de Cauchy.

II. — Principes.

La méthode des moindres carrés, celle de Tobie Mayer et celle de Cauchy déduisent d'une série d'équations de conditions linéaires,

$$(2)\qquad \begin{cases} A_1 = a_{11}x + b_{11}y + c_{11}z + \ldots + v_{11} = 0, \\ A_2 = a_{12}x + b_{12}y + c_{12}z + \ldots + v_{12} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_n = a_{1n}x + b_{1n}y + c_{1n}z + \ldots + v_{1n} = 0, \end{cases}$$

dont les termes $v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}$ sont affectés d'erreurs, un système d'équations finales dont le nombre est égal à celui des inconnues, et dont les solutions sont adoptées pour valeurs finales des inconnues.

Ces valeurs finales sont des fonctions linéaires des termes $v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}$, telles que

$$(3)\qquad V_1 v_{11} + V_2 v_{12} + V_3 v_{13} + \ldots + V_n v_{1n}.$$

On a beaucoup exagéré l'efficacité de ces méthodes. Voici, à notre avis, tout ce qu'on peut dire de positif à ce sujet :

Les équations finales sont déduites des équations (2) en additionnant celles-ci membre à membre de diverses façons.

Il est clair que l'on court ainsi la chance de voir les erreurs, dont les termes v_{11},

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

$v_{12}, \ldots, v_{1n}$ sont affectés, se compenser plus ou moins, et d'aboutir à des solutions finales plus ou moins précises.

Mais il ne faut pas que, en se procurant des chances pour que les erreurs se compensent, on s'expose à ce que ces mêmes erreurs s'accumulent.

Le seul moyen *certain* d'éviter cette accumulation d'erreurs est de combiner les équations de condition, de manière que la valeur finale (3) obtenue pour une inconnue quelconque, x par exemple, soit une *moyenne* entre les diverses valeurs $x_1, x_2, \ldots$ qu'on obtiendrait pour la même inconnue en choisissant au hasard les équations finales parmi les équations de condition.

Il résulte du théorème de Van Geer (*voir*, par exemple, *Théorie élémentaire des déterminants*, par M. P. Mansion, p. 60, n° 78) que si l'on désigne $x_1, x_2, x_3, \ldots$ respectivement par $\frac{M_1}{N_1}, \frac{M_2}{N_2}, \frac{M_3}{N_3}, \ldots$, la valeur finale de x fournie par la méthode des moindres carrés vaut $\frac{N_1^2 x_1 + N_2^2 x_2 + N_3^2 x_3 + \ldots}{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + \ldots}$. L'accumulation des erreurs est donc évitée dans cette méthode. Nous aurons à examiner ce qu'il en est sous ce rapport des deux autres méthodes citées plus haut.

III. — Méthode originale de Mayer.

La méthode originale de Mayer a été exposée par son inventeur dans un Mémoire intitulé *Abhandlung über die Umwälzung des Monds um seine Axe....* (*Kosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr* 1748; Wien, Nurnberg; 1750.)

Tous les coefficients d'une des inconnues valent l'unité, et les équations de condition sont classées implicitement, de manière que les coefficients d'une deuxième inconnue aillent en croissant. Si l'on désigne par m le nombre des inconnues, la première équation finale est obtenue en additionnant membre à membre les $\frac{n}{m}$ premières équations de condition, classées comme il vient d'être indiqué.

La seconde équation finale est obtenue en additionnant membre à membre les $\frac{n}{m}$ équations de condition suivantes, et ainsi de suite.

La justification que Mayer donne de sa méthode est de pur sentiment. Nous avons essayé de démontrer que l'accumulation des erreurs y est impossible, mais nous n'y sommes parvenu que pour les équations à deux inconnues. Pour démontrer l'efficacité de la méthode dans ce cas simple, il n'est pas nécessaire de rendre tous les coefficients d'une inconnue égaux à l'unité; il suffit de multiplier par -1 les équations de condition dans lesquelles x a des coefficients négatifs et de ranger ensuite ces équations de manière que les quotients $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots$ aillent en croissant, ce qui se reconnaît très souvent sans faire aucune opération numérique.

Soient

$$a_1 x + b_1 y + p_1 = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + p_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

les équations de condition dont la somme a fourni la première équation finale, et

$$\begin{aligned} &\alpha_1 x + \beta_1 y + \pi_1 = 0, \\ &\alpha_2 x + \beta_2 y + \pi_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

les équations de condition dont la somme a fourni la seconde équation finale. La valeur finale de x, par exemple, sera

$$(4) \qquad \mathbf{X} = \frac{-\begin{vmatrix} p_1+p_2+\ldots, & b_1+b_2+\ldots \\ \pi_1+\pi_2+\ldots, & \beta_1+\beta_2+\ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1+a_2+\ldots, & b_1+b_2+\ldots \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots, & \beta_1+\beta_2+\ldots \end{vmatrix}} = \frac{\sum -\begin{vmatrix} p_s, & b_s \\ \pi_t, & \beta_t \end{vmatrix}}{\sum \begin{vmatrix} a_s, & b_s \\ \alpha_t, & \beta_t \end{vmatrix}}.$$

Si l'on désigne par $\mathbf{X}_{s,t}$ la valeur de x obtenue par la résolution des équations

$$\begin{cases} a_s x + b_s y + p_s = 0, \\ \alpha_t x + \beta_t y + \pi_t = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{X}_{s,t} = \frac{-\begin{vmatrix} p_s, & b_s \\ \pi_t, & \beta_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_s, & b_s \\ \alpha_t, & \beta_t \end{vmatrix}},$$

on a

$$-\begin{vmatrix} p_s, & b_s \\ \pi_t, & \beta_t \end{vmatrix} = \mathbf{X}_{s,t} \begin{vmatrix} a_s, & b_s \\ \alpha_t, & \beta_t \end{vmatrix},$$

d'où, en vertu de la relation (4),

$$(5) \qquad \mathbf{X} = \frac{\sum \mathbf{X}_{s,t} \begin{vmatrix} a_s, & b_s \\ \alpha_t, & \beta_t \end{vmatrix}}{\sum \begin{vmatrix} a_s, & b_s \\ \alpha_t, & \beta_t \end{vmatrix}}.$$

Par hypothèse, les rapports $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2} \ldots, \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2} \ldots$ vont en croissant, et les dénominateurs $a_1, a_2 \ldots, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ sont positifs; on a donc toujours

$$\frac{\beta_t}{\alpha_t} > \frac{b_s}{a_s},$$

d'où

$$\begin{aligned} a_s \beta_t - b_s \alpha_t &> 0, \\ \begin{vmatrix} a_s, & b_s \\ \alpha_t, & \beta_t \end{vmatrix} &> 0, \end{aligned}$$

et l'on voit, par la relation (5), que la valeur finale **X** est une moyenne entre les $\frac{n^2}{4}$ valeurs de $\mathbf{X}_{s,t}$.

Il résulte de là que l'accumulation des erreurs est certainement impossible

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

lorsqu'on applique la méthode originale de Mayer à des équations de condition à deux inconnues.

Dans les autres cas, on doit toujours se mettre en garde contre l'accumulation des erreurs. Une bonne précaution dans cet ordre d'idées est de ne jamais adopter les valeurs finales fournies par la méthode sans avoir calculé les résidus correspondants, c'est-à-dire les valeurs que prennent les premiers membres des équations de condition (2), et sans s'être assuré que tous ces résidus sont contenus dans un intervalle $(-\lambda, +\lambda)$ fixé d'avance eu égard au degré de précision qu'on désire atteindre.

Le calcul des résidus doit donc être considéré comme faisant en quelque sorte partie intégrante de la méthode de Mayer. La même remarque s'applique à la méthode moderne et à la méthode de Cauchy. Nous ne la reproduirons par conséquent plus dans la suite. Pour la méthode de Cauchy, ce serait du reste superflu, attendu que la connaissance des résidus est le fondement même de la méthode.

Lorsqu'on se trouve dans le cas de devoir se prononcer entre l'emploi de la méthode originale de Mayer et l'emploi des procédés graphiques, ou bien des autres méthodes numériques, on doit évidemment se rendre compte de l'ensemble des calculs que nécessitent les méthodes dont il s'agit.

Pour arriver à évaluer le degré de complication de ces calculs, nous attribuons la valeur 1 à une addition de deux termes et à une soustraction. D'autre part, considérant que les calculateurs font généralement usage de tables logarithmiques suffisamment précises pour rendre l'interpolation inutile, nous attribuons la même valeur 1 à la recherche d'un logarithme d'un nombre connu, et à l'opération inverse.

Ces conventions présentent évidemment quelque chose d'arbitraire. Elles ne constituent que des indications utiles, il est vrai, mais dont il ne faut pas exagérer la signification. Si l'on admet ces conventions, une somme algébrique de $\frac{n}{m}$ termes vaut $\frac{n}{m} - 1$, un produit vaut 4, etc....

Si l'on supprime, dans la méthode originale de Mayer, l'obligation, non justifiée, de rendre tous les coefficients d'une inconnue égaux à l'unité, et si l'on évalue les opérations inhérentes à cette méthode à l'aide des conventions ci-dessus, les équations finales étant résolues par élimination successive, on trouve

$(m+1)(n-m)$	pour le calcul des équations finales,
$\frac{4}{3}m(m^2+3m-1)$	pour la résolution des équations finales,
$5mn$	pour le calcul des résidus.

Nous n'entrerons pas dans le détail de ces évaluations. Le lecteur désireux de les vérifier pourra consulter une étude que nous avons publiée sur le même sujet dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XXIV, 2e Partie.

En somme, la méthode originale de Mayer représente donc comme opérations numériques

$$(m+1)(n-m)+\frac{4}{3}m(m^2+3m-1)+5mn. \tag{6}$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

IV. — Méthode moderne dite « de Mayer ».

Dans la méthode moderne dite *de Mayer*, on multiplie par — 1 les équations de condition où x a un coefficient négatif, et l'on détermine la première équation finale en additionnant ensuite les équations de condition membre à membre. Puis on détermine les autres équations finales en opérant successivement de même pour chacune des autres inconnues. En évaluant les calculs inhérents à cette méthode, y compris ceux qui sont nécessaires pour le calcul des résidus, on trouve

$$m(m+1)(n-1)+\frac{4}{3}m(m^2+3m-1)+5mn. \tag{7}$$

Nous apprécierons l'efficacité de la méthode en question en la considérant sous sa forme simplifiée, qui fera l'objet du paragraphe suivant.

V. — Méthode dite « de Mayer », simplifiée.

Si nous désignons par $A_1=0$, $A_2=0$ ..., $A_4=0$ les équations de condition après que les coefficients de x ont été rendus positifs; et si nous supposons, pour fixer les idées : 1° qu'il s'agisse de huit équations à trois inconnues; 2° que les signes des coefficients de la deuxième et de la troisième inconnue forment respectivement les deux séries suivantes dans $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\begin{array}{cccccccc} - & + & - & + & + & - & - & - \\ - & - & - & + & - & - & + & + \end{array}$$

les trois équations finales seront

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8=0, \\ -A_1+A_2-A_3+A_4+A_5-A_6-A_7-A_8=0, \\ -A_1-A_2-A_3+A_4-A_5-A_6+A_7+A_8=0. \end{cases} \tag{8}$$

En mettant les équations finales sous cette forme, on voit immédiatement qu'elles sont susceptibles d'une simplification considérable.

Ainsi, en additionnant successivement la première équation aux deux suivantes, et en divisant les résultats par 2, le système (8) devient

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8=0, \\ A_2+A_4+A_5=0, \\ A_4+A_7+A_8=0. \end{cases} \tag{9}$$

Celui-ci se simplifie à son tour et devient équivalent au suivant, lorsqu'on soustrait les deux dernières équations de la première,

$$\begin{cases} A_1+A_3-A_4+A_6=0, \\ A_2+A_4+A_5=0, \\ A_4+A_7+A_8=0. \end{cases} \tag{10}$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

On voit tout d'abord, grâce aux équations symboliques (8), que, si les signes des coefficients de deux ou de plusieurs inconnues se suivent dans le même ordre, deux ou plusieurs des équations finales sont identiques et la méthode n'est pas applicable.

Si nous laissons de côté ce cas particulier, les transformations indiquées par les systèmes (9) et (10) prouvent qu'on s'impose des calculs complètement inutiles en additionnant plusieurs fois de suite *toutes* les équations de condition membre à membre, attendu que le système simplifié (10) est équivalent au système (8). Si l'on a soin d'ajouter la première des équations (8) à chacune des suivantes ou de l'en retrancher selon que les signes — ou les signes + sont les plus nombreux dans ces dernières, et si l'on se borne à retrancher ensuite de la première équation (8) celle des nouvelles équations finales qui renferme le plus grand nombre de termes, les opérations nécessaires pour la détermination des équations finales sont au moins réduites de moitié.

Or les opérations sont représentées par le terme $m(m+1)(n-1)$ dans l'évaluation (7). Par conséquent les opérations inhérentes à la méthode telle que nous l'avons simplifiée valent l'expression suivante dans laquelle θ peut varier de 0 à 1 :

$$\frac{\theta}{2} m(m+1)(n-1) + \frac{4}{3} m(m^2+3m-1) + 5mn. \tag{11}$$

La simplification atteint donc au moins la valeur

$$\frac{1}{2} m(m+1)(n-1)$$

et vaut au moins, par exemple pour $n = 100$, $m = 6$, 2079, sur un total primitif de 7598.

Dans la pratique, cette simplification atteint le plus souvent des proportions bien plus considérables.

De même que pour la méthode originale, nous avons essayé vainement de montrer d'une manière générale que les solutions finales $x, y, \ldots$ sont des moyennes formées respectivement au moyen des valeurs

$$\begin{aligned} &x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \\ &y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et de prouver ainsi que l'accumulation des erreurs est impossible en appliquant la méthode moderne dite *de Mayer*. Nous n'avons réussi que pour les équations à deux inconnues.

Pour démontrer l'existence de la propriété relative à ce cas, désignons les équations de condition par

$$\begin{aligned} &a_1 x + b_1 y + p_1 = 0 = A_1, \\ &a_2 x + b_2 y + p_2 = 0 = A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\alpha_1 x - \beta_1 y + \pi_1 = 0 = A'_1, \\ &\alpha_2 x - \beta_2 y + \pi_2 = 0 = A'_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Les équations finales mises sous la forme (7) sont

$$A_1 + A_2 \ldots + A'_1 + A'_2 + \ldots = 0,$$
$$A_1 + A_2 \ldots + A'_1 - A'_2 - \ldots = 0.$$

Elles deviennent donc, après simplification,

$$A_1 + A_2 + \ldots = 0,$$
$$A'_1 + A'_2 + \ldots = 0,$$

et la valeur finale de x, par exemple, est donnée par une relation analogue à la formule (5), et qui est

$$X = \frac{\sum X_{s.t} \begin{vmatrix} a_s & b_s \\ \alpha_t & -\beta_t \end{vmatrix}}{\sum \begin{vmatrix} a_s & b_s \\ \alpha_t & -\beta_t \end{vmatrix}}$$

ou, en multipliant le numérateur et le dénominateur par -1,

$$X = \frac{\sum X_{s.t} \begin{vmatrix} a_s & -b_s \\ \alpha_t & \beta_t \end{vmatrix}}{\sum \begin{vmatrix} a_s & -b_s \\ \alpha_t & \beta_t \end{vmatrix}}.$$

Comme a_s, α_t, b_s, β_t sont positifs, chaque déterminant $(a_s\beta_t + \alpha_t b_s)$ l'est aussi; la valeur finale X est nécessairement une moyenne entre les diverses valeurs de $X_{s.t}$, et l'accumulation des erreurs est certainement impossible.

Dans le cas qui nous occupe, le nombre des valeurs de $X_{s.t}$ est égal à celui des combinaisons qu'on peut former en prenant une équation du groupe A_1, A_2, ..., et une équation du groupe A'_1, A'_2, ... Or, si l'on représente par $\frac{n}{2} \pm \frac{\varphi}{2}$ le nombre des termes du premier groupe, et, par suite, par $\frac{n}{2} \mp \frac{\varphi}{2}$ le nombre des termes du second groupe, $X_{s.t}$ aura $\left(\frac{n^2}{4} - \frac{\varphi^2}{4}\right)$ valeurs.

Par conséquent, chaque fois que φ sera différent de zéro, le nombre des valeurs $X_{s.t}$ embrassées par la valeur finale fournie par la méthode moderne sera inférieur au nombre $\frac{N^2}{4}$ des valeurs $X_{s.t}$ embrassées par la valeur finale de la méthode originale.

Si, de plus, comme ce sera souvent le cas dans la pratique, le terme $(m+1)(n-m)$ de l'évaluation (6) est notablement inférieur au terme correspondant

$$\frac{0}{2} m(m-1)(n-1)$$

de l'évaluation (11), on n'hésitera certainement pas à préférer la méthode originale à la méthode moderne simplifiée.

Dans les cas où le nombre des inconnues est supérieur à deux, nous ne connais-

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

sons aucune bonne raison qui puisse faire préférer l'une des deux méthodes à l'autre, et c'est par conséquent la comparaison des expressions $(m+1)(n-m)$ et $\frac{\theta}{2} m(m+1)(n-m)$ qui devra décider à laquelle des deux méthodes il convient d'accorder la préférence.

Nous avions donc raison en disant plus haut que c'est à tort que la méthode moderne a supplanté complètement la méthode originale.

VI. — Méthode de Cauchy.

La méthode de Cauchy part de ce principe qu'un système de valeurs $(x, y, z, \ldots)$ peut être considéré comme satisfaisant, du moment qu'il donne aux premiers membres des équations de condition

$$(12) \qquad \begin{cases} A_1 = a_{11}x + b_{11}y + c_{11}z + \ldots + v_{11} = 0, \\ A_2 = a_{12}x + b_{12}y + c_{12}z + \ldots + v_{12} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_n = a_{1n}x + b_{1n}y + c_{1n}z + \ldots + v_{1n} = 0, \end{cases}$$

des valeurs comprises toutes dans un intervalle $(-\lambda, +\lambda)$ fixé d'avance, eu égard au degré de précision qu'on désire atteindre.

La méthode en question se compose d'une série d'essais successifs.

Dans le premier essai, on réduit les équations de condition à la forme $ax + v = 0$. On pose donc en réalité $y = 0$, $z = 0$, ... Lorsqu'on n'arrive pas ainsi à une valeur satisfaisante pour x, en suivant la voie tracée par Cauchy, on ajoute un terme à chaque équation de condition, et on lui donne la forme $ax + by + v = 0$.

Lorsque ce deuxième essai ne réussit pas, on donne la forme $ax + by + cz + v = 0$ aux équations de condition, et ainsi de suite.

Il est évident qu'on peut faire ces essais successifs en appliquant une méthode de résolution quelconque, mais le but poursuivi par Cauchy a été de trouver une méthode telle que les calculs faits pour un essai quelconque font partie intégrante de ceux qui sont nécessaires pour l'essai suivant, et telle par conséquent que les calculs faits pour les essais infructueux ne soient jamais perdus.

Il est à peine besoin de remarquer que les essais successifs dont nous venons de faire mention s'imposent chaque fois qu'on désire donner aux premiers membres des équations de condition la forme la plus simple possible.

Pour bien montrer que la méthode de Cauchy jouit de la propriété indiquée plus haut, nous traiterons simultanément le deuxième et le troisième essai, et nous mettrons entre [ ] les calculs qui appartiennent exclusivement au troisième. Le fait seul que cette séparation est possible sera la preuve que le but poursuivi par Cauchy est réellement atteint (1).

Multiplions par -1 les équations de condition dans lesquelles x a un coefficient

(1) Les notations dont nous ferons usage nous paraissent préférables à celles qu'on emploie habituellement.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

négatif, additionnons-les ensuite membre à membre, et représentons le résultat auquel on arrive ainsi par

$$A = v_1 + a_1 x + b_1 y + [c_1 z] = 0. \tag{13}$$

On peut tirer de là

$$x = -\frac{v_1}{a_1} - y\frac{b_1}{a_1} - \left[z\frac{c_1}{a_1}\right]. \tag{14}$$

En introduisant cette valeur de x dans les n équations de condition, on obtient les équations nouvelles suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(v_{11} - a_{11}\dfrac{v_1}{a_1}\right) + y\left(b_{11} - a_{11}\dfrac{b_1}{a_1}\right) + \left[z\left(c_{11} - a_{11}\dfrac{c_1}{a_1}\right)\right] = 0, \\ \left(v_{12} - a_{12}\dfrac{v_1}{a_1}\right) + y\left(b_{12} - a_{12}\dfrac{b_1}{a_1}\right) + \left[z\left(c_{12} - a_{12}\dfrac{c_1}{a_1}\right)\right] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \left(v_{1n} - a_{1n}\dfrac{v_1}{a_1}\right) + y\left(b_{1n} - a_{1n}\dfrac{b_1}{a_1}\right) + \left[z\left(c_{1n} - a_{1n}\dfrac{c_1}{a_1}\right)\right] = 0. \end{array}\right. \tag{15}$$

Désignons ces équations respectivement par

$$\left\{\begin{array}{l} B_1 = v_{21} + y b_{21} + [z c_{21}] = 0, \\ B_2 = v_{22} + y b_{22} + [z c_{22}] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_n = v_{2n} + y b_{2n} + [z c_{2n}] = 0, \end{array}\right. \tag{16}$$

et opérons sur ces équations nouvelles comme nous l'avons fait précédemment pour les équations de condition. Nous trouvons ainsi

$$B = v_2 + b_2 y + [c_2 z] = 0, \tag{17}$$

$$y = -\frac{v_2}{b_2} - z\frac{c_2}{b_2}, \tag{17 bis}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(v_{21} - b_{21}\dfrac{v_2}{b_2}\right) + \left[z\left(c_{21} - b_{21}\dfrac{c_2}{b_2}\right)\right] = 0, \\ \left(v_{22} - b_{22}\dfrac{v_2}{b_2}\right) + \left[z\left(c_{22} - b_{22}\dfrac{c_2}{b_2}\right)\right] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \left(v_{2n} - b_{2n}\dfrac{v_2}{b_2}\right) + \left[z\left(c_{2n} - b_{2n}\dfrac{c_2}{b_2}\right)\right] = 0. \end{array}\right. \tag{18}$$

Désignons ces équations par

$$\left\{\begin{array}{l} C_1 = v_{31} + [z c_{31}] = 0, \\ C_2 = v_{32} + [z c_{32}] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_n = v_{3n} + [z c_{3n}] = 0. \end{array}\right. \tag{19}$$

Traitons de nouveau ces équations comme nous avons traité les équations $A = 0$ et ensuite les équations $B = 0$.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Nous trouvons ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} C = v_3 + zc_3 = 0, \\ z = -\dfrac{v_3}{c_3}, \end{array}\right. \tag{20}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} v_{41} = v_{31} - c_{31}\dfrac{v_3}{c_3} = 0, \\ v_{42} = v_{32} - c_{32}\dfrac{v_3}{c_3} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ v_{4n} = v_{3n} - c_{3n}\dfrac{v_3}{c_3} = 0. \end{array}\right.$$

Les équations finales de la méthode de Cauchy sont les équations (13), (17) et (20). Les termes $v_{41}, v_{42}, \ldots, v_{4n}$ sont les valeurs que prennent les premiers membres des équations de condition lorsqu'on en élimine successivement x, y, z par les équations finales. Il faut donc que ces termes soient compris tous dans l'intervalle $(-\lambda, +\lambda)$ pour que le système (x, y, z) déterminé par les équations finales soit satisfaisant.

Les termes $v_{31}, v_{32}, \ldots, v_{3n}$ sont les valeurs que prennent les premiers membres des équations de condition limitées à deux termes. La séparation des calculs est donc complète jusqu'au bout, et les calculs faits pour un essai infructueux font partie intégrante des calculs nécessaires pour l'essai suivant.

Avant d'apprécier la méthode de Cauchy, nous en transformerons les équations finales.

Considérons, à cet effet, une équation quelconque du groupe (15)

$$B_s = 0.$$

On a identiquement

$$B_s \equiv A_s - \frac{a_{10}}{S a_1} A. \tag{21}$$

Par conséquent, si l'on désigne par A' un polynome quelconque de la forme $\pm A_1, \pm A_2, \ldots, \pm A_n$, et par K' la constante correspondante $\dfrac{\pm a_{11} \pm a_{12} \pm \ldots}{S a_1}$, l'équation finale (17), $B = 0$, peut être mise sous la forme

$$A' + K'A = 0. \tag{22}$$

On prouverait de la même manière que l'équation finale (20) est identique à une équation de la forme

$$\begin{gathered} B' + K''B = 0, \\ A'' + K'''A + K^n B = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

La méthode de Cauchy conduit donc à des équations finales telles que

$$A = 0, \tag{13}$$

$$B = A' + K'A = 0, \tag{22}$$

$$A'' + K'''A + K''B = 0. \tag{23}$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

On peut ramener ces équations aux trois suivantes :

$$(24)\qquad \begin{cases} A = 0, \\ A' = 0, \\ A'' = 0, \end{cases}$$

lesquelles pourraient à leur tour être simplifiées d'une manière analogue à celle que nous avons imaginée pour simplifier les équations finales de la méthode moderne dite *de Mayer,* si l'on connaissait la succession des signes dans chaque polynome A, A′, A″.

Il n'a pas encore été démontré, que nous sachions, que les équations finales de Cauchy peuvent être ramenées, comme nous venons de le faire, à des équations de la forme (24). Cette particularité a néanmoins son importance, car rien ne prouve que la répartition des signes dans les équations (24) soit meilleure que la répartition des signes dans les équations finales de la méthode moderne dite *de Mayer* ou de la méthode originale.

On peut donc répéter pour la méthode de Cauchy, jusqu'à preuve du contraire, tout ce que nous avons dit au désavantage de ces deux autres méthodes. A l'avantage de ces autres méthodes, nous avons montré que l'accumulation des erreurs y est impossible dans le cas de deux inconnues. Nous n'avons pas pu constater l'existence d'une propriété analogue pour la méthode de Cauchy (1).

Il faudrait donc, pour que cette dernière méthode méritât la préférence sur les autres, qu'elle fût beaucoup plus simple au point de vue des calculs. Nous allons comparer la méthode de Cauchy à la méthode originale de Mayer en nous plaçant sur ce terrain.

La méthode de Cauchy vaut comme calcul (*voir* l'Appendice)

$$(25)\qquad mn(3m+4)+2m(2m-1).$$

Rien n'empêche, évidemment, de faire, à l'aide de la méthode originale de Mayer, les mêmes essais successifs que ceux qui constituent la méthode de Cauchy.

Pour obtenir l'évaluation des calculs composant ces essais successifs, il suffit, évidemment, de faire successivement $m = 1, 2, 3, \ldots, m$ dans l'évaluation (6) et d'additionner les divers résultats.

Au lieu de faire cette évaluation générale, nous procéderons numériquement en considérant successivement les cas d'une, de deux, de trois, etc., inconnues; et nous résumerons nos conclusions dans le Tableau suivant :

---

(1) Nous avons réussi à combler ultérieurement cette lacune. Voir *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 25e année, p. 146.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Nombre des inconnues.	Méthode originale de Mayer.	Essais successifs (Mayer).	Méthode de Cauchy.
1.....	$7n + 2$	"	$7n + 2$
2.....	$13n + 18$	$20n + 20$	$20n + 12$
3.....	$19n + 56$	$39n + 76$	$39n + 30$
4.....	$25n + 124$	$64n + 200$	$64n + 56$
5.....	$31n + 230$	$95n + 530$	$95n + 90$
6.....	$37n + 382$	$132n + 912$	$132n + 132$
7.....	$43n + 588$	$175n + 1500$	$175n + 182$
8.....	$49n + 856$	$224n + 2356$	$224n + 240$

On voit par ce Tableau que dans les cas où l'on doit faire tous les essais successifs dont il a été question plus haut, la méthode de Cauchy est beaucoup plus simple que celle de Mayer. En revanche, dans les cas où le nombre des inconnues est fixé d'avance, et où ce sont par conséquent les évaluations de la deuxième colonne qui entrent en ligne de compte, la supériorité revient incontestablement au procédé de Mayer.

Dans les applications de formules (1) relatives aux marches des chronomètres, par exemple, où l'on se décide à considérer dès le début les six constantes, la méthode de Mayer est de beaucoup préférable à celle de Cauchy.

Il nous reste, pour terminer notre appréciation, à faire deux remarques importantes :

1° Rien dans l'exposé de la méthode de Cauchy, pas plus que dans l'exposé des méthodes de Mayer, ne permet d'affirmer que ces méthodes conduisent nécessairement à des valeurs finales satisfaisantes dans les cas où de semblables valeurs existent. On ne peut donc pas poser en fait qu'il n'existe pas de valeurs satisfaisantes si, dans un cas concret donné, ces méthodes n'en fournissent pas;

2° Lorsque deux ou plusieurs des séries

$$\begin{aligned} &a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{13}, \quad \ldots, \\ &b_{21}, \quad b_{22}, \quad b_{23}, \quad \ldots, \\ &c_{31}, \quad c_{32}, \quad c_{33}, \quad \ldots \end{aligned}$$

présentent la même succession de signes, deux ou plusieurs des équations finales (24) sont identiques et la méthode de Cauchy ne peut être appliquée.

Dans la pratique, on opère non sur ces équations (24), mais bien sur les équations finales (13), (17) et (20); de plus les différents termes y sont calculés approximativement avec un certain nombre de décimales. Il est donc pratiquement impossible de s'assurer au moyen des équations (13), (17) et (20) si l'on se trouve dans un cas où le système (24) présente des équations identiques et où la méthode n'est pas applicable; et il est indispensable de ne jamais appliquer la méthode sans avoir la certitude que les signes ne se suivent pas dans le même ordre dans les séries indiquées plus haut.

Cette remarque importante n'a pas encore été faite que nous sachions. Nous la signalons à l'attention spéciale du lecteur.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

APPENDICE.

Évaluation des calculs de la méthode de Cauchy.

Chacune des sommes v_1, a_1, b_1, ... de l'équation finale (13) représente $(n-1)$ opérations de valeur 1. La formation de cette équation finale vaut donc $(m+1)(n-1)$. Chaque quotient, tel que $\frac{v_1}{a^1}$, vaut 4 et chaque binome, tel que $v_{2s} = v_{1s} - a_{1s}\frac{v_1}{a_1}$, vaut 5. La formation de l'équation (14) vaut $4m$ opérations, et la formation des équations (15) en vaut $5mn$.

L'ensemble des équations (13), (14) et (15) vaut donc

$$(26) \qquad (m+1)(n-1)+4m+5mn = 3m(2n+1)+(n-1).$$

Comme ces opérations se renouvellent m fois en diminuant chaque fois m d'une unité, l'ensemble de toutes ces opérations vaut

$$S[3m(2n+1)+(n-1)] = mn(3m+4)+\frac{m}{2}(3m+1).$$

Il reste à résoudre les équations finales.

L'équation (20) est toute résolue.

L'équation (17 *bis*) comprend une addition algébrique, le second membre renferme un produit de deux facteurs, dont le second est un quotient. Mais le logarithme de ce quotient a été déterminé antérieurement. Le produit n'exige donc plus que les quatre opérations simples de tout produit de deux facteurs. En somme, l'équation (17 *bis*) exige en tout cinq opérations.

L'équation (14) exige cinq opérations de plus, et la même progression continuerait s'il y avait plus d'inconnues. La résolution des équations finales vaut donc en tout

$$5[1+2+\ldots+(m-1)] = 5\frac{m(m-1)}{2}.$$

En additionnant ce résultat à l'expression (26), on trouve au total

$$mn(3m+4)+2m(2m-1).$$

NOTE ADDITIONNELLE.

Nous croyons compléter utilement le travail qui précède en y ajoutant le texte ci-dessous d'une Communication que nous avons faite à la Société scientifique de Bruxelles, en janvier 1901, sur une simplification de la méthode de Cauchy.

A cet effet, nous rappellerons d'abord la méthode en l'appliquant à des équations de condition à trois inconnues

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x + b_{11}y + c_{11}z + m_{11} = 0, \\ a_{12}x + b_{12}y + c_{12}z + m_{12} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}x + b_{1n}y + c_{1n}z + m_{1n} = 0, \end{cases}$$

sans entrer dans aucune justification au sujet des calculs.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

La première équation finale s'obtient en rendant tous les coefficients de x positifs, et en additionnant ensuite les équations de condition membre à membre.

Nous représenterons cette première équation finale par

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + m_1 = 0. \tag{2}$$

On déduit de là

$$x = -y\frac{b_1}{a_1} - z\frac{c_1}{a_1} - \frac{m_1}{a_1}. \tag{3}$$

On introduit ensuite cette valeur de x dans chacune des équations (1), et l'on trouve une série d'équations de la forme

$$y\left(b_{1s} - a_{1s}\frac{b_1}{a_1}\right) + z\left(c_{1s} - a_{1s}\frac{c_1}{a_1}\right) + \left(m_{1s} - a_{1s}\frac{m_1}{a_1}\right) = 0,$$

s variant de 1 à n.

Nous désignerons ces équations par

$$b_{2s}y + c_{2s}z + m_{2s} = 0.$$

On traite ces nouvelles équations de la même manière que l'on a traité les équations (1). On trouve ainsi la deuxième équation finale

$$b_2 y + c_2 z + m_2 = 0, \tag{4}$$

et ainsi de suite.

La méthode de Cauchy adopte pour valeurs des inconnues les solutions des équations (2), (4), etc., dont le nombre est évidemment égal à celui des inconnues.

C'est dans la formation des équations finales qui suivent l'équation (2) que réside notre simplification.

Il est facile de voir que si l'on fait la somme des coefficients tels que $b_{1s} - a_{1s}\frac{b_1}{a_1}$, on obtient

$$b_1 - a_1\frac{b_1}{a_1} = 0.$$

Mais, cette somme peut être décomposée en deux parties renfermant l'une, les coefficients de la série b_{21}, b_{22}, b_{23}, ... correspondant aux équations multipliées par -1; et l'autre, les coefficients restants.

On a donc, en désignant ces deux parties respectivement par b'' et b',

$$b' + b'' = 0.$$

On a, en outre,

$$b_2 = b' - b''.$$

Donc

$$b_2 = 2b' = -2b''.$$

La même propriété

$$c_2 = 2c' = -2c''; \qquad m_2 = 2m' = -2m''$$

existe pour les autres termes qui figurent dans l'équation (4). Il résulte de là qu'il

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

est inutile d'additionner ensemble toutes les équations telles que

$$b_{2s}y + c_{2s}z + m_{2s} = 0,$$

après avoir rendu tous les coefficients de y positifs, et qu'on peut former l'équation (4) en additionnant seulement soit les équations où il y a des coefficients positifs, soit les autres équations.

Il est à peine besoin de remarquer qu'on additionnera, dans la pratique, le groupe qui renferme le moins d'équations.

La même simplification se présente pour la formation des équations finales suivantes.

Exemple. — Soient les équations :

$$\begin{aligned} x + y + z + 1 &= 0, \\ 2x - 2y + 2z - 1 &= 0, \\ 3x + y - z &= 0, \\ 2x - 2y + 3z + 2 &= 0. \end{aligned}$$

La première équation est

$$8x - 2y + 5z + 2 = 0.$$

On en déduit

$$x = \frac{1}{4}y - \frac{5}{8}z - \frac{1}{4}.$$

Introduisant cette valeur dans les équations de condition, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}y + \frac{3}{8}z + \frac{3}{5} &= 0, \\ -\frac{6}{4}y + \frac{6}{8}z - \frac{6}{4} &= 0, \\ \frac{7}{4}y - \frac{23}{8}z - \frac{3}{4} &= 0, \\ -\frac{6}{4}y + \frac{14}{8}z + \frac{6}{4} &= 0. \end{aligned}$$

La somme des termes de chaque colonne est égale à zéro. Par conséquent, il suffit d'additionner la première équation et la troisième, ou la deuxième et la quatrième. On trouve ainsi

$$3y - \frac{20}{8}z = 0, \qquad \text{d'où} \qquad y = \frac{10}{12}z.$$

En introduisant cette valeur de y dans les quatre équations précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{68}{48}z + \frac{3}{4} &= 0, \\ -\frac{24}{48}z - \frac{6}{4} &= 0, \\ -\frac{68}{48}z - \frac{3}{4} &= 0, \\ \frac{24}{48}z + \frac{6}{4} &= 0. \end{aligned}$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Ici encore, la somme de la première et de la quatrième équation

$$\frac{92}{48}z + \frac{9}{4} = 0$$

conduit au même résultat que si l'on avait changé les signes des équations où z a un coefficient négatif et additionné ensuite les quatre équations.

Évaluation des calculs. — Nous avons vu dans notre Travail que la méthode de Cauchy exige

$$m^2\frac{21n+6}{4} + m\frac{15n-8}{4} + \frac{n}{2}.$$

On peut mettre cette expression sous la forme

$$\frac{11m^2+15m+2}{4}n + 4m^2 - 2m.$$

La méthode simplifiée n'exige plus que

$$(3m^2+4m)n + 4m^2 - 2m$$

opérations.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

LES ACIERS AU NICKEL

ET

LEURS APPLICATIONS A LA CHRONOMÉTRIE,

PAR

M. CH.-ED. GUILLAUME.

Les propriétés physiques des alliages employés dans l'industrie varient, en général, entre des limites assez étroites, et ce sont surtout leurs propriétés mécaniques, combinées avec leur prix de revient, qui déterminent les conditions de leur emploi industriel.

Seuls, jusqu'ici, les aciers au nickel font exception. Doués de propriétés inattendues ne rappelant en rien celles des métaux constituant ces alliages, et qui élargissent considérablement les limites de celles qui étaient jusqu'ici connues, possédant, en plus, des propriétés mécaniques et chimiques qui n'apportent aucune restriction à leur usage industriel, ils permettent de prévoir diverses combinaisons irréalisables avec aucun autre alliage usuel. En Chronométrie, leur emploi semble devoir prendre une grande importance, évidente pour tout praticien, s'il connaît le détail de ces propriétés. Je me propose de les exposer tout d'abord dans leur ensemble, puis je donnerai quelques indications sur les conditions d'emploi de ces alliages.

PREMIÈRE PARTIE.

PROPRIÉTÉS DES ACIERS AU NICKEL.

Propriétés magnétiques. — Un examen rapide des aciers au nickel fait tout d'abord ressortir la grande diversité de leurs propriétés magnétiques. Tandis que certains d'entre eux sont aussi magnétiques que le fer, plus magnétiques même dans des champs très intenses, d'autres ne présentent pas la moindre trace de sensibilité à l'aimant.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

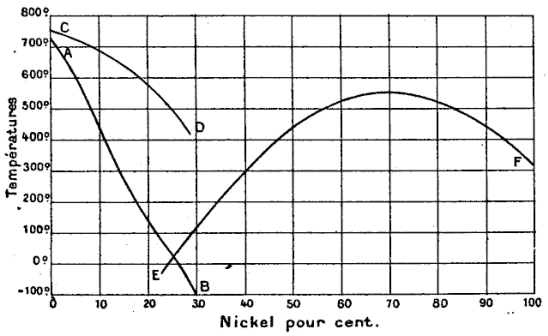
De plus, des variations même peu étendues de la température peuvent modifier considérablement cette sensibilité. En général, le magnétisme de ces alliages augmente à mesure qu'on les refroidit, l'augmentation pouvant être appréciée dans un intervalle de température de plusieurs centaines de degrés. Mais la manière dont le magnétisme apparaît ou disparaît peut différer du tout au tout, suivant la teneur de l'alliage en nickel, en carbone, en chrome ou en manganèse.

Pour simplifier, nous ne considérerons ici que des alliages de fer et de nickel, additionnés de très petites quantités d'ingrédients étrangers nécessaires pour les rendre bien homogènes et facilement malléables, c'est-à-dire ne dépassant pas sensiblement 1 pour 100 au total.

Dans ces conditions, on constate tout d'abord que les aciers au nickel peuvent appartenir à deux catégories bien distinctes : les uns, dont le magnétisme apparaît à une température déterminée, et augmente comme il vient d'être dit lorsque la température s'abaisse davantage, peuvent repasser par la même série de températures sans que le magnétisme acquis au refroidissement varie sensiblement. Pour les autres, le magnétisme qui s'est manifesté au refroidissement s'annule lorsqu'on réchauffe, sans qu'on puisse observer de différence bien sensible entre les valeurs de la susceptibilité magnétique, soit que l'alliage parte d'une température plus élevée, soit au contraire qu'il vienne d'une température plus basse. Les premiers alliages peuvent être appelés *irréversibles,* les seconds *réversibles.*

Ces propriétés ont été signalées pour la première fois, il y a une dizaine d'années, par J. Hopkinson. Les recherches expérimentales de MM. Osmond, Le Chatelier, G. Dumont, L. Dumas, et celles de l'auteur de ce Rapport, les ont fait mieux connaître. Le diagramme (*fig.* 1) qui les résume en donne une idée nette.

Fig. 1.



Les teneurs en nickel sont ici portées en abscisses, et, en ordonnées, les températures d'apparition ou de disparition du magnétisme. Les deux courbes AB, CD, indiquent, la première, la région des températures où les propriétés magnétiques font leur première apparition au refroidissement; la seconde, celle où ces propriétés disparaissent complètement au réchauffement. De plus importantes additions de carbone ou de chrome abaissent surtout la courbe inférieure, au point de

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

faire passer au-dessous de la ligne de 0° une portion croissant de droite à gauche à mesure que la proportion de ces additions va en augmentant.

La courbe EF (1) correspond à la première apparition du magnétisme au refroidissement et à la disparition des dernières traces au réchauffement. Ainsi que M. Dumas l'a montré récemment, les courbes se croisent, de telle sorte qu'un alliage contenant, par exemple, 28 pour 100 de nickel peut subir d'abord la transformation réversible puis la transformation irréversible. Un refroidissement modéré lui communique le magnétisme passager; un refroidissement plus énergique, le magnétisme permanent.

Propriétés mécaniques. — De petites additions de nickel améliorent en général les aciers en les rendant plus homogènes et en augmentant leur allongement à la rupture; en un mot, elles rendent le métal plus sûr, ce qui fait rechercher ces aciers pour toutes les pièces de mécanisme qui, tout en pouvant supporter une faible augmentation de prix, doivent posséder le maximum de sécurité.

Des additions plus considérables de nickel accentuent d'abord ces modifications, puis finissent par les dénaturer complètement.

D'une manière générale, on peut dire que les aciers irréversibles à l'état non magnétique sont des métaux doux, tandis qu'ils sont beaucoup plus durs et plus secs à l'état magnétique, de telle sorte, par exemple, que le chrome, qui agit en général comme durcissant de l'acier, peut devenir un adoucissant lorsqu'il entre comme addition à 2 ou 3 pour 100 dans un acier contenant plus de 20 pour 100 de nickel. Dans ces conditions, la région de transformation étant refoulée vers des températures très basses ou même inaccessibles, l'alliage reste non magnétique en toutes circonstances et, par conséquent, relativement doux.

Les alliages réversibles sont généralement très doux, faciles à laminer, à étirer, à raboter et à limer. Cependant tout traitement qui comprime le métal l'écrouit assez fortement et élève sa limite élastique. Entre un alliage réversible recuit et laminé, il existe, au point de vue de la limite élastique, des différences analogues à celles que l'on constate dans le laiton aux états correspondants.

Le travail mécanique précipite la transformation des alliages irréversibles. Ainsi un alliage qui ne passerait à l'état magnétique que bien au-dessous de 0° devient magnétique, aux températures ordinaires, par quelques passes de laminage ou de tréfilage.

L'état non magnétique de ces alliages est donc, à la température ordinaire, un état instable, que les alliages quittent aussitôt que l'on donne, par un malaxage mécanique, une mobilité suffisante aux molécules.

Certains aciers au nickel sont remarquables par leur ténacité. Ainsi, il n'est pas rare de rencontrer des aciers à haute teneur en nickel et contenant un peu de chrome, donner une charge de rupture peu inférieure à 100^{kg} par millimètre carré, avec un allongement de l'ordre de 50 pour 100. On a même signalé, dans les aciéries d'Imphy, une éprouvette allongée successivement de 30 pour 100 dix fois de suite avec un recuit précédant chaque essai de traction, et ne rompre finalement

(1) M. Osmond sépare cette courbe en deux, correspondant à la disparition et au retour du magnétisme. Je n'ai pas observé de différence sensible entre les deux phénomènes.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

qu'après un allongement de 42 pour 100, portant ainsi à 242 pour 100 l'allongement total subi entièrement à froid.

Ces propriétés imposent quelques précautions dans le travail du métal. Cette remarquable ténacité s'oppose à l'arrachement des copeaux, et les outils les plus durs s'usent rapidement lorsqu'ils travaillent trop vite. Mais en travaillant lentement, avec des outils robustes et bien trempés, on ne rencontre pas de difficultés sérieuses dans les opérations ordinaires d'ajustage des pièces d'acier-nickel.

Le module d'élasticité des alliages irréversibles diminue à mesure qu'augmente la teneur en nickel; il est moindre à l'état magnétique qu'à l'état non magnétique.

Celui des alliages réversibles diminue graduellement de 25 à 36 pour 100, où il passe par un minimum, puis augmente ensuite pour rejoindre graduellement le module du nickel pur. Le minimum est de 15 tonnes par millimètre carré, à peu près égal, par conséquent, aux deux tiers de celui qu'indiquerait la loi des mélanges.

Particularité très digne de remarque, et sur laquelle je reviendrai : la variation thermique du module des aciers irréversibles durs n'est que le tiers environ de celle de l'acier, ainsi qu'il résulte des observations faites sur des spiraux de ces alliages, notamment par M. Paul Perret.

Je parlerai plus loin des variations très curieuses des alliages réversibles.

Dilatations. — En subissant la transformation magnétique, les aciers au nickel irréversibles augmentent de volume d'une manière permanente et ne reviennent au volume primitif qu'en recoupant, aux températures élevées, la courbe de passage à l'état non magnétique. A ce dernier état, leur coefficient de dilatation est très voisin de celui du laiton, tandis qu'à l'état magnétique maximum, il n'est pas très différent de celui de l'acier. Aux états intermédiaires, le coefficient de dilatation possède une valeur qui diminue en même temps que croît le magnétisme. Un même barreau de métal peut donc posséder, d'une manière permanente, et entre les mêmes limites de température, toutes les dilatations comprises entre $\frac{10}{1000000}$ et $\frac{18}{1000000}$ environ, suivant le degré de transformation qu'il a subi.

Tout acier réversible, au contraire, possède, à chaque température, une dilatation qui, au moins en première approximation, a une valeur unique, ne dépendant que de cette température et de la teneur de l'alliage, et non des températures antérieurement subies.

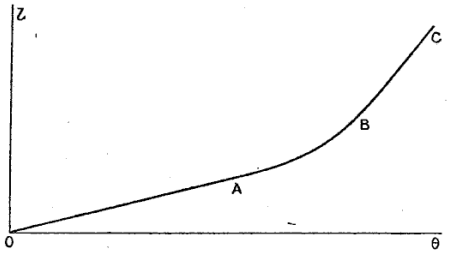
L'allure de ces dilatations est, d'ailleurs, très singulière. A l'état magnétique, les alliages d'une teneur comprise entre 29 et 50 pour 100, seuls étudiés jusqu'ici, possèdent une dilatation plus faible que n'indique la loi des mélanges; puis, lorsque la susceptibilité magnétique commence à tendre vers zéro, la dilatation augmente rapidement pour finir par atteindre, à l'état non magnétique, une valeur élevée. La courbe (*fig.* 2) montre la succession de ces trois phases, OA, AB et BC.

Quant à la valeur de la dilatation en fonction de la teneur, elle est donnée par le diagramme (*fig.* 3), dans lequel les courbes étagées correspondent à la série des températures 0°, 50°.... On voit que, entre 26 et 29 pour 100 environ, les alliages sont, déjà à la température ordinaire, plus dilatables que ne l'indique la loi des mélanges, par le fait qu'ils se trouvent dans la région AB ou même BC de la courbe précédente.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

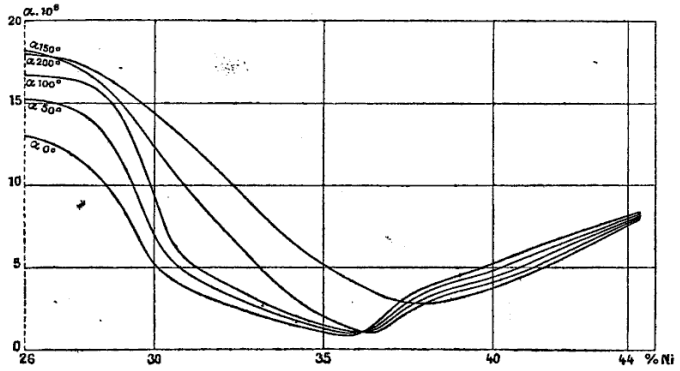
Puis, conformément au diagramme (*fig.* 1), la région de transformation magnétique s'élève avec la teneur, et les alliages reculent de plus en plus dans la région OA, atteignant le point A à des températures de plus en plus élevées.

Fig. 2.



La courbe correspondant à 0° s'abaisse considérablement vers 36 pour 100 de nickel, atteignant une ordonnée qui ne correspond plus qu'au dixième environ de la dilatation du platine, et l'on conclura, du diagramme (*fig.* 1), ce que l'expérience directe vérifie d'ailleurs, que cette dilatation très basse se maintient jusqu'au voisinage de 150°, pour entrer là dans la deuxième région.

Fig. 3.



L'écartement des courbes successives à mesure que la température s'élève montre le déplacement graduel de gauche à droite de la région AB, qui atteint la courbe de 200° vers 37 pour 100.

Dans toute la région comprise entre 36 et 46 ou 47 pour 100, les courbes s'étagent dans l'ordre inverse, le coefficient du terme dépendant du carré de la température dans la formule de dilatation étant négatif.

Les additions de chrome, de carbone, de manganèse augmentent la dilatation, et la proportion de ces ingrédients varie, en général, un peu d'une coulée à

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

l'autre. Le traitement mécanique des alliages peut aussi modifier leur dilatation, de telle sorte qu'il est plus intéressant de donner ici des résultats généraux que de citer des nombres précis qui ne peuvent se rapporter qu'à des coulées spéciales. Je dirai seulement que les plus faibles dilatations obtenues sont encore en dessous du minimum indiqué par le diagramme; mais ces résultats sont exceptionnels et ne peuvent être garantis.

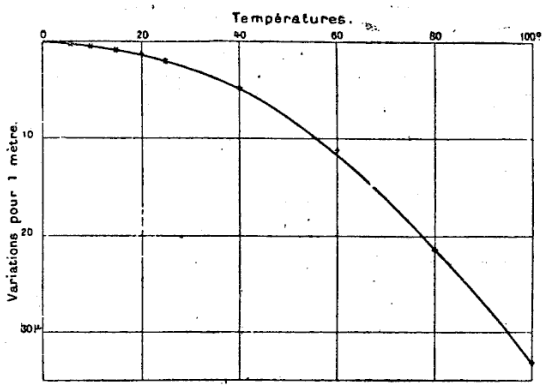
Variations passagères et permanentes de volume. — Bien que peu apparentes, ces variations ont une grande importance au point de vue de l'emploi des alliages dans les arts de haute précision, et notamment pour leurs applications à l'horlogerie; il convient donc d'en faire ici une étude approfondie que nous limiterons aux alliages réversibles.

Un alliage de cette catégorie, amené brusquement d'une température θ_1 à une autre température θ_2, ne prend pas immédiatement la longueur correspondant à la température actuelle, mais y arrive graduellement, après un temps souvent assez long. Lorsqu'il passe à une température supérieure à celle à laquelle l'alliage avait pris son état d'équilibre, il subit, à mesure que la température s'établit, une dilatation correspondant à sa teneur, puis se raccourcit ensuite légèrement. Dans le passage inverse, après s'être contracté, il augmente faiblement de longueur.

Il importe de connaître tout d'abord la différence entre les états que l'on observe au moment même de l'établissement de la nouvelle température et ceux qui s'établissent après un temps très long; puis aussi la rapidité avec laquelle se produit, à chaque température, le passage d'un état à l'autre.

J'ai déterminé ces éléments de la variation passagère sur un grand nombre d'échantillons de l'alliage le moins dilatable. La succession des états obtenus soit

Fig. 4.



par une variation absolument brusque, soit par une variation infiniment lente de la température, diffère ainsi que l'indique la courbe du diagramme (*fig.* 4). Les températures sont portées en abscisses, les variations résiduelles en ordonnées, en microns par mètre. On voit, par exemple, sur la courbe, que, si l'on porte

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

brusquement à 40° une barre ayant atteint son équilibre parfait à 0°, puis si l'on suit son mouvement à cette température, on verra la règle se raccourcir de $\frac{5}{1000000}$ environ. La courbe ayant une très forte courbure, les variations correspondant aux changements ordinaires de la température ambiante sont beaucoup plus faibles. Entre 0° et 100°, ces variations sont suffisamment représentées par

$$\Delta l = -0{,}00325.\ 10^{-6}\theta^2,$$

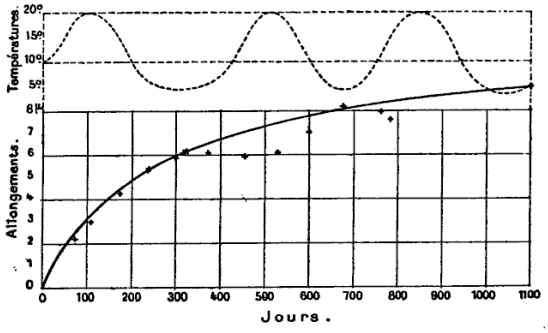
θ étant la température comptée à partir de 0°. Au sujet de la rapidité de la variation, je citerai seulement les nombres suivants :

La température passant de 0° à 25°, on commence à percevoir une différence au bout d'une vingtaine d'heures, et le mouvement, qui est au total de $\frac{1,5}{1000000}$ environ, s'accomplit entièrement en deux cents heures. Si l'on passe de la température ordinaire à 100°, on constate déjà, au bout de dix minutes, un raccourcissement de $\frac{10}{1000000}$, et le mouvement total est complètement effectué en moins d'une heure.

Lorsque la température baisse, les mouvements sont, à température finale égale, beaucoup plus lents que dans le premier cas. Si, par exemple, on passe de 100° à 60°, on observe un mouvement qui est, au début, de $0^{\mu},1$ environ par heure, pour une règle de 1^{m}, et ne s'arrête qu'au bout de trois cents heures. De 60° à 40°, le mouvement initial est de $0^{\mu},025$ par heure et ne s'arrête qu'après sept cents heures. A la température ordinaire, le mouvement est encore beaucoup plus lent.

Outre ces variations, qui se produisent lentement et en totalité au bout d'un temps suffisamment long, on en constate d'autres qui semblent différer en principe des premières et consistent en un allongement lent et graduel des barres, qui peut durer des années, en tendant graduellement vers une limite. Ces mouve-

Fig. 5.



ments s'effectuent d'autant plus rapidement que la température est plus élevée et ne parcourent leur cycle complet que lorsque l'alliage a été soumis à une série de recuits à des températures graduellement descendantes. La courbe (*fig.* 5) montre les variations subies par une barre de l'acier-nickel le moins dilatable, recuite

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

lentement de 150° à 40°, puis abandonnée pendant plusieurs années à la température du laboratoire. Les points du diagramme représentent les longueurs directement observées à la température de 15°, à laquelle la règle était toujours ramenée pour la mesure. Ces points forment une série de festons annuels, s'abaissant d'autant plus que la température ambiante, dont la marche est indiquée par la courbe pointillée supérieure, s'élève davantage. La courbe continue qui montre la marche avec le temps est tracée par les points correspondant aux températures ambiantes les plus basses. Les distances entre les points isolés et la courbe correspondent sensiblement aux dépressions dues aux écarts de température, telles qu'elles sont représentées dans le diagramme (*fig.* 4).

La courbe continue montre que, au bout de trois ans de repos, la règle s'était allongée d'une quantité un peu inférieure à $0^{mm},01$. Dans la troisième année, la variation n'était plus que de 1^{μ} environ.

Ces variations peuvent encore être réduites si, avant d'abandonner la règle à la température ambiante, on la maintient pendant quelques semaines entre 25° et 30°.

Les variations dont il vient d'être question se rapportent toutes à un alliage contenant environ 36 pour 100 de nickel. A mesure que la teneur augmente, ces variations diminuent. A 30 pour 100 de nickel, elles sont beaucoup plus considérables que celles qui viennent d'être indiquées. A 45 pour 100, elles sont tout à fait inappréciables.

De plus, ces variations sont relatives seulement aux barres travaillées à chaud. Les barres étirées à froid subissent des variations d'une autre nature, dues à la disparition graduelle des tensions intérieures par le recuit. Ce retour en arrière, à peu près insensible à la température ordinaire, se manifeste fortement à 100° par un raccourcissement graduel de la barre qui, une fois effectué, ne se poursuit plus aux températures inférieures, auxquelles une barre étirée, bien recuite à 100°, se comporte comme une barre forgée à chaud.

Propriétés diverses. — Il est intéressant de signaler la résistance très grande que les aciers-nickel d'une teneur supérieure à 30 pour 100 offrent à l'oxydation. Ils ne bleuissent qu'à une température bien supérieure à celle qui convient à l'acier.

A l'air humide, ils se conservent indéfiniment sans une tache de rouille. Plongés dans l'eau froide, ils peuvent y demeurer plusieurs jours sans que les surfaces polies présentent la moindre tache de rouille.

En revanche, les surfaces brutes ou préalablement attaquées par un acide sont beaucoup plus sensibles à l'oxydation par l'eau. Néanmoins, dans les plus mauvaises conditions, ils sont incomparablement plus résistants que le fer.

Les aciers à haute teneur en nickel peuvent être obtenus presque exempts de piqûres, même microscopiques. Ils prennent un très beau poli et supportent d'excellents tracés.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

SECONDE PARTIE.

APPLICATIONS.

Nous venons de voir qu'aucune des propriétés accessoires des aciers au nickel ne s'oppose aux emplois que leurs singularités permettent de prévoir. Presque aussi faciles à travailler que l'acier ordinaire, ne présentant aucun des multiples inconvénients qui résultent de la facile oxydabilité de ce dernier, d'un prix qui, bien que plus élevé, est encore assez modique pour n'intervenir que comme facteur de second ordre dans la fabrication des instruments de précision, généralement assez coûteux par eux-mêmes, ils permettent de prévoir des combinaisons mécaniques nouvelles que je me propose de passer rapidement en revue.

LE PENDULE.

Description. — La nécessité de remplir la double condition d'une parfaite liberté et d'un parfait ajustage dans les nombreuses tiges qu'il met en œuvre a fait presque complètement renoncer au pendule compensé à gril, qui a cédé la place dans ces dernières années au pendule à compensation mercurielle. Mais ce dernier possède aussi quelques défauts dus à la mobilité du mercure dans la portion du pendule qui est précisément soumise aux mouvements les plus étendus, à sa facile oxydabilité, à son évaporation sensible, suivie de sa condensation en gouttelettes, d'où résulte la possibilité d'une variation de la masse ou de la position du centre d'oscillation du pendule. Un dispositif mécanique qui, en utilisant un principe analogue, supprimerait l'emploi du mercure, permettrait de réaliser des progrès sensibles en évitant ces divers inconvénients.

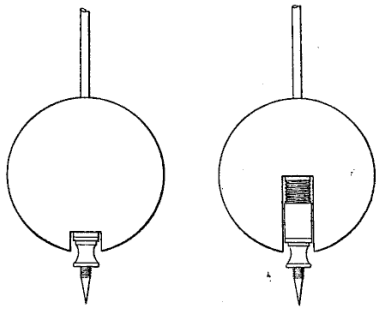
Or, un coup d'œil jeté sur le diagramme des dilatations (*fig.* 3) montre qu'il est extrêmement facile de trouver un métal qui, associé à une tige de l'acier-nickel le moins dilatable, présente une dilatation qui soit à celle de ce dernier dans un rapport semblable au rapport de la dilatation cubique du mercure à la dilatation linéaire de l'acier. On pourra donc réaliser, par un procédé analogue, la compensation complète, en n'utilisant que des métaux ou alliages solides.

Trois dispositifs mécaniques distincts ont été proposés pour arriver à ce résultat. Le premier en date, dont un modèle a été présenté au Comité international des Poids et Mesures en avril 1897, consiste (*fig.* 6ª) à disposer la lentille sur l'écrou de telle façon que sa dilatation de bas en haut compense la dilatation de haut en bas de la tige. Dans une description de ce pendule donnée dans le *Journal suisse d'horlogerie,* j'indiquais la possibilité d'entailler au besoin la lentille, ou d'intercaler entre la lentille et l'écrou, supposé du même alliage que la tige, une ou plusieurs cales de métal fortement dilatable, permettant de corriger, par l'étude des marches, la petite erreur commise dans la réalisation de la compensation.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Le deuxième dispositif, dû à M. Thury, fait intervenir un double cylindre fileté en laiton (*fig.* 6ᵇ) reposant sur l'écrou, et que l'on peut étendre ou raccourcir à volonté, de manière à modifier les mouvements qu'il communique à la lentille, reposant sur lui par son centre de gravité.

Fig. 6ᵃ. Fig. 6ᵇ.



Enfin, dans une combinaison un peu différente, M. Riefler substitue au cylindre extensible deux cylindres superposés, de métaux différents, dont la longueur totale est toujours la même, et dont les longueurs individuelles sont choisies de manière que leur dilatation totale ait la grandeur voulue.

Des pendules de ces trois systèmes ont été adaptés à de bonnes horloges en observation depuis quelques années; mais la pratique n'a pas encore donné des indications suffisantes permettant de recommander un système à l'exclusion des autres.

Tous trois peuvent encourir le reproche de ne donner la compensation que si la température au niveau de la lentille est égale à la température moyenne de la tige; mais la même critique peut être adressée au pendule à mercure de la forme ordinaire, avec cette circonstance aggravante que, dans ce pendule, l'erreur résultante est de dix à vingt fois plus grande, suivant la dilatation de la tige d'acier-nickel.

Déformations lentes. — Il convient, cependant, avant d'aller plus loin, de se rendre un compte exact des erreurs que pourront entraîner, dans la marche d'une horloge, les déformations de la tige non contenues dans la formule de dilatation déterminée par des variations rapides de la température.

Remarquons tout d'abord qu'une variation de 1 millionième dans la longueur de la tige entraîne un changement de 4 centièmes de seconde par jour dans la marche de l'horloge. Or le diagramme (*fig.* 5) nous montre que, si une tige d'invar a subi la série rationnelle des recuits, et si elle reste en repos pendant un an, elle n'éprouve plus, dans l'année qui suit, qu'une variation de 2 millionièmes et, dans la troisième année, qu'une variation deux fois moindre. Cette variation est, d'ailleurs, régulière et progressive, et les marches observées de l'horloge permettront une interpolation très sûre.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Cependant, à cette marche progressive s'en superpose une autre, due aux variations étendues de la température ambiante. Il convient de noter qu'une horloge convenablement installée, ne doit subir normalement que les variations saisonnières de la température, et que les variations diurnes doivent être atténuées de façon à ne comporter qu'un petit nombre de degrés. Dans ces conditions, et à ces petits écarts près, la tige reste très peu en retard de l'écart définitif correspondant à chacune des températures moyennes à toute époque de l'année. Pour cette application particulière, il conviendra de considérer le pendule comme arrivant, à chaque température, à la longueur définitive correspondante, c'est-à-dire qu'on devra calculer la compensation en partant d'une formule de dilatation corrigée de la quantité $-0{,}00325.10^{-6}\theta^2$. L'erreur qui pourra rester dans le résultat dépendra des écarts diurnes de la température par rapport à la température moyenne de la saison. Il est aisé d'évaluer cette erreur.

Supposons que, la température moyenne à une époque déterminée étant de 15°, l'écart diurne puisse atteindre 5 degrés dans les deux sens, ce que l'on pourra considérer comme un grand maximum. L'erreur entre la dilatation vraie et la dilatation admise pourra atteindre $0{,}5.10^{-6}$, correspondant à 2 centièmes de seconde par jour. Sur l'ensemble des 24 heures, la compensation sera encore plus parfaite, et sur les deux moitiés de la journée l'erreur ne sera guère que de 1 centième de seconde. Ces quantités, calculées pour un cas défavorable, sont certainement négligeables.

Les quelques craintes que pouvaient donner les variations lentes des aciers-nickel sont donc écartées, et la substitution des pendules qu'ils permettent de construire à ceux dont la compensation est obtenue par le mercure semble ne présenter que des avantages.

Je tiens cependant à insister encore sur la nécessité absolue, pour réduire les variations lentes aux valeurs indiquées ci-dessus, de recuire systématiquement les tiges à des températures graduellement décroissantes, depuis 100° jusqu'à la température ordinaire. On réalise les conditions les plus parfaites du recuit en débutant, par exemple, par une centaine d'heures à 100°, puis en laissant refroidir pendant un mois ou six semaines, de manière à prolonger d'autant plus le séjour à une température déterminée qu'elle est plus basse. Il est indifférent que le refroidissement soit continu, ou procède par petits sauts, de 10 à 20 degrés, surtout aux températures supérieures à 50°, qu'il soit fait en une seule fois ou qu'il soit interrompu, à la condition que, si l'on a atteint rapidement la température ambiante, on retourne à la dernière température de recuit pour refroidir lentement.

Pour des pendules de second ordre, des précautions aussi minutieuses deviennent superflues, et l'on obtiendra déjà une amélioration sensible en abaissant la température en deux ou trois jours de 100° à la température ordinaire, après une exposition de quelques heures à 100°. Les chaleurs ordinaires de l'été produisent aussi un recuit très efficace.

Une crainte a été exprimée au sujet de l'application au pendule de mesures faites sur des barres robustes soumises seulement aux efforts mécaniques résultant de leur propre poids, alors que les tiges de pendule supportent des tractions attei-

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

gnant exceptionnellement 200^{gr} par millimètre carré, et normalement la moitié de cette valeur. L'objection méritait d'être examinée de près. Pour pouvoir y répondre, j'ai étudié les variations de longueur d'un fil soumis à une traction permanente de 5^{kg} par millimètre carré et déterminé sa dilatation dans ces conditions. Dans des expériences ayant duré une quinzaine de jours, et dans lesquelles le fil a atteint les températures de 0° et 38°, il n'a présenté aucune variation permettant de conclure à un saut brusque ou à un allongement insolite. La même expérience, répétée à un an de distance avec un autre fil, a conduit au même résultat. Malgré les difficultés inhérentes à la mesure de la dilatation d'un fil tendu, les erreurs résiduelles des mesures ne permettent pas de conclure à des variations susceptibles de provoquer des changements supérieurs à 1 ou 2 centièmes de seconde par jour dans une horloge.

Assurément, la durée de ces expériences pouvait être considérée comme insuffisante; mais, d'une part, l'écart de température était environ double de celui auquel sont soumises les bonnes horloges, et la traction exercée sur le fil était 25 à 100 fois plus grande que celle à laquelle sont exposées les tiges de pendule; on peut donc être complètement rassuré sur ce point.

Calcul des éléments d'un pendule compensé. — Dans les calculs relatifs au pendule, on partira, pour les raisons précédemment indiquées, de la formule de dilatation par variation rapide de la température, corrigée de la quantité $-0{,}00325.10^{-6}\theta^2$. Puis, dans le choix de la pièce compensatrice, faisant ou non partie de la lentille, on tiendra compte, autant que possible, du rapport des deux coefficients de la formule de dilatation.

La succession des courbes du diagramme (*fig.* 3) montre que le rapport des deux coefficients forme, pour les aciers au nickel, une série continue de valeurs passant du positif au négatif. On pourra donc choisir, parmi les alliages, celui pour lequel le rapport des deux coefficients est sensiblement le même que pour la pièce compensatrice, ce qui assurera une compensation complète. Il faut remarquer, toutefois, que la correction du deuxième terme, nécessitée par les changements lents, fait reculer le point de croisement des courbes vers les faibles teneurs, ce qui obligera souvent, si l'on veut remplir la condition de compensation complète, à chercher, pour la pièce compensatrice, un alliage dont la dilatation diminue à température croissante, par exemple un acier à 45 pour 100 de nickel. Lorsqu'on voudra pousser aussi loin l'égalisation des effets de la dilatation, il faudra, de toute nécessité, déterminer directement, par des expériences très précises, la dilatation des diverses pièces du pendule. On peut observer toutefois que, sans précautions particulières, on se trouvera, en général, au point de vue de l'erreur secondaire, dans de meilleures conditions que pour la correction mercurielle d'un pendule à tige d'acier.

Le choix des alliages étant fait, on n'aura plus à tenir compte, dans le calcul, des deux coefficients des formules de dilatation des pièces, mais seulement de la dilatation vraie à une température moyenne.

Voici maintenant comment on peut arriver, par un calcul numérique très simple, à déterminer avec exactitude les dimensions de la pièce compensatrice :

Supposons la lentille ramassée en son centre de gravité, hypothèse insuffisante

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

pour le calcul de la longueur totale du pendule, mais suffisante pour le calcul de la compensation, et soient L la distance de ce point à l'axe de suspension, l la longueur comprise entre ce point et l'extrémité de la tige, λ la longueur de la pièce compensatrice, α_2, α_1 les coefficients de dilatation de cette pièce et de la tige; nous aurons d'abord, en négligeant la masse de la tige,

$$(1) \qquad (L' + \lambda')\alpha_1 = \lambda'\alpha_2 \qquad \text{d'où} \qquad \lambda' = \frac{L'\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

λ' étant une valeur provisoire de λ, L' une valeur de L, calculée par exemple comme pour le pendule simple. En possession de λ', nous pourrons immédiatement fixer l par des raisons de construction, en tenant compte de la longueur de l'écrou.

Désignons maintenant par M et m les masses de la lentille et de la tige, et par A leur rapport, toujours beaucoup plus grand que l'unité. Le pendule à seconde, que nous prendrons pour type, est défini par la condition

$$(2) \qquad \pi\sqrt{\frac{I}{S}} = 1,$$

I et S désignant respectivement le moment d'inertie et le moment statique du pendule complet.

Introduisant, dans cette relation, les valeurs de ces quantités et développant, on trouve, pour déterminer L en seconde approximation,

$$(3) \qquad g[(L + l) + 2AL] = \frac{2\pi^2}{3}[(L + l)^2 + 3AL^2].$$

Si l'on a à résoudre numériquement cette équation un grand nombre de fois, il convient de la mettre sous une forme pratique pour le calcul, en substituant à L l'expression $100 + \delta$, où δ est toujours très petit. Pour $g = 981$, toutes les grandeurs étant exprimées dans le système C.G.S., on trouve

$$(4) \qquad \delta = \frac{98{,}8 - 3{,}6A - 1{,}02l - 0{,}020l^2}{1{,}0 + 6{,}07A + 0{,}04l}.$$

Si g a une valeur sensiblement différente de celle qui a été admise, on corrigera L proportionnellement à l'écart relatif des deux valeurs. On peut maintenant recalculer λ' par la première formule.

La condition vraie de la compensation est la suivante :

$$(5) \qquad g\frac{I}{S} = \frac{\frac{1}{3}(L + l)^2 + AL^2}{\frac{1}{2}(L + l) + AL} = C,$$

C étant indépendant de la température; cette condition peut être écrite

$$(6) \qquad \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{I}{S}.$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Faisant varier chacun des termes de l'équation d'une quantité correspondante aux dilatations qui se produisent sur un intervalle de 1 degré, on aura, pour déterminer la seule inconnue λ, l'équation

$$\frac{4}{3}\frac{(L+l)^2\alpha_1+3AL(L\alpha_1+\lambda\alpha_1-\lambda\alpha_2)}{(L+l)\alpha_2+2A(L\alpha_1+\lambda\alpha_1-\lambda\alpha_2)}=C. \tag{7}$$

Mais nous connaissons déjà la valeur λ', très voisine de λ; nous pourrons donc poser

$$\lambda=\lambda'+\varepsilon,$$

et simplifier l'équation par la relation

$$L\alpha_1+\lambda'\alpha_1-\lambda'\alpha_2=0;$$

posant

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\beta,$$

on aura finalement

$$\frac{4}{3}\frac{(L+l)^2+3AL(1-\beta)\varepsilon}{(L+l)+2A(1-\beta)\varepsilon}=C, \tag{8}$$

d'où

$$\varepsilon=\frac{(L+l)[L(L+l)-3C]}{6A(2L-C)(\beta-1)}. \tag{9}$$

On voit, d'après l'équation (5), que C n'est pas très différent de L. Le principe même du pendule compensé impose une valeur de β beaucoup plus grande que l'unité; aucun des facteurs de l'expression ci-dessus n'est donc voisin de zéro, de telle sorte qu'on pourra, dans le calcul numérique, se limiter à un petit nombre de décimales pour toutes les grandeurs intervenant dans la formule, sans jamais commettre sur ε d'erreur affectant le résultat d'une façon appréciable.

Il faut enfin tenir compte de la suspension que, pour simplifier, nous avons négligée jusqu'ici.

Soient α_3 sa dilatation moyenne, s sa longueur, comptée depuis l'axe d'oscillation jusqu'à l'endroit où la tige commence à se dilater librement. Posons $\alpha_3-\alpha_1=\gamma$; on aura, comme première approximation de la longueur additionnelle de la pièce compensatrice annulant l'effet de la suspension,

$$\lambda_1'=\gamma\frac{s}{\alpha_2} \tag{10}$$

et, en seconde approximation, comme on trouve aisément en introduisant la dilatation des pièces dans l'équation (7),

$$\lambda_1=\gamma\frac{s}{\alpha_2}\left[1+\frac{1}{6A}\left(1+\frac{5l}{4}\right)\right]; \tag{10'}$$

le terme correctif de la parenthèse dépasse rarement 0,05 en pratique.

J'ajouterai une seule remarque concernant la suspension : la grande différence de dilatabilité de l'invar et des métaux usuels produit nécessairement des tensions

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

dans les pièces où cet alliage est enserré dans un métal ordinaire ou inversement. Dans les grands écarts de température, ces efforts peuvent dépasser ceux du serrage et donner lieu à des déplacements permanents. Le cas peut se présenter lorsque la tige d'invar d'un pendule est engagée, à son extrémité supérieure, dans une douille de laiton où elle est serrée et goupillée, et qui porte les crochets de suspension.

Pour éviter les variations de cette nature, M. Riefler, de Munich, qui a adopté depuis quelque temps pour ses horloges le pendule à tige d'invar, forme les crochets par fraisage aux dépens de cette dernière, à laquelle il donne, dans le pendule à seconde, un diamètre de 14^{mm}.

C'est probablement à l'inobservance de cette précaution que l'on doit certains sauts brusques constatés dans la marche de quelques horloges munies du nouveau pendule.

LE BALANCIER COMPENSATEUR.

Théorie de l'erreur secondaire. — Un emploi judicieux des aciers au nickel permet de résoudre très simplement la question de l'erreur secondaire des chronomètres, sans l'adjonction au balancier d'aucune compensation auxiliaire qui en complique la construction et constitue une cause fréquente de dérangement des marches.

L'erreur secondaire est due, comme on sait, en majeure partie, au terme de second ordre de la variation d'élasticité du spiral avec la température. Cette erreur dépend, en effet, dans une large mesure, de la nature du spiral; elle est environ quatre fois plus forte avec le spiral d'acier qu'avec celui de palladium, et l'on sait, d'autre part, que toutes les variations thermiques de l'acier sont affectées d'un terme de second ordre relativement important.

Le balancier lui-même peut, il est vrai, introduire un terme secondaire dans la compensation; mais il est ordinairement très petit. Nous allons voir qu'on peut modifier sa grandeur et son signe à volonté.

La variation du rayon de courbure d'une lame bi-métallique est exprimée, suivant Villarceau, par l'équation

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\theta - \theta_0}{h}, \tag{1}$$

ρ_0 et θ_0 désignant deux valeurs initiales correspondantes du rayon ρ et de la température θ. Dans cette expression, h désigne en abrégé

$$\frac{2}{3}\frac{e}{\alpha_2 - \alpha_1}\left[1 + \frac{(E_1 e_1^2 - E_2 e_2^2)^2}{4 e^2 e_1 e_2 E_1 E_2}\right],$$

e représentant l'épaisseur de la lame, e_1, e_2 les épaisseurs respectives de chacun des métaux, E_1, E_2 leurs modules d'élasticité.

Posons

$$B = \frac{(E_1 e_1^2 - E_2 e_2^2)^2}{4 e^2 e_1 e_2 E_1 E_2}, \tag{2}$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

et écrivons l'équation sous la forme

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{3(\alpha_2-\alpha_1)\Delta\theta}{2e'(1+B)}, \tag{3}$$

e' désignant le quotient $\frac{e}{\rho}$, ou l'*épaisseur relative* de la lame.

On voit immédiatement que la variation relative du rayon de courbure est proportionnelle à la différence des dilatations des deux parties de la lame et inversement proportionnelle à son épaisseur relative; c'est donc cette dernière quantité qui, dans les balanciers de dimensions différentes, assure la similitude des déformations, c'est-à-dire l'égalité d'action.

Le maximum de déformation est atteint lorsque $B = o$, ou lorsque

$$\frac{e_1}{e_2} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}, \tag{4}$$

condition indiquée pour la première fois par Villarceau.

Voyons d'abord comment les variations de B sont susceptibles d'influer sur l'erreur secondaire.

Supposons que, comme on le fait toujours en pratique, on ait cherché à réaliser la condition de Villarceau, mais que les quantités e_1 et e_2 s'en écartent respectivement de ε_1 et ε_2; on aura, dans ce cas,

$$B = \frac{1}{e^2\sqrt{E_1E_2}}(\varepsilon_1\sqrt{E_1} - \varepsilon_2\sqrt{E_2})^2, \tag{5}$$

expression montrant que, si les ε sont dus aux dilatations thermiques, la valeur de B dépendra du carré de la température. Mais ces quantités restent toujours bien en dessous du millième; B est donc toujours bien inférieur au millionième; et, comme les plus grands écarts à compenser restent en dessous de 500 secondes par jour, les termes quadratiques provenant des variations des épaisseurs sont absolument inappréciables. Il en est de même des changements dus aux variations des modules d'élasticité, bien qu'elles soient beaucoup plus considérables que les dilatations.

La détermination de l'erreur secondaire se réduira donc à la discussion de l'équation

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{3}{2e'}(\alpha_2-\alpha_1)\Delta\theta, \tag{6}$$

où la variabilité de ρ introduit encore une complication dont on peut se débarrasser.

Le document le plus sûr dont nous puissions nous servir pour chercher à corriger l'erreur secondaire est le résultat de l'observation des chronomètres munis de la compensation habituelle. Or nous nous proposons de substituer au balancier acier-laiton un autre balancier ayant la même action moyenne, mais une action

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

de second ordre un peu différente. Dans le nouveau balancier, la variation de l'épaisseur relative de la lame et la variation relative du rayon de courbure seront les mêmes que dans l'ancien et, s'il s'agit seulement de déterminer la différence des actions secondaires, nous pouvons négliger le terme commun aux deux balanciers. Le calcul pourra donc être fait comme si le rayon était constant au dénominateur du premier membre ainsi qu'au dénominateur de e'.

Le pouvoir compensateur du balancier est imposé par la nature du spiral. Ses deux éléments, de signes contraires, sont la variation de courbure de la lame et le mouvement radial de son point d'attache. Le premier de ces effets est environ douze fois plus grand que le second, et c'est celui d'où dépend la solution pratique du problème.

Les dilatations n'étant pas, en général, proportionnelles aux températures, nous pourrons développer l'expression des dilatations moyennes, et poser

$$\alpha_1 = a_1 + b\theta_1, \qquad \alpha_2 = a_2 + b\theta_2. \tag{7}$$

L'erreur secondaire entre deux températures, par exemple 0° et 2θ, est la différence entre la variation de marche entre 0 et θ, et la moitié de la variation entre 0 et 2θ; elle est exprimée par

$$S = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{2\theta} = -\frac{3}{2e'}(b_2 - b_1)\theta^2. \tag{8}$$

En désignant par Q l'action de la bilame imposée par le spiral, on aura

$$Q = \frac{\Delta\rho}{\rho\,\Delta\theta} = \frac{3}{2e'}(\alpha_2 - \alpha_1); \tag{9}$$

et, en introduisant cette valeur dans l'équation précédente, on trouve

$$S = Q\,\frac{b_2 - b_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\theta^2. \tag{10}$$

Cette équation nous montre que l'erreur secondaire due à la lame est proportionnelle à l'effet exigé d'elle, et proportionnelle au quotient de la différence des termes de second ordre dans les expressions de la dilatation par la différence des termes exprimant les dilatations moyennes. La proportionnalité au carré de la température provient uniquement du fait que nous avons adopté une formule du second degré pour les dilatations. En pratique, une expression de cette forme a suffi jusqu'ici à tous les cas dont nous pouvons avoir à nous occuper ici.

Exemples numériques. — Appliquons en premier lieu la formule qui précède au calcul de l'effet d'une bilame acier-laiton. Les mesures faites par M. Benoît à l'aide du dilatomètre Fizeau ont donné :

Acier..... $\alpha_1 = (10400 + 5{,}20\theta)10^{-9}$
Laiton..... $\alpha_2 = (18600 + 5{,}50\theta)10^{-9}$

En admettant que le spiral exige une correction moyenne de 11 secondes par

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

degré et par jour, on trouve, pour les balanciers de construction ordinaire, en tenant compte de l'effet propre du bras,

$$Q = 12^s,3,$$

d'où

$$S = 12,3\,\frac{0,3}{8200}\,\theta^2.$$

Faisant, comme à l'ordinaire, $\theta = 15$, il vient $S = 0,1$. On trouve aisément que la part du déplacement radial du point d'attache de la lame, dans l'erreur secondaire, est environ moitié moindre; celle due à la variation du moment d'inertie du bras est encore beaucoup plus petite.

D'autre part, l'observation directe des chronomètres nous enseigne qu'un spiral d'acier, compensé par un balancier acier-laiton, conserve une erreur secondaire de 2^s à $2^s,5$. Nous devrons donc choisir les métaux composant le balancier de telle sorte que la valeur de S donnée par l'expression (10) soit de cet ordre de grandeur. Les aciers au nickel nous donnent bien des moyens d'atteindre ce résultat. Le coefficient du terme quadratique de la dilatation variant depuis une valeur positive très grande jusqu'à une valeur négative, il suffira de choisir parmi eux, soit pour la partie extérieure, soit pour la partie intérieure de la lame, un alliage donnant avec tout autre métal ou alliage un quotient caractéristique convenable.

Mais, en pratique, la question se limite immédiatement. Les procédés actuels de fabrication des balanciers exigent le tournage très précis d'une plaque de l'un des métaux, dans laquelle on creuse une rainure qu'on remplit ensuite, par fusion directe, d'un alliage beaucoup moins réfractaire que le métal de la plaque. Après un nouveau tournage de la matière rapportée, le balancier est ensuite forgé par petits coups donnés sur le pourtour.

Ce procédé de fabrication exige que l'alliage rapporté se trouve à l'extérieur; et, comme la correction de l'erreur secondaire nécessite une augmentation accélérée de la courbure, on est limité à l'emploi, pour la partie intérieure, d'un alliage possédant un terme quadratique s'éloignant dans le sens négatif de celui de l'alliage extérieur. On le trouvera parmi les aciers au nickel dont le deuxième coefficient de dilatation est négatif, c'est-à-dire dans la région comprise entre 36 et 48 pour 100, en remarquant que la correction pour les déformations lentes diminue à mesure qu'on augmente la teneur en nickel.

Un alliage à 44 pour 100 m'a donné, par exemple,

$$a = 8508.10^{-9}, \qquad b = -2,51.10^{-9}.$$

Rapprochant ces nombres de ceux qui ont été donnés précédemment pour le laiton, on trouve, $S = -2,2$. Cette combinaison convient donc au problème que nous nous étions proposé.

On trouverait de même des combinaisons compensant parfaitement le spiral de palladium.

Il est utile d'ajouter que les alliages qui assurent le mieux la correction de l'erreur secondaire, conservent extrêmement peu de magnétisme permanent, sont d'une grande stabilité, peu oxydables et susceptibles d'un beau poli. On peut,

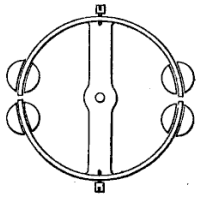
Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

toutefois, leur reprocher d'avoir une limite élastique peu élevée lorsqu'ils ont été soumis aux températures du soudage du laiton, ce qui peut faire craindre des déformations permanentes après les grands écarts de température.

Résultats. — Il était intéressant de vérifier, par une expérience pratique, les conclusions théoriques du calcul qui précède. Mais on pouvait, en même temps, réaliser un autre perfectionnement de détail. L'emploi du laiton, combiné avec un alliage moins dilatable que l'acier, permettait soit de raccourcir la lame, soit de lui donner une plus grande épaisseur et, par conséquent, de diminuer l'effet de la force centrifuge. Je m'arrêtai à la première idée, pour la raison suivante : La force centrifuge produit, à la fois, une flexion de la lame et une rotation autour de son point d'attache si les mouvements autour de ce point sont inégaux; il en résulte un effet irrégulier et impossible à prévoir de la force centrifuge, tandis qu'une lame symétrique autour du point d'attache n'est soumise qu'à sa propre flexion.

Partant d'un balancier que voulut bien me confier M. P. Nardin, je calculai d'abord les constantes d'un balancier de la forme représentée *fig.* 7, et dont l'exé-

Fig. 7.



cution fut confiée à M. J. Vaucher, à Travers (Suisse). Ce balancier fut aussitôt substitué, par les soins de M. Nardin, à un balancier de forme ordinaire, dans un chronomètre de marine parfaitement réglé, mais dont l'erreur secondaire dépassait deux secondes.

Les essais d'isochronisme firent immédiatement ressortir l'effet de la forme adoptée; il y avait une avance sensible aux grands arcs, et l'on dut rapprocher les courbes terminales de la forme théorique et refaire un réglage, dont M. Nardin chargea son très habile collaborateur, M. H. Rosat. Le chronomètre fut ensuite déposé à l'Observatoire de Neuchâtel, où il fut observé du 24 janvier au 25 mars de cette année. Voici ses marches moyennes dans les périodes les plus intéressantes (— = avance) :

Dates.	Températures moyennes.	Marches diurnes moyennes.
	°	s
24 janvier-1 février 1900.....	10,0	—1,72
1-8 février.....	9,7	—1,68
8-11 »	32,0	—0,85
11-14 »	10,2	—1,26
14-17 »	0,5	—1,05
17-24 »	10,6	—1,40
18-25 mars.....	11,6	—2,04

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

L'examen de ces résultats montre que les épreuves thermiques ont été sans effet notable sur les marches qui, après l'étuve et la glacière, se sont retrouvées à moins de $0^s,3$ de ce qu'elles étaient avant l'épreuve. Pendant les deux mois des épreuves on trouve une avance totale de $0^s,3$ par jour, ce qui peut être considéré comme un très bon résultat. Enfin, si l'on construit le diagramme des marches aux températures, en faisant intervenir à égalité chacun des groupes du 1er au 24 février, on trouve une erreur secondaire qui, réduite à un intervalle de 30 degrés, est très voisine de $0^s,3$ d'avance, quantité qui touche aux limites des erreurs fortuites des marches dans les périodes relativement courtes des épreuves thermiques.

Voici, comme deuxième exemple, les marches d'un chronomètre de poche à tourbillon et à ressort, construit aussi par M. Nardin et observé à Neuchâtel (1) :

Dates.	Températures moyennes.	Marches diurnes moyennes.
	°	s
5-14 avril.....	12,0	+2,4
14-15 »	31,6	+1,9
15-16 »	13,1	+1,9
16-17 »	0,7	+2,9
17-20 »	11,6	+3,4
10-17 mai.....	14,1	+2,0

Les épreuves thermiques semblent avoir introduit, dans les marches de cette pièce, une petite perturbation, due peut-être à l'humidité, et qui avait disparu au bout de peu de temps.

Si l'on combine entre elles toutes les observations du 5 au 20 avril, on trouve une erreur secondaire *en retard* de $0^s,2$, tandis que, si l'on élimine celles du 17 au 20, l'erreur change de signe, en restant voisine de $0^s,2$. On peut en conclure que, d'après ces observations, l'erreur secondaire est très petite et encore indéterminée.

Le même chronomètre, observé à Genève, donna une erreur de une seconde de retard si l'on combine toutes les observations avec cadran en haut. Mais, si l'on tient compte des observations avec cadran en bas, l'erreur est diminuée de moitié. On se trouve encore ici dans les limites des écarts dus au mécanisme.

Plusieurs chronomètres de poche, construits par M. Paul Ditisheim, ont confirmé les résultats qu'on déduit des déterminations précédentes.

L'ensemble des observations faites jusqu'ici, en montrant que le nouveau balancier, tout en résolvant, comme on pouvait en être à peu près certain d'avance, la question de l'erreur secondaire du spiral d'acier, conserve suffisamment sa forme, au moins aux températures atteintes dans les épreuves thermiques faites jusqu'ici, pour que les marches ne soient pas sensiblement modifiées avec le temps.

Cependant, des épreuves de très longue durée pourront seules mettre ce point définitivement hors de doute (2).

(1) Les observations en position horizontale, avec cadran en haut, sont seules reproduites ici.

(2) Les épreuves auxquelles divers chronomètres ont été soumis, depuis la réunion du Congrès, ont confirmé la parfaite stabilité du nouveau balancier.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

LE SPIRAL.

En mars 1897, M. Paul Perret observa ce fait singulier qu'un spiral d'invar, associé à un balancier monométallique, donnait une forte avance au chaud. Il en conclut immédiatement qu'il devait exister certains aciers au nickel assurant l'invariabilité d'élasticité du spiral. Nous entreprîmes alors en commun, et avec la coopération de la Société de Commentry-Fourchambault, des expériences systématiques destinées à rechercher les alliages jouissant de cette propriété ou, plus exactement, d'une variation positive telle qu'elle compensât l'augmentation du moment d'inertie d'un balancier fait avec un métal choisi, en tenant compte surtout de la facilité de la fabrication.

En août de la même année, le professeur Marc Thury publia, au *Journal suisse d'Horlogerie*, le résultat d'une expérience de flexion sur une lame d'acier très peu dilatable, indiquant aussi que le module d'élasticité de cet alliage augmente avec la température. M. Thury décrivait, à la suite de ses expériences, un mode de compensation consistant à associer un spiral du nouvel alliage avec un spiral d'acier, la variation de l'un compensant celle de l'autre.

A cette époque, nous avions déjà obtenu, M. Perret et moi, des résultats très encourageants dans la direction indiquée; je les communiquai à M. Thury, qui renonça très courtoisement à poursuivre ses recherches.

L'acier et le nickel ayant chacun une variation négative de l'élasticité par l'élévation de la température, on pouvait prévoir l'existence de deux alliages possédant une variation nulle, ou assez faiblement positive pour compenser la variation du balancier monométallique. Ces alliages furent trouvés au voisinage de 45 pour 100 et de 28 pour 100 de nickel et, dans ces deux régions, on peut obtenir la compensation moyenne aux températures dans l'emploi d'un balancier d'un métal ou alliage arbitrairement choisi. Mais les conditions dans lesquelles se produit cette compensation sont très différentes. Tandis que les alliages à forte teneur donnent une erreur secondaire très peu supérieure à celle des spiraux ordinaires, ceux à 28 pour 100 sont affectés d'une variation de second ordre extrêmement importante, dont la raison apparaîtra si l'on se reporte aux variations magnétiques des alliages de cette catégorie. Aux températures ordinaires, ces alliages se trouvent dans la dernière partie de la courbe de perte du magnétisme. Peu au-dessus, ils sont dans la région non magnétique, et suivent dès lors la règle générale de diminution de l'élasticité par augmentation de la température. A des températures sensiblement différentes de celles du début de la transformation, au contraire, les alliages à faible teneur se trouvent dans des conditions semblables à celles de l'invar aux températures ordinaires, et possèdent un coefficient fortement positif de variation. Le passage graduel d'un état à l'autre se produit aux températures usuelles, auxquelles la variation change de signe, de telle sorte que l'on profite d'un minimum assez étalé. Les expériences sont très bien représentées par une formule parabolique plaçant, pour certains de ces alliages, le sommet de la parabole au voisinage de 15°. La compensation entre 0° et 30° est alors obtenue, mais avec une erreur secondaire de 15 à 20 secondes. On remarquera que cette erreur est environ vingt

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

fois plus faible que la variation à peu près linéaire du spiral d'acier entre les mêmes limites de température, et que l'amélioration résultant de l'emploi de ces spiraux pour les montres non compensées serait déjà très considérable. Nous avons néanmoins cherché à étaler encore le minimum, ce qu'on obtient en modifiant l'alliage. Les spiraux de cette catégorie joignent, aux avantages résultant de leurs propriétés élastiques, celui d'être à peu près insensibles au magnétisme.

Les spiraux faits avec les alliages à forte teneur ont donné, aux mains d'un régleur aussi habile que M. Paul Perret, qui a eu à surmonter, dans la confection de ces spiraux, de grosses difficultés, des résultats remarquables comme compensation et comme constance de marche. Mais ces spiraux seraient jugés trop mous par la majorité des régleurs.

Au printemps 1898, alors que sévissait une crise économique sur les spiraux, un groupe d'horlogers sollicita notre intervention en vue de bénéficier des recherches déjà faites dans le domaine des spiraux d'acier-nickel. Le désir de leur donner satisfaction nous détourna momentanément de nos recherches; mais nous pûmes nous convaincre, par l'essai important qui fut fait des nouveaux spiraux par l'industrie horlogère, notamment en Suisse, qu'aucune raison pratique ne s'oppose à leur emploi pour les montres des diverses catégories.

En même temps, nous pûmes mettre à l'épreuve les résultats d'études déjà achevées concernant l'emploi des alliages irréversibles.

Comme nous l'avons vu dans la première partie de ce Mémoire, les alliages contenant environ 24 pour 100 de nickel peuvent être, aux températures ordinaires, non magnétiques et mous, ou magnétiques et secs, suivant les transformations qu'ils ont subies. Des spiraux, fabriqués avec ces alliages, se sont montrés presque aussi élastiques que les spiraux trempés, et susceptibles de les suppléer dans la plupart de leurs emplois. Ils sont beaucoup moins oxydables et, fait déjà signalé, nécessitent une compensation trois fois moindre.

Cette variation réduite des propriétés élastiques ne pouvait manquer d'introduire une certaine perturbation dans les habitudes des régleurs. On pouvait chercher la compensation exacte dans trois procédés distincts : 1° Association, dans la bilame, de métaux autres que l'acier et le laiton; 2° Modification des épaisseurs relatives; 3° Déplacement de la coupure.

Le premier procédé présente l'inconvénient de substituer, à une combinaison connue et ayant fait ses preuves, une association nécessitant de nombreuses expériences et l'épreuve du temps pour pouvoir être recommandée.

Le deuxième éloigne des conditions de maximum d'action de la bilame, conditions présentant l'inappréciable avantage de comporter une assez large tolérance dans les épaisseurs relatives des deux métaux. La troisième solution restait seule pratique, et c'est celle qui a été généralement adoptée. Les conditions de compensation sont telles que, si l'on coupe à angle droit du bras un balancier destiné à un spiral d'acier, on assure la compensation pour un spiral de la catégorie des aciers-nickel irréversibles. Cette disposition donne aux balanciers une rigidité beaucoup plus grande que la coupure au ras du bras, et une plus grande permanence avec le temps.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

CONCLUSIONS.

Dans cette revue rapide des propriétés des aciers au nickel et de leurs principales applications à l'Horlogerie et à la Chronométrie, nous avons pu nous rendre compte des simplifications ou des perfectionnements résultant des conditions rationnelles de leur emploi dans l'horloge ou la montre. Dans plus d'une direction, ces curieux alliages ont subi l'épreuve de quelques années d'étude systématique, et leurs applications peuvent être exactement prévues. Dans d'autres subsiste encore une part d'inconnu, la possibilité de quelques déceptions, comme aussi celle de découvertes ou d'inventions nouvelles étendant le domaine aujourd'hui exploré. Mais, quel que soit le sort qui leur soit définitivement réservé dans telle de leurs applications, on peut dès maintenant affirmer que, dans leur ensemble, ils devront fixer l'attention des horlogers soucieux du progrès dans le bel art qu'ils cultivent.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

CHRONOGRAPHE,

PAR

M. C.-W. SCHMIDT.

En présentant mon chronographe, je désire en quelques mots donner :

1° Un court résumé de l'histoire de ce chronographe et des principes sur lesquels il est établi;

2° Une brève description du modèle actuellement adopté ;

3° Un examen de la précision du chronographe.

Ce fut au mois de septembre 1890 que l'idée me vint à l'esprit que le balancier du chronomètre, avec sa grande vitesse et la précision de son mouvement, pouvait servir à mesurer des divisions de temps moins longues qu'une de ses oscillations.

Pour atteindre ce but, il fallut premièrement maintenir le balancier dans la même amplitude, par exemple 360°, laquelle est assurée par un mécanisme spécial. Ensuite je fixai sur l'axe même du balancier l'index qui marque les millièmes de seconde.

Avant chaque observation, on amène cet index à zéro, et par cette action, le spiral est armé d'un demi-tour; le balancier au moment libre se trouve dans la même situation que le balancier libre à la fin d'une oscillation.

Le balancier est mis en marche et s'arrête par un courant électrique, interrompu au moment où l'observation commence, et rétabli quand elle prend fin.

L'instrument indique les heures, minutes, secondes, cinquièmes et millièmes de seconde. Ce chronographe fut le premier modèle; ensuite je construisis un deuxième modèle avec des améliorations de certaines dispositions des organes.

Mon troisième modèle fut entièrement d'une autre combinaison, quoique le principe restât le même. Je supprimai tout le mécanisme de mouvement et l'échappement; le balancier fut fait en fer doux sur lequel l'électro-aimant actionna directement. Ce modèle fut soumis à une série de modifications pour le réglage des courants, etc. Finalement il fallut abandonner l'action directe de l'électro-aimant sur le balancier en fer doux. Mais en juin 1899 je réussis à terminer mon septième modèle, lequel répond à l'exigence de précision demandée; ce dernier modèle est vendu à dix-sept gouvernements, ainsi qu'à un grand nombre d'établissements privés, sous le nom de *Chronographe Schmidt.*

En résumé, je désire faire une courte description de l'instrument construit spécialement pour mesurer la vitesse des projectiles, mais pouvant aussi être utilisé pour mesurer les temps qui ne dépassent pas un cinquième de seconde.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Le balancier, placé presque au centre de l'instrument et d'un diamètre relativement grand, est fait d'un métal non magnétique; l'aiguille est fixée sur le même axe que le balancier, elle est remise à zéro au moyen d'une tige fixée dans la glace qui couvre le cadran. Cette glace est encastrée dans un cercle tournant. Le balancier est muni d'une armature qui, au moment où l'aiguille est remise à zéro, bouche l'électro-aimant pour le premier courant. L'arrêt est fait par deux leviers montés sur deux axes; chacun de ces leviers est muni d'un côté de l'axe de deux tenons qui touchent à la périphérie du balancier au moment de l'arrêt, et de l'autre côté d'une armature, actionnée par un électro-aimant, de sorte que chaque bout de cet aimant actionne l'une des armatures. Pour opérer une pression égale des tenons sur le balancier, les deux leviers sont reliés par un ressort à boudin muni d'une vis de réglage.

Au moment où le courant passe dans le second électro-aimant, les armatures fixées sur les leviers sont attirées, et les tenons sont retirés du balancier, qui devient libre; si alors on amène l'aiguille à zéro, le balancier tournera d'un demi-tour et sera retenu par l'électro-aimant du premier courant. Au moment où le phénomène qu'on désire observer commence, le premier courant s'interrompt et par conséquent le balancier commence son mouvement par action du spiral, et il s'arrête par action des tenons des leviers et du ressort à boudin, lorsque le second courant sera interrompu. L'aiguille a donc parcouru une partie du cadran correspondant aux temps entre les deux ruptures.

L'instrument possède en outre deux rhéostats et deux bobines de résistance pour le réglage des deux courants, un bouton pour rétablir le second courant interrompu à l'intérieur de l'instrument au même moment qu'à l'extérieur, pour donner à l'observateur la facilité de déplacer l'aiguille à volonté indépendamment de l'établissement du courant extérieur.

Je n'ose pas consacrer plus de temps à la description de l'instrument; je désire seulement déclarer que j'ai construit un grand modèle de même type de chronographe, et depuis trois ans j'ai expérimenté un nouveau type à Versailles par ordre ministériel. Ce nouveau chronographe est muni d'un mécanisme spécial pour maintenir le balancier dans un mouvement toujours oscillant permettant ainsi de mesurer un temps plus long qu'une oscillation.

Je désire maintenant donner quelques détails sur la précision du chronographe en commençant par la description du mode de division du cadran.

L'aiguille ne parcourt pas, bien entendu, le cadran avec la même vitesse. Dans la mise en marche, il y a aussi des retards à remarquer, qui sont produits par le magnétisme rémanent du premier électro-aimant; dans le second électro-aimant il y a pour la même raison un retard, augmenté encore par l'action du mécanisme d'arrêt; ces retards ne sont pas égaux. On peut encore supposer de petites erreurs ou irrégularités à la périphérie du balancier. Toutes ces erreurs sont éliminées par le procédé de division même du cadran.

Cette division est faite d'une manière empirique à l'aide d'un disjoncteur qui interrompt les courants à des intervalles bien précis. Les erreurs variables provenant de l'épaississement de l'huile, etc., sont peu importantes; les chronomètres, en général, subissent les mêmes inconvénients, mais peuvent, malgré cela, marcher

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

des années avec une variation de quelques secondes seulement par vingt-quatre heures; pour une observation de $\frac{1}{10}$ de seconde, les écarts sont donc d'une quantité négligeable. En supposant que le chronomètre éprouve une variation irrégulière de cinq secondes en vingt-quatre heures, l'erreur dans une observation de $\frac{1}{10}$ de seconde ne serait que de $0^s,000005783$ ou, en mètres, $0,02891\,34\sqrt{25}$.

Pour pouvoir mettre le chronographe d'accord avec un autre chronographe, le ressort à boudin est muni d'une vis de réglage, ce qui permet aussi de tarer le chronographe de temps en temps avec, par exemple, un vérificateur de chute. J'ai construit pour cet usage un appareil portatif nommé *appareil de réglage*. Cependant la pratique a démontré que le chronographe est très peu sensible aux variations d'un temps à l'autre.

Enfin, permettez-moi de faire observer que le Ministre de la Guerre de France a acquis un chronographe de mon système en 1894, auquel on a fait subir à Versailles, pendant environ deux années, une série d'essais très sérieux avec une température de $+40°$ et à la glace, ainsi que des séries d'expériences avec de longs intervalles pour observer les variations des résultats d'un essai à l'autre; le résultat de ces essais fut tel que le Ministère de la Guerre m'a honoré des commandes d'un certain nombre de chronographes (par ordres ministériels des 26 juin 1896 et 12 août 1897) et pour lesquels on m'a imposé des conditions très difficiles que j'ai réalisées complètement.

Pour donner une idée nette de la précision, je termine par un résumé des conditions conclues par les marchés déjà indiqués.

Épreuves de réception pour chaque chronographe :

1° Des épreuves de fonctionnement;

2° Des épreuves de justesse et de précision.

Épreuves de fonctionnement :

Un tir au fusil de 500 coups;

Un tir au canon de 50 coups.

Le tir au fusil aura pour but d'apprécier la régularité de fonctionnement de chaque appareil. On prendra pour base d'appréciation le nombre des coups perdus qui, pour l'ensemble des tirs au fusil, devra rester inférieur à 1 pour 100 du nombre des coups tirés.

Les tirs au canon auront pour but principal de vérifier l'insensibilité des appareils présentés aux vibrations dues au départ du coup. Dans ces tirs, pour lesquels il sera fait usage du canon 90^{mm} de campagne, le chronographe sera placé dans le voisinage immédiat de la bouche à feu.

Épreuves de justesse et de précision :

La précision, caractérisée par la valeur de l'écart moyen calculée pour chaque série de cinq, devra être telle que ces écarts moyens restent constamment inférieurs au $\frac{1}{600}$ de la vitesse moyenne du tir pour les vitesses comprises entre 300^m et 450^m (soit environ $0^s,0001851$) et au $\frac{1}{500}$ de la vitesse moyenne du tir pour les vitesses comprises entre 450^m et 700^m (soit environ $0^s,0001428$).

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

APPLICATION

DE

CHRONOMÈTRES DÉCIMAUX

A LA

PRATIQUE DE LA NAVIGATION,

PAR

M. E. GUYOU.

Le Comité d'organisation du Congrès de Chronométrie a pensé qu'il serait utile de faire connaître aux membres de l'Assemblée la nature et les résultats des expériences qui ont été entreprises récemment sur plusieurs bâtiments de notre marine, expériences dans lesquelles ont été appliqués pour la première fois à la pratique de la navigation des chronomètres gradués en unités décimales.

Je suis d'autant plus heureux de déférer au désir qui m'a été exprimé de faire une Communication sur ce sujet, que j'y trouverai l'occasion de dissiper, devant un auditoire d'une compétence unique, un malentendu auquel ont donné lieu ces expériences.

Malgré l'insistance avec laquelle il a été déclaré dès le début que les instruments employés ne devaient pas être considérés comme des *garde-temps*, et que leurs indications représentaient des *angles*, exprimés en *unités angulaires*, quelques personnes ont persisté à voir dans nos essais une tentative d'introduction d'une nouvelle unité de temps : le quart de jour, divisé en parties décimales. Il n'est donc pas inutile de répéter ici que, bien au contraire, nos expériences, en prévision du cas, à peu près certain, où une réforme du temps serait reconnue impossible, ont été organisées de manière à montrer que, par la seule réforme des unités d'arc, et sans toucher à la mesure du temps, il serait facile de réaliser presque toutes les simplifications que visent les partisans de la décimalisation.

Les expériences dont j'ai à entretenir le Congrès ont été entreprises conformément au désir d'une Commission que le ministre de l'Instruction publique avait chargée de l'étude des questions ayant rapport à l'extension du système décimal à

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

la mesure du temps et de la circonférence. Le but principal de ces expériences était de se rendre compte des difficultés et des troubles que pourrait soulever l'application d'unités nouvelles à la pratique de la navigation. Cinq croiseurs : le *Cécille* et le *Sfax* (remplacé depuis par le *Suchet*) dans l'Atlantique, le *Protet* et le *Papin* dans l'océan Pacifique, et enfin le *Galilée* dans l'escadre de la Méditerranée, furent munis des instruments et documents nécessaires pour effectuer en unités décimales toutes les observations et tous les calculs nécessaires à la conduite du navire.

Pendant environ neuf mois, entre le 1er juin 1899 et 1er mars 1900, les officiers de ces bâtiments ont étudié sous toutes ses formes la question qui leur était soumise. Nous ferons connaître dans un instant les conclusions que leur ont suggérées ces études, mais il est indispensable de donner d'abord quelques indications sur les méthodes mises en expérience.

On admet, d'une manière à peu près générale, que la réforme des unités d'angle et celle des unités de temps sont étroitement solidaires l'une de l'autre et ne peuvent, par conséquent, être entreprises isolément. Il est certain, en effet, que, si l'on s'en tient aux conceptions et à la terminologie actuelles, les notions de temps et les notions d'angles sont si étroitement enchevêtrées dans les problèmes d'astronomie et de navigation qu'une réforme limitée à une seule espèce d'unités serait à peu près sans intérêt. Si cette solidarité existait réellement, toute tentative de réforme serait *a priori* bien compromise; car il est à peu près admis par tout le monde qu'il n'est pas permis aujourd'hui, et qu'il sera impossible encore longtemps de changer les unités de temps employées par le public, et, d'un autre côté, les savants sont à peu près unanimes à écarter toute idée de création d'une unité de temps spéciale pour les usages scientifiques.

Il était donc, sinon indispensable, tout au moins très utile d'examiner, avant toutes choses, si cette solidarité était bien inévitable. Or, une étude attentive des questions d'astronomie et de navigation montre que ce mélange intime et confus de notions de temps et de notions d'angles qui caractérise les conceptions et la terminologie actuelles n'est nullement imposé par la nature des sujets; il a pour cause unique l'adoption, pour les pendules sidérales et les chronomètres, d'une graduation irrationnelle.

En réalité, ces instruments ne sont pas des *garde-temps* proprement dits; l'élément que leur emprunte l'astronome ou le marin est un *angle* et non une époque ou un intervalle.

Pour la pendule sidérale, le fait est immédiatement évident; ce que l'astronome lit, en effet, sur cet instrument, sous le nom de *temps sidéral*, c'est l'*ascension droite* des astres qui passent au méridien, c'est-à-dire un *angle*.

Pour les chronomètres, il en est de même; nous allons le faire voir en peu de mots.

Lorsque le marin est au large, que tous les points de la côte ont disparu à sa vue, les astres deviennent pour lui autant de signaux visibles à l'aide desquels il peut mesurer, au sextant, sa distance à des lieux terrestres bien déterminés. On sait, en effet, que la distance zénithale d'un astre, complément de la hauteur fournie par le sextant, représente la distance de l'observateur au lieu où l'astre se projette

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

orthogonalement sur la Terre; le navire est donc sur le cercle décrit de ce lieu comme centre avec la distance zénithale comme rayon; deux observations de même nature donneront deux cercles dont l'intersection sera le *point* du navire. Mais il faut pouvoir déterminer les coordonnées géographiques des centres de ces cercles, c'est-à-dire des projections des astres; c'est à cet usage que sont destinés le chronomètre et la *Connaissance des Temps.*

Supposons, en effet, d'abord, pour fixer les idées, que les deux astres observés soient des étoiles; ces astres ont leur déclinaison à peu près constante donnée par les éphémérides; ces déclinaisons sont les latitudes de leurs projections terrestres. Mais les longitudes de ces points varient uniformément par suite de la rotation de la Terre; pour les obtenir, il suffira de disposer d'un instrument dont l'aiguille tourne sur un *cadran gradué en unités angulaires* avec la vitesse de la Terre; si, en effet, à un instant quelconque, on a réglé l'aiguille de manière qu'elle indique la longitude géographique d'une étoile déterminée, elle continuera à indiquer cette donnée, et l'observateur en déduira les longitudes des étoiles observées par l'addition de différences d'ascensions droites entre ces étoiles et celle de réglage, différences qui, comme l'on sait, sont constantes.

L'instrument que nous venons de décrire est ce que l'on appelle le *chronomètre sidéral;* ou, du moins, il n'en diffère que par ce fait que la graduation de ce dernier est exprimée en heures et que, par suite, l'observateur est obligé de faire une conversion d'unités, lorsqu'il veut utiliser la donnée de l'instrument.

Dans la pratique, ce sont, en général, des chronomètres moyens qu'emploient les marins; mais le principe en est le même; l'instrument donne la longitude géographique du soleil moyen, et la *Connaissance des Temps* donne la correction à ajouter à cet *angle* pour obtenir la longitude géographique de l'astre observé, étoile, planète, Lune ou Soleil.

On voit donc que c'est bien une grandeur angulaire et non une époque que le chronomètre donne aux marins; par suite, c'est en unités angulaires que devraient être gradués ces instruments.

On peut toutefois objecter à ce qui précède que le chronomètre est aussi employé comme garde-temps. D'abord, en effet, c'est de son indication que se déduit le temps moyen de Paris nécessaire pour interpoler dans les éphémérides; mais on remarquera que pour les études avec un chronomètre sidéral, cet argument serait inutile; de plus, il est aussi facile d'interpoler avec la valeur angulaire de l'angle horaire du Soleil qu'avec cette valeur exprimée en heures.

On peut encore objecter que le chronomètre des marins sert à régler la montre d'habitacle et que c'est avec la pendule sidérale que l'on règle habituellement les pendules moyennes, c'est-à-dire les garde-temps proprement dits; mais dans l'un et l'autre cas, le réglage se fait par un petit calcul qui n'est pas plus long avec la graduation angulaire qu'avec la graduation horaire, et le praticien, à ce point de vue, n'a aucune raison de préférer l'une des graduations à l'autre.

Cette conception du rôle des chronomètres et des pendules sidérales est si simple et si logique que l'on est surpris, au premier abord, qu'elle n'ait pas été adoptée jusqu'ici par les astronomes; mais il est facile de voir que les unités angulaires actuelles, degrés et subdivisions sexagésimales, ne se prêtent pas à la

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

graduation des horloges. De sorte que, lors même que les astronomes eussent été disposés à substituer à leurs pendules des instruments gradués en unités angulaires, ils n'auraient pas pu le faire, ou, du moins, il aurait fallu constituer des instruments nouveaux dont les dispositions eussent exigé une longue étude avant que l'on pût réaliser la précision des horloges ordinaires.

On peut ajouter enfin que le problème s'est à peine posé pour les astronomes, car ils ont eu à leur disposition un moyen fort simple d'éluder la difficulté, résultant de ce que l'instrument de mesure angulaire est gradué en autres unités que l'équateur céleste. Ne pouvant appliquer aux instruments la graduation de l'équateur céleste, ils ont appliqué à l'équateur la graduation des instruments; et l'heure est devenue ainsi une partie de la circonférence.

Pour les marins, cette solution n'est pas satisfaisante, puisque, en fin de compte, il faut combiner ces arcs avec les longitudes qui sont nécessairement exprimées en degrés; mais, ainsi que nous l'avons dit, il était impossible de faire mieux.

Pourtant, cette solution qui attribuait à un des cercles du ciel, l'équateur, une graduation spéciale, ne fut pas adoptée sans quelque hésitation. Jusqu'en 1833, en effet, la *Connaissance des Temps* continua à exprimer les ascensions droites en degrés; elle les donnait bien aussi en heures, mais à la minute seulement et pour faciliter les observations. Jusqu'à cette époque, par conséquent, toute observation d'étoile exigeait une transformation d'unités; il fallait, suivant le cas, soit convertir l'ascension droite en heures, soit convertir en degrés l'indication de la pendule.

Quelque imparfaite que fût la solution adoptée, elle était inévitable, et, même actuellement, avec le degré et ses subdivisions sexagésimales comme unités angulaires, nous ne pourrions trouver une solution plus satisfaisante. Mais il est clair que, s'il venait à être question de changer les unités angulaires, il conviendrait d'en profiter immédiatement pour revenir à la logique, c'est-à-dire restituer à l'équateur céleste la graduation angulaire commune, et de graduer les chronomètres et les pendules en la même espèce d'unité.

Tels sont les principes qui ont été adoptés pour la préparation des instruments et des documents destinés aux expériences. Les chronomètres ont été construits et gradués de manière à donner en grades et subdivisions décimales du grade l'angle horaire du Soleil moyen; pour bien rappeler à l'observateur que ces instruments sont destinés à mesurer non le temps, mais l'angle dont tourne le Soleil moyen par rapport aux méridiens terrestres, on leur a donné le nom de *tropomètres*. Toutes les éphémérides ont été exprimées en la même espèce d'unités, y compris les éphémérides équatoriales; enfin les expressions telles que *temps moyen à midi vrai, temps sidéral à midi moyen*, etc., ont disparu de la terminologie, pour recevoir le nom de *différences de longitudes*, mieux approprié à l'usage qu'on fait de ces éléments en navigation.

Pendant neuf mois, seize officiers ont appliqué ces méthodes à la pratique de la navigation, et sont unanimes à déclarer que les principes sur lesquels elles sont basées n'ont suscité aucune difficulté. Il convient, il est vrai, de dire que les idées qui étaient mises ainsi en application n'étaient pas absolument nouvelles pour les expérimentateurs; l'enseignement de l'École Navale a commencé, en effet, depuis

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

une vingtaine d'années, à présenter comme des *arcs* exprimés en unités angulaires spéciales les éphémérides équatoriales; les méthodes mises en essai ne faisaient donc, en quelque sorte, que compléter et mettre définitivement au point celles que nos officiers avaient apprises.

Cette préparation a peut-être facilité le succès des expériences; mais, quelle qu'en soit la cause, le résultat est bien acquis : non seulement la notion et l'unité de temps peuvent être éliminées des problèmes de navigation, mais les méthodes y gagnent en simplicité et en clarté.

Il a été fait cependant une réserve qu'il importe de signaler. Plusieurs expérimentateurs ont fait remarquer que, dans certains cas, la montre du bord devient elle-même un instrument de navigation; c'est sur cet instrument, en effet, que certains officiers relèvent l'angle horaire du Soleil nécessaire pour obtenir l'azimut de cet astre, ou pour en déduire l'angle horaire de la polaire nécessaire au calcul de la latitude. Alors l'angle est nécessairement exprimé en heures, puisqu'il est établi en principe que la mesure du temps n'est pas changée. Il faudrait donc alors que les Tables d'azimut et les Tables pour la Polaire donnassent leurs éléments en fonction des deux arguments heures et grades, pour permettre l'utilisation du tropomètre et de la montre d'habitacle.

Il y a donc là une petite difficulté; à partir du jour où la séparation serait définitivement faite dans les conceptions et les graduations entre les *instruments astronomiques* et les *garde-temps proprement dits*, il ne serait plus possible de faire servir les instruments aux deux usages sans opérer une conversion. Mais il faut remarquer d'abord que cette conversion, qui n'exige jamais une grande précision, pourrait être faite très aisément soit à l'aide d'une petite Table collée sur la montre elle-même, soit, comme le fait remarquer M. le capitaine de vaisseau Germinet dans son Rapport, à l'aide d'un cadran à double cercle d'un modèle très simple.

J'ajouterai enfin que l'emploi comme instrument astronomique d'un instrument aussi imparfait que la montre d'habitacle ne me paraît guère tolérable aujourd'hui. Le prix des instruments d'horlogerie offrant une précision suffisante pour servir de compteurs est aujourd'hui assez peu élevé pour que l'on délivre aux navires une montre d'observations spéciales restant en permanence sur le pont à la disposition de l'officier de quart. Cette montre serait naturellement graduée en unités angulaires. Cette idée a été également exprimée par M. le capitaine de vaisseau Germinet.

On objectera peut-être encore que les caboteurs et bateaux de pêche n'ont aucune autre montre que la montre d'habitacle, et que cet appareil sert à la fois de montre d'observation et de garde-temps. Nous répondrons alors, comme plus haut, que cette tolérance ne devrait plus être admise aujourd'hui.

On peut donc désormais considérer comme acquis ce point capital pour la réforme des unités, que l'on peut, par la simple modification des unités d'arcs et sans toucher à la mesure du temps, réaliser presque toutes les simplifications visées par les partisans de la décimalisation. Les unités de temps seraient alors inclusivement réservées à la graduation des *garde-temps*, c'est-à-dire des *horloges solaires moyennes destinées à préciser des époques ou à mesurer des durées*, et elles

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

n'interviendraient plus en astronomie et en navigation que dans les calculs destinés au réglage des *garde-temps*.

Il est enfin un dernier point que nos expériences ont mis en lumière : Il était permis de craindre que les modifications importantes apportées à la durée du battement et aux rapports des rouages ne créassent des difficultés sérieuses de construction. Mais nos habiles constructeurs ont triomphé de ces difficultés, les six instruments reçus par la Marine ont fonctionné (en général) comme de bons compteurs, et quelques-uns se sont comportés comme d'excellents chronomètres.

Il est difficile de prévoir l'époque à laquelle la réforme si désirable dont nous nous occupons deviendra possible; elle rencontre encore, à l'étranger surtout, de nombreuses oppositions. La plupart des autres nations, encore habituées à l'emploi d'unités de mesures non décimalisées, éprouvent naturellement moins de gêne que nous-mêmes au maniement des nombres complexes; il faudra attendre sans doute encore que la vulgarisation du système métrique ait fait de nouveaux progrès; mais l'époque ne peut manquer de venir où cette réforme sera jugée opportune, et nous avons acquis par nos expériences la certitude que sa réalisation ne suscitera aucune difficulté insurmontable.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

DÉCIMALISATION DU JOUR ENTIER,

PAR

M. DE REY-PAILHADE

Toutes les nations civilisées adoptent successivement le système métrique des poids et mesures. Le moment paraît infiniment favorable pour la mise en pratique de la décimalisation du temps. Tous les savants sont d'ailleurs d'accord pour reconnaître que cette réforme rendrait les plus grands services à toutes les sciences.

Le système décimal peut s'appliquer à toutes les grandeurs, mais il ne rend de réels services que si l'unité fondamentale est judicieusement choisie.

Examinons d'abord ce qui constitue un système décimal. Il faut entendre par là un ensemble de mesures existant réellement et graduées suivant la progression décimale.

Le système métrique des poids et mesures, qui est un modèle du genre, est établi suivant ces principes. Le quart du méridien terrestre, qui a été choisi comme unité naturelle, divisé en 10000000 de parties égales, a fourni le *mètre*, ou unité pratique de longueur. Cette grandeur est admirablement proportionnée à la taille de l'homme.

Du mètre, on a déduit le *décimètre*, le *centimètre*, le *millimètre*, etc., au-dessous du mètre, et comme mesures pratiques au-dessus de l'unité, le *décamètre*, l'*hectomètre*, le *kilomètre*, et le *myriamètre*.

La plupart des systèmes monétaires sont décimaux; mais, tandis que la pièce de 1^{fr} en argent de la Convention monétaire a un poids légal de 5^{g}, poids qui rentre dans le système décimal, d'autres États ont adopté pour l'unité monétaire des poids non décimaux. Ainsi le mark allemand en argent pèse 5^{g},555 et le shilling anglais en argent pèse 5^{g},655.

Il est incontestable que le système de la Convention monétaire est moins artificiel que les autres.

Depuis un siècle environ, les astronomes emploient les fractions décimales des secondes de temps. Cela ne constitue pas un véritable système décimal, parce que les multiples supérieurs ne coïncident pas avec la manière de noter le temps. Le petit Tableau ci-dessous en est une preuve éloquente.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

		j	h	m	s
1 seconde vaut					1
10 secondes valent.....					10
100	»			1.	40
1 000	»			16.	40
10 000	»			2. 46.	40
100 000	»		1.	3. 46.	40
1 000 000	»		11.	13. 46.	40
10 000 000	»		115.	17. 46.	40
.....					

Nos Tables de transformation rendent ces calculs très simples.

On voit les inconvénients d'un pareil système qui ne mérite pas le nom de décimal. On peut en dire autant de la décimalisation de la minute et de l'heure.

En statistique, on se sert beaucoup des fractions décimales en prenant pour base 1000. Les tables de mortalité de la vie humaine sont toutes basées sur ce système décimal.

Pour faciliter les calculs, les journaux financiers indiquent souvent exactement le taux de l'intérêt à tant pour 100 au cours du jour. A l'aide d'une simple multiplication, on trouve l'intérêt d'une somme quelconque.

Le système décimal convenablement appliqué rend de si grands services qu'on cherche à l'introduire dans toutes les branches de l'Industrie et de la Science. On l'a proposé pour la désignation des formats de papier et des caractères d'imprimerie, pour établir une nouvelle forme chapelière. Depuis longtemps déjà les oculistes mesurent la distance focale des verres de lunettes au moyen des longueurs métriques au lieu des anciens pouces. L'industrie a modifié beaucoup de mesures dans le sens décimal.

Est-il encore nécessaire de citer l'emploi si judicieux fait par l'Américain M. Melvil Dewey du système décimal à la classification générale des livres? Cette méthode si bonne s'est répandue très rapidement dans le monde entier. Elle a créé une véritable langue universelle internationale qui facilite beaucoup les recherches bibliographiques.

L'angle et le temps sont les seules grandeurs qui n'aient pas encore été soumises à une division décimale par un Congrès international. Ne considérons que le temps, qui est du ressort du Congrès de Chronométrie.

Le jour solaire moyen étant l'étalon de temps fourni par la nature elle-même, c'est le jour qu'il faut décimaliser.

En prenant pour unité pratique le centième de jour que nous appelons *cé* par abréviation, on obtient les valeurs suivantes très convenables pour les usages civils et scientifiques :

$\frac{1}{100}$ de jour	*cé* valant.....	$14^m 24^s$	ou	$\frac{1}{4}$	d'heure environ
$\frac{1}{1000}$ »	*décicé* »	$1^m 26^s, 4$	ou	$1^m \frac{1}{2}$	environ
$\frac{1}{100000}$ »	*millicé* »	$0^s, 864$	ou	1	seconde un peu diminuée.

Au commencement du XIX^e^ siècle, les savants mesurèrent la longueur du pen-

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

dule battant le millicé, c'est-à-dire oscillant 100000 fois par jour. (Voir la pendule décimale des collections de l'École d'horlogerie de Paris.)

Toutes les opérations seront décimales et donneront les jours, les cés, etc. Exemple : le temps suivant $3^{cés}$, 11336 est le retard moyen de l'équinoxe du printemps par chaque période de 4 années; ce nombre multiplié par 100 donne $3^{j}\,11^{cés}$,336 c'est-à-dire 3 jours $11^{cés}$,336, autrement dit il indique que, chaque 4 siècles ou période de 100 fois 4 années, l'équinoxe du printemps retarde de $3^{j}\,11^{cés}$,336, soit 3 jours et $2^{h}\frac{3}{4}$ environ, quand on suit la méthode du calendrier julien.

A notre avis, la réforme ne doit viser actuellement que les hommes de science; quand tous les détails en auront été arrêtés par un Congrès international, on l'enseignera à ce moment au public dans les écoles.

Nous savons d'ailleurs, par une expérience de plusieurs années, que des enfants de 13 ans apprennent cette nouvelle notation du temps avec une facilité vraiment étonnante.

Tous les savants qui se sont occupés de la question reconnaissent que la décimalisation du jour entier est la solution la plus logique et la plus rationnelle. Nous pouvons citer les regrettés Laplace, Yvon Villarceau, de Bernardières, et, parmi les vivants, le vénéré doyen des astronomes, M. Faye; l'éminent physicien M. A. Cornu; M. l'abbé Verschaffel, Directeur de l'Observatoire Abbadia; l'astronome mexicain M. J. de Mendizabal-Pamborel; l'ingénieur hongrois Otto de Pétérigi; le géodésien portugais Rodolpho Guimaraës; M. Krahnass, professeur à Santiago du Chili; le météorologiste M. Perrotet des Pins; l'horloger licencié ès sciences physiques et mathématiques M. Derivière Patry; M. Florenzo Jaja, etc.

Au point de vue des avantages, on sait parfaitement que les systèmes décimaux diminuent la durée des calculs de près de $\frac{1}{3}$ et que le chiffre des erreurs de lecture tombe de 4 ou 5 à 1.

La matérialisation de cette idée ne présente aucune difficulté.

Notre collection des appareils décimaux, exposée en ce moment dans une vitrine dans la classe 96 (Horlogerie), renferme des chronomètres et des montres décimales marchant parfaitement. M. Guillerminet, qui a comparé avec soin les deux modèles d'instruments décimaux, dit (1) : « La raison invoquée par M. de Rey-Pailhade pour son système a bien sa valeur. Du reste ce projet peut se prévaloir de ses parrains *poids et mesures* qui ont déjà forcé l'estime un peu partout.

» L'œil s'habitue rapidement aux nouvelles divisions du cadran analogues à celles d'un décimètre. La lecture est facilitée comme dans ce dernier par un trait allongé départageant chaque dizaine, rendant inutiles toutes indications autres que les chiffres majeurs des heures.

» En comparant ce cadran avec celui de l'heure décimalisée, le cadran purement décimal s'impose pour la lecture. »

Les nombreux appareils exposés dans notre vitrine (2) prouvent que l'industrie

(1) *Journal suisse d'Horlogerie*, n° 6, p. 194; 1898.

(2) *Voir* le catalogue complet et imprimé des objets figurant dans notre vitrine.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

horlogère n'éprouvera aucune difficulté pour la fabrication des nouveaux appareils soit mixtes, soit entièrement décimaux.

Parmi ces instruments nous signalerons tout spécialement le chronomètre décimal battant exactement 200000 fois par jour, construit avec succès par la maison L. Leroy, et une série de montres à deux faces donnant d'une manière synchrone les deux manières de compter le temps.

Ces appareils, tout en apprenant avec facilité les concordances, permettent de faire des observations directes dans n'importe quel système.

Comme la transformation ne s'opérera que très progressivement, on aura tout le temps pour la fabrication des appareils nouveaux.

Au point de vue des Tables de calcul, on possède déjà tout ce qui est le plus essentiel : 1° des Tables de transformations rapides, avec 9 chiffres, des heures, minutes et secondes de temps en fractions décimales du jour, et 2° des Tables de logarithmes à 4, 7 et 8 décimales dans la division décimale du cercle entier.

Nous avons aussi publié une Table des réfractions moyennes et diverses Tables astronomiques.

Il n'est pas inutile de rappeler que la *Connaissance des Temps* renferme un assez grand nombre de documents exprimés dans la division décimale du jour, notamment l'époque du périhélie des comètes périodiques (exemple : Encke, T = 1895. Févr. 4,74409); et aussi la longitude des principaux observatoires (exemple : Toulouse est à $+ 0^{j},002442$ à l'ouest de Paris).

De tous ces faits, une conclusion s'impose.

Nomination d'un Comité international chargé d'étudier les voies et moyens d'introduire dans la science la notation décimale du jour, notation que la Commission du Système métrique avait — dans son indépendance la plus absolue — choisie comme la meilleure, notation enfin qui a reçu, comme on sait, la sanction pratique de l'illustre Laplace.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

DÉCIMALISATION DU TEMPS ET DES ANGLES.

TABLES DE RÉDUCTION,

PAR

M. E. GOEDSEELS.

Un des principaux obstacles, le seul peut-être, qui retarde l'adoption universelle du système décimal pour la mesure des angles et du temps, dans le domaine scientifique, est l'existence d'instruments, de documents et de renseignements sexagésimaux dont l'utilisation exigerait des calculs de réduction continuels. On peut, il est vrai, faciliter ces calculs par l'emploi de Tables de réduction à double entrée, mais l'emploi de ces Tables est encore trop compliqué. Veut-on, par exemple, convertir $11^h 39^m 27^s,41$ en grades divisés décimalement. Une Table à double entrée, renfermant 24 lignes et 60 colonnes, peut fournir directement

$$11^h 39^m = 194^g,1666....$$

Une autre Table, renfermant 60 lignes et 100 colonnes, peut fournir directement

$$27^s,41 = 0^g,12\,689\,814\,814....$$

d'où en faisant la somme

$$11^h 39^m 27^s,41 = 194^g,29\,356\,481\,481....$$

Il nous a semblé que tout procédé qui permettrait de simplifier les calculs de cette nature, ou de les supprimer dans un grand nombre de cas, constituerait un des meilleurs moyens pour contribuer à l'adoption des systèmes décimaux sinon dans la vie civile, au moins dans les Travaux scientifiques, et nous avons cherché à construire des Tables réalisant ce *desideratum*.

Les Tables que nous avons imaginées, et qui font l'objet de cette Communication, permettent de trouver sans aucun calcul les valeurs décimales de tous les nombres sexagésimaux qui ne renferment pas de fractions décimales de la seconde sexagésimale.

C'est ainsi, par exemple, que notre Table II donne directement les valeurs en

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

degrés divisés décimalement de nombres complexes tels que $11^h39^m27^s$. Cette Table donne

$$11^h39^m27^s = 194°,291\,666....$$

Lorsque le nombre à convertir renferme des centièmes de seconde, un petit calcul est nécessaire avant de pouvoir écrire le résultat. L'ensemble de tous les nombres à écrire, par exemple pour la réduction de $11^h39^m27^s,41$, est le suivant :

$$\begin{array}{r} 11^h39^m27^s,41 = 194^s,29\,356\,481\,481.... \\ -\ 26^s,64 \\ \hline 0^s,77 \end{array}$$

Le petit calcul supplémentaire peut souvent se faire mentalement, mais lors même qu'on doit l'écrire, l'emploi de notre Table II est beaucoup plus simple que celui des deux Tables à double entrée, l'une de 24 lignes et 60 colonnes, l'autre de 60 lignes et 100 colonnes, dont il a été question plus haut.

Si l'on remarque : 1° que notre Table II n'a que 54 lignes et 29 colonnes, 2° qu'elle permet, comme nous le verrons plus loin, de faire sans interpolations les calculs de réduction inverses, ce qui n'est pas le cas pour les susdites Tables à double entrée, on admettra avec nous que nos Tables ou tout au moins le principe sur lequel elles reposent mérite de fixer l'attention.

Ce principe, nous devrions dire plutôt cet artifice, consiste dans une brisure systématique des filets qui séparent certaines colonnes verticales. Le lecteur compétent comprendra facilement le mécanisme de ces brisures, et le genre de calculs auquel il peut être appliqué. Il est donc inutile que nous entrions dans des détails théoriques à ce sujet. Nous nous bornerons à donner comme exemples les Tables relatives à deux des systèmes qui ont été préconisés pour décimaliser le temps et les angles.

Le premier système conserve l'heure usuelle et le degré égal à la 360e partie de la circonférence, et divise décimalement ces deux unités.

Le second système consiste à diviser la circonférence en 400 grades, et le jour en quatre parties contenant chacune 10 heures. L'heure et le grade sont divisés décimalement dans ce système, de sorte que le passage des heures aux angles, ou *vice versa*, se fait par le simple déplacement de la virgule.

Nous avons choisi ces deux systèmes comme exemples, parce que nous y avons appliqué nos Tables pour notre usage personnel. Mais notre abstention en ce qui concerne les autres systèmes, notamment celui que défend M. de Rey-Pailhade, ne signifie nullement que ces autres systèmes sont moins bons à nos yeux que ceux dont nous nous occupons. C'est une question complètement étrangère à l'objet de notre travail.

Table I.

La Table I a pour but de convertir les divisions sexagésimales de l'heure ou du degré en fractions décimales.

Nous traiterons trois problèmes pour expliquer le mode d'emploi de la Table I.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Ces problèmes sont relatifs à l'heure, mais rien n'y serait changé s'il s'agissait de degrés (1).

PROBLÈME I. *Convertir* 37^m46^s *en fraction décimale de l'heure.*

1° On cherche les 37 minutes dans une des colonnes intitulées : *minutes;*

2° On suit la ligne des 37 minutes vers la gauche jusqu'à la première colonne intitulée : *dixièmes,* et l'on trouve là les six dixièmes du résultat;

3° On revient ensuite aux 37 minutes, et l'on cherche les 46 secondes du nombre proposé entre les mêmes filets gras dont un ou deux sont brisés.

Les deux centièmes du résultat se trouvent au-dessus de la colonne qui contient les 46 secondes.

Les chiffres décimaux suivants, qui sont 944... dans ce cas-ci, se trouvent sur la même ligne que les 46 secondes dans la colonne intitulée : *cent-millièmes — Le dernier chiffre est périodique.*

On a donc

$$37^m46^s = 0^h629444....$$

Remarque. — Nous ne nous occuperons pas, dans nos calculs, de savoir à quelle décimale il convient de s'arrêter en pratique. Nous laisserons ce soin au lecteur et nous ne ferons que des calculs entièrement exacts.

PROBLÈME II. *Convertir* $37^m46^s,61$ *en fraction décimale de l'heure.*

On opère d'abord comme dans le cas précédent; seulement, arrivé aux 944 cent-millièmes on continue vers la droite. On trouve là

$$\| 95 \mid 20 \| 96 \mid 56 \| 97 \mid 92 \|.$$

Ces nombres signifient que

$$\begin{aligned} 37^m.46^s,20 &= 0^h,6295 \\ 37.46,56 &= 0,6296 \\ 37.46,92 &= 0,6297 \end{aligned}$$

On en conclut que le résultat cherché commence par $0^h,6296$ et que l'appoint correspond à $0^s,61 - 0^s56 = 0^s,05$.

Mais chacun des nombres de secondes de la première des colonnes intitulées : *Sec* vaut le nombre de cent-millièmes d'heure inscrit sur la même ligne dans la colonne des cent-millièmes.

On a donc

$$5^s = 0,00138....$$

(1) L'emploi de nos Tables exige évidemment un apprentissage systématique. Le lecteur qui voudrait traiter avec facilité un des problèmes avant de s'être bien familiarisé avec les précédents serait certainement rebuté.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

On peut donc écrire directement

$$37^m46^s,61 = 0^h,6296\,138\ldots.$$

Remarque. — Si l'on avait eu à convertir par exemple $37^m47^s,13$, le premier des quatre nombres ci-dessus eût déjà été trop fort. Lorsque cela arrive, on passe à la ligne supérieure correspondant à une seconde en moins. On trouve ainsi

$$37^m45^s,84 = 0^h,6294,$$
$$37^m46^s,20 = 0^h,6295,$$

d'où

$$37^m45^s,13 = 0^h,6294 + 0^s,29 = 0^h,6\,294\,805\ldots.$$

Problème III. *Trouver la valeur de* $0^h,3457$ *en minutes et secondes divisées décimalement.*

1° On divise le nombre $0^h,3457$ en trois parties : les dixièmes, les centièmes et les dix-millièmes;

2° On cherche les 57 dix-millièmes dans une des colonnes portant l'entête *Dix-millièmes.* A la droite de 57 se trouvent les 52 centièmes de seconde du résultat.

3° On suit vers la gauche la ligne de ces 52 centièmes de seconde, et l'on s'arrête dans la colonne intitulée : *Sec*, qui est surmontée du chiffre 4 des centièmes du nombre à convertir. On trouve ainsi les 44 secondes du résultat.

4° Enfin on remonte ou l'on descend entre les filets gras qui comprennent les 44 secondes, jusqu'à ce qu'on arrive à hauteur des trois dixièmes du nombre proposé. On arrive ainsi aux 20 minutes qui achèvent le résultat. On a donc

$$0^h,3457 = 20^m44^s,52.$$

Table II.

La Table II permet de convertir les heures, minutes et secondes, ces dernières divisées décimalement, en degrés divisés décimalement; et *vice versa.*

Elle est faite en prévision de la publication de Tables logarithmiques correspondant au degré divisé décimalement, telles ou plus complètes que la Table de Bremiker publiée par M. Kallius (1).

Problème IV. *Convertir* $9^h44^m29^s$.

1° On cherche 44^m dans les colonnes intitulées : *Minutes,* et 9^h dans les colonnes intitulées : *Heures.*

2° Les unités du résultat — 6 — se trouvent sur la ligne des 44^m et dans une des deux colonnes intitulées : *Unités*, situées à la droite de celle qui contient les 9^h.

3° On remonte ou l'on descend la colonne renfermant les 6 unités jusqu'à la hauteur de 9^h. A gauche du point d'arrêt se trouvent les 14 dizaines du résultat.

4° On revient aux 44 minutes, et l'on cherche les 29 secondes entre les mêmes filets gras que les 44^m.

(1) Berlin; *Wiedmannsche Buchhandlung*, 1899. 8e édition stéréotype.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Le chiffre 1 qui surmonte la colonne renfermant les 29 secondes est le chiffre des dixièmes du résultat.

5° Les chiffres décimaux suivants 20833... se trouvent sur la même ligne que les 29 secondes dans la colonne intitulée : $\frac{1}{100000}$ *degré. Le dernier chiffre est périodique.*

On a donc

$$9^h44^m29^s = 146^\circ,1208\,33\ldots$$

PROBLÈME V. *Convertir* $9^h44^m29^s,47$.

On opère comme dans le problème précédent. Mais, arrivé aux chiffres décimaux 2083..., on lit à droite

$$\|21\,|\,04\|22\,|\,28\|23\,|\,52\|24\,|\,76\,\|.$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned} 9^h.44^m.29^s,04 &= 146^\circ,121,\\ 9^h.44^m.29^s,28 &= 146^\circ,122,\\ 9^h.44^m.29^s,52 &= 146^\circ,123,\\ 9^h.44^m.29^s,76 &= 146^\circ,124. \end{aligned}$$

On en conclut que le résultat cherché commence par $146^\circ,122$, et que l'appoint correspond à $0^s,47 - 0^s,28 = 0^s,19$.

Mais, chacun des nombres de secondes de la première colonne intitulée : *Sec* vaut le nombre décimal inscrit sur la même ligne dans la colonne : $\frac{1}{100000}$ *degré*, etc. On a donc

$$19^s = 0,7916\ldots.$$

On peut donc écrire directement

$$9^h44^m29^s,47 = 146^\circ,1227916\ldots.$$

Remarque. — Lorsque le premier des quatre nombres ci-dessus est trop fort, ce qui serait le cas, par exemple, pour $9^h44^m29^s,02$, on passe à la ligne supérieure correspondant à une seconde en moins. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} 9^h44^m28^s,80 &= 146^\circ,120,\\ 9^h44^m29^s,04 &= 146^\circ,121; \end{aligned}$$

d'où

$$9^h44^m29^s,02 = 146^\circ,120 + 0^s,22 = 146^\circ,1209166\ldots.$$

PROBLÈME VI. *Convertir* $104^\circ,218$ *en heures, minutes et secondes.*

1° On cherche les 18 millièmes dans les colonnes intitulées : $\frac{1}{1000}$ *degré.*

A droite de 18 on trouve les 32 centièmes de seconde du résultat.

2° On suit la ligne vers la gauche jusqu'à la colonne surmontée des 2 dixièmes.

Le point d'arrêt 52 donne les secondes du résultat.

3° On forme ensuite 104° au moyen du nombre 10 d'une colonne de dizaines et du chiffre 4 de la colonne *Unités* située immédiatement à la droite.

4° Les 6 heures du résultat sont à la même hauteur que les 10 dizaines dans la colonne *Heures* située à gauche de ces dizaines.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

5° Les 56 minutes se trouvent à la même hauteur que les 4 unités, entre les mêmes filets gras que les 52 secondes.

On a donc

$$104^{\circ},218 = 6^{h}56^{m}52^{s},32.$$

PROBLÈME VII. *Convertir* 104°,2187.

On procède comme plus haut en faisant d'abord abstraction du dernier chiffre décimal 7. Seulement, au lieu d'écrire les 32 centièmes, on écrit 488 millièmes qui se trouvent dans la colonne 7 du Tableau annexe, sur la ligne qui commence par 32.

On a donc

$$104^{\circ},2187 = 6^{h}56^{m}52^{s},488.$$

TABLE III.

La Table III sert à passer du degré au grade ou *vice versa*. Elle peut être utilisée seule ou avec ses deux annexes. Seule elle convient aux opérations dans lesquelles les nombres à convertir ne dépassent pas le centigrade, ou la minute sexagésimale. Lorsque les nombres vont au delà de ces deux limites, on a recours aux deux Tables annexes.

PROBLÈME VIII. *Convertir* 137°49′ *en grades divisés décimalement.*

1° On cherche les 137° dans une des colonnes intitulées : *Degrés*.

2° On suit la ligne de 137° vers la gauche jusqu'à la première colonne intitulée : *Dizaines de grades*. Le point d'arrêt, 15, est le nombre de dizaines du résultat.

3° On retourne aux 137° et l'on cherche les 49′ entre les mêmes filets gras que 137°. Au-dessus de la colonne qui contient les 49′ se trouve le chiffre, 3, des unités du résultat; et sur la même ligne que 49, dans la colonne intitulée : *Fractions décimales du grade*, se trouvent les décimales 1296 du résultat. Les trois derniers chiffres sont périodiques. On a donc

$$137^{\circ},49' = 153^{g}129\,629\,6\ldots.$$

PROBLÈME IX. *Convertir* 315ᵍ,36.

1° On cherche les 36 centigrades dans une des deux colonnes intitulées : *Centigrades*. A droite de 36 on lit les 26″,4 du résultat.

2° On suit la ligne vers la gauche jusqu'à la colonne surmontée du chiffre 5 des unités. Le point d'arrêt 49 donne les minutes du résultat.

3° On remonte ou l'on descend entre les mêmes filets gras que les 49′ jusqu'à la ligne qui commence par les 31 dizaines de grade. Le point d'arrêt, 283, donne les degrés.

On a donc

$$315^{g},36 = 283^{\circ}49'26'',4.$$

PROBLÈME X. *Convertir* 137°49′16″,37.

1° On opère sur 137°49′ comme dans le problème VIII et l'on trouve d'abord 153ᵍ.

2° Arrivé aux chiffres décimaux 1296, on considère le nombre 129 formé par les trois premiers et l'on augmente ce nombre d'une unité. On trouve 130.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

3° On cherche dans la première annexe le nombre qui se trouve à l'intersection de la colonne 100 et de la ligne 30. On y lit $1''$. Sur la même ligne dans la colonne intitulée : $0'',01$, on lit 20. Cela signifie que

$$137°49'1'',20 = 153^g,130.$$

Le premier terme de cette égalité étant inférieur au nombre à convertir, on poursuit les opérations de la même manière pour les nombres décimaux 131, 132, etc., jusqu'à ce qu'on arrive à un nombre supérieur à $137°49'26'',37$.

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} 137.49.\ 4'',44 &= 153^g,131 \\ 7,68 &= 2 \\ 10,92 &= 3 \\ 137.49.14,16 &= 153,134 \\ 137.49.17,40 &= 153,135 \end{aligned}$$

On trouve ainsi les trois premiers chiffres décimaux du résultat, et l'on a :

$$137°49'16'',37 = 153^g,134 + 16'',37 - 14'',16 = 153^g,134 + 2'',21.$$

La deuxième annexe donne les valeurs décimales pour des nombres variant de 0 à 323 secondes. les 68 milligrades correspondant à 221 secondes se trouvent à la droite de $221''$. Les chiffres décimaux suivants : 209876543, sont sur la même ligne dans la dernière colonne.

On a donc

$$221'' = 0,068\,209\,876\,543\,209\,876\,543\ldots;$$

d'où

$$2''21 = 0,000\,682\,098\ldots$$

et

$$137°49'16'',37 = 153^g\,134\,682\,098\ldots.$$

Remarque. — Si l'on avait dû convertir, par exemple, $137°49'0'',37$, le premier nombre $137°49'1'',02$ correspondant à 130 eût déjà été trop fort. Dans ce cas, on remonte d'une ligne dans la première annexe et l'on augmente de 60 le nombre $0'',37$ des secondes donné. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} 137°48'57'',96 &= 153^g,129, \\ 137°49'\ 1'',02 &= 153^g,130; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 137°49'0'',37 &= 153^g,129 + 60'',37 - 57'',96 \\ &= 153^g,129 + 2'',41 \\ &= 153^g,129\,743\,827\,160\,49\ldots. \end{aligned}$$

Problème XI. *Convertir* $157^g,364$.

1° Le nombre $39'',36$, qui termine le résultat, est obtenu par la première annexe à l'intersection de la colonne 300 et de la ligne 64.

2° On cherche ensuite, dans la colonne : ***Fractions décimales du grade*** de la Table principale, le plus grand nombre, 3518, qui ne surpasse pas 3640. Puis on suit la ligne vers la gauche jusqu'à la colonne surmontée du chiffre 7 des unités de 157^g. Le point d'arrêt, $37'$, donne les minutes du résultat.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

3° On remonte ou l'on descend ensuite, en restant entre les mêmes filets gras que 37, jusqu'à la ligne qui commence par les 15 dizaines de 157^g. Le point d'arrêt 141 est le nombre des degrés cherché.

On a donc

$$157^g,364 = 141°,37'39'',36$$

PROBLÈME XII. *Convertir un nombre tel que* $0^g,00056$.

La troisième annexe est une Table à double entrée donnant en secondes divisées décimalement la valeur de $0^g,00056$ à l'intersection de la ligne 50 et de la colonne 6. On y voit que

$$0^g,00056 = 1'',8144.$$

Cette troisième annexe sert principalement à compléter la conversion de nombres tels que $157^g,364\,56\,29$. On a, en effet, en vertu du problème XI.

	$157^g,364$	$= 141°.37'.39'',36$
L'annexe III donne	$0,00056$	$= 1,8144$
	$0,0000029$	$= 0,009396$
d'où	157.3645629	$= 141.37.41,173796$

TABLE IV.

La Table IV sert à convertir les heures, minutes et secondes divisées décimalement en grades divisés décimalement. Elle convient donc non seulement aux mesures angulaires proprement dites, mais encore aux mesures du temps, le jour étant divisé en quatre parties de 10 heures chacune, divisées décimalement.

La même Table sert aux conversions inverses.

PROBLÈME XIII. *Convertir* $14^h51^m41^s$.

1° On cherche dans les colonnes intitulées : *Heures, Minutes*, le plus grand nombre, 14^h48^m, contenu dans 14^h51^m. On suit la ligne 14^h48^m vers la gauche jusqu'à la première colonne.

Le point d'arrêt, 24, donne les dizaines du résultat.

2° On revient à 14^h48^m, et l'on additionne mentalement à ce nombre les divers nombres compris entre les mêmes filets gras que 14^h48^m, dans les colonnes intitulées : *Minutes, Secondes*, et l'on s'arrête à la plus grande somme, $14^h51^m41^s$. Au-dessus de la colonne contenant le nombre 3^m40^s auquel on s'est arrêté, se trouve le chiffre 7 des unités du résultat.

3° On suit, vers la droite, la ligne de 3^m40^s jusqu'à celle des quatre colonnes intulées : *Fractions décimales du grade* qui est surmontée du nombre, 1, de secondes nécessaires pour passer de 40^s à 41^s.

Le point d'arrêt, 689 814, donne les chiffres décimaux du résultat. Les trois derniers sont périodiques. On a donc

$$14^h51^m41^s = 247^g,689\,814\,814\ldots.$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

PROBLÈME XIV. *Convertir un nombre entier de secondes ne surpassant pas* 215^s, *par exemple,* 198^s.

On cherche dans la dernière colonne le plus grand nombre, 196, contenu dans 198. Puis on suit la ligne 196 vers la gauche, et l'on s'arrête à la colonne intitulée : *Fractions décimales du grade*, qui est surmontée du nombre, 2, de secondes nécessaire pour passer de 196 à 198.

Le point d'arrêt 916 606 donne les décimales du résultat.

On a

$$198^s = 0^g,916\,606\,606\ldots.$$

PROBLÈME XV. *Convertir* $14^h51^m41^s,67$.

On opère d'abord comme dans le problème XIII. Puis, arrivé aux chiffres décimaux on continue à suivre la ligne vers la droite jusqu'à la première colonne intitulée : *Centigrades*. On lit à partir du point d'arrêt

$$\| 69 \mid 1,04 \| 70 \mid 3,20 \|$$

On en conclut que

$$14^h51^m41^s,04 = 247^g,69,$$

et

$$14^h51^m43^s,20 = 247^g,70.$$

Le résultat commence donc par $248^g,69$ et l'appoint est la valeur décimale de $41^s,67 - 41^s,04$ ou $0^s,63$.

Or, on a vu dans le problème précédent comment on trouve

$$63^s = 0^g,291\,666\ldots.$$

On a donc

$$14^h51^m41^s,67 = 247^g,692\,916\,66\ldots.$$

Remarque. — Si l'on avait dû convertir, par exemple, $14^h51^m41^s,02$, le nombre $247^g,69$ eût été trop fort. Dans des cas de ce genre on remonte d'une ligne, et l'on a

$$14^h51^m36^s + 2^s,88 = 247^g,68.$$

Le résultat commence par $247^g,68$ et l'appoint est la valeur décimale de

$$41^s,02 - 38^s,88 = 2^s,14 \quad \text{ou} \quad 0,009\,907\,407\,40\ldots.$$

On a donc

$$14^h51^m41^s,02 = 247^g,689\,907\,407\,40\ldots.$$

PROBLÈME XVI. *Convertir un nombre* $135^g,44$ *comprenant deux chiffres décimaux.*

1° On cherche les 44 centigrades dans une des colonnes intitulées : *Centigrades*. A droite de 44 se trouvent $3^s,04$.

2° On suit vers la gauche la ligne de $3^s,04$ jusqu'à la colonne surmontée du chiffre 5 des unités de grade. Au point d'arrêt on lit 3^m32^s qu'on ajoute à $3^s,04$. On obtient ainsi $3^m35^s,04$.

3° On remonte ou l'on descend, en restant entre les deux filets gras qui comprennent 3^m32^s, et jusqu'à la ligne qui commence par les 13 dizaines de grade. On

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

lit au point d'arrêt 8^h04^m qu'on ajoute à la somme précédente, et l'on obtient ainsi le résultat final

$$8^h7^m35^s,04.$$

PROBLÈME XVII. *Convertir en secondes un nombre tel que* $0^g,94$.

On cherche 94 dans une colonne intitulée *Centigrades*. En ajoutant les $3^s,04$ qui se trouvent à droite de 94 au nombre 200 qui se trouve sur la même ligne, dans la dernière colonne, on obtient le résultat final

$$203^s,04.$$

PROBLÈME XVIII. *Convertir en secondes* $127^g,269\,43$.

On a, en vertu du problème XVI,

$$127^g,26 = 7^h38^m8^s,16\,;$$

en vertu du problème XVII,

$$0^g,0094 = 2^s,0304,$$
$$0^g,00003 = 0^s,00648,$$

d'où, en faisant la somme,

$$127^g,26943 = 7^h38^m10^s,19688.$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Table I pour convertir les minutes et secondes d'heure ou d'arc en fractions décimales de l'heure ou du degré et vice versa.

DIXIÈMES.	CENTIÈMES. 0		1		2	3		4	5		6		7	8		9	CENT-MILLIÈMES. Le dernier chiffre est périodique.	DIX-MILLIÈMES.	CENTIÈMES de seconde.	DIX-MILLIÈMES.	CENTIÈMES de seconde.	DIX-MILLIÈMES.	CENTIÈMES de seconde.
	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Sec.	Min.	Sec.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Sec.	Min.	Sec.							
	0		36		12	48		24	0		36		12	48		24	000	0	00	1	36	2	72
0.0	1	0	37	1	13	49	2	25	1	3	37	4	13	49	5	25	027	3	08	4	44	5	80
	2		38		14	50		26	2		38		14	50		26	055	6	16	7	52	8	88
	3		39		15	51		27	3		39		15	51		27	083	9	24	10	60	11	96
0.1	4	6	40	7	16	52	8	28	4	9	40	10	16	52	11	28	111	12	32	13	68		
	5		41		17	53		29	5		41		17	53		29	138	14	04	15	40	16	76
	6		42		18	54		30	6		42		18	54		30	166	17	12	18	48	19	84
0.2	7	12	43	13	19	55	14	31	7	15	43	16	19	55	17	31	194	20	20	21	56	22	92
	8		44		20	56		32	8		44		20	56		32	222	23	28	24	64		
	9		45		21	57		33	9		45		21	57		33	250	25	00	26	36	27	72
0.3	10	18	46	19	22	58	20	34	10	21	46	22	22	58	23	34	277	28	08	29	44	30	80
	11		47		23	59		35	11		47		23	59		35	305	31	16	32	52	33	88
	12		48		24	0		36	12		48		24	0		36	333	34	24	35	60	36	96
0.4	13	24	49	25	25	1	26	37	13	27	49	28	25	1	29	37	361	37	32	38	68		
	14		50		26	2		38	14		50		26	2		38	388	39	04	40	40	41	76
	15		51		27	3		39	15		51		27	3		39	416	42	12	43	48	44	84
0.5	16	30	52	31	28	4	32	40	16	33	52	34	28	4	35	40	444	45	20	46	56	47	92
	17		53		29	5		41	17		53		29	5		41	472	48	28	49	64		
	18		54		30	6		42	18		54		30	6		42	500	50	00	51	36	52	72
0.6	19	36	55	37	31	7	38	43	19	39	55	40	31	7	41	43	527	53	08	54	44	55	80
	20		56		32	8		44	20		56		32	8		44	555	56	16	57	52	58	88
	21		57		33	9		45	21		57		33	9		45	583	59	24	60	60	61	96
0.7	22	42	58	43	34	10	44	46	22	45	58	46	34	10	47	46	611	62	32	63	68		
	23		59		35	11		47	23		59		35	11		47	638	64	04	65	40	66	76
	24		0		36	12		48	24		0		36	12		48	666	67	12	68	48	69	84
0.8	25	48	1	49	37	13	50	49	25	51	1	52	37	13	53	49	694	70	20	71	56	72	92
	26		2		38	14		50	26		2		38	14		50	722	73	28	74	64		
	27		3		39	15		51	27		3		39	15		51	750	75	00	76	36	77	72
0.9	28	54	4	55	40	16	56	52	28	57	4	58	40	16	59	52	777	78	08	79	44	80	80
	29		5		41	17		53	29		5		41	17		53	805	81	16	82	52	83	88
	30		6		42	18		54	30		6		42	18		54	833	84	24	85	60	86	96
	31		7		43	19		55	31		7		43	19		55	861	87	32	88	68		
	32		8		44	20		56	32		8		44	20		56	888	89	04	90	40	91	76
	33		9		45	21		57	33		9		45	21		57	916	92	12	93	48	94	84
	34		10		46	22		58	34		10		46	22		58	944	95	20	96	56	97	92
	35		11		47	23		59	35		11		47	23		59	972	98	28	99	64		

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Table II pour convertir les heures, minutes et secondes en degrés et fractions décimales du degré.

| HEURES. | | DEGRÉS. | | |

Table III pour la conversion des degrés, minutes et secondes de la division sexagésimale en grades, minutes (centigrades) et secondes (décimilligrades), etc., de la division centésimale et vice versa.

GRADES	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	Fractions décimales du grade.	Centigrades.	Secondes sex.	Centigrades.	Secondes sex.
Dizaines de grades.	Minutes sex.	Degrés.	Minutes sex.	Degrés.	Minutes sex.	Degrés.	Minutes sex.	Degrés.	Minutes sex.	Degrés.	Minutes sex.	Degrés.	Minutes sex.	Degrés.	Minutes sex.	Degrés.	Minutes sex.	Degrés.	Minutes sex.					
0	0	0	54	1	48	2	42	3	36	4	30	5	24	6	18	7	12	8	6	0000	0	0,0	1	32,4
1	1	9	55	**10**	49	11	43	12	37	13	31	14	25	15	19	16	13	17	7	0185	2	4,8	3	37,2
2	2	18	56	19	50	**20**	44	21	38	22	32	23	26	24	20	25	14	26	8	0370	4	9,6	5	42,0
3	3	27	57	28	51	29	45	**30**	39	31	33	32	27	33	21	34	15	35	9	0555	6	14,4	7	46,8
4	4	36	58	37	52	38	46	39	40	**40**	34	41	28	42	22	43	16	44	10	0740	8	19,2	9	51,6
5	5	45	59	46	53	47	47	48	41	49	35	**50**	29	51	23	52	17	53	11	0925	10	24,0	11	56,4
6	6	54	0	55	54	56	48	57	42	58	36	59	30	**60**	24	61	18	62	12	1111	12	28,8	...	....
7	7	63	1	64	55	65	49	66	43	67	37	68	31	69	25	**70**	19	71	13	1296	13	1,2	14	33,6
8	8	72	2	73	56	74	50	75	44	76	38	77	32	78	26	79	20	**80**	14	1481	15	6,0	16	38,4
9	9	81	3	89	57	83	51	84	45	85	39	86	33	87	27	88	21	89	15	1666	17	10,8	18	43,2
10	10	**90**	4	91	58	92	52	93	46	94	40	95	34	96	28	97	22	98	16	1851	19	15,6	20	48,0
11	11	99	5	**100**	59	101	53	102	47	103	41	104	35	105	29	106	23	107	17	2037	21	20,4	22	52,8
12	12	108	6	109	0	**110**	54	111	48	112	42	113	36	114	30	115	24	116	18	2222	23	25,2	24	57,6
13	13	117	7	118	1	119	55	**120**	49	121	43	122	37	123	31	124	25	125	19	2407	25	30,0	...	....
14	14	126	8	127	2	128	56	129	50	**130**	44	131	38	132	32	133	26	134	20	2592	26	2,4	27	34,8
15	15	135	9	136	3	137	57	138	51	139	45	**140**	39	141	33	142	27	143	21	2777	28	7,2	29	39,6
16	16	144	10	145	4	146	58	147	52	148	46	149	40	**150**	34	151	28	152	22	2962	30	12,0	31	44,4
17	17	153	11	154	5	155	59	156	53	157	47	158	41	159	35	**160**	29	161	23	3148	32	16,8	33	49,2
18	18	162	12	163	6	164	0	165	54	166	48	167	42	168	36	169	30	**170**	24	3333	34	21,6	35	54,0
19	19	171	13	172	7	173	1	174	55	175	49	176	43	177	37	178	31	179	25	3518	36	26,4	37	58,8
20	20	**180**	14	181	8	182	2	183	56	184	50	185	44	186	38	187	32	188	26	3703	38	31,2	...	....
21	21	189	15	**190**	9	191	3	192	57	193	51	194	45	195	39	196	33	197	27	3888	39	3,6	40	36,0
22	22	198	16	199	10	**200**	4	201	58	202	52	203	46	204	40	205	34	206	28	4074	41	8,4	42	40,8
23	23	207	17	208	11	209	5	**210**	59	211	53	212	47	213	41	214	35	215	29	4259	43	13,2	44	45,6
24	24	216	18	217	12	218	6	219	0	**220**	54	221	48	222	42	223	36	224	30	4444	45	18,0	46	50,4
25	25	225	19	226	13	227	7	228	1	229	55	**230**	49	231	43	232	37	233	31	4629	47	22,8	48	55,2
26	26	234	20	235	14	236	8	237	2	238	56	239	50	**240**	44	241	38	242	32	4814	49	27,6	50	0,0
27	27	243	21	244	15	245	9	246	3	247	57	248	51	249	45	**250**	39	251	33	5000	51	32,4	...	....
28	28	252	22	253	16	254	10	255	4	256	58	257	52	258	46	259	40	**260**	34	5185	52	4,8	53	37,2
29	29	261	23	262	17	263	11	264	5	265	59	266	53	267	47	268	41	269	35	5370	54	9,6	55	42,0
30	30	**270**	24	271	18	272	12	273	6	274	0	275	54	276	48	277	42	278	36	5555	56	14,4	57	46,8
31	31	279	25	**280**	19	281	13	282	7	283	1	284	55	285	49	286	43	287	37	5740	58	19,2	59	51,6
32	32	288	26	289	20	**290**	14	291	8	292	2	293	56	294	50	295	44	296	38	5925	60	24,0	61	56,4
33	33	297	27	298	21	299	15	**300**	9	301	3	302	57	303	51	304	45	305	39	6111	62	28,8	...	....
34	34	306	28	307	22	308	16	309	10	**310**	4	311	58	312	52	313	46	314	40	6296	63	1,2	64	33,6
35	35	315	29	316	23	317	17	318	11	319	5	**320**	59	321	53	322	47	323	41	6481	65	6,0	66	38,4
36	36	324	30	325	24	326	18	327	12	328	6	329	0	**330**	54	331	48	332	42	6666	67	10,8	68	43,2
37	37	333	31	334	25	335	19	336	13	337	7	338	1	339	55	**340**	49	341	43	6851	69	15,6	70	48,0
38	38	342	32	343	26	344	20	345	14	346	8	347	2	348	56	349	50	**350**	44	7037	71	20,4	72	52,8
39	39	351	33	352	27	353	21	354	15	355	9	356	3	357	57	358	51	359	45	7222	73	25,2	74	57,6
40	40	**360**	34	361	28	362	22	363	16	364	10	365	4	366	58	367	52	368	46	7407	75	30,0	..	....
41	41	369	35	**370**	29	371	23	372	17	373	11	374	5	375	59	376	53	377	47	7592	76	2,4	77	34,8
42	42	378	36	379	30	**380**	24	381	18	382	12	383	6	384	0	385	54	386	48	7777	78	7,2	79	39,6
43	43	387	37	388	31	389	25	**390**	19	391	13	392	7	393	1	394	55	395	49	7962	80	12,0	81	44,4
44	44	396	38	397	32	398	26	399	20	**400**	14	401	8	402	2	403	56	404	50	8148	82	16,8	83	49,2
45	45	405	39	406	33	407	27	408	21	409	15	**410**	9	411	3	412	57	413	51	8333	84	21,6	85	54,0
46	46	414	40	415	34	416	28	417	22	418	16	419	10	**420**	4	421	58	422	52	8518	86	26,4	87	58,8
47	47	423	41	424	35	425	29	426	23	427	17	428	11	429	5	**430**	59	431	53	8703	88	31,2	...	....
48	48	432	42	433	36	434	30	435	24	436	18	437	12	438	6	439	0	**440**	54	8888	89	3,6	90	36,0
49	49	441	43	442	37	444	31	444	25	445	19	446	13	447	7	448	1	449	55	9074	91	8,4	92	40,8
50	50	**450**	44	451	38	452	32	453	26	454	20	455	14	456	8	457	2	458	56	9259	93	13,2	94	45,6
51	51	459	45	**460**	39	461	33	462	27	463	21	464	15	465	9	466	3	467	57	9444	95	18,0	96	50,4
52	52	468	46	469	40	**470**	34	471	28	472	22	473	16	474	10	475	4	476	58	9629	97	22,8	98	55,2
53	53	477	47	478	41	479	35	**480**	29	481	23	482	17	483	11	**484**	5	485	59	9814	99	27,6	...	....

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Annexe I.

	0	100	200	300	400			0	100	200	300	450	
	500	600	700	800	900			500	600	700	800	900	
	Sec.	Sec.	Sec.	Sec.	Sec.	0″,1.		Sec.	Sec.	Sec.	Sec .	Sec.	0″,1.
0	0	24	48	12	36	00	50	42	6	30	54	18	00
1	3	27	51	15	39	24	51	45	9	33	57	21	24
2	6	30	54	18	42	48	52	48	12	36	0	24	48
3	9	33	57	21	45	72	53	51	15	39	3	27	72
4	12	36	0	24	48	96	54	54	18	42	6	30	96
5	16	40	4	28	52	20	55	58	22	46	10	34	20
6	19	43	7	31	55	44	56	1	25	49	13	37	44
7	22	46	11	34	58	68	57	4	28	52	16	40	68
8	25	49	14	37	1	92	58	7	31	55	19	43	92
9	29	53	17	41	5	16	59	11	35	59	23	47	16
10	32	56	20	44	8	40	60	14	38	2	26	50	40
11	35	59	23	47	11	64	61	17	41	5	29	53	64
12	38	2	26	50	14	88	62	20	44	8	32	56	88
13	42	6	30	54	18	12	63	24	48	12	36	0	12
14	45	9	33	57	21	36	64	27	51	15	39	3	36
15	48	12	36	0	24	60	65	30	54	18	42	6	60
16	51	15	39	3	27	84	66	33	57	21	45	9	84
17	55	19	43	7	31	08	67	37	1	25	49	13	08
18	58	22	46	10	34	32	68	40	4	28	52	16	32
19	1	25	49	13	37	56	69	43	7	31	55	19	56
20	4	28	52	16	40	80	70	46	10	34	58	22	80
21	8	32	56	20	44	04	71	50	14	38	2	26	04
22	11	35	59	23	47	28	72	53	17	41	5	29	28
23	14	38	2	26	50	52	73	56	20	44	8	32	52
24	17	41	5	29	53	76	74	59	23	47	11	35	76
25	21	45	9	33	57	00	75	3	27	51	15	39	00
26	24	48	12	36	0	24	76	6	30	54	18	42	24
27	25	51	15	39	3	48	77	9	33	57	21	45	48
28	30	54	18	42	6	72	78	12	36	0	24	48	72
29	33	57	21	45	9	96	79	15	39	3	27	51	96
30	37	1	25	49	13	20	80	19	43	7	31	50	20
31	40	4	28	52	16	44	81	22	46	10	34	58	44
32	43	7	31	55	19	68	82	25	49	13	37	1	68
33	46	10	34	58	22	92	83	28	52	16	40	4	92
34	50	14	38	2	26	16	84	32	56	20	44	8	16
35	53	17	41	5	29	40	85	35	59	23	47	11	40
36	56	20	44	8	32	64	86	38	2	26	50	14	64
37	59	23	47	11	35	88	87	41	5	29	53	17	68
38	03	27	51	15	39	12	88	45	9	33	57	21	12
39	06	30	54	18	42	36	89	48	12	36	0	24	36
40	09	33	57	21	45	60	90	51	15	39	3	27	60
41	12	36	0	24	48	84	91	54	18	42	6	30	84
42	16	40	4	28	52	08	92	58	22	46	10	34	08
43	19	43	7	31	55	32	93	1	25	49	13	37	32
44	22	46	10	34	58	56	94	4	28	52	16	40	56
45	25	49	13	37	1	80	95	7	31	55	19	43	80
46	29	53	17	41	5	04	96	11	35	59	23	47	04
47	32	56	20	44	8	28	97	14	38	2	26	50	28
48	35	59	23	47	11	52	98	17	41	5	29	53	52
49	38	2	26	50	14	76	99	20	44	8	32	56	56

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Annexe II.

Secondes sex.	Millig.	Secondes sex.	Millig.	Secondes sex.	Millig.	Secondes sex.	Millig.	Chiffres périodiques qui suivent les milligrades.			Secondes sex.	Millig.	Secondes sex.	Millig.	Secondes sex.	Millig.	Secondes sex.	Millig.	Chiffres périodiques qui suivent les milligrades		
0	0	81	25	162	50	243	75	000	000	000											
1	0	82	25	163	50	244	75	308	641	975	41	12	122	37	203	62	284	87	654	320	987
2	00	83	25	164	50	245	75	617	283	950	42	12	123	37	204	62	285	87	962	...	...
3	00	84	25	165	50	246	75	925	...	...	43	13	124	38	205	63	286	88	271	604	938
4	01	85	26	166	51	247	76	234	567	901	44	13	125	38	206	63	287	88	580	246	913
5	01	86	26	167	51	248	76	543	209	876	45	13	126	38	207	63	288	88	8	...	...
6	01	87	26	168	51	249	76	851	...	...	46	14	127	39	208	64	289	89	197	530	864
7	02	88	27	169	52	250	77	160	493	827	47	14	128	39	209	64	290	89	506	172	839
8	02	89	27	170	52	251	77	469	138	802	48	14	129	39	210	64	291	89	814	...	...
9	02	90	27	171	52	252	77	7			49	15	130	40	211	65	292	90	123	456	790
10	03	91	28	172	53	253	78	086	419	753	50	15	131	40	212	65	293	90	432	098	765
11	03	92	28	173	53	254	78	395	061	728	51	15	132	40	213	65	294	90	740	...	...
12	03	93	28	174	53	255	78	703	...	...	52	16	133	41	214	66	295	91	049	382	716
13	04	94	29	175	54	256	79	012	345	679	53	16	134	41	215	66	296	91	358	024	691
14	04	95	29	176	54	257	79	320	987	654	54	16	135	41	216	66	297	91	6	...	...
15	04	96	29	177	54	258	79	629	...	...	55	16	136	41	217	66	298	91	975	308	641
16	04	97	29	178	54	259	79	938	271	604	56	17	137	42	218	67	299	92	283	950	617
17	05	98	30	179	55	260	80	246	913	580	57	17	138	42	219	67	300	92	592	...	...
18	05	99	30	180	55	261	80	5	...	...	58	17	139	42	220	67	301	92	901	234	567
19	05	100	30	181	55	262	80	864	197	530	59	18	140	43	221	68	302	93	209	876	543
20	06	101	31	182	56	263	81	172	839	506	60	18	141	43	222	68	303	93	518	...	...
21	06	102	31	183	56	264	81	481	...	...	61	18	142	43	223	68	304	93	827	160	493
22	06	103	31	184	56	265	81	790	123	456	62	19	143	44	224	69	305	94	135	802	469
23	07	104	32	185	57	266	82	098	765	432	63	19	144	44	225	69	306	94	4	...	...
24	07	105	32	186	57	267	82	407	...	...	64	19	145	44	226	69	307	94	753	086	419
25	07	106	32	187	57	268	82	716	049	382	65	20	146	45	227	70	308	95	061	728	395
26	08	107	33	188	58	269	83	024	691	358	66	20	147	45	228	70	309	95	370	...	...
27	08	108	33	189	58	270	83	3	...	...	67	20	148	45	229	70	310	95	679	012	345
28	08	109	33	190	58	271	83	641	975	308	68	20	149	45	230	70	311	95	987	654	320
29	08	110	33	191	58	272	83	950	617	283	69	21	150	46	231	71	312	96	296	...	...
30	09	111	34	192	59	273	84	259	...	...	70	21	151	46	232	71	313	96	604	938	271
31	09	112	34	193	59	274	84	567	901	234	71	21	152	46	233	71	314	96	913	580	246
32	09	113	34	194	59	275	84	876	543	209	72	22	153	47	234	72	315	97	2	...	...
33	10	114	35	195	60	276	85	185	...	...	73	22	154	47	235	72	316	97	530	864	197
34	10	115	35	196	60	277	85	493	827	160	74	22	155	47	236	72	317	97	839	506	172
35	10	116	35	197	60	278	85	802	469	135	75	23	156	48	237	73	318	96	148	...	...
36	11	117	36	198	61	279	86	1	...	...	76	23	157	48	238	73	319	98	456	790	123
37	11	118	36	199	61	280	86	419	753	086	77	23	158	48	239	73	320	98	765	432	098
38	11	119	36	200	61	281	86	728	395	061	78	24	159	49	240	74	321	99	074	...	...
39	12	120	37	201	62	282	87	037	...	...	79	24	160	49	241	74	322	99	382	716	049
40	12	121	37	202	62	283	87	345	679	012	80	24	161	49	242	74	323	99	691	358	024

Annexe III.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
00	0,0000	0,0324	0,0648	0,0972	0,1296	0,1620	0,1944	0,2268	0,2592	0,2916	00
10	0,3240	0,3564	0,3888	0,4212	0,4536	0,4860	0,5184	0,5508	0,5832	0,6156	10
20	0,6480	0,6804	0,7128	0,7452	0,7776	0.8100	0,8424	0,8748	0,9072	0,9396	20
30	0,9720	1,0044	1,0368	1,0692	1,1016	1,1340	1,1664	1,1988	1,2312	1,2636	30
40	1,2960	1,3284	1,3608	1,3932	1,4256	1,4580	1,4904	1,5228	1,5552	1,5876	40
50	1,6200	1,6524	1,6848	1,7172	1,7496	1,7820	1,8144	1,8468	1,8792	1,9116	50
60	1,9440	1,9764	2,0088	2,0412	2,0736	2,1060	2,1384	2,1708	2,2032	2,2356	60
70	2,2680	2,3004	2,3328	2,3652	2,3976	2,4300	2,4624	2,4948	2,5272	2,5596	70
80	2,4920	2,6244	2,6568	2,6892	2,7216	2,7540	2,7864	2,8188	2,8512	2,8836	80
90	2,9160	2,9484	2,9808	3,0132	3,0456	3,0780	3,1104	3,1428	3,1752	3,2076	90

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Table IV pour la conversion des heures, minutes et secondes en grades, minutes (centigrades) et secondes (décimilligrades) et vice versa.

Grades.	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
Dizaine de grades.	Minutes.	Secondes.	Heures. Minutes.	Minutes. Secondes.	Heures. Minutes.	Minutes. Secondes.	Heures. Minutes.	Minutes. Secondes.	Heures. Minutes.	Minutes. Secondes.	Heures. Minutes.	Minutes. Secondes.	Heures. Minutes.	Minutes. Secondes.	Heures. Minutes.	Minutes. Secondes.	Heures. Minutes.	Minutes. Secondes.	Heures. Minutes.	Minutes. Secondes.
0	0.00	0.00	3.36	0.04	3.12	0.08	2.48	0.12	2.24	0.16	2.00	0.20	1.36	0.24	1.12	0.28	0.48	0.32	0.24	
1	0.04	0.36	3.40	0.40	3.16	0.44	2.52	0.48	2.28	0.52	2.04	0.56	1.40	1 00	1.16	1.04	0.52	1.08	0.28	
2	0.08	1.12	3.44	1.16	3.20	1.20	2.56	1.24	2.32	1.28	2.08	1.32	1.44	1.36	1.20	1.40	0.56	1.44	0.32	
3	0.12	1.48	3.48	1.52	3.24	1 56	3.00	2.00	2.36	2.04	2.12	2.08	1.48	2.12	1.24	2.16	1.00	2.20	0.36	
4	0.16	2.24	3.52	2.28	3.28	2.32	3.04	2.36	2.40	2.40	2.16	2.44	1.52	2.48	1.28	2.52	1.04	2.56	0.40	
5	0.20	3.00	3.56	3.04	3 32	3.08	3.08	3.12	2.44	3.16	2.20	3.20	1.56	3.24	1.32	3.28	1.08	3.32	0.44	
6	0.24	3.36	0.00	3.40	3.36	3.44	3.12	3.48	2.48	3.52	2.24	3.56	2.00	4.00	1.36	4.04	1.12	4.08	0.48	
7	0.28	4.12	0.04	4.16	3.40	4.20	3.16	4.24	2.52	4.28	2.28	4.32	2.04	4.36	1.40	4.40	1.16	4.44	0.52	
8	0.32	4.48	0.08	4.52	3.44	4.56	3 20	5.00	2.56	5.04	2.32	5.08	2.08	5.12	1.44	5.16	1.20	5.20	0.56	
9	0.36	5.24	0.12	5.28	3.48	5.32	3.24	5.36	3.00	5.40	2.36	5.44	2.12	5.48	1.48	5.52	1.24	5.56	1.00	
10	0.40	6.00	0.16	6.04	3.52	6.08	3.28	6.12	3.04	6.16	2.30	6.20	2.16	6.24	1.52	6.28	1.28	6.32	1.04	
11	0.44	6.36	0.20	6.40	3.56	6.44	3.32	6.48	3.08	6.52	2.44	6.56	2.20	7.00	1.56	7.04	1.32	7.08	1.08	
12	0.48	7.12	0.24	7.16	0.00	7.20	3.36	7.24	3.12	7.28	2.48	7.32	2.24	7.36	2.00	7.40	1.36	7.44	1.12	
13	0.52	7.48	0.28	7.52	0.04	7.56	3.40	8.00	3.16	8.04	2.52	8.08	2.28	8.12	2.04	8.16	1.40	8.20	1.16	
14	0.56	8.24	0.32	8.28	0.08	8.32	3.44	8.36	3.20	8.40	2.56	8.44	2.32	8.48	2.08	8.52	1.44	8.56	1.20	
15	1.00	9.00	0.36	9.04	0.12	9.08	3.48	9.12	3.24	9 16	3.00	9.20	2.36	9.24	2.12	9.28	1.48	9.32	1.24	
16	1.04	9.36	0.40	9.40	0.16	9.44	3.52	9.48	3.28	9.52	3.04	9.56	2.40	10.00	2.16	10.04	1.52	10.08	1.38	
17	1.08	10.12	0.44	10.16	0.20	10.20	3.56	10.24	3.32	10.28	3.08	10.32	2.44	10.36	2.20	10.40	1.56	10.44	1.32	
18	1.12	10.48	0.48	10.52	0.24	10.56	0.00	11.00	3.36	11.04	3.12	11.08	2.48	11.12	2.24	11.16	2.00	11.20	1.36	
19	1.16	11.24	0.52	11.28	0.28	11.32	0.04	11.36	3.40	11.40	3.16	11.44	2.52	11.48	2.28	11.52	2.04	11.56	1.40	
20	1.20	12.00	0.56	12.04	0.32	12.08	0 08	12.12	3.44	12.16	3.20	12.20	2.56	12.24	2.32	12.28	2.08	12.32	1.44	
21	1.24	12.36	1.00	12.40	0.36	12.44	0.12	12.48	3.48	12.52	3.24	12.56	3.00	13.00	2.36	13.04	2.12	13.08	1.48	
22	1.28	13.12	1.04	13.16	0.40	13.20	0.16	13.24	3.52	13.28	3.28	13.32	3.04	13.36	2.40	13.40	2.16	13.44	1.52	
23	1.32	13.48	1.08	13.52	0.44	13.56	0.20	14.00	3.56	14.04	3.32	14.08	3.08	14.12	2.44	14.16	2.20	14.20	1.56	
24	1.36	14.24	1.12	14.28	0.48	14.32	0.24	14.36	0.00	14.40	3.36	14.44	3.12	14.48	2.48	14.52	2.24	14.56	2.00	
25	1.40	15.00	1.16	15.04	0.52	15.08	0.28	15.12	0.04	15.16	3.40	15.20	3.16	15.24	2.52	15.28	2.28	15.32	2.04	
26	1.44	15.36	1.20	15.40	0.56	15.44	0.32	15 48	0.08	15.52	3.44	15.56	3.20	16.00	2.56	16.04	2.32	16.08	2.08	
27	1.48	16.12	1.24	16.16	1.00	16.20	0.36	16.24	0.12	16.28	3.48	16.32	3.24	16.36	3.00	16.40	2.36	16.44	2.12	
28	1.52	16.48	1.28	16.52	1.04	16.56	0.40	17.00	0.16	16.04	3.52	17.08	3.28	17.12	3.04	17.16	2.40	17.20	2.16	
29	1.56	17.24	1.32	17.28	1.08	17.32	0.44	17.36	0.20	17.40	3.56	17.44	3.32	17.48	3.08	17.52	2.44	17.56	2.20	
30	2.00	18.00	1.36	18.04	1.12	18.08	0.48	18.12	0.24	18.16	0.00	18.20	3.36	18.24	3.12	18.28	2.48	18.32	2.24	
31	2.04	18.36	1.40	18.40	1.16	18.44	0.52	18.48	0.28	18.52	0.04	18.56	3.40	19.00	3.16	19.04	2.52	19.08	2.28	
32	2.08	19.12	1.44	19.16	1.20	19.20	0.56	19.24	0.32	19.28	0.08	19.32	3.44	19.36	3.20	19.40	2.56	19.44	2.32	
33	2.12	19.48	1.48	19.52	1.24	19.56	1.00	20.00	0.36	20.04	0.12	20.08	3.48	20.12	3.24	20.16	3.00	20.20	2.36	
34	2.16	20.24	1.52	20.28	1.28	20.32	1.04	20.36	0.40	20.40	0.16	20.44	3.52	20.48	3.28	20.52	3.04	20.56	2.40	
35	2.20	21.00	1.56	21.04	1.32	21.08	1.08	21.12	0.44	21.16	0.20	21.20	3.56	21.24	3.32	21.28	3.08	21.32	2.44	
36	2.24	21.36	2.00	21.40	1.36	21.44	1.12	21.48	0.48	21.52	0.24	21.56	0.00	22.00	3.36	22.04	3.12	22.08	2.48	
37	2.28	22.12	2.04	22.16	1.40	22.20	1.16	22.24	0.52	22.28	0.28	22.32	0.04	22.36	3.40	22.40	3.16	22.44	2.52	
38	2.32	22.48	2.08	22.52	1.44	22.56	1.20	23.00	0.56	23.04	0.32	23.08	0.08	23.12	3.44	23.16	3.20	23.20	2.56	
39	2.36	23.24	2.12	23.28	1.48	23.32	1.24	23.36	1.00	23.40	0.36	23.44	0.12	23.48	3.48	23.52	3.24	23.56	3.00	
40	2.40	24.00	2.16	24.04	1.52	24.08	1.28	24.12	1.04	24.16	0.40	24.20	0.16	24.24	3.52	24.28	3.28	24.32	3.04	
41	2.44	24.36	2.20	24.40	1.56	24.44	1.32	24.48	1.08	24.52	0.44	24.56	0.20	25.00	3.56	25.04	3.32	25.08	3.08	
42	2.48	25.12	2.24	25.16	2.00	25.20	1.36	25.24	1.12	25.28	0.48	25.32	0 24	25.36	0.00	25.40	3.36	25.44	3.12	
43	2.52	25 48	2.28	25.52	2.04	25.56	1.40	26.00	1.16	26.04	0.52	26.08	0.28	26.12	0.04	26.16	3.40	26.20	3.16	
44	2.56	26.24	2.32	26.28	2.08	26.32	1.44	26.36	1.20	26.40	0.56	26.44	0.32	26.48	0.08	26.52	3.44	26.56	3 20	
45	3.00	27.00	2.36	27.04	2.12	27.08	1.48	27.12	1.24	27.16	1.00	27.20	0.36	27.24	0.12	27.28	3.48	27.32	3.24	
46	3.04	27.36	2.40	27.40	2.16	27.44	1.52	27.48	1.28	27.52	1.04	27.56	0.40	28.00	0.16	28.04	3.52	28.08	3.28	
47	3.08	28.12	2.44	28.16	2.20	28.20	1.56	28.24	1.32	28.28	1.08	28.32	0.44	28.36	0.20	28.40	3.56	28.44	3.32	
48	3.12	28.48	2.48	28.52	2.24	28.56	2.00	29.00	1.36	29.04	1.12	29.08	0.48	29.12	0.24	29.16	0.00	29.20	3.36	
49	3.16	29.24	2.52	29.28	2.28	29.32	2.04	29.36	1.40	29.40	1.16	29.44	0.52	29.48	0.28	29.52	0.04	29.56	3.40	
50	3.20	30.00	2.56	30.04	2.32	30.08	2.08	30.12	1.44	30.16	1.20	30.20	0.56	30.24	0.32	30.28	0.08	30.32	3.44	
51	3.24	30.36	3.00	30.40	2.36	30.44	2.12	30.48	1.48	30.52	1.24	30.56	1.00	31.00	0.36	31.04	0.12	31.08	3.48	
52	3.28	31.12	3.04	31.16	2.40	31.20	2.16	31.24	1.52	31.28	1.28	31.32	1.04	31 36	0.40	31.40	0.16	31.44	3.52	
53	3.32	31.48	3.08	31.52	2.44	31.56	2.20	32.00	1.56	32.04	1.32	32.08	1.08	32.12	0.44	32.16	0.20	32.20	3.56	

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Table IV (*suite*) pour la conversion des heures, minutes et secondes en grades, minutes (centigrades) et secondes (décimilligrades) et vice versa.

Grades.	FRACTIONS DÉCIMALES DU GRADE.				Centigrades.	Secondes.	Centigrades.	Secondes.	Secondes.
Dizaines de grades.	0e	1e	2e	3e					
0	0000	004 629	009 259	013 888	0	0,00	1	2,16	0
1	0185	023 148	027 777	032 407	2	0,32	3	2,48	4
2	0370	041 666	046 296	050 925	4	0,64	5	2,80	8
3	0555	060 185	064 814	069 444	6	0,96	7	3,12	12
4	0740	078 703	083 333	087 962	8	1,28	9	3,44	16
5	0925	097 722	101 851	106 481	10	1,60	11	3,76	20
6	1111	115 740	120 370	125 000	12	1,92	..	....	24
7	1296	134 259	138 888	143 518	13	0,08	14	2,24	28
8	1481	152 777	157 407	162 037	15	0,40	16	2,56	32
9	1666	171 296	175 925	180 555	17	0,72	18	2,88	36
10	1851	189 814	194 444	199 074	19	1,04	20	3,20	40
11	2037	208 333	212 962	217 592	21	1,36	22	3,52	44
12	2222	226 851	231 481	236 111	23	1,68	24	3,84	48
13	2407	245 370	250 000	254 629	25	2,00	..	....	52
14	2592	263 888	268 518	273 148	26	0,16	27	2,32	56
15	2777	282 407	287 037	291 666	28	0,48	29	2,64	60
16	2962	300 925	305 555	310 185	30	0,80	31	2,96	64
17	3148	319 444	324 074	328 703	32	1,12	33	3,28	68
18	3333	337 962	342 592	347 222	34	1,44	35	3,60	72
19	3518	356 481	361 111	365 740	36	1,76	37	3,92	76
20	3703	375 000	379 629	384 259	38	2,08	..	....	80
21	3888	393 518	398 148	402 777	39	0,24	40	2,40	84
22	4074	412 037	416 666	421 296	41	0,56	42	2,72	88
23	4259	430 555	435 185	439 814	43	0,88	44	3,04	92
24	4444	449 074	453 703	458 333	45	1,20	46	3,36	96
25	4629	467 592	472 222	476 851	47	1,52	48	3,68	100
26	4814	486 111	490 740	495 370	49	1,84	50	4,00	104
27	5000	504 629	509 259	513 888	51	2,16	..	....	108
28	5185	523 148	527 777	532 407	52	0,32	53	2,48	112
29	5370	541 666	546 296	550 925	54	0,64	55	2,80	116
30	5555	560 185	564 814	569 444	56	0,96	57	3,12	120
31	5740	578 703	583 333	587 962	58	1,28	59	3,44	124
32	5925	597 222	601 851	606 481	60	1,60	61	3,76	128
33	6111	615 740	620 370	625 000	62	1,92	..	....	132
34	6296	634 259	638 888	643 518	63	0,08	64	2,24	136
35	6481	652 777	657 407	662 037	65	0,40	66	2,56	140
36	6666	671 296	675 925	680 555	67	0,72	68	2,88	144
37	6851	689 814	694 444	699 074	69	1,04	70	3,20	148
38	7037	708 333	712 962	717 592	71	1,36	72	3,52	152
39	7222	726 851	731 481	736 111	73	1,68	74	3,84	156
40	7407	745 370	750 000	754 629	75	2,00	..	....	160
41	7592	763 888	768 518	773 148	76	0,16	77	2,32	164
42	7777	782 407	787 037	791 166	78	0,48	79	2,64	168
43	7962	800 925	805 555	810 185	80	0,80	81	2,96	172
44	8148	819 444	824 074	828 703	82	1,12	83	3,28	176
45	8333	837 962	842 592	847 222	84	1,44	85	3,60	180
46	8518	856 481	861 111	865 740	86	1,76	87	3,92	184
47	8703	875 000	879 629	884 259	88	2,08	..	....	188
48	8888	893 518	898 148	902 777	89	0,24	90	2,40	192
49	9074	912 037	916 666	921 296	91	0,56	92	2,72	196
50	9259	930 555	935 185	939 814	93	0,88	94	3,04	200
51	9444	949 074	953 703	958 333	95	1,20	96	3,36	204
52	9629	967 592	972 222	976 851	97	1,52	98	3,68	208
53	9814	986 111	990 740	995 370	99	1,84	..	....	212

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

SYSTÈME MÉTRIQUE DÉCIMAL

DANS LE CALCUL DU TEMPS,

PAR

LE Dr FLORENZO JAJA.

Je n'ai jamais su me rendre raison pourquoi on n'ait jamais songé à rechercher et à proposer à la considération universelle une unité de mesure du temps fondée sur le Système métrique décimal, qui aujourd'hui a unifié la grande variété des poids et mesures existante chez les différents peuples.

Pour quelle raison le jour, qui représente la durée d'une rotation de la Terre autour de son axe, doit-il être divisé en 24 heures plutôt qu'en 23 ou en 25 heures? Pour quelle raison l'heure doit-elle être divisée en 60 minutes premières, et chaque minute première en 60 secondes? Ne pourrait-on pas au contraire choisir, pour la mesure du temps, une fraction décimale de la durée d'une entière rotation de la Terre, comme on a fait pour les autres quantités?

Puisque l'on peut considérer la Terre de forme sphérique, on peut aussi retenir, sans tomber en une grave erreur, que la circonférence de l'équateur soit égale à celle d'un autre méridien quelconque, c'est-à-dire de 40 millions de mètres, longueur que, par son mouvement rotatoire, la Terre parcourt dans une journée.

Or, si nous divisons ce temps en 100 parties égales, et si nous appelons par exemple *degré* chacune de ces parties, ce degré représentera la centième partie de la durée d'une rotation de la Terre, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que la Terre parcoure 400000 mètres.

L'unité de mesure du temps, selon la modification que nous proposons, et qui est fondée, comme toutes les autres unités de mesures, sur le Système métrique décimal, serait alors le temps nécessaire afin que la Terre parcoure un arc de 400000 mètres, et on l'appellerait *degré*.

Ainsi que les autres unités de mesures décimales, le degré aurait ses multiples et ses sous-multiples, distingués selon le Tableau ci-après et avec les noms que nous assignons, ou avec d'autres noms conventionnellement choisis :

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

	g
(Jour) Hectograde	100
(Heure) Décagrade	10
Degré	1
(Minute première) décigrade	0,1
(Minute seconde) centigrade	0,01
(Moment) milligrade	0,001
(Instant) décimilligrade	0,0001

C'est-à-dire, le jour étant le temps nécessaire afin que la Terre parcoure une circonférence de 40000000 de mètres

	m
L'heure ou le décagrade sera le temps nécessaire à parcourir...	4000000
Le degré	400000
La minute première ou décigrade	40000
La minute seconde ou centigrade	4000
Le moment ou milligrade	400
L'instant ou décimilligrade	40

La journée serait ainsi de 100 degrés; 10 degrés formeraient une heure qui, à son tour, serait divisée en 10 minutes premières; chaque minute première serait subdivisée en 10 minutes secondes, chaque minute seconde en 10 minutes tierces ou moments. Ainsi le jour aurait la durée de 10 heures, ou de 100 degrés, ou de 1000 minutes premières, ou de 10000 minutes secondes, ou de 100000 minutes tierces. Le cadran des nouvelles montres serait divisé en 10 parties égales, qui représenteraient les heures, ayant ainsi la commodité de faire parcourir à l'aiguille, destinée à les marquer, seulement une fois sa circonférence, en y éliminant ainsi l'inconvénient des heures antéméridiennes et postméridiennes, et celui de lire 13 ce qui est marqué par le nombre 1, lire 17 ce qui est 5, et ainsi de suite, à quoi il n'est certainement pas commode de s'habituer. La mi-nuit serait marquée par l'aiguille quand elle toucherait le nombre 10, et le midi au contraire quand elle toucherait le 5.

Ce n'est pas là toute la modification que nous proposons, pour tirer de la nouvelle méthode de calculer le temps tous les avantages que nous croyons possibles.

Il faut encore diviser décimalement l'équateur, ainsi que nous avons divisé la durée de la rotation terrestre, n'étant absolument pas indispensable que les degrés terrestres soient 360, ni plus ni moins; il serait au contraire bien plus utile, pour les calculs et pour l'uniformité, que chaque cercle maximum fût divisé en 100 degrés, et que ceux-ci fussent indiqués sur l'équateur par le nombre progressif de 1 à 100, à commencer ou par celui de Paris ou par celui de Greenwich, ou mieux par celui de l'île du Fer, qui sépare le continent antique du nouveau.

De sorte que le méridien de l'île du Fer serait marqué par le nombre 100; le premier immédiatement à l'Est par le nombre 1, celui qui suit par le n° 2; etc.; chaque degré en 10 centigrades, etc. jusqu'aux milligrades et décimilligrades.

Chaque degré de cercle maximum aurait la longueur de 400000 mètres, centième partie de la circonférence terrestre, qui, sur l'équateur, serait parcourue par la

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

vitesse rotatoire de la Terre dans l'unité du temps, qui, pour cela, doit être elle-même appelée un *degré*.

De la même manière on devrait diviser toutes les circonférences, et, par les mêmes mesures décimales, on devrait calculer les grandeurs des arcs et des angles en Géométrie, de sorte que la circonférence serait de 100 degrés, un angle droit de 25 degrés, etc.

En concluant, donc, par ce nouveau système :

1. On aurait une unité de mesure du temps, qui serait fondée sur le système métrique décimal, comme toutes les autres unités de mesure linéaire, volumétrique, de poids et monétaire.

2. En divisant d'après le même système de 10 en 10 toutes les autres circonférences en Géométrie, on aurait aussi pour le calcul des angles une unité de mesure métrique décimale.

3. Pour l'indication des heures de la journée, en divisant le cadran des montres en 10 heures, 100 degrés, 1000 minutes premières et 10000 minutes secondes, on aurait l'indication décimale du temps, en faisant parcourir à l'aiguille des heures une seule fois l'entière circonférence du cadran, sans avoir besoin de distinguer les heures en antéméridiennes et postméridiennes, et sans lire un nombre, tandis que sur le cadran il en est écrit un autre.

4. L'unité de mesure du temps étant la centième partie de la durée d'une rotation terrestre, l'équateur étant divisé en 100 degrés, on pourrait, avec un calcul très simple et prompt, sachant l'heure du méridien d'observation, connaître en même temps l'heure de toutes les parties du monde dont on connaîtrait le méridien relatif.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

HORLOGE ÉLECTRIQUE,

PAR

M. R. THURY.

APPLICATIONS SCIENTIFIQUES DE L'APPAREIL.

On sait que le pendule conique, dans son emploi pour la mesure exacte du temps, est notablement inférieur au pendule circulaire, régulateur habituel des horloges.

Dans un certain nombre d'appareils scientifiques d'une grande importance, tels que les équatoriaux astronomiques, les chronographes enregistreurs et les séismomètres, la double condition d'un mouvement continu très uniforme, et d'une assez grande puissance motrice disponible, se trouve, dans un certain nombre de cas, strictement requise.

Le pendule circulaire, dont le mouvement alternatif exige le mécanisme de l'échappement pour sa transformation en mouvement circulaire de sens constant, ne permet qu'un mouvement intermittent et saccadé, tel qu'on le voit à l'aiguille des secondes d'un régulateur destiné à l'horlogerie; cela résulte de la nature même de l'échappement, et ce mouvement saccadé ne peut être transformé en mouvement circulaire uniforme qu'à l'aide de mécanismes délicats, et avec un résultat final toujours imparfait. De plus, l'échappement exclut, dans une grande mesure, l'emploi d'une force motrice disponible un peu grande, toutes les fois que la force disponible employée n'est pas absolument invariable.

Ces motifs ont fait désirer vivement que le pendule conique pût être assez perfectionné dans son emploi pour égaler, à peu près, en uniformité de marche, le pendule circulaire, tout en le surpassant au point de vue de la quantité de force motrice disponible sur le moteur.

Ce problème préoccupait déjà M. R. Thury en 1880, époque à laquelle il construisit le premier régulateur électrique qu'il appliqua à l'équatorial de 6 pouces de M. le professeur Thury, son père. Les très bons résultats obtenus l'engagèrent à perfectionner cet appareil, et la Société Genevoise de Construction d'Instruments de Physique en construisit alors plusieurs d'après ses dessins.

L'un d'eux fonctionne à l'observatoire de Genève où il actionne le grand équa-

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

torial de Plantamour; un autre commande l'équatorial de 12 pouces de l'*Urania Sternwarte* de Berlin. Ces deux horloges ont donné de fort bons résultats comme puissance motrice et uniformité de marche.

Les expériences faites à l'observatoire de Genève par M. le professeur Thury, M. Ekegren et M. Fritz Piguet ont permis de constater les résultats suivants :

Les variations moyennes de marche de l'électromoteur, durant une demi-heure, sont sûrement inférieures à $\frac{9}{100}$ de seconde, soit $\frac{1}{25000}$ du temps total.

Les plus grandes variations de marche dans le même laps sont sûrement inférieures à $\frac{4}{10}$ de seconde, soit $\frac{1}{4500}$ du temps total.

Les valeurs relatives seraient plus faibles, si l'on eût prolongé davantage la durée des expériences. On a préféré l'électromoteur à une horloge ordinaire pour les motifs suivants :

1° *L'électromoteur n'exigeant aucun remontage laisse plus de liberté à l'observateur;*

2° *La grande puissance de l'électromoteur permet de surmonter aisément les résistances accidentelles diverses causées par le poids des pièces accessoires, dont on peut être appelé à charger le réfracteur durant le cours d'une observation; on évite ainsi la nécessité de perdre un temps quelquefois très précieux, à chercher les nouvelles conditions d'équilibre de l'instrument lorsqu'il vient d'être chargé de ses accessoires;*

3° *Enfin le mouvement de l'électromoteur offre une plus grande uniformité que celui de la plupart des horloges employées à mener des équatoriaux.*

Les résultats détaillés de ces expériences ont été publiés dans les *Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève,* vol. XXIX, p. 16 à 31.

L'horloge alors utilisée était construite pour actionner directement les instruments équatoriaux. L'appareil régulateur était composé d'un pendule conique à ressorts, comportant une douille mobile servant à établir ou à rompre un contact électrique. Cette disposition avait l'inconvénient de provoquer un très léger frottement de ladite douille, frottement qui limitait la précision du fonctionnement.

Dès lors M. Thury s'est toujours préoccupé de réaliser une disposition plus parfaite, et l'appareil auquel ont abouti ses recherches ne comporte plus de douilles et de ressorts; les deux bras du pendule conique sont suspendus librement, et le contact électrique, destiné au réglage, s'effectue très près de ce point de suspension.

Une variation extrêmement minime de l'angle d'écartement des bras suffit pour établir ou rompre le courant de réglage, qui est très faible et n'excède pas 0,03 ampère sous 2 volts dans le dernier appareil construit. L'arrangement des circuits inducteurs permet d'éviter complètement la formation, dans le circuit de réglage, d'extra-courants capables de produire une étincelle. Il résulte de ces dispositions que le régulateur fonctionne sous un angle d'écartement constant et que les efforts nécessaires pour établir ou rompre le contact de réglage sont pratiquement négligeables, vu l'extrême faiblesse du courant à transmettre; c'est ainsi qu'il a été possible d'obtenir, dès les premiers essais, une précision de marche

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

suffisamment grande pour pouvoir la comparer à celle des meilleures horloges, à pendule circulaire et à échappement.

Appliqué aux équatoriaux astronomiques, ce régulateur facilitera beaucoup la photographie des astres, en maintenant plus longtemps que tous les régulateurs actuels la constance de situation des images sur la plaque sensible. De plus, il permettra de séparer plus souvent les spectres d'étoiles très voisines.

Ce régulateur s'applique aussi bien à des appareils isolés qu'à la commande indépendante ou simultanée de plusieurs instruments, installés dans le même observatoire, au moyen d'horloges sympathiques marchant synchroniquement avec l'horloge-mère.

Cette marche synchronique est obtenue au moyen de courants polyphasés émis par le moteur électrique qui actionne l'horloge-mère.

Le système actuel présente donc, sur celui exécuté en 1880 par M. Thury, les avantages d'une précision plus grande, jointe à la facilité de commande à distance d'horloges secondaires ou de divers instruments.

DESCRIPTION DES APPAREILS.

L'horloge-mère se compose d'une dynamo-moteur à axe vertical et à induit fixe, qui a pour but de produire, à l'aide d'une source quelconque de courant électrique, un mouvement de rotation réglable et rigoureusement continu.

Elle peut permettre, de plus, de transformer un courant continu en courants polyphasés destinés à transmettre à distance ce mouvement régulier à des appareils sympathiques, marchant en synchronisme.

Cette horloge se compose d'une dynamo-moteur transformateur, munie d'un régulateur de vitesse très précis. Le moteur est actionné par un courant continu, fourni par une batterie d'accumulateurs ou toute autre source de courant, et l'enroulement de son armature est relié en plusieurs points (ordinairement trois) aux fils de transmission à distance.

Le socle de l'appareil supporte l'induit fixe enroulé en anneau Gramme-Paccinotti, à l'intérieur duquel se meut un inducteur composé d'un noyau en fer doux traversé au centre par un axe creux, vertical, sur lequel il est assujetti.

Cet inducteur, excité par une dérivation du courant continu ou par un courant continu indépendant, est réglé par le régulateur de vitesse, dont il a été fait mention.

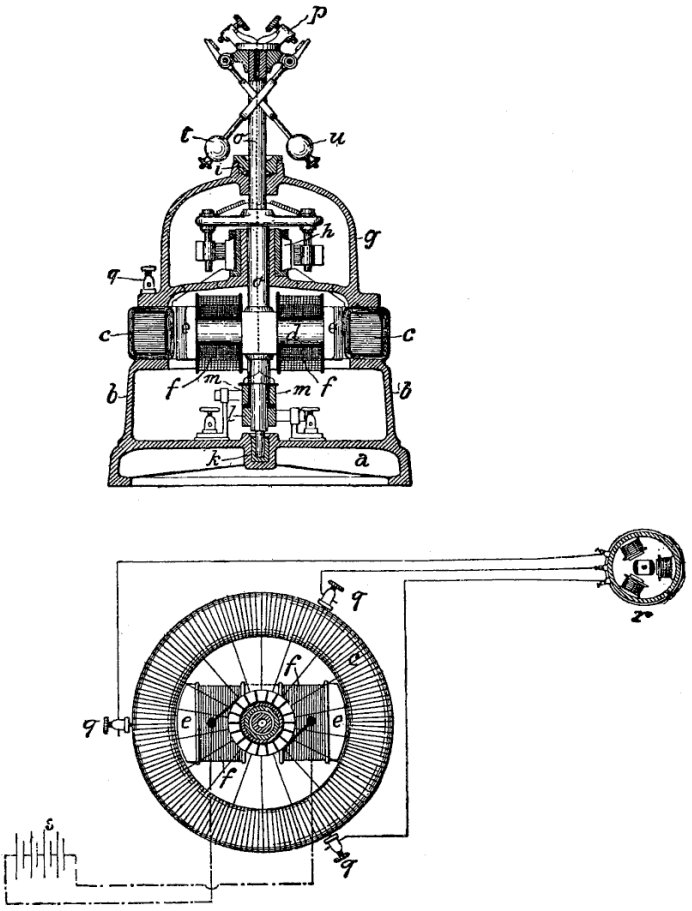
Les bobines inductrices, supportées par le noyau, portent dans ce but deux enroulements distincts dont l'un sert au réglage et l'autre est excité en permanence par un courant convenable.

Un plateau fixé au-dessus de l'anneau sert de support au collecteur du moteur, qui est fixe; il maintient également le coussinet supérieur de l'appareil qui guide l'axe. Le coussinet inférieur, formant crapaudine, est monté sur le socle, il guide et supporte l'axe ainsi que toutes les pièces qui y sont assujetties.

Deux anneaux fixés sur l'axe servent à transmettre le courant continu, d'une part à l'enroulement excitateur de l'inducteur et, d'autre part, aux deux balais mobiles qui distribuent eux-mêmes le courant à l'armature.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

L'axe de l'appareil porte à sa partie supérieure un pendule conique à deux branches et à bras croisés, afin d'être isochrone sous un angle aussi étendu que possible. Les bras du pendule portent des contacts, dont une des surfaces, constituée par une vis réglable, est reliée à l'enroulement de réglage de l'inducteur.



Lorsque les bras du pendule s'écartent au delà d'une limite déterminée les contacts se rompent. Certaines fluctuations de vitesse entre deux réglages successifs sont évitées en donnant aux masses du pendule conique un poids relativement fort.

Le courant polyphasé est directement recueilli sur l'enroulement de l'induit fixe

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

par trois prises, faites sur chaque tiers de l'enroulement, d'où partent les trois fils pour la mise en mouvement synchronique des horloges sympathiques. L'un de ces fils peut être remplacé par la terre.

Ce système permet donc la transmission à distance d'une énergie relativement grande, qui n'a pas à passer par l'intermédiaire de contacts alternatifs, autres que les contacts glissants sur collecteurs continus ou bagues continues. Le seul contact alternatif, celui du régulateur, n'a à transmettre qu'une fraction très minime du courant.

Le *réglage de l'horloge* est, comme cela a été dit plus haut, obtenu à l'aide d'une partie de l'enroulement excitateur, spécialement réservée à cet effet. Cette portion de l'enroulement est bobinée en sens inverse de l'autre et a pour effet d'affaiblir le champ, ce qui correspond à une accélération du nombre de tours.

Aussitôt que les bras du pendule conique s'écartent suffisamment, les contacts coupent le courant qui traverse ces spires de réglage, le champ se renforce et la vitesse tend à diminuer; le courant qui traverse les contacts se trouve ainsi réduit au minimum.

L'étincelle d'extra-courant ne se produit pas parce que, le circuit d'excitation principal étant constamment fermé, les courants d'induction qui s'y développent, au moment d'une rupture du circuit de réglage, agissent en sens inverse sur cet enroulement et réduisent la force électromotrice induite à une quantité négligeable.

L'appareil récepteur, ou horloge sympathique, est constitué par un moteur synchrone composé d'un aimant permanent en fer à cheval, monté sur pivot, et de trois bobines induites reliées entre elles par un fil commun et, d'autre part, avec l'horloge-mère au moyen de trois conducteurs. Ces bobines sont ainsi parcourues successivement par le courant triphasé émis par le moteur de l'horloge, et le champ tournant produit entraîne l'inducteur en fer à cheval qui marche ainsi synchroniquement avec l'horloge-mère.

Pour obtenir un nombre de tours plus faible que celui du moteur de l'horloge, il suffit de doubler ou de tripler le nombre de pôles des bobines induites.

Pour les appareils récepteurs qui pourraient demander un mouvement encore plus continu que celui qui peut être obtenu des moteurs triphasés, il serait facile, par l'intermédiaire d'un transformateur, de disposer d'un courant hexaphasé pour actionner le moteur synchrone.

AVANTAGES DU SYSTÈME D'HORLOGES ÉLECTRIQUES THURY.

La transmission électrique de l'heure se fait ordinairement par le moyen de courants continus émis périodiquement par l'horloge-mère; le moteur de l'horloge sympathique doit alors être assez puissant pour mener le mécanisme pendant un temps très court par rapport au temps total, et le courant à transmettre pour la distribution de l'heure doit être proportionnellement plus fort.

Le courant moteur n'est généralement émis qu'une fois par minute, et le temps nécessaire pour faire avancer le mécanisme est inférieur à une demi-seconde, soit $\frac{1}{120}$ du temps total; l'énergie à transmettre pendant cette demi-seconde doit

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

donc être théoriquement 120 fois plus forte que ce ne serait le cas avec un mécanisme moteur agissant d'une façon continue.

De plus, par le fait même du mouvement saccadé, d'autres dépenses d'énergie sont exigées pour vaincre l'inertie des pièces à mettre en mouvement, et ces dépenses ne sont pas restituées au moment où le mécanisme s'arrête.

En pratique, ces différences ne sont pas aussi considérables parce que, dans une horloge à mouvement continu, le travail de frottement est augmenté; mais l'écart est néanmoins encore très important.

Les horloges sympathiques, du système Thury, emploient un moteur synchrône qui peut être d'une puissance très réduite; les courants électriques nécessaires à sa marche sont ainsi réduits en proportion, et la distribution à un plus grand nombre d'horloges devient possible. Les batteries d'accumulateurs ou les piles nécessaires à leur marche seront donc beaucoup moins fortes et leur entretien grandement facilité.

Par suite de cette faible consommation de courant, la résistance ohmique des réseaux de distribution est pratiquement sans influence sur la marche des horloges sympathiques, et ces horloges peuvent être de très grandes dimensions sans exiger pour cela l'emploi de courants intenses.

Les horloges sympathiques sont toutes indépendantes et sans influence les unes sur les autres.

Il convient encore de remarquer que les courants polyphasés ont l'avantage d'être émis non par des courants alternatifs, sujets à usure et déréglables, mais bien directement par la source même, soit par l'anneau du moteur transformateur, et n'ont par conséquent pas à passer par des organes de réglage. Ceci a une grande importance au point de vue de la précision du fonctionnement; le pendule n'est en effet pas influencé par la résistance qu'il aurait à vaincre, dans des horloges électriques ordinaires, pour établir les contacts nécessaires à la transmission d'un fort courant.

L'influence perturbatrice des courants d'induction sur les réseaux de transmission de l'heure, décharges atmosphériques, induction de forts courants d'éclairage, tramways, transmissions de force, sera réduite au minimum, sinon totalement supprimée, dans les distributions de l'heure par courants polyphasés. Cela résulte de l'emploi de moteurs synchrones, peu sensibles à tous autres courants qu'aux courants polyphasés qui sont nécessaires à leur marche. Une distribution de l'heure à 2 fils (le troisième peut être la terre) sera du reste beaucoup moins sujette aux effets perturbateurs des orages et des courants industriels que les distributions ordinaires à un fil; l'induction étant annulée par l'emploi du double fil.

Il n'y a pas à craindre d'effets d'électrolyse dans les réseaux, ce qui facilite l'isolement des conducteurs, et cet isolement peut être relativement médiocre, car la tension du courant nécessaire à la distribution peut être extrêmement faible, puisqu'une intensité de courant très réduite suffit à la marche de ces horloges à mouvement continu.

Enfin, un point important pour les distributions de l'heure dans des appartements : le mouvement des horloges sympathiques est non seulement continu, mais encore absolument silencieux.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Les avantages de ce nouveau mode de distribution de l'heure, exécuté par M. H. Cuénod, Ingénieur-constructeur, à Genève, peuvent être résumés comme suit :

Il permet d'atteindre une plus grande régularité que ce qui est assuré par les systèmes employés jusqu'ici.

Il se prête aux applications scientifiques, qui demandent une grande puissance des horloges sympathiques, et cela, sans influer d'une manière défavorable sur la régularité de la marche.

Il réduit la quantité de courant utilisée et par là diminue les batteries alimentant les distributions, facilite leur entretien et rend le fonctionnement des horloges sympathiques pratiquement indépendant de la résistance électrique des réseaux de distribution.

Il supprime les contacts alternatifs et toute action défavorable sur l'organe de réglage, qui est complètement indépendant des courants distribués.

Il évite, dans la plus grande mesure possible, l'influence perturbatrice des courants d'induction dus aux orages ou aux distributions industrielles.

Il assure un mouvement continu et silencieux des horloges sympathiques et les rend indépendantes les unes des autres.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

RAPPORT DE LA COMMISSION

CHARGÉE DE

L'ÉTUDE DES ÉPREUVES ET CONCOURS POUR LES CHRONOMÈTRES,

DANS LE BUT D'OBTENIR UNE

UNIFORMISATION DES ÉPREUVES DANS LES OBSERVATOIRES,

PAR

M. R. GAUTIER.

MEMBRES DE LA COMMISSION.

MM. Antoine, Ditisheim, Favre-Heinrich, Fénon, Féry, Raoul Gautier, Guillaume, Jurgensen, Kaiser, Lange, La Porte, Leroy, Maillard, Vincento E. Montes, Rosat, Rozé, Thomas, Valenzuela, de Vanssay, Zenger.

La Commission s'est réunie trois fois, le 30 juillet, le 31 juillet et le 2 août.

Dans la première séance elle s'est constituée et a nommé président-rapporteur M. R. Gautier, directeur de l'observatoire de Genève, et secrétaire M. Maillard.

Étaient présents à la première séance, le 30 juillet, à 3^h :

MM. Antoine, Ditisheim, Favre-Heinrich, Gautier, Kaiser, Lange, Leroy, Maillard, Vincento E. Montes, Rosat, Thomas, de Vanssay.

Étaient présents à la deuxième séance, le 31 juillet, à 2^h :

MM. Antoine, Ditisheim, Gautier, Kaiser, Leroy, Maillard, Rosat, Rozé, Thomas, de Vanssay, Zenger.

Étaient présents à la troisième séance, le 2 août, à $8^h 30^m$:

MM. Antoine, Ditisheim, Gautier, Guillaume, Lange, Maillard, Vincento E. Montes, Rosat, Rozé, Thomas, de Vanssay.

Lecture y a été donnée du Rapport suivant qui a été adopté à l'unanimité.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

La Commission a borné son travail à l'étude de l'uniformisation possible des épreuves pour *chronomètres de poche*.

Elle s'est occupée successivement des épreuves les plus sévères, ainsi que des concours qui s'y rattachent et des épreuves moins sérieuses.

Nous résumons brièvement les résultats et les vœux auxquels elle est parvenue pour ces deux catégories d'épreuves.

I. — Épreuves les plus sévères ou de première classe.

Il ressort du Rapport très bien fait de M. de Vanssay que l'on se trouve, pour les chronomètres de poche inscrits dans la première classe d'épreuves, en présence de trois systèmes différents d'épreuves, correspondant aux règlements suivants, rangés par ordre chronologique :

1° Règlement de Neuchâtel;

2° Règlements de Genève, Kew et Besançon;

3° Règlement de Hambourg.

Aux deux premiers groupes seuls correspondent des publications annuelles sur lesquelles on peut baser des conclusions. C'est donc à l'uniformisation des épreuves imposées par ces règlements seuls que la Commission a cherché à arriver. Elle s'est basée, pour cela, sur les règlements actuels de Genève, Kew et Besançon, et sur le nouveau projet de règlement présenté au Congrès par les délégués du Gouvernement neuchâtelois.

La Commission est unanime à demander l'uniformisation des épreuves de première classe.

Nous classerons en plusieurs catégories les vœux d'uniformisation émis par elle pour les différentes exigences relatives : 1° à la marche diurne, 2° à la marche aux positions, 3° à la compensation.

1. *Exigences relatives à la marche diurne.*

Entre le calcul de la variation moyenne diurne usité à Neuchâtel et celui de l'écart moyen de la marche diurne usité à Genève-Kew-Besançon, la Commission a, à la majorité de 8 voix contre 4, préféré le deuxième système : Écart moyen de la marche diurne qui tient compte de l'accélération de marche pendant chaque période d'observation.

Il découle de ce choix que les périodes d'observation doivent être maintenues aussi égales que possible comme durée.

La limite de l'écart moyen de la marche diurne a été maintenue à $\pm 0^s,75$.

La Commission a aussi émis le vœu unanime que l'exigence du règlement de Neuchâtel, que la variation ou différence entre deux marches consécutives ne dépasse pas $2^s,0$, soit uniformément introduite pour toutes les périodes d'observation à la température ordinaire.

2. *Exigences relatives aux positions.*

Il résulte d'une décision déjà mentionnée que les périodes d'observation aux différentes positions doivent être aussi égales que possible.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

La Commission demande le resserrement des limites pour les différences de marche de la façon suivante :

1°	Différence des marches moyennes du plat au pendu	$\pm 4^s,0$
2°	» » des deux positions horizontales	$\pm 4^s,0$
3°	» » de deux quelconques des périodes non thermiques.	$\pm 8^s,0$

L'écart moyen correspondant à un changement de position serait maintenu à $\pm 2^s,50$.

Sur la proposition de M. Antoine, la Commission émet le vœu que l'on introduise de nouveau une courte période d'observation dans la position verticale pendant en bas, dans le double but d'éviter l'exagération des procédés d'excentration du spiral pour le réglage des autres positions verticales et d'obtenir une garantie pour l'isochronisme.

Cette épreuve ne comporterait qu'une période de deux jours qui ne compterait pas pour le calcul de l'écart moyen de la marche diurne. La clause éliminatrice serait que la différence des marches moyennes aux positions verticales pendant en haut et pendant en bas ne devrait pas dépasser $\pm 8^s,0$.

3. *Exigences relatives à la compensation.*

La Commission émet les vœux suivants :

1° Les périodes thermiques auraient la même durée que les autres, suivant l'usage de Genève-Kew-Besançon.

2° Le calcul de la compensation se ferait suivant le procédé du projet de règlement de Neuchâtel. On calculerait séparément : 1° les différences de marche aux températures extrêmes et 2° l'écart par rapport à la proportionnalité pour la température intermédiaire, provenant de l'erreur secondaire. Les limites seraient :

1° Pour l'erreur de compensation pour 1° centigrade entre les températures extrêmes : $\pm 0^s,15$;

2° Écart par rapport à la proportionnalité : $\pm 3^s,0$;

3° Les épreuves à la glacière et à l'étuve devraient se faire partout, suivant la saison, à des températures comprises entre 0° et 5° pour le froid et entre 30° et 35° pour le chaud.

4. *Reprise de marche.*

La Commission demande que la limite de la différence entre les marches moyennes de la première et de la dernière période soit réduite à $3^s,0$.

5. *Exigence accessoire.*

Pour assurer une marche aussi rapprochée de 0^s que possible, la Commission demande que l'on maintienne la clause des règlements de Genève-Kew-Besançon, privant de bulletin les pièces qui, dans une période quelconque, présentent une marche moyenne supérieure à $\pm 10^s$.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

6. *Points.*

La Commission, estimant que le bulletin de première classe, établi avec les exigences précédentes, fournit une garantie suffisante pour assurer aux chronomètres qui l'obtiennent le caractère de pièces de précision, est opposée à l'idée de faire figurer sur le bulletin le nombre de points correspondant à un système de classement quelconque.

En revanche, la Commission recommande l'usage des *points* pour le *classement dans les concours,* d'après un système à établir sur les bases déjà usitées à Genève-Besançon ou à Kew et sur celles proposées dans le projet de règlement de Neuchâtel.

Elle émet à ce propos le vœu suivant :

Que le calcul des points soit fait partout de la même façon : 1° en partant d'une base de zéro point correspondant aux limites d'exclusion des écarts principaux; 2° en prenant comme total irréalisable de points un nombre partout le même; 3° en subdivisant de la même façon le total entre les différentes exigences.

II. — Épreuves moins sévères.

Ces épreuves sont encore nécessaires pour satisfaire aux *desiderata* que des pièces qui ne peuvent pas obtenir un bulletin de première classe, soit à cause de la durée, soit à cause de la sévérité des épreuves, puissent cependant obtenir un bulletin de marche d'observatoire.

Pour se conformer d'autre part à la définition adoptée par le Congrès dans sa séance du 30 juillet, sur le rapport de M. Rodanet, et pour que, pratiquement, on puisse définir par le terme de *chronomètre de poche* une montre ayant obtenu un bulletin d'observatoire astronomique, la Commission émet les vœux suivants :

1° Les bulletins de première classe à large tolérance (bulletins sans mention) seraient supprimés;

2° Il ne serait établi qu'une seule classe d'épreuves pour chronomètres de poche au-dessous de celles de première classe définies plus haut;

3° Ces épreuves seraient qualifiées d'*épreuves de deuxième classe* afin de bien marquer, par un chiffre, leur rang par rapport aux épreuves plus sérieuses;

4° Les bulletins correspondant aux deux classes d'épreuves seraient différents de papier, de couleur et de format;

5° Les épreuves seraient d'une durée d'un mois environ et comporteraient des épreuves au plat, au pendu, au pendant à droite et à gauche, des épreuves thermiques complètes et la constatation de la reprise de marche;

6° Les exigences et les limites seraient un peu plus larges que pour les chronomètres de première classe, mais seraient cependant assez serrées.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

SUR LES

CHRONOMÈTRES DE LA MARINE FRANÇAISE,

PAR

M. E. CASPARI.

Dans le Rapport d'ensemble que j'ai eu l'honneur de présenter au Congrès de 1889, sur la perturbation et le réglage des chronomètres de marine, je m'étais proposé de faire un inventaire de nos connaissances en cette matière. Dans un art qui a eu le privilège d'arriver à une grande perfection théorique et pratique dès la fin du siècle dernier, on ne peut espérer noter dans le court intervalle de onze ans des progrès de même amplitude que ceux des sciences physiques et des industries qui en relèvent. Mais, ayant été chargé depuis lors du service des chronomètres au Service hydrographique, je me suis trouvé en position de contrôler, par les nombreux documents qui me parvenaient, les idées émises antérieurement et de suivre les modifications tant du matériel chronométrique que du milieu dans lequel il fonctionne. J'ai eu également à me préoccuper des concours et à soumettre à une critique sérieuse les conditions auxquelles est subordonnée l'acquisition de mes instruments. Je désire exposer brièvement au Congrès les résultats de ces expériences.

D'une façon générale, l'étude des matricules de nos chronomètres m'a révélé ce fait réjouissant que la qualité de notre matériel est allée se perfectionnant. Il est digne de remarque que les études sur les formules de marche adressées au Dépôt sont devenues beaucoup moins nombreuses et que l'on trouve le plus souvent sur les carnets la mention : « Excellent chronomètre, peu sensible à la température ». Cela vient-il de ce que nos officiers, absorbés par beaucoup d'études nouvelles, se consacrent moins à celle-ci? ou de ce que les traversées plus rapides permettent une moindre accumulation d'erreurs? Il doit y avoir ces deux causes, mais je crois pouvoir dire, à la louange de nos artistes, qu'il s'est manifesté un vrai progrès dans l'exécution des instruments.

Il ne faudrait pas en conclure qu'il n'y a plus rien à faire. Des problèmes anciens sont résolus; des problèmes nouveaux se posent par l'effet des conditions nouvelles de la navigation.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Dans mon Rapport de 1889, après avoir rappelé les expériences desquelles il résulte que des variations étendues du champ magnétique sont sans influence sensible sur des pièces non affectées de magnétisme permanent, je disais qu'au contraire, si le balancier acquérait du magnétisme permanent, il en résulterait un trouble considérable. Le fait n'avait guère été observé jusque-là; il est devenu assez fréquent depuis lors, surtout pour les compteurs qu'on transporte en des parties du navire moins abritées que celles où se trouve l'armoire des montres. Il doit surtout nous préoccuper lorsqu'il s'agit de montres pour torpilleurs, et j'ai proposé au Ministre de la Marine, qui l'a approuvée, la mise à l'étude d'un concours spécial pour montres non magnétiques. La parole est maintenant aux artistes pour nous donner de bons instruments de ce genre; je suis assuré que leur zèle et leur habileté résoudront ce problème.

J'ai commencé une étude d'ensemble systématique sur la marche à la mer. Ce sujet est difficile, et l'étude n'est pas terminée. Elle comprend actuellement seulement les chronomètres acquis au cours des vingt dernières années.

Voici les bases d'appréciations que j'ai adoptées. Pour chaque chronomètre, j'ai groupé la marche par année. La différence des marches extrêmes d'une année a donné un nombre A. Le plus grand écart de deux marches consécutives donne un nombre B. Enfin la moyenne des écarts de deux marches consécutives a donné un nombre B′.

Pour chaque chronomètre, j'ai calculé la moyenne de A, de B et de B′, et j'ai additionné ces trois nombres. Ce total sert à apprécier la valeur de l'instrument.

On voit que dans cette appréciation on ne fait pas intervenir la considération de température. C'est que l'expérience m'a montré qu'avec les exigences de notre concours, les écarts de marche dus aux défauts de compensation représentent une très petite quantité, en regard des perturbations qu'on doit assigner à d'autres causes. Cela est vrai surtout pour les chronomètres sur lesquels porte ma statistique et qui sont les quatre ou cinq premiers de chaque concours.

D'ailleurs, comme aucune catégorie d'instruments n'est affectée systématiquement à des climats donnés, en opérant sur un nombre assez grand on a toutes chances d'obtenir des résultats moyens comparables entre eux. Les écarts de température rentrent ainsi dans la classe des nombreux accidents qui influencent la marche.

Il est évident que, pour une étude approfondie, cette manière de procéder prêterait à la critique, et je suis le premier à proclamer qu'elle ne peut pas donner des résultats scientifiques; mais j'estime qu'au point de vue pratique elle n'est pas sans valeur.

Mon premier but, en entreprenant cette étude, était de me renseigner sur la valeur comparée des spiraux en acier et en palladium. Je dirai tout de suite qu'à cet égard je ne suis pas arrivé à des résultats assez nets pour pouvoir émettre un jugement motivé. Cela tient d'abord à ce que, depuis près de vingt ans, le spiral en palladium est tellement prédominant qu'il n'a pas été possible de trouver un nombre suffisant d'instruments récents pourvus du spiral en acier pour pouvoir faire la comparaison. Or on sait qu'un chronomètre neuf ne peut pas être comparé à un chronomètre vieux. Je puis dire à cet égard, comme résultant de mes obser-

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

vations, que souvent la compensation devient moins bonne avec le temps, que presque toujours les coefficients de température, au bout d'un certain nombre d'années et de réparations, varient sensiblement; enfin, qu'au contraire la stabilité de marche tend à s'améliorer par la constitution d'un état moléculaire plus stable du spiral et du balancier. J'ajouterai qu'il y a palladium et palladium : avant 1889 nous avions des chronomètres à spiral en palladium qui ont donné de mauvais résultats. Ils sont restés mauvais pour la plupart, tandis qu'un grand nombre de ceux acquis depuis lors se sont aussi bien comportés à la mer que dans les Observatoires.

Je me proposais également de chercher à dégager l'effet de l'état d'isochronisme sur les marches. Chacun sait ici qu'à cet égard il y a une opinion quasi unanime chez les artistes : c'est qu'il vaut mieux avoir de l'avance que du retard aux petits arcs. Cette opinion s'appuie sur des considérations théoriques que je n'examinerai pas : elle paraît surtout fondée sur les difficultés que les horlogers rencontrent en pratique à régler une montre qui retarde aux petits arcs. Je l'avais partagée de confiance jusqu'au jour où le dépouillement de mes registres m'a conduit à un résultat absolument inattendu. J'ai partagé les chronomètres étudiés en quatre catégories d'après la grandeur du nombre I :

1° Retard de plus de 1^s;
2° Retard entre 1^s et 0;
3° Avance entre 0 et 1^s;
4° Avance de plus de 1^s.

Or, j'ai trouvé :

	Chronomètres.	N. moyen.
		s
Première catégorie.....	12	5,70
Deuxième catégorie.....	22	5,28
Troisième catégorie.....	20	6,30
Quatrième catégorie.....	33	6,58

Ce résultat, dis-je, est absolument surprenant et contraire à tout ce que l'on pouvait présumer. Les chronomètres retardant aux petites amplitudes se sont trouvés meilleurs en moyenne que ceux qui avancent. Je me hâte d'ajouter qu'il faut un correctif à ces conclusions. L'état d'isochronisme est celui qui a été observé au premier concours. Rien ne dit qu'il soit resté le même au cours des années qui ont suivi. Il faudrait pouvoir refaire l'expérience après chaque réparation, et déterminer la constante à nouveau, aussi bien que les coefficients de température. Je ne dispose pas des moyens et d'un personnel suffisants pour poursuivre ces études d'une façon systématique, et quelques résultats partiels obtenus n'avaient pas assez de portée pour les citer ici. Je dois encore ajouter que, d'après les conditions de notre concours, le nombre I ne doit jamais dépasser 3^s en valeur absolue, et qu'il reste généralement au-dessous de 2^s pour les chronomètres achetés, dont il a été question ci-dessus.

Mais il est un point où la différence de signe de l'isochronisme intervient d'une façon manifeste : c'est le réglage en positions. Il y a fort longtemps que le Service hydrographique se préoccupe de cette question. Les expériences faites en 1865

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

avec des chronomètres à spiral d'acier m'avaient amené à conclure qu'en général la marche moyenne dans les positions inclinées manifestait l'état d'isochronisme du spiral. A cette époque, la majorité des chronomètres prenaient de l'avance aux positions inclinées. Les expériences faites en 1883-1884 donnèrent un résultat tout différent et amenèrent à conclure un retard moyen de $2^s,46$ pour les chronomètres expérimentés. J'ai cru en trouver l'explication dans les déformations du balancier et dans les flexions de son axe. Depuis cette époque le retard moyen en positions a toujours crû : aux concours de 1895-1896 il était arrivé à une moyenne de $3^s,71$.

Dans mon Rapport de 1889, je disais que la question de savoir si le retard aux inclinaisons est dû uniquement aux déformations du balancier et de son axe ou à celles du spiral serait résolue par des expériences faites sur des spiraux en or. Elle l'est, je crois, par les spiraux en palladium, qui ont seuls concouru à ce dernier résultat. Il me paraît que la raison du fait est fort simple : le palladium, plus dense et moins élastique que l'acier, se déforme aux inclinaisons par son propre poids, le moment d'inertie du spiral augmente et la montre retarde. Mais voici maintenant le fait que je signalais plus haut. A ces mêmes concours, j'ai rapproché ces retards moyens de l'état d'isochronisme. Pour treize chronomètres pour lesquels la valeur moyenne de I est $-0,78$, la moyenne du retard en positions est $-5,13$; pour quinze chronomètres pour lesquels la moyenne de I était $+1^s,22$, la moyenne du retard en positions est $-2,67$; la différence entre les deux groupes est de $2^s,46$ en faveur de I positif. Donc, avec l'avance aux petits arcs, on a moins de retard aux inclinaisons. Je note encore cette relation curieuse qu'en formant P — I en ayant égard aux signes algébriques, on retrouve presque le même résultat des deux côtés :

$$-5,13-(-0,78)=-4,35; \qquad -2,67-(+1,22)=-3,89.$$

Ce résultat plaide en faveur de l'accélération aux petits arcs.

Le but de ces études était de savoir s'il y avait lieu de proposer une modification aux conditions du concours. Il est clair qu'en l'état actuel l'addition de $\frac{1}{2}$ I au nombre de classement avantage les montres pour lesquelles ce nombre est petit et, à égalité du nombre de classement, leur permet de plus grands écarts en A, B, C et F. Or nous croyons que I très petit n'est nullement une garantie de marche meilleure. Je serais donc porté, tout en gardant l'isochronisme comme épreuve éliminatoire, à ne pas le faire figurer dans le classement.

Il est encore deux points du règlement des concours sur lesquels je désire appeler l'attention du Congrès.

Un chronomètre qui fait un saut de plus de 2^s à la température ambiante est exclu du concours : mais il est toléré des sauts aux températures artificielles. Je ne sais quelle considération a fait adopter cette règle, mais je la crois mauvaise. Un chronomètre qui saute, à quelque température que ce soit, est mauvais. J'ai relevé sur nos feuilles de concours les instruments ayant eu des sauts aux températures : tous se sont trouvés éliminés par suite d'autres irrégularités; on aurait donc eu tout avantage à les éliminer aussitôt le saut constaté.

Il est entendu que la variation de marche entre la température ordinaire et les

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

températures extrêmes, constatée le jour de l'entrée ou de la sortie, n'est pas considérée comme un saut. Notre règlement édicte que cette variation du premier jour n'entre pas dans le calcul de la marche moyenne. Cela complique le calcul, et sans utilité, à mon avis. Le chronomètre ne met pas longtemps à prendre la température du milieu : et, les conditions étant les mêmes pour tous, il n'y a aucun inconvénient à faire servir toutes les observations au calcul des marches moyennes.

J'ai refait le classement pour quelques concours en procédant de cette manière. Le résultat du concours n'aurait presque pas changé comme classement, et les montres qui se sont trouvées avantagées par le mode de calcul réglementaire ne méritaient pas cet avantage : elles bénéficiaient de la non-constatation d'un défaut très réel.

Tels sont, Messieurs, quelques résultats d'expérience qui m'ont paru devoir vous intéresser. Je serai heureux s'ils pouvaient donner lieu à un échange d'idées d'après lequel je pourrais être amené à proposer quelques modifications au règlement.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

SUR UN MOYEN

DE

MAINTENIR A PRESSION CONSTANTE UNE HORLOGE

PLACÉE DANS UNE ENVELOPPE A PEU PRÈS ÉTANCHE,

PAR

M. G. BIGOURDAN.

La pendule normale de l'Observatoire de Paris, placée dans les catacombes, a été installée par M. Wolf dans une caisse métallique qui autrefois était étanche : de la sorte, l'air renfermé dans cette caisse conservait la pression du moment de l'installation de l'horloge, ou du moment du remontage.

Aujourd'hui il n'en est plus de même et la pression intérieure suit, de plus ou moins loin, les variations de la pression extérieure.

Pour remédier à cet état de choses, nous nous proposons d'installer à côté de cette caisse l'appareil suivant, chargé de rétablir à chaque instant la pression initiale, supposée inférieure à la pression atmosphérique minima de Paris :

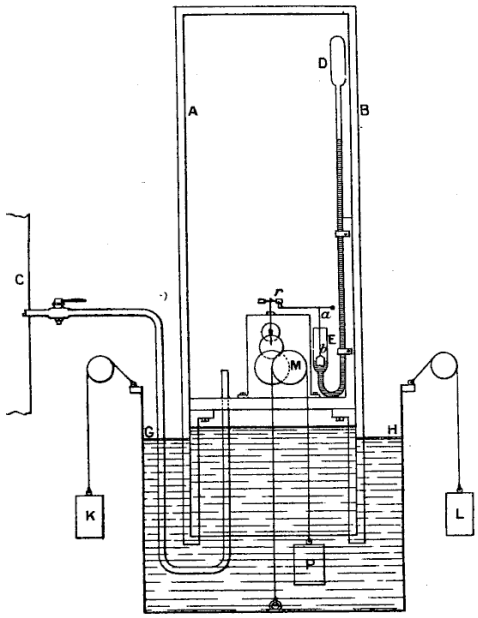
Une cloche fixe AB, en verre, communique par un tube avec la caisse C qui renferme la pendule. Cette cloche AB renferme un baromètre à mercure DE et un mouvement grossier d'horlogerie dont le régulateur est en *r*; son poids moteur est une cloche renversée GH renfermant un liquide qui isole de l'air extérieur l'air contenu dans la cloche AB. Des contrepoids K, L soutiennent en partie la cloche GH et le liquide qu'elle renferme.

La petite branche E du baromètre porte un flotteur surmonté d'une tige *ab* prolongée jusqu'aux ailettes du régulateur *r*.

Cela posé, supposons que l'on ait établi dans la cloche AB une pression déterminée, inférieure à la pression extérieure, et qu'alors la tige *ab*, atteignant les ailes du régulateur *r*, les empêche de tourner. Si la caisse C, en communication avec la cloche AB, laisse pénétrer l'air extérieur, le niveau du mercure va baisser en E, la tige *ab* laissera tourner le régulateur *r* et la cloche GH descendra, augmentant ainsi le volume de l'air renfermé dans la cloche AB et, par suite, rétablissant la pression primitive.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Quand la cloche descendante GH sera au bout de sa course, il suffira de la soulever : le poids P enroulera le cordon *cd* autour du cylindre M et l'appareil sera de nouveau prêt à fonctionner.



On pourrait peut-être aussi enfermer l'horloge elle-même dans une cloche telle que AB : dans ce cas, l'avantage de la fermeture à liquide serait de permettre le remontage de l'horloge sans rien ouvrir, au moyen de cordons passant à travers le liquide : la disposition à employer alors est assez facile à imaginer pour qu'il n'y ait pas lieu d'insister davantage.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

LOIS DES VARIATIONS RAPIDES D'AMPLITUDE

DU

BALANCIER DES CHRONOMÈTRES,

PAR

M. MARCEL BRILLOUIN.

Les essais que je poursuis depuis plusieurs années, pour la construction d'un appareil à mesures rapides de l'intensité de la pesanteur, m'ont amené à étudier de très près le fonctionnement des chronomètres.

Il résulte de cette étude que les chronomètres de la marine ont, par leur construction, même supposée parfaite, un défaut grave, qu'exagèrent beaucoup les imperfections de construction à peu près inévitables. J'indiquerai par quels caractères très faciles à observer ces défauts de construction se manifestent. La méthode d'examen que j'ai employée est assez simple et assez rapide pour mériter de sortir du laboratoire du physicien et de s'introduire dans le laboratoire d'essais comme méthode d'essai régulière; il me semble qu'il y aurait intérêt à l'introduire dans les essais de la marine, et à refuser tous les chronomètres dans lesquels le défaut que j'étudie dépasse une certaine limite. J'ajoute qu'il me paraît possible, par une modification de l'échappement, actuellement à l'étude, de remédier rigoureusement à ce défaut.

Ce défaut grave est le suivant : l'amplitude du balancier d'un chronomètre immobile varie constamment, dans des limites bien plus larges qu'on ne l'imagine d'ordinaire et d'une manière extraordinairement irrégulière, bien qu'il soit facile d'en indiquer la loi dans un chronomètre irréprochable. Or, quelles que soient les précautions prises, l'isochronisme ne saurait être rigoureux, et les renseignements fournis par l'épreuve dite d'isochronisme, à ressort désarmé, sont trop complexes pour que l'interprétation en soit certaine.

Par conséquent, à toute irrégularité d'amplitude doit correspondre une irrégularité de période, surtout lorsque l'amplitude varie constamment, ce qui exclut tout état permanent. D'ailleurs ces irrégularités de période seront très petites, en sorte que l'examen des amplitudes les révélera avec une grande sensibilité. Ayant besoin pour la détermination de la pesanteur d'avoir sur chaque oscillation du

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

chronomètre toute la précision, 10^{-5}, qu'il donne en moyenne pour les vingt-quatre heures, j'ai donc entrepris l'étude des amplitudes du chronomètre à éclairs construit pour mon appareil. A mon grand étonnement, j'ai constaté (mai, juillet 1896) une variation d'amplitude irrégulière de plus de 10° à chaque extrémité, avec des sautillements singuliers, mais se reproduisant à peu près semblables toutes les six ou sept minutes. J'observais à l'œil nu, en éclairant, à travers une fente, les masses cylindriques horizontales du balancier, et je suivais les déplacements du trait lumineux produit par réflexion sur la surface cylindrique polie de ces masses. Les déplacements dépassaient 2^{mm} pour un rayon d'environ $1^{cm},4$. Lorsque le balancier a son amplitude maximum, $\frac{1}{2}460°$ environ, c'est encore une variation d'un vingtième de l'amplitude.

« Les variations de marche dues au défaut d'isochronisme sont consécutives des changements d'amplitude, qui eux-mêmes dépendent de circonstances diverses difficiles à prévoir, dit M. Caspari (1) : usure des pivots, inégalités des moteurs et du rouage, et, avant tout, épaississement des huiles, c'est-à-dire causes capricieuses et mal définies. Des observations nombreuses, et dont les plus récentes ont été faites aux observatoires de Poulkova et de Cronstadt (2), ont montré que les changements d'amplitude peuvent même avoir lieu dans le courant d'une journée, d'où des irrégularités diverses de la marche si le régulateur n'est pas isochrone. »

Ce sont ces variations, considérables dans le cours d'une même journée, dont j'ai trouvé la loi extrêmement simple : ces variations sont dues à l'emploi d'engrenages pour la transmission des mouvements; elles sont inévitables, même avec des engrenages d'une taille parfaite et d'une position parfaite, en raison du frottement des dents; elles sont considérablement accrues par le moindre défaut de centrage, de distance ou de taille des dents.

Toute variation du couple d'entretien fourni par le mouvement d'horlogerie au balancier produit une variation de même sens de l'amplitude. Il faut donc obtenir un couple constant; c'est ce qu'on fait approximativement au moyen de la fusée et d'engrenages bien taillés et bien centrés.

Frottement. — Même avec une construction parfaite, on ne peut éviter le frottement des dents de la roue sur les ailes du pignon, variable du commencement à la fin de la prise.

Conséquence. — On doit retrouver dans l'amplitude du balancier toutes les périodes correspondant au passage d'une dent à la suivante, de tous les rouages, la construction étant supposée parfaite.

Pratiquement, l'enregistrement des variations d'amplitude pendant une demi-heure permet de compter les dents de presque tous les pignons. Ajoutons que, si la construction était parfaite, les rapports des vitesses étant tous de même ordre, les variations d'amplitude devraient être toutes de même ordre.

---

(1) CASPARI, *Chronomètres de Marine*, p. 36.
(2) NYREN, *Congrès de Chronométrie*, 1889, p. 153.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Tourillons. — Chaque axe d'acier ne tourne pas en réalité autour de son axe géométrique, et cela modifie tout. Chaque axe est terminé par des tourillons d'un diamètre d'autant plus fort que l'axe est soumis à des forces plus considérables.

La taille des dents supposée parfaitement réalisée donnerait un rapport constant des vitesses de rotation autour de l'axe géométrique. Mais le mouvement n'est pas permanent. Le pivot, fortement appuyé d'un côté pendant le repos, est lancé à chaque déclenchement de la détente. L'axe instantané de rotation est en dehors de l'axe géométrique.

Le rapport des vitesses de rotation et des couples transmis sera périodiquement variable au passage de chaque dent, l'amplitude de la variation due à cette cause sera d'autant plus grande que l'axe instantané de rotation sera plus éloigné de l'axe géométrique. A ce point de vue, *les variations de l'amplitude du balancier les plus grandes seront celles qui proviennent du pignon de centre, puis viendront celles du pignon de moyennes, et ainsi de suite jusqu'à celles du pignon d'échappement, qui seront les plus petites.*

Trois types d'imperfection dans la construction sont faciles à reconnaître : 1° une erreur dans la distance des centres; *la variation d'amplitude la plus manifeste correspond au couple de rouages dont l'écart est excessif;* 2° l'excentricité d'un pignon ou d'une roue; 3° les irrégularités des dents des roues, très visibles sous un grossissement de 15 ou 20 diamètres. Dans les chronomètres neufs de la fabrication la plus soignée, les dents de laiton d'une même roue présentent des inégalités d'épaisseur de plusieurs centièmes, et des différences de forme tout à fait singulières (*fig.* 1). Ces inégalités sont dues à l'opération par laquelle on donne aux dents leur forme définitive au moyen d'une petite fraise circulaire, qui fait avancer les dents l'une après l'autre à l'aide d'une petite lame latérale en hélice (outil à arrondir). Cette opération n'est susceptible d'aucune précision, pourtant elle est souvent regardée comme donnant au rouage sa dernière perfection.

APPAREIL D'OBSERVATION.

Les premières observations ont été faites à l'œil nu; le chronomètre, sorti de sa boîte, était renversé à plat sur la table, le balancier en haut, le cadran en dessous. La position de l'œil était fixé par un œilleton à 30^{cm} environ au-dessus du balancier, qu'éclairait une petite flamme éloignée. En choisissant convenablement le plan d'incidence, on arrive à voir très nettement le trait lumineux, image de la flamme par réflexion sur une des masses cylindriques à axe horizontal qui chargent le balancier; cette image donne, lorsque le balancier est en mouvement, une traînée lumineuse brusquement terminée par un bord éclatant qui correspond à la position extrême du balancier un moment stationnaire.

On marque par un point blanc un repère dans le voisinage de cette position.

Quand on suit pendant un quart d'heure la marche du balancier, on constate une variation d'amplitude de 1^{mm} ou 2^{mm} en plusieurs minutes; on constate en outre très facilement l'existence de variations à période plus longue, car les amplitudes *maxima* et *minima* varient d'une période à la suivante; en outre, l'image est

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

tantôt fixe ou lentement mobile, tantôt sautillante; il y a donc un grand nombre de variations à discerner.

L'éclat de l'image, la netteté de son bord rendaient certaine la possibilité de photographier chaque amplitude; c'est ce que j'ai réalisé au moyen de la disposition que représente le dessin ci-joint (*fig.* 1).

Le chronomètre, sorti de sa boîte, est supporté dans sa position normale, cadran en haut, sur un petit trépied de chimie, en fer, posé lui-même sur la planche mobile d'un support stable. Une forte lentille L (*fig.* 1), placée sur ce support, concentre sur une des masses cylindriques du balancier la lumière d'une lampe oxhydrique Dubosq, ou simplement d'un bec Auër, contenu dans la lanterne. Un diaphragme, quelques écrans en papier noir limitent la traînée lumineuse de manière à réduire autant que possible la lumière étrangère, réfléchie en permanence par la platine du chronomètre. Le mieux est de peindre cette platine avec du noir d'ivoire à l'huile, en évitant soigneusement les pierres d'axe.

Une lunette de cathétomètre C, horizontale, munie, devant l'objectif, d'un prisme à réflexion totale à arêtes horizontales (encastrée dans le liège P), reçoit la lumière réfléchie à peu près verticalement. L'oculaire de cette lunette est enlevé et remplacé par un tube de cuivre, long de 20^{cm} environ, noirci intérieurement. Un disque de laiton est collé à l'arcanson sur un bouchon de liège entré à frottement dur sur le tube de la lunette. Ce disque est garni de drap noir. On y applique et l'on y maintient avec deux pinces de blanchisseur le disque antérieur d'un soufflet de chambre noire S, dont le verre dépoli est entraîné dans son propre plan par un chariot et une vis. La souplesse du soufflet suffit pour que l'entraînement d'un bout à l'autre d'une plaque 9×12 soit possible sans résistance. Le chariot et la vis employés sont ceux qui entraînent un tambour Marey dans un appareil enregistreur construit par Breguet pour le Laboratoire de physique de l'École Normale.

On voit encore, sur la droite de la *fig.* 1, tout un équipage de poulies d'Atwood, sur lequel passe un fil chargé de poids Q. Ces poids ont été employés, dans un assez grand nombre d'expériences, comme force motrice substituée à celle du ressort du chronomètre. Pour cela, M. Fournier avait enlevé le barillet et la fusée du chronomètre, puis monté une petite poulie sur l'aiguille des heures. C'est à cette poulie qu'est attaché le fil moteur. On évite tout accident: 1° en calant le balancier par un coin de papier de soie glissé entre le balancier et la platine du chronomètre (comme pour le transport du chronomètre) avant de décharger le fil, et n'ôtant cette cale qu'après avoir changé le fil; 2° par le montage de la poulie sur l'aiguille des heures, qui n'entraîne son axe que par le frottement; si la charge est excessive, l'aiguille glisse sans entraîner le mouvement, et aucun choc n'est transmis au balancier. Ces expériences ont été faites pour faire disparaître l'action des dents de la fusée, ce qui a complètement réussi, et observer les détails dus aux dents des autres roues et pignons.

On met au point soigneusement sur le verre dépoli, en montant ou en descendant le support du chronomètre; on amène au milieu du champ le bord net de la traînée lumineuse, qui donne l'amplitude limite, en déplaçant le chronomètre sur la tablette, et l'on rend cette ligne bien horizontale en tournant le chronomètre autour d'un axe vertical sur son petit trépied.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

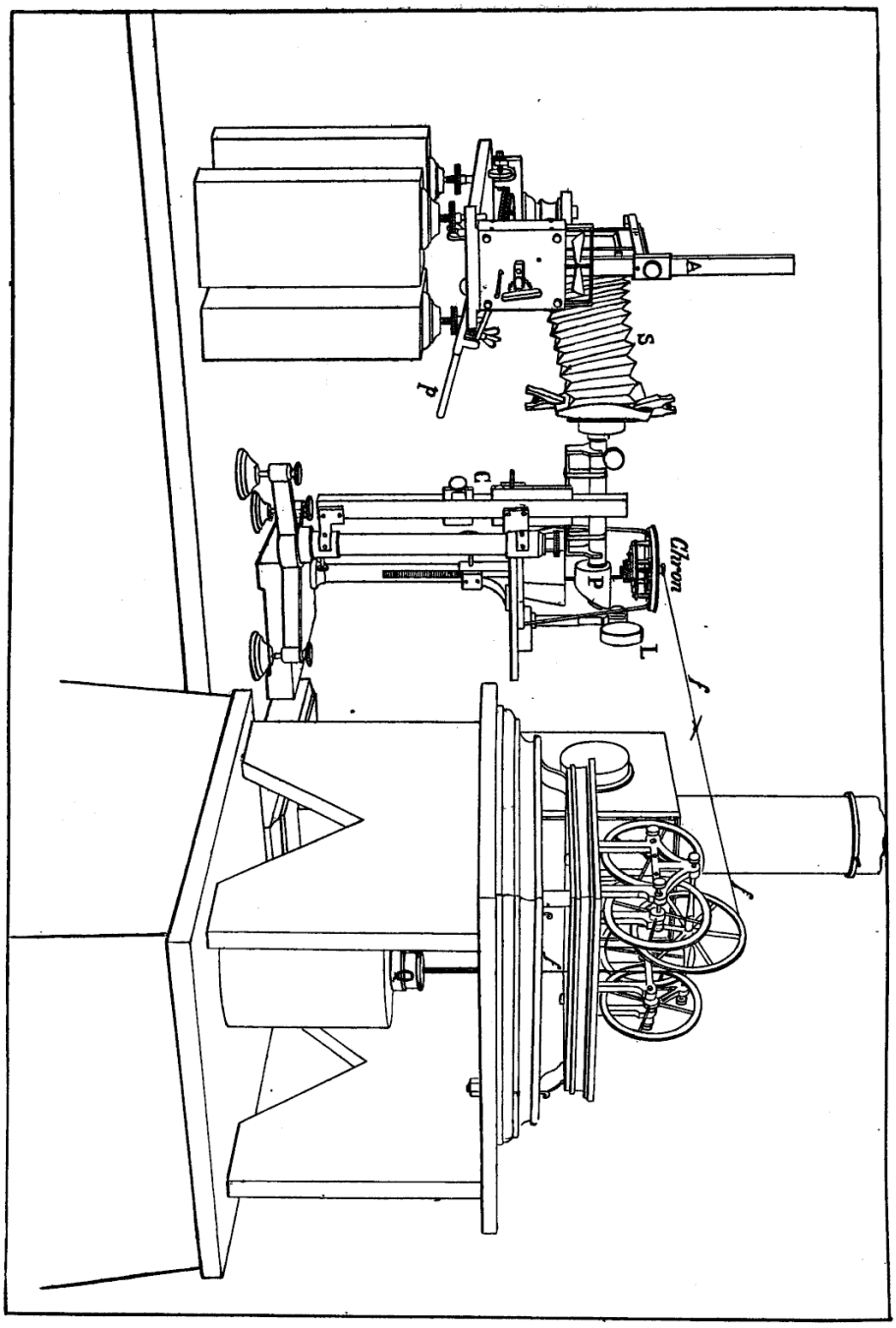


Fig. 1.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Cela fait, on ôte le verre dépoli, on coiffe l'extrémité du tube de la lunette d'un petit couvercle en carton noir dans lequel on a fait une fente fine avec le tranchant d'un petit canif; l'image horizontale, diaphragmée par cette fente verticale, ne donne plus qu'un point lumineux. On met un châssis avec une plaque photographique, et après avoir ouvert le châssis, on déclenche le mouvement d'horlogerie, qui entraîne tout l'arrière de la chambre noire et la plaque photographique devant la fente. Chaque oscillation du balancier marque ainsi son amplitude par une étroite traînée lumineuse dont l'éclat va croissant jusqu'à l'extrémité; celle-ci est bien nette lorsque la mise au point est bonne.

On trouve comme repères : 1° des lignes horizontales fournies par des points restés brillants de la platine du chronomètre; 2° la ligne tracée par un petit trou percé à côté de l'extrémité supérieure de la fente. Le parallélisme de ces deux lignes montre que rien n'a été déréglé. En outre, le petit trou latéral, toujours placé du même côté, permet d'orienter sans hésitation l'épreuve photographique.

La difficulté de retrouver les plus fins détails des photographies dans le quadrillage du tirage typographique m'a décidé à faire calquer les courbes. Ce sont ces calques, très suffisamment fidèles, qu'on trouvera ci-dessous.

Le tirage de la lunette donne un grossissement linéaire de 3,5, fixe dans toutes les épreuves. La valeur angulaire n'est pas rigoureusement fixe, mais peu s'en faut; tous les balanciers ont à peu près le même diamètre, 27^{mm} de lame bimétallique. Les masses cylindriques ont une longueur d'environ 5^{mm}, et c'est toujours très près de leur milieu que la fente coupe l'image focale qu'elles fournissent. Le point repéré est donc à 16^{mm} environ du centre. Lorsque l'amplitude est de 360°, ce point décrit environ 10^{cm} de circonférence et son image décrirait 35^{cm} entre ses positions extrêmes. Il faut donc se représenter les variations photographiées comme se produisant en vraie grandeur aux deux extrémités d'une ligne de 35^{cm} lorsque l'amplitude est de 360°, de 40^{cm} environ pour l'amplitude ordinaire des chronomètres, de $17^{cm},5$ lorsque l'amplitude est réduite à 180° environ.

RÉSULTATS.

Chronomètre Winnerl, n° **242**, appartenant au cabinet de physique de l'École Normale supérieure. La première photographie (*fig.* 2) représente la série des amplitudes du balancier pendant cent dix minutes consécutives, près de deux heures. La première ligne a été décrite en trente-six minutes, la deuxième et la troisième chacune en trente-sept minutes de droite à gauche.

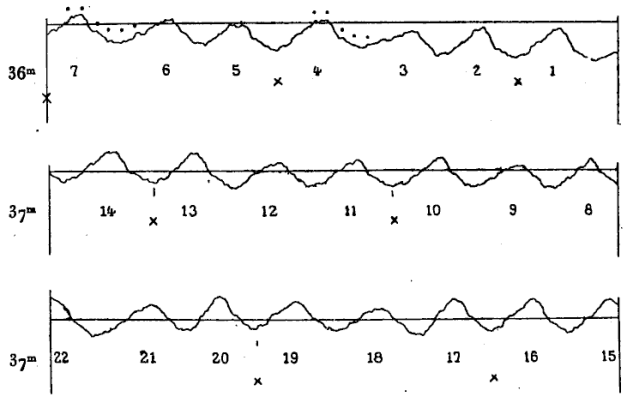
Le mouvement venait d'être remonté à fond. On y remarquera d'abord, par comparaison avec le trait de repère au haut de chaque ligne, que l'amplitude continuait à augmenter, lentement à la vérité, même après une heure et demie. Il est difficile de décider si c'est là un effet de mise en train, ce que je ne crois pas, ou simplement un résultat de la taille de la fusée ou d'une légère excentricité de la roue qui lui est attachée, laquelle a fait à peu près $\frac{2}{7}$ de tour pendant l'expérience.

Le tracé montre de grandes dentelures. Il y avait évidemment un sommet très peu avant le commencement de l'expérience, et un autre très peu avant la fin. Il y a donc à peu près exactement vingt-deux grandes dentelures en cent dix minutes;

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

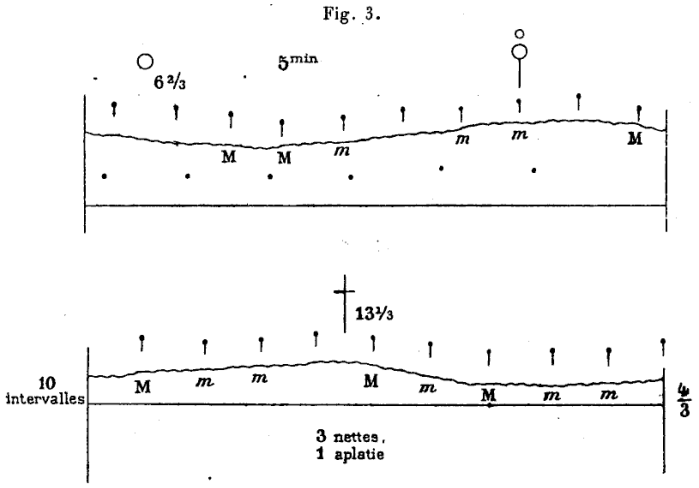
chacune d'elles correspond exactement à cinq minutes; chacune correspond donc à une dent du pignon des heures.

Fig. 2.



Ces grandes dentelures se succèdent sans se ressembler; les unes ont un sommet aigu, les autres un sommet à deux dents, les autres un sommet plat à fines dentelures. Pourtant l'examen des creux et des pointes montre une ressemblance très

Fig. 3.



nette de trois en trois, par exemple pour les creux 1,2; 4,5; 10, 11; 16, 17; 19, 20. L'examen détaillé de ces particularités permet de reconnaître que la roue des heures a 80 dents.

La *fig.* 3, qui représente une des premières photographies exécutées, a été faite

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

à raison d'un peu plus de cinq minutes environ par ligne; on rencontre seulement sur chaque ligne un sommet de dentelure dû aux dents de la fusée.

Les dentelures plus serrées dues à la roue de centre correspondent à des ondulations de $1^{cm},3$ de longueur environ, à peine perceptibles dans ce développement. Certainement le pignon de la roue de moyennes et celui de la roue de centre sont bien réglés.

Fig. 4.

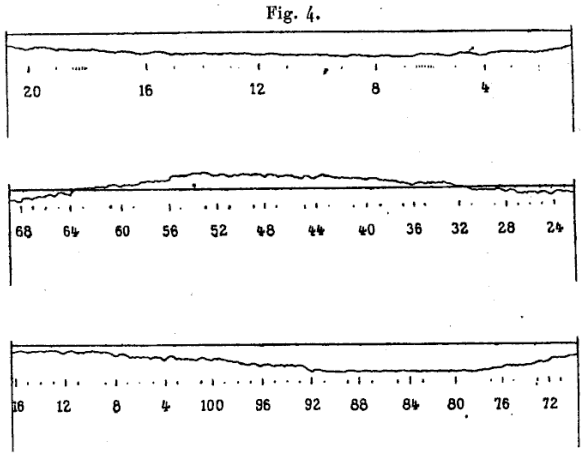
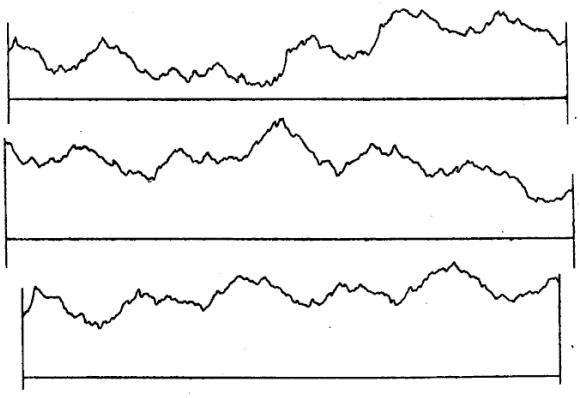


Fig. 5.



En revanche les ondulations plus courtes, $1^{mm},67$ environ (trois d'entre elles occupent un peu moins de 5^{mm}) sont très bien marquées. Elles sont dues au passage d'une dent de la roue de moyennes, d'une aile de pignon de secondes.

Pour contrôler l'influence attribuée aux dents de la fusée, le barillet et la fusée ont été enlevés; une poulie montée sur la roue des heures est entraînée par un poids de 279^{gr} (*fig.* 4).

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

La première ligne est décrite en quinze minutes, la seconde en trente-cinq, la troisième en trente-six exactement. Entre la première et la seconde ligne l'arrêt a duré soixante secondes juste; entre la deuxième et la troisième, moins de quinze secondes.

Il est facile de reconnaître :

1° L'excentricité de la poulie, qui n'atteignait certainement pas $\frac{1}{25}$, et qui a pourtant donné une variation d'amplitude considérable ayant une période d'une heure;

2° L'absence complète des dentelures attribuées précédemment à l'entraînement du pignon de centre par la fusée. Ces dentelures ont disparu en même temps qu'on a supprimé la fusée; c'est la meilleure justification de l'exactitude de l'opinion émise sur leur origine;

3° La conservation de tous les autres accidents périodiques déjà analysés, mais avec des caractères bien plus nettement visibles, grâce à la suppression des grandes dentelures dues à la fusée. La période de quarante-cinq secondes est numérotée de quatre en quatre.

Première ligne.....	20 périodes en 15 minutes
Ensemble.....	116 périodes en 87 minutes

Les périodes plus courtes sont particulièrement visibles sur la seconde ligne.

Trois autres chronomètres, deux neufs, et un vieux et fort maltraité, m'ont fourni des résultats tout à fait semblables.

Accommodation des chronomètres neufs. — Je suis, pour ma part, très porté à croire que ce ne sont pas les ressorts, moteur ou isochrone, qui produisent toutes les irrégularités de marche des chronomètres neufs, et qui empêchent tout réglage. On ne peut douter que l'amplitude ne soit tout à fait irrégulière et ne subisse des sautes énormes, lorsque les roues sont neuves, et tant que les pignons n'ont pas encore poli les dents qui les entraînent.

Quoi que fasse l'artiste, je pense que chaque chronomètre fabrique lui-même son propre rouage. Les pignons d'acier taillés, puis polis à l'émeri fin et au rouge, n'ont certainement pas la forme théorique après ce polissage. Chaque pignon travaille et use la roue qui l'entraîne, comme cela est bien visible par la trace jaune qui marque la place de la roue sur le pignon.

De là résulte une denture qui ne satisfait pas à la condition de constance du rapport des vitesses, mais à la condition de constance approchée de la forme; ce qui est tout différent.

Il est probable qu'on abrégerait beaucoup la période d'irrégularité en faisant mouvoir, pendant quelque temps, d'un mouvement continu et rapide, chaque groupe de deux rouages, surtout les plus lents. Chaque dent de la roue de centre ne revient en prise avec le pignon que toutes les heures; en s'en rapportant au mouvement du chronomètre pour amener cette roue à son état stable, c'est donc à peu près comme si on la polissait à raison de vingt-quatre coups de polissoir par jour; il n'est pas étonnant qu'il faille des mois pour y arriver. Si, au contraire, on

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

la faisait mouvoir artificiellement à raison d'un ou deux tours par seconde, il n'est pas douteux que quelques heures suffiraient.

La même remarque s'applique *a fortiori* à la roue de la fusée, qui tourne ordinairement sept fois moins vite, et dont chaque dent ne reçoit que trois coups et demi de polissoir par jour.

CONCLUSION.

Je crois donc pouvoir énoncer les conclusions suivantes :

1° *A l'usage des horlogers.* — Les roues de précision ne doivent jamais être passées à la fraise au moyen de l'outil à arrondir; elles doivent toujours être taillées au couteau et à la machine à diviser, puis débarrassées des bavures, le plus délicatement possible, à la pierre et à la brosse fine garnie de rouge.

Il faut apporter le soin le plus méticuleux au centrage des pignons et à la plantation à distance exacte.

On peut probablement abréger beaucoup la période préparatoire de marche du chronomètre en soumettant les roues de fusée, de centre et de moyennes à des rotations rapides pendant une journée, dans des conditions d'effort rendues analogues à celle de la marche réelle par un léger frottement régulateur de vitesse sur l'axe de moyennes, les roues de secondes et d'échappement enlevées.

2° *A l'usage des laboratoires d'essais.* — La méthode d'enregistrement des amplitudes que j'ai employée fournit des renseignements immédiats sur les soins apportés à la fabrication des rouages et à leur plantation. Une épreuve d'une heure et demie, suivie d'une épreuve rapide de vingt minutes, donnera sans aucune peine et presque sans dépense un document indiscutable, d'ailleurs susceptible d'être communiqué à l'horloger. A mon avis cette épreuve devrait être éliminatoire, certains types d'irrégularités devant être totalement évités dans une bonne fabrication, certains autres devant être compris entre les limites à fixer par l'examen d'un certain nombre de chronomètres reconnus excellents. Il n'y a aucun bon service à attendre d'un outil dont les dents sont mal taillées; l'épreuve que je propose équivaut à l'examen microscopique des dents elles-mêmes.

Mais ce n'est pas tout. Il est évidemment désirable de transformer le chronomètre, qui est déjà un instrument de précision moyenne, en un instrument de précision instantanée. Il faut pour cela rendre les oscillations du balancier parfaitement identiques. On sait qu'une telle préoccupation est ancienne chez les horlogers, et qu'un grand nombre de *remontoirs d'égalité* ont été imaginés. Jusqu'ici la fusée bien taillée a paru suffire, et les remontoirs d'égalité, tous délicats et dépourvus de sécurité, ont été abandonnés.

Toutes réflexions faites, l'action individuelle de toutes les dents du rouage m'a paru impossible à éviter, et il m'a semblé que le seul moyen d'annuler les variations d'amplitude était de revenir à l'emploi d'un remontoir d'égalité. Je crois avoir imaginé un dispositif simple et précis, qui conserve toutes les qualités de l'échappement actuel; mais je ne m'attends pas à obtenir du premier coup toutes les

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

qualités, principales et accessoires, nécessaires pour que cet échappement devienne robuste et pratique; je remercie la Société d'Encouragement d'avoir bien voulu m'accorder son aide, tant pour l'exécution de ces essais, auxquels M. Fournier concourt avec toute son habileté et son expérience d'artiste, que pour les observations que je vais instituer cette année sur le mode de fonctionnement réel de l'échappement à détente.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

SUR LA

DÉFINITION D'UNE UNITÉ DE TEMPS

INDÉPENDANTE DU MOUVEMENT DIURNE,

PAR

M. G. LIPPMANN.

1. La seconde est un étalon de temps suffisamment constant, précis et commode; on ne saurait en trouver un meilleur. Mais la seconde est un intervalle de temps arbitraire, au même titre que la durée du mouvement diurne; ce n'est point une unité de temps. Une unité de temps doit être capable d'une définition qui permette de la reconstituer si elle venait à se perdre ou à s'altérer.

Pour définir une pareille unité, il faut choisir un phénomène soit mécanique, soit électrique dont la durée soit entièrement déterminée par des paramètres indépendants du temps, tels que des longueurs ou des masses.

2. C'est ainsi qu'un mouvement produit par l'attraction newtonienne peut être entièrement déterminé en fonction de certaines masses et de certaines distances. La loi de Newton s'écrit

$$F = \frac{mm'}{r^2} \times f,$$

F étant la force qui s'exerce entre deux masses m et m' séparées par une distance r, et f étant un coefficient numérique arbitraire que l'on appelle *constante de l'attraction newtonienne*. Faisons $f = 1$; écrivons simplement

$$F = \frac{mm'}{r^2}; \tag{1}$$

l'unité de temps se trouve dès lors entièrement déterminée : c'est un intervalle de temps complètement défini, un peu supérieur à l'heure vulgaire [il vaut 3864 secondes (1)] et que nous pouvons appeler l'*heure absolue*. Ainsi, quand les géomètres,

(1) En prenant pour unité de densité celle de l'eau.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

suivant leur habitude, font $f = 1$ dans leurs formules, ils se servent implicitement de l'heure absolue comme unité de temps.

3. Pour donner une forme moins abstraite à la définition, considérons certains cas particuliers.

1° Soit T la durée de révolution d'un astre dont la moyenne distance est a, la masse attirante étant M. On a, pour $f = 1$,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{M}}. \tag{2}$$

En vertu de cette formule, l'heure absolue est un sous-multiple connu de la durée de l'année sidérale.

2° Un pendule de longueur réduite l a pour durée d'oscillation $2\pi\sqrt{\frac{l}{\gamma}}$, γ étant l'intensité de la pesanteur. D'autre part, on a

$$\gamma = f \times \frac{m}{r^2} \qquad \text{et} \qquad m = \frac{4}{3}\pi r^3 d,$$

r étant le rayon réduit de la Terre, et d la densité de notre globe. En faisant $f = 1$ et en remplaçant γ par sa valeur, il vient pour la durée d'oscillation

$$\Theta = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}\pi d}\frac{l}{r}}. \tag{3}$$

On voit que l'expression de Θ ne dépend que du rapport $\frac{l}{r}$, c'est-à-dire de l'angle sous lequel la longueur du pendule serait vue du centre de la Terre : elle est indépendante du choix de l'unité de longueur. En d'autres termes, il suffit de mesurer la longueur d'un pendule en mètres pour en déduire la durée de son oscillation en temps absolu.

4. Les phénomènes électriques permettent également de mesurer le temps en valeur absolue.

La décharge d'un condensateur à travers un circuit métallique est oscillatoire. La durée de chaque oscillation est égale à $2\pi\sqrt{CL}$, C étant la capacité du condensateur et L la longueur réduite du circuit; ces grandeurs dépendent uniquement des dimensions de l'appareil. Le temps s'exprime donc en fonction de ces dimensions, indépendamment du choix préalable d'une unité de temps telle que la seconde.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

RAPPORT

DE LA

COMMISSION DES FORMULES DE MARCHE.

La Commission nommée, sur la proposition de M. Francesco Contarino, pour examiner la portée de la Communication faite en séance plénière par M. Goedseels sur la détermination des constantes des formules des marches, s'est réunie.

M. Goedseels a fait savoir qu'il ne s'est pas opposé à la nomination d'une Commission comme le proposait M. Contarino, parce que l'exposé qu'il aurait dû faire des motifs de son opposition aurait prolongé le temps consacré par la réunion plénière à sa Communication, et ce sans profit pour un grand nombre de membres. Il rappelle ensuite que la partie essentielle de sa Communication constitue une simplification de la méthode à laquelle certains auteurs donnent le nom de *méthode de Tobie Mayer,* et renouvelle la justification de sa simplification.

Il explique qu'il a donné le nom de *méthode moderne de Mayer* à celle qu'il a simplifiée, parce qu'elle diffère de la méthode inventée par l'astronome allemand. Il rappelle enfin qu'en tenant exclusivement compte du nombre des opérations numériques qu'exige chaque méthode, elles peuvent être classées dans l'ordre suivant, la plus simple étant placée en tête :

Méthode originale de Mayer,
» moderne simplifiée,
» de Cauchy,
» des moindres carrés.

Comme les opérations numériques nécessaires pour appliquer les deux premières méthodes sont notablement moindres que les opérations inhérentes aux deux autres, il faut nécessairement d'excellentes raisons pour qu'il y ait lieu de préférer celles-ci à celles-là. M. Goedseels a exprimé à ce sujet quelques idées personnelles dans sa Communication. Mais la justification de ces idées et l'examen complet de la question à ce point de vue prendraient un temps considérable. Comme cette justification et cet examen sortent du cadre des travaux d'un Congrès chronométrique,

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

et que du reste le temps nécessaire à cette fin fait défaut, M. Goedseels estime que la Commission ne pourrait pas entrer dans cette voie.

La Commission se rallie à cette manière de voir et se sépare sans avoir pris d'autre résolution.

Signé :

GOEDSEELS, KAISER, Vincento E. MONTES,
ROZÉ, VALLE, VALENZUELA.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

LES UNITÉS DE L'HORLOGERIE,

PAR

M. Ch.-Ed. GUILLAUME.

La question des unités se présente, en horlogerie, sous deux formes bien distinctes. D'une part, la simple expression des dimensions des pièces n'est point encore parfaitement unifiée; d'autre part, le système d'enseignement de la dynamique horlogère peut se rattacher aux deux grandes écoles, celle des mécaniciens et celle des physiciens, et il en résultera forcément des notions différentes sur l'établissement des formules de la mécanique horlogère et le numérotage rationnel qui doit en découler. Je m'occuperai, dans ce qui suit, de ces deux aspects de la question.

DIMENSIONS DES PIÈCES HORLOGÈRES.

Tandis que le système métrique pénétrait peu à peu toutes les industries mécaniques, l'horlogerie est restée fidèle, au moins pour une partie de ses mesures, au pied de Roy, dont la ligne sert encore à exprimer les dimensions extérieures des platines, et d'un grand nombre d'autres éléments de la montre. Seules les vis ont été systématisées à la suite d'un grand travail entrepris par le professeur Thury sous les aupices de la Société des Arts de Genève. Cependant, bien que le système de M. Thury se soit généralisé en Mécanique et soit devenu le point de départ de l'unification des vis, poursuivie simultanément dans plusieurs grands pays et adoptée finalement dans le Congrès international de Zurich, l'initiative prise par la Société des Arts semble, précisément sur le terrain horloger, n'avoir pas porté tous les fruits que l'on en attendait. Les raisons en sont multiples; la vis métrique s'est trouvée jusqu'ici à peu près isolée au milieu des anciennes mesures, et, de plus, une longue pratique semble avoir montré que les formes de pas proposées par M. Thury ne sont pas aisées à réaliser sur les vis très petites employées en horlogerie; enfin, la non-existence du contrôle officiel, en l'absence de toute disposition légale, et la difficulté purement technique de ce contrôle et même de l'établissement précis des prototypes devaient nécessairement, après peu d'années, amener de nombreuses divergences des pas adoptés, et finalement le retour à des vis de dimensions quelconques.

Il n'en résulte pas que toute unification soit impossible en horlogerie; mais la réglementation ne doit pas rester partielle; elle doit comprendre simultanément les organes principaux de la montre, en commençant par les dimensions exté-

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

rieures, les plus faciles à réaliser et à contrôler, et en s'étendant, de proche en proche, jusqu'aux plus petits organes.

L'avantage d'une telle unification ne réside pas seulement dans la satisfaction, toute théorique, de voir le système métrique se substituer à des unités tombées en désuétude. Ces anciens systèmes n'étant plus légaux, les bureaux de vérification ne sont plus autorisés à étudier les appareils de mesure dans lesquels il en est fait usage, et l'exactitude de la graduation de ces appareils ira forcément en diminuant à mesure qu'au contraire la précision deviendra de plus en plus nécessaire.

Il faut reconnaître, d'ailleurs, que la ligne tend, par la force des choses, à devenir un simple *repère* plutôt qu'une *mesure* véritable. La désignation des dimensions des platines en lignes admet une assez grande tolérance, et sert simplement à grouper une infinie diversité de diamètres autour de quelques points assez mal définis eux-mêmes. Le deuxième avantage d'une réforme métrique en horlogerie serait dès lors, en facilitant beaucoup le contrôle, de profiter de l'abandon des anciennes expressions pour créer, comme on l'a fait pour les vis mécaniques, un système de diamètres convenablement choisis, auxquels on se limiterait autant que possible.

Le progrès qui en résulterait serait évident; le nombre immense de diamètres suivant lesquels les montres sont construites obligent les fabriques d'ébauches à conserver un outillage extrêmement complexe, à travailler souvent par petites séries, et, par conséquent, à élever sans nécessité le prix des pièces qu'elles livrent. Il en est de même des monteurs de boîtes, qui, comme les fabricants d'ébauches, pourraient réduire leur outillage et travailler par séries plus importantes si les diamètres des montres étaient moins divers.

Une telle unification a déjà été réalisée par les grandes fabriques qui, travaillant sur un nombre très limité de types, ont créé la pièce interchangeable, et ont réussi à livrer, pour un prix extrêmement minime, des montres d'une remarquable précision. Une unification relative, s'étendant à de nombreuses catégories de montres, diminuerait sans doute l'écart des prix de revient actuels des petites et des grosses fabriques, les premières devenant susceptibles de bénéficier des prix de très grosses séries.

La question d'une telle unification est évidemment très complexe, et exigera la coopération et les avis de nombreux praticiens. De plus, même lorsqu'elle aura été complètement élaborée et sanctionnée en principe par une assemblée compétente, il ne saurait être question de l'imposer; mais on pourra espérer que les fabricants d'ébauches ou de pièces détachées et les fabricants d'horlogerie y trouveront un intérêt suffisant pour s'y rallier d'eux-mêmes.

Je me bornerai ici à une simple indication qui pourrait être le point de départ d'une discussion sur les dimensions extérieures de la montre.

On pourrait, par exemple, limiter provisoirement l'unification aux diamètres partant de 20^{mm}, et décider qu'au-dessus de cette grandeur ils progresseront de 2^{mm} en 2^{mm}. Ou bien on pourrait poursuivre l'unification pour des diamètres plus petits, et proposer, par exemple, la progression par millimètres au-dessous. Si ce point de départ ou tout autre analogue est admis, on pourra procéder à une unification plus complète, en s'occupant tout d'abord des rouages et des dentures.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

ENSEIGNEMENT ET NUMÉROTAGE.

Enseignement. — Tandis que les physiciens adoptaient délibérément le système C.G.S. d'unités de *longueur,* de *masse* et de *temps,* les mécaniciens sont restés encore attachés au système *mètre, kilogramme, seconde,* pour la *longueur,* la *force* et le *temps.*

On connaît les raisons excellentes qui ont conduit les physiciens à substituer la masse à la force dans le système des grandeurs fondamentales, et les motifs pratiques pour lesquels ils ont choisi des unités beaucoup plus petites que celles des mécaniciens.

Les mêmes motifs pratiques existent pour les horlogers, dont les travaux sont à la limite de petitesse atteinte en Mécanique, et les motifs théoriques s'imposent à eux comme aux physiciens.

Dans l'enseignement de l'horlogerie, comme plus tard dans les calculs pratiques, on rencontre essentiellement deux problèmes de Mécanique, celui de l'oscillation du pendule, et celui de la vibration d'un balancier. Dans le premier, les mécaniciens considèrent le quotient d'un moment d'inertie par un moment statique calculé de la façon suivante : la masse intervenant dans la détermination du moment d'inertie est donnée par le quotient du poids du pendule par l'accélération de la pesanteur. Le moment statique se déduit immédiatement du poids du pendule. Les physiciens, au contraire, expriment directement la masse du pendule par rapport au gramme-masse, et calculent le poids du pendule, d'où se déduit son moment statique, comme produit de sa masse par l'accélération de la pesanteur. Pratiquement, le calcul est le même ; mais, dans le premier cas, g intervient au dénominateur du moment d'inertie; dans le second, comme dénominateur du quotient entier. Ici, la Terre agissant sur le pendule pour déterminer sa période d'oscillation, il n'y a aucune absurdité à parler du poids de celui-ci et à en déduire sa masse, bien que ce procédé soit, en principe, d'une singulière complication.

Mais le problème est tout autre s'il s'agit de l'oscillation du balancier actionné par un spiral. Ici, le mécanisme porte en lui-même toute la définition dont son mouvement est susceptible. Qu'il existe au voisinage de la Terre, ou sur une autre planète, ou en un point de l'univers où il est soustrait à toute force d'attraction, sa durée d'oscillation reste invariable; faire intervenir ici le poids du balancier en un point déterminé de la Terre, pour en déduire sa masse en tenant compte de g en ce point, est un simple contresens en même temps qu'une complication inutile.

Si donc nous ne connaissions pas les bonnes raisons qui ont amené les physiciens au système longueur-masse-temps, la considération des deux problèmes de la Mécanique horlogère nous montrerait à elle seule que le système des mécaniciens, tolérable dans un de ces problèmes, introduit dans l'autre, outre une complication pratique inutile, une véritable erreur de principe, de nature à cacher aux débutants la vraie nature du phénomène.

On ne saurait, en effet, trop répéter aux commençants que *les masses existent indépendamment des poids et antérieurement à eux;* qu'un corps transporté en un point

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

quelconque de l'espace conserve sa masse, tandis que son poids dépend essentiellement de sa position, et que, dans un mécanisme fonctionnant indépendamment de la pesanteur, celle-ci est une quantité parasite, conservée par une vieille habitude dans un enseignement où elle n'a pu être introduite que par une erreur de conception.

Le système longueur-masse-temps possède enfin, pour les horlogers, un autre avantage auquel j'ai fait allusion, qui consiste en ce qu'il a été élaboré numériquement au moyen d'unités d'un ordre de grandeur accessible aux horlogers, comme nous allons le voir par un exemple.

Numérotage des balanciers et des spiraux. — Les numéros adoptés pour les balanciers et les spiraux ne reposent sur aucune base rationnelle. Pour ces derniers, on possède même deux systèmes de numérotage, qui s'appliquent aux spiraux trempés et aux spiraux mous, et progressent en sens inverse l'un de l'autre.

Il serait évidemment avantageux de faire correspondre les numéros des balanciers et ceux des spiraux à une fonction déterminée de leur caractéristique principale, exprimée en unités rationnelles et choisie de telle sorte qu'elle permette un calcul rapide de la durée de l'oscillation d'ensemble.

La durée d'une oscillation simple d'un balancier est donnée par

$$T = \pi\sqrt{\frac{I}{M}},$$

I représentant son moment d'inertie, M le moment élastique du spiral (1).

Le moment d'inertie du balancier d'une montre courante, exprimé en unités C.G.S., est de l'ordre de 0,2. Comme il varie proportionnellement à la cinquième puissance des dimensions linéaires du balancier, il est, pour une petite montre, d'un ordre inférieur à 0,01. On en conclut qu'en numérotant suivant les moments d'inertie, on aura des nombres trop petits pour les numéros des balanciers, et surtout une progression beaucoup trop rapide. Mais on peut atténuer beaucoup la progression en substituant les racines aux valeurs vraies, et augmenter le nombre exprimant le numéro du balancier en y incorporant la quantité π.

Dans ces conditions, le numéro d'un balancier de grandeur courante serait de l'ordre de 1,4, et le numéro du spiral destiné à lui communiquer cinq oscillations simples par seconde de l'ordre de sept unités, grandeurs qui paraissent, à première vue, tout à fait convenables. Alors, le numérotage présenterait cette particularité très pratique de donner la durée d'oscillation du mobile en divisant simplement le numéro du balancier par celui du spiral. Ou, celle-ci étant généralement de 0,2 seconde, le spiral correspondant à un balancier donné serait celui dont le numéro serait cinq fois plus grand.

---

(1) On désigne souvent par M l'expression $\frac{1}{12}Ee^3h$, la longueur du spiral figurant alors explicitement dans la formule; mais il faut remarquer que cette dernière grandeur n'est pas de la nature du moment d'un couple; on pourrait la désigner sous le nom de *rigidité du spiral.* La signification donnée ici au terme *moment élastique* correspond bien à sa nature.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Il semble donc rationnel d'adopter un numérotage basé sur les deux définitions suivantes :

Le numéro d'un balancier est la valeur C.G.S. de l'expression $\pi\sqrt{I}$.

Le numéro d'un spiral est la valeur C.G.S. de l'expression $\sqrt{M}$.

Un numérotage partant de définitions aussi précises serait facile à réaliser pratiquement par la construction d'un certain nombre de balanciers dont tous les éléments pourraient être mesurés, et auxquels on rapporterait des spiraux-types qui serviraient à déterminer, par la vibration, le moment d'inertie, et, par conséquent, le numéro de balanciers qui seraient employés à leur tour dans les fabriques pour déterminer les numéros des balanciers livrés aux horlogers. Des séries spéciales serviraient aussi aux fabricants de spiraux.

La détermination des constantes des balanciers et des spiraux étant ramenée aux unités métriques, on pourra créer, dans tout établissement convenablement outillé et possédant des témoins authentiques des unités métriques de longueur et de masse, des séries de balanciers et de spiraux-types, avec toute la précision exigée par la construction horlogère.

RÉSUMÉ.

Je formulerai en quelques mots les propositions contenues dans les pages qui précèdent.

1. Il semble utile d'introduire partout en horlogerie des unités métriques, et d'adopter, en fonction de ces unités, une série de dimensions fixes pour les principaux organes de la montre.

2. Il conviendrait, dans l'enseignement de la dynamique horlogère, d'abandonner le système longueur-force-temps, pour adopter le système longueur-masse-temps, et le système d'unités C.G.S. qui en dérive.

3. On peut fonder, sur le système C.G.S., un numérotage rationnel en même temps que pratique des spiraux et des balanciers.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

RAPPORT

SUR LES

DÉLIBÉRATIONS DE LA COMMISSION DES UNITÉS,

PAR

M. FADDEGON.

La séance de la Commission est ouverte le 2 août à $2^h 30^m$ à l'Observatoire de Paris. Sont présents : MM. Jurgensen, Rozé, Antoine, Berner, Faddegon, Guillaume. Bien que le général Sebert, membre de la Commission, n'assiste pas à la séance, M. Guillaume propose de le nommer président de la Commission; la présidence de la séance est ensuite confiée à M. Guillaume, et M. Faddegon est chargé de rédiger le Rapport.

Les questions soumises à la Commission sont les suivantes : unification des organes des montres, numérotage des balanciers et des spiraux, introduction du système C.G.S. dans l'enseignement et les calculs en horlogerie, questions pédagogiques.

La Commission est unanime à penser qu'il serait avantageux d'unifier tout d'abord les diamètres des mouvements et de les exprimer en unités métriques. M. Antoine estime que ce travail d'unification ne devrait pas se borner aux diamètres du mouvement, mais devrait comprendre les dimensions de tous les rouages. Il est bien entendu, d'ailleurs, qu'aucune pression ne peut être exercée sur les fabricants, et que les normes établies doivent seulement leur donner des facilités pour utiliser des types courants fabriqués en grand nombre et, par conséquent, à des conditions avantageuses. Cependant, la Commission, tout en estimant qu'elle peut d'ores et déjà fixer provisoirement les diamètres des mouvements, se déclare incompétente pour aborder la discussion des diamètres des rouages. Il semble utile, en tout état de cause, de prendre connaissance des délibérations de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale, concernant l'unification des engrenages, signalées par M. Rozé. M. Faddegon pense que pour les vis horlogères le système Thury pourrait être modifié avantageusement.

La Commission est ensuite unanime à reconnaître les avantages qu'il y aurait à

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

introduire l'enseignement du système d'unités C.G.S. dans les écoles d'horlogerie, en même temps que l'exécution des calculs pratiques faits dans ce système. Elle pense aussi que le numérotage des balanciers et des spiraux pourrait être très utilement dérivé de ce système, et qu'enfin le numérotage très simple, dans lequel le quotient du numéro d'un balancier par le numéro d'un spiral donne la durée d'oscillation, semble pratique. Toutefois, pour que ce système puisse être introduit dans l'usage, il est nécessaire qu'une commission mixte, composée d'hommes de science et de praticiens, établisse des types précis de balanciers et de spiraux dont les éléments puissent être aisément calculés, et que des séries de balanciers et de spiraux, déterminés empiriquement par rapport aux premiers, soient mises à la disposition des horlogers.

Enfin, la Commission aborde les questions concernant l'enseignement de l'horlogerie; elle estime que, dans beaucoup d'écoles, cet enseignement n'est pas suffisamment coordonné, et qu'une enquête pourrait révéler des faits intéressants, et conduire à répandre dans toutes les écoles des méthodes jugées bonnes dans l'une d'elles; il semble que la coordination de la théorie et de la pratique ne soit pas toujours suffisante; que les méthodes expérimentales devraient y être développées davantage; qu'on pourrait, par exemple, par une série d'essais très simples sur des barres de différents métaux et de formes diverses, faire comprendre aux élèves, par une méthode intuitive, les lois de l'élasticité, si importantes en horlogerie. En conséquence de ces délibérations, la Commission adopte les résolutions suivantes :

La Commission propose au Congrès de nommer une Commission permanente internationale chargée :

1° De poursuivre les unifications possibles dans les dimensions des organes des montres;

2° D'étudier et de répandre les améliorations que l'expérience indiquera, concernant l'enseignement de l'horlogerie.

La Commission actuelle, sans vouloir lier les décisions de la future Commission, estime qu'il serait utile :

1° D'unifier les diamètres des montres, en prenant, par exemple, comme point de départ le diamètre de 20^{mm}, et de progresser pour les plus grands diamètres par 2^{mm};

2° D'étudier la possibilité d'une unification plus complète, soit des hauteurs des montres, soit des diamètres des roues, soit des éléments des vis, etc.;

3° D'élaborer complètement le système de numérotage des balanciers et des spiraux proposé par M. Guillaume, définissant le numéro d'un balancier par l'expression $\pi\sqrt{I}$, et le numéro du spiral par $\sqrt{M}$, en unités C.G.S.;

4° D'établir des balanciers-types dont les constantes puissent être calculées d'après leurs dimensions et leurs masses, de façon à faire entrer pratiquement dans l'industrie horlogère un numérotage rationnel.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

La Commission estime aussi :

1° Qu'il serait utile d'introduire, dans l'enseignement de l'horlogerie, l'étude approfondie du système C.G.S.;

2° Que l'examen pratique des matériaux employés en horlogerie, et notamment des métaux, soit enseigné dans les écoles d'horlogerie; qu'on y introduise, en particulier, la mesure des constantes des métaux : module d'élasticité, limite élastique, charge de rupture, dilatation, etc.; enfin, autant que possible, un examen microscopique des métaux.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

ÉTUDE

SUR LES

LAMES BIMÉTALLIQUES DES BALANCIERS COMPENSATEURS

ET SUR LES

DIVERS SYSTÈMES DE COMPENSATION SUPPLÉMENTAIRE QUI ONT ÉTÉ EMPLOYÉS DANS LES CHRONOMÈTRES,

PAR

M. A.-L. BERTHOUD.

Ce Travail, qui a pour titre *Étude sur les lames bimétalliques des balanciers compensateurs,* est le résumé des leçons que notre professeur C.-A. Berthoud donnait sur ce sujet aux élèves placés chez lui par le Ministre du Commerce pendant les années 1840-1845.

Malgré les imperfections que je suis le premier à y trouver, je pense que sa lecture peut être utile et profitable aux jeunes horlogers qui s'occupent d'horlogerie de précision, et qui le plus souvent n'ont reçu sur ce sujet que des notions incomplètes ou inexactes, soit dans les écoles, soit chez les patrons où ils ont fait leur apprentissage.

J'ai évité à dessein l'emploi des formules mathématiques. Il suffira de se reporter aux dessins ci-après, lesquels ont été tracés d'après un agrandissement considérable, puis réduits par la photogravure.

Définition. — La lame bimétallique de nos balanciers compensateurs est une lame formée de deux métaux ayant des coefficients de dilatation différents et réunis de la manière la plus intime sur toute leur étendue.

Historique. — Elle a été inventée par John Harrisson vers le milieu du XVIII^e^ siècle et employée par lui dans la construction de ses montres marines, mais d'une manière différente de la disposition actuelle.

Plus tard, Pierre le Roy, dans son Mémoire publié en 1770, en proposa l'emploi pour la construction d'un balancier compensateur.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Avant d'examiner les fonctions des lames bimétalliques dans les balanciers compensateurs, je présenterai quelques propositions qui nous serviront de base dans notre examen :

1° Une lame bimétallique droite à une température devient courbe à toute autre température. Pour une élévation de température, le côté convexe est celui du métal le plus dilatable; pour un abaissement de la température, c'est le côté du métal le moins dilatable qui devient convexe.

2° Cette courbe est un arc de cercle dont le rayon de courbure dépend :

a. De la valeur du changement de la température.

b. De la différence des coefficients de dilatation des métaux formant la lame bimétallique.

c. De l'épaisseur de cette lame.

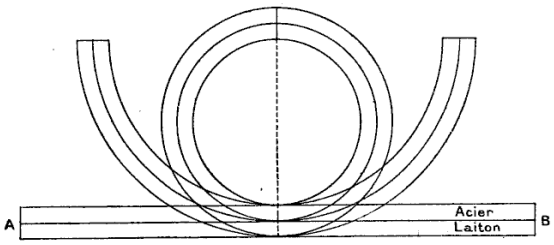
L'observation prouve la vérité des faits énoncés ci-dessus. Pour leur démonstration nous renvoyons les lecteurs aux traités de Physique (1).

I.

APPLICATION DES PROPOSITIONS ÉNONCÉES CI-DESSUS A LA DÉTERMINATION DU RAYON DE COURBURE D'UNE LAME BIMÉTALLIQUE POUR UNE ÉLÉVATION DE TEMPÉRATURE DONNÉE.

On demande pour quelle élévation de température la lame droite, les trois déterminantes, la longueur, l'épaisseur et la différence des coefficients de dilatation des métaux dont est formée la lame étant connues, deviendra circulaire. Soit (*fig.* 1)

Fig. 1.



une lame bimétallique AB acier et laiton de 1^{m} de longueur et de $0^{mm},60$ d'épaisseur (coefficient de dilatation de l'acier : $1^{mm},1$ pour 100° C.; celui du laiton est de $1^{mm},87$ pour le même écart de température; différence, $0^{mm},77$). On demande à quelle température la lame, droite à zéro, deviendra circulaire.

Cette lame, soumise à l'action de la chaleur, se courbe, arrive à prendre la figure

(1) Dans les explications suivantes nous admettons en principe que les deux métaux formant la lame bimétallique sont d'égale épaisseur dans toute leur étendue, de dilatation uniforme et de ténacité égale, quitte à apporter dans la pratique les corrections que motiverait l'emploi de lames qui ne se trouveraient pas dans ces conditions.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

d'une demi-circonférence et, les extrémités se joignant, à former un cercle; il s'agit de déterminer la température où ce fait a lieu.

Si nous examinons la lame dans son état circulaire, nous constatons que le laiton se trouve sur une circonférence plus grande que l'acier. La valeur de cette différence est connue : elle est égale à la différence des diamètres multipliée par 3,1415 (rapport du diamètre à la circonférence), nous avons $1^{mm},8849$ pour l'excès de longueur du laiton; or, comme cet excès est de $0^{mm},77$ pour l'intervalle de 100°, nous établissons la proportion suivante : $\frac{0,77}{1,00} = \frac{1,8849}{x}$, et nous obtenons 244°,8 pour la température de jonction des extrémités de la lame bimétallique.

De ce qui précède on peut conclure : 1° que les rayons de courbure sont proportionnels à l'épaisseur des lames; 2° en raison inverse de la différence des coefficients de dilatation des métaux formant la lame.

Cet exemple suffit pour indiquer au lecteur que, ayant les déterminantes d'une lame, épaisseur, rayons de courbure et coefficient de dilatation, il est possible de savoir la figure que prendra cette lame pour une différence de température donnée.

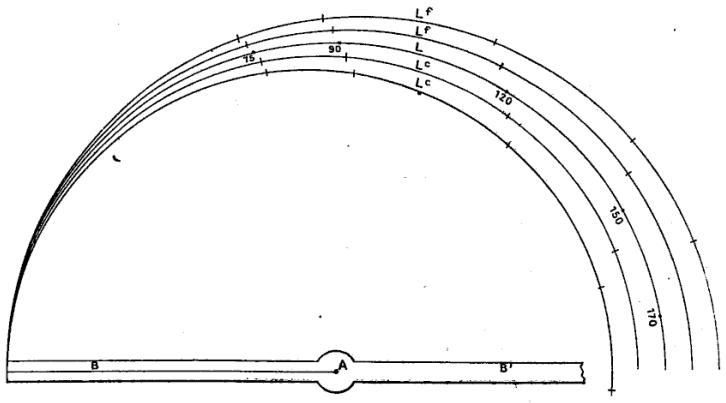
II.

EXAMEN DU MOUVEMENT DE MASSES PLACÉES A DES AMPLITUDES DIVERSES D'UNE LAME BIMÉTALLIQUE D'UN BALANCIER COMPENSATEUR.

Soient :

A (*fig.* 2) le centre du balancier;
BB les extrémités des bras barrettes;
L la lame bimétallique à la température moyenne, son rayon = 250^{mm};

Fig. 2.



$L'L'$ la lame qui, par le fait de l'abaissement de la température, a pour rayon 260^{mm} et 270^{mm};

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

L^cL^c la lame qui, par une élévation de la température, a pris 230mm et 240mm pour rayon.

Les points placés sur la lame L, à des distances angulaires de 75°, 90°, 120°, 150° et 170° du bras du balancier, sont les centres des masses de compensation sur les lames L^fL^f, L^cL^c; le point est remplacé par un trait qui coupe la lame.

L'examen de la figure nous fait voir les diverses positions des masses pour cinq températures différentes, et nous pouvons en tirer les conséquences suivantes :

1° Que la trajectoire d'une masse de compensation est une courbe;

2° Que la longueur de cette trajectoire est à peu près proportionnelle à l'amplitude de l'arc où est placée la masse;

3° Que la droite passant par les extrémités de la trajectoire est une sécante au cercle du balancier, et passant d'autant plus loin du centre du balancier que la masse est placée sur une plus grande longueur de lame.

On voit donc que, par le fait du changement de direction de la trajectoire, la partie utilisée pour la compensation diminue avec la longueur de lame employée.

Ce fait avait été observé par nos anciens maîtres; aussi employaient-ils des balanciers à trois et quatre lames (1).

Nous pensons qu'il serait préférable d'avoir quatre masses de compensation au lieu de deux; que, les masses étant plus légères, on pourrait faire les lames plus minces et avoir de ce fait plus de mouvement de la masse.

III.

EXAMEN DES FONCTIONS D'UNE LAME BIMÉTALLIQUE CIRCULAIRE PLACÉE DANS UN PLAN PASSANT PAR L'AXE DU BALANCIER (2).

Soient :

AA′ l'axe du balancier (voir *fig.* 2);

L la lame bimétallique fixée sur l'axe du balancier par l'assiette B; à la température moyenne, la lame a 250mm de rayon;

L^fL^f la lame qui, par le fait d'un abaissement de la température, a 260mm et 270mm de rayon;

L^cL^c la lame qui, par une élévation de la température, a 240mm et 230mm de rayon.

Les points placés sur la lame L, à des distances angulaires de 75°, 90°, 120°, 150° et 170° de l'axe du balancier, sont le centre des masses compensatrices; sur les lames L^fL^f, L^cL^c le point est remplacé par un trait qui coupe la lame.

Dans l'exemple précédent (II) nous avons vu que les distances diverses des masses au centre du balancier étaient le facteur du régime de la compensation;

---

(1) De nos jours, un artiste qui s'est distingué par d'ingénieuses recherches a employé avec succès un balancier à quatre lames d'une disposition nouvelle.

(2) Cette disposition des lames bimétalliques a été inventée par J.-M. Duchemin, en 1822, et reprise de nos jours (1875) avec modification par Winnerl.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

ici le centre du balancier (anneau bimétallique) n'est plus en cause, c'est la distance de la masse à l'axe du balancier qui détermine le régime de la compensation.

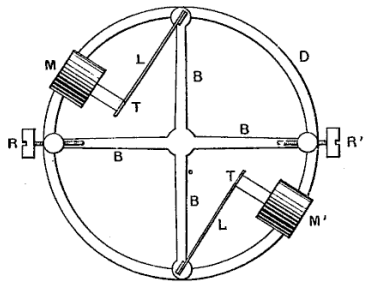
L'examen de la figure nous fait voir que les trajectoires des masses sont plus directes vers l'axe qu'elles ne le sont vers le centre du balancier généralement employé; mais, si l'on constate cet avantage, d'autre part on trouve un inconvénient; chaque déplacement de la masse sur la lame bimétallique change le rayon de giration du balancier; de plus, il est peu pratique de placer les masses sur un arc plus grand que 100°; pour des arcs plus grands, les masses sont sur un petit rayon et font peu d'effet.

IV.

EXAMEN DES FONCTIONS DES LAMES BIMÉTALLIQUES PLANES DES BALANCIERS COMPENSATEURS.

1° *Lames placées comme dans nos balanciers ordinaires.* — La *fig.* 3 représente le balancier (1), dont voici le détail :

Fig. 3.



D, disque croisé fixé à l'axe du balancier par les bras ou barrettes BBBB;
L, L', lames bimétalliques, fixées à la circonférence du disque, par une de leurs extrémités;
T, T, tiges taraudées placées ou fixées à l'extrémité libre des lames, et sur lesquelles sont vissées les masses MM¹;
R, R', vis réglantes.

L'examen de la figure démontre que le mouvement des masses est plus direct vers le centre du balancier que dans les balanciers ordinaires.

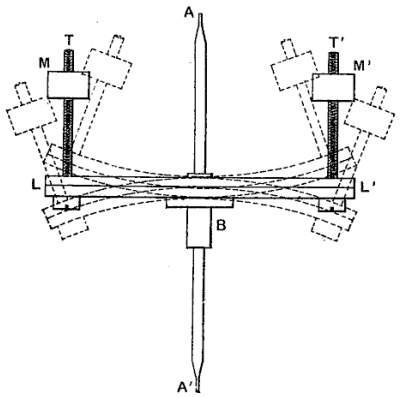
La longueur de la lame étant invariable, on changeait la valeur de l'effet des masses de compensation en vissant ou dévissant les masses sur les tiges taraudées.

(1) Les premiers balanciers compensateurs qui ont été exécutés en France étaient conformes au dessin ci-dessus.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

2° *Lames placées dans un plan perpendiculaire à l'axe du balancier.* — La position 1 (*fig.* 4) représente le balancier à la température moyenne.

Fig. 4.



Soient :

AA l'axe du balancier;
L la lame bimétallique fixée perpendiculairement à l'axe sur l'assiette **B**;
T, T' les tiges taraudées fixées aux extrémités de la lame **L**;
M, M' les masses de compensation vissées sur les tiges **TT**.

Le balancier est représenté à la température moyenne.

La position 2 le représente pour une élévation de température, et la position 3 pour un abaissement.

L'observation de ces deux états du balancier fait voir que la valeur de l'effet des masses **M, M'** dépend de leur position sur les tiges taraudées **T, T'**, car plus les masses seront dévissées ou éloignées des lames, plus le mouvement des masses sera grand (1).

Ce que nous avons exposé dans la première Partie suffira pour mesurer l'effet des masses de compensation dans la disposition que nous présentons.

Une barrette placée à angle droit de la lame porte les vis réglantes.

---

(1) Cette disposition des lames bimétalliques a été inventée par Honoré Pons, horloger, de Saint-Nicolas-d'Aliermont. *Voir* un Mémoire inséré dans le *Bulletin de la Société d'encouragement,* octobre 1829.

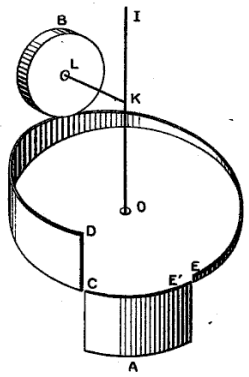
Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

L'HEURE PERPÉTUELLE PAR LA MARÉE,

PAR

M. L. POULTIER.

Le moteur indiqué ci-contre est susceptible de prendre diverses formes, selon l'emploi auquel on le destine. La forme la mieux applicable à l'horlogerie est celle du moteur à deux roues, à deux pentes fixes et jumelles et à deux pentes mobiles et jumelles, avec ou sans emploi d'un ressort pressant sur l'axe des roues, afin de réduire les dimensions de l'appareil. Il n'est pas décrit ici.



Le dessin du moteur à une roue étant plus simple, nous l'employons pour notre démonstration.

PREMIER MOYEN. — *Par un poids flotteur.*

Soit une horloge de grandes dimensions installée au sommet d'un édifice situé, par exemple, comme l'hôpital maritime, bien connu, de Berck-sur-Mer.

La roue B tourne autour d'un axe horizontal LK, lequel commande un arbre vertical IO placé au centre de la circonférence. *L'axe* IO *détermine le mouvement de l'horloge.* La roue B ne doit parcourir DEC qu'une seule fois pendant la durée

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

d'une marée. Dès que la roue B se trouve sur l'inclinaison CE′ de la partie mobile A, un levier soulève cette dernière et la roue B passe sur la pente fixe DE. Elle ne doit jamais toucher la perpendiculaire DC. Le levier supporte d'un côté la partie A et de l'autre une chaîne tenant un flotteur renfermé dans un cylindre enfoui à une profondeur moyenne entre les niveaux extrêmes de la mer. L'eau pénètre dans le cylindre au moyen d'un tuyau adapté à sa base. Avec le flux le poids se relève dans le cylindre. Avec le reflux il vient reposer sur le fond de ce même cylindre. Il en résulte que A monte avec le reflux et baisse avec le flux.

DEUXIÈME MOYEN. — *Par des vases communicants.*

Ce moyen paraîtra, sans doute, plus avantageux que le premier pour des appareils d'horlogerie de moindres dimensions et situés à des distances et hauteurs plus grandes.

Deux vases communicants contiennent de l'eau alcoolisée (ou du mercure); le premier est couvert; un tuyau se dirige de la couverture à un récipient enfoui dans le sol, une sorte de cavité d'une contenance à déterminer. Au moment du flux, l'eau, d'un port par exemple, s'introduit dans cette cavité et comprime l'air qu'elle contient, lequel refoule l'eau alcoolisée dans le deuxième vase. Ce dernier contient un piston-flotteur sur lequel repose la partie A. Ceci étant établi, le mouvement de la roue B se produit comme au premier moyen.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

APPAREIL

POUR LA

CONSTRUCTION DES COURBES TERMINALES DES SPIRAUX,

PAR

M. CH.-ED. GUILLAUME.

Les courbes terminales des spiraux qui, conformément à l'admirable théorie développée par Phillips dans son célèbre Mémoire sur le spiral réglant, assurent l'isochronisme des oscillations d'un balancier, sont, comme on sait, en nombre infini; il faut donc, pour les déterminer complètement, leur imposer des conditions supplémentaires, que l'on fixe, en général, de manière à rendre ces courbes aisément réalisables, et à les adapter le mieux possible aux dispositions adoptées pour les échappements. Jusqu'ici, ces courbes ont été déterminées par des méthodes graphiques, et, si l'on en excepte une intéressante tentative faite par M. James pour leur vérification par un procédé mécanique, on s'astreint encore, pour déterminer les courbes des types nouveaux, à un travail long et fastidieux de retouches successives, contrôlées par des calculs graphiques.

Mais on peut procéder beaucoup plus rapidement à la détermination de ces courbes à l'aide de l'appareil que je vais décrire, et qui permet de les construire mécaniquement avec une extrême facilité.

Je rappellerai d'abord que les conditions indiquées par Phillips sont les suivantes :

1° Le centre de gravité d'une courbe terminale doit être situé sur le rayon perpendiculaire à celui qui passe par son origine.

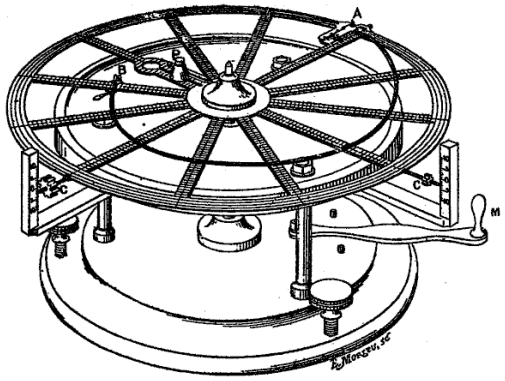
2° Il doit être situé à une distance de l'axe du spiral égale à $\frac{\rho_0^2}{l}$, ρ_0 étant le rayon du spiral au repos, l la longueur de la courbe terminale entre son origine et son encastrement à la virole ou au piton.

Le problème de la détermination d'une courbe de Phillips se résume donc dans le tracé d'une ligne quelconque ayant son centre de gravité en un point déterminé, son origine sur le rayon extérieur, et son autre extrémité en un point fixe, généralement intérieur à la circonférence occupée par le spiral.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Matérialisons une courbe en la représentant par un fil métallique flexible de densité linéaire constante; fixons ses extrémités aux deux points imposés par les données du problème, et contournons le fil jusqu'à ce que son centre de gravité réel occupe la position indiquée par la condition de Phillips; nous aurons, dans la forme prise par le fil, une courbe terminale théorique.

Voici comment on peut procéder en pratique : Un disque évidé (voir *fig.* 1), dont



les bras portent des coordonnées polaires, est monté sur une pointe fixe située très peu au-dessus de son centre de gravité, de sorte que le disque puisse effectuer, sur cette pointe, des oscillations stables à la manière d'une balance. Ce disque est muni de deux pinces A, B, l'une sur le rayon extérieur, l'autre mobile sur l'un ou l'autre des bras, et de deux contrepoids, C, C, destinés à assurer son équilibre. Il repose sur un socle de fonte percé en son centre d'un canal vertical dans lequel passe une tige d'acier terminée par une cuvette, que l'on peut soulever ou abaisser au moyen de la manette M, de manière à soulever le disque sur sa pointe, ou à le remettre au repos sur le socle. Sur un rayon perpendiculaire à celui qui passe par la pince extérieure, le disque porte une coulisse dans laquelle on peut introduire un poids P dont la position est indiquée par une échelle.

Pour déterminer une courbe de Phillips, il convient d'abord de choisir un fil métallique bien homogène et souple, comme, par exemple, les fils fusibles employés pour la sécurité des lignes électriques. On mesure et l'on pèse le fil ainsi choisi, et l'on détermine, par la formule de Phillips, la position que doit occuper son centre de gravité par rapport au centre du spiral dont il est censé faire partie. On met le disque en équilibre après avoir fixé les pinces dans la position qu'elles doivent occuper; on place le poids P dans une position telle que son moment statique par rapport au centre du disque soit égal à celui que la formule donne pour le fil. On insère les extrémités du fil dans les pinces, et l'on soulève le disque pour constater le défaut d'équilibre. On repose le disque, on retouche la courbe, on vérifie l'équilibre, et ainsi de suite jusqu'à ce que le disque, soulevé sur sa

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

pointe, reste sensiblement horizontal. Il suffit alors de relever la courbe, soit photographiquement, soit en utilisant les coordonnées tracées sur le disque, et de la réduire par un procédé quelconque pour pouvoir la reporter ensuite sur un spiral.

Lorsque j'eus pour la première fois l'idée de cet appareil, je pensais seulement qu'il pourrait avoir une certaine utilité comme instrument de démonstration, destiné à faire comprendre plus aisément aux élèves des écoles d'horlogerie le principe, assez ardu pour la plupart d'entre eux, de la construction des courbes de Phillips; mais je ne croyais pas que cet appareil pût être assez délicat pour rendre de réels services dans la détermination pratique des courbes. C'est donc un simple appareil scolaire dont je communiquai le croquis à mon ami M. J. Pettavel, Directeur de l'École d'horlogerie et de mécanique de Fleurier, en lui demandant de s'y intéresser. M. Pettavel se mit alors à en étudier les détails de construction avec un si grand soin, et exécuta ensuite l'appareil avec une perfection telle qu'il en a fait un véritable outil de précision permettant certainement de déterminer les éléments d'une courbe de Phillips avec la même exactitude que celle que peut donner le meilleur dessin.

Le grand avantage de cet appareil est l'extrême rapidité avec laquelle une courbe d'un type nouveau peut être exécutée. Dans le procédé graphique, c'est lorsque la courbe de départ a été tracée de sentiment que commence le véritable travail, rarement inférieur à plusieurs heures. Dans l'emploi de notre appareil, on peut dire que, lorsque la courbe est fixée sur le disque, le travail est terminé; en effet, avec un peu de pratique, les retouches successives, immédiatement contrôlées par une vérification de l'équilibre du disque, prennent à peine deux minutes d'un travail qui n'a rien de pénible.

Il a été réalisé jusqu'ici deux exemplaires de notre appareil; l'un appartient à l'École d'horlogerie de Fleurier, l'autre a été commandé pour le Conservatoire des Arts et Métiers par M. le colonel Laussedat; tous deux ont été exécutés à l'École de Fleurier.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

SUR LA DISTRIBUTION DE L'HEURE CIVILE,

PAR

M. A. FAVERGER.

L'emploi des courants électriques de faible intensité, qui a pris en peu d'années une immense importance en Télégraphie, en Téléphonie, dans la distribution des signaux, est loin d'avoir conquis la place qui lui reviendrait dans la distribution de l'heure. Il est intéressant de rechercher le pourquoi de cette infériorité. Cette dernière ne peut guère être expliquée en disant que la méthode généralement adoptée dans les villes pour maintenir à l'heure les horloges publiques et particulières est tellement satisfaisante, que l'on ne doive pas sentir le besoin d'un système perfectionné, car, à part quelques honorables mais rares exceptions, on en est presque partout resté au procédé rudimentaire qui consiste à charger une ou plusieurs personnes du soin de remettre à l'heure, à la main et individuellement, les horloges dont elles ont reçu la surveillance. Cette intervention de la main de l'homme se produit ainsi lorsque l'écart des aiguilles dépasse certaines limites, que la conscience du surveillant, ou la qualité des horloges, ou encore la connaissance plus ou moins approximative du temps exact ne contribuent pas à tenir, du plus au moins, très serrées!

Elle ne peut pas davantage s'expliquer, cette infériorité, par le fait que chacun ayant sa montre en poche porte l'heure avec lui; car cette heure n'est utile que si elle est juste, et elle n'est juste, d'une manière certaine et continue, que si elle peut être comparée, aussi souvent que cela est nécessaire, avec l'heure d'horloges publiques impeccables.

Enfin, on ne peut pas prétendre que l'électricité soit incapable de donner une solution parfaite du problème de la répartition de l'heure exacte, car toute la Télégraphie nous donnerait un démenti.

A quoi donc attribuer l'insuccès relatif des applications de l'électricité à l'horlogerie?

La réponse est difficile. Les causes que nous cherchons à saisir sont sans doute multiples. Je crois qu'elles peuvent être ramenées aux trois suivantes :

1° Difficultés techniques considérables résultant de la nécessité où l'on est de pousser l'automaticité plus loin que dans n'importe quel autre domaine de l'Electrotechnique ou même de la Mécanique.

En effet, un moteur à vapeur, une machine dynamo-électrique, un appareil télégraphique, une montre de poche même, ont toujours à côté d'eux un ami complaisant, chargé de surveiller et de corriger aussitôt leurs moindres défaillances.

Un cadran public faisant partie d'un réseau d'heure unifiée ne jouit point d'un

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

pareil privilège; il est continuellement sous le contrôle jaloux et parfois malveillant d'un public exigeant, qui ignore sa constitution intérieure et les nombreux dérangements auxquels il est exposé, et ne veut savoir de lui qu'une chose : c'est qu'il fasse son devoir.

2° Insuffisance d'un grand nombre des techniciens qui se sont occupés et s'occupent encore d'un problème aussi complexe, et, par suite, discrédit de l'horlogerie électrique.

3° Enfin, refus par le public intéressé de mettre aux services rendus par les installations d'heure unifiée un prix en rapport avec les dépenses (d'ailleurs relativement minimes) de premier établissement et d'entretien qu'il faudrait cependant faire pour assurer une régularité de service absolue.

En fait, les trois causes d'insuccès que je viens de mentionner s'enchaînent et découlent les unes des autres, de manière à constituer un véritable cercle vicieux : pour installer et entretenir convenablement un système d'heure unifiée, il faut de l'argent; pour obtenir cet argent du public, il faut qu'il ait confiance et apprécie à leur valeur les services qu'on lui offre. Mais précisément, faute d'argent, les services offerts sont d'une qualité douteuse..., et ainsi de suite.

Il est vrai que ce cercle vicieux n'est pas spécial aux installations qui nous occupent ici, et qu'on le retrouve nécessairement à l'origine de toutes les nouvelles découvertes. Seulement chez la plupart de celles-ci, il est venu un moment où le cercle a pu être rompu, grâce à ceci que les intéressés, ayant reconnu la grande valeur d'avenir de l'innovation proposée, lui ont fait crédit pendant un temps, lui ont fait l'avance des fonds nécessaires à sa mise en valeur définitive; et alors, cette avance même ayant servi de base au calcul du prix des services rendus, ce prix a été, dans la suite, accepté et payé sans difficulté.

Il faut aussi se rappeler que des découvertes telles que la Télégraphie, la Téléphonie, le transport de l'énergie, n'ont pas été des inventions apportant de simples perfectionnements à des organismes déjà existants, mais bien des créations entièrement nouvelles, révolutionnant en peu d'années tout notre système économique et social. De là l'extrême facilité avec laquelle le public a accepté de payer, dès le début, ce qu'il fallait pour assurer une organisation rationnelle et satisfaisante de ces nouveaux services; n'ayant d'ailleurs aucun point de comparaison antérieur pour apprécier, à son seul point de vue de consommateur, la valeur qu'il fallait leur attribuer, cette valeur a été fixée par les producteurs de telle façon que la rémunération de leur travail et de leurs capitaux fût largement assurée.

Serait-ce donc qu'en réalité nous n'avons pas encore éprouvé le besoin impérieux, absolu, j'allais dire collectif, d'une heure exacte, uniforme et régulièrement distribuée?

Voilà, dira-t-on, une question qui frise l'impertinence, lorsqu'elle s'adresse au public affairé et toujours pressé de la fin du XIX^e^ siècle, qui semble avoir fait sien définitivement le célèbre adage : *Le temps c'est de l'argent!*

Mais il est temps de passer à un ordre de considérations plus pratiques, les faits étant pour nous plus importants que les causes.

Je crois que l'on peut, sans être taxé d'exagération ou de prévention, poser en fait les points suivants :

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

1° L'état actuel de la distribution de l'heure civile exacte est, en général, des plus défectueuses et hors de toute proportion avec les exigences de la vie moderne.

2° A cet état défectueux il est urgent de substituer un état amélioré comportant une exactitude et une universalité telles que l'on puisse dire que l'heure civile, *à une seconde près*, est à la disposition immédiate et constante de tous.

3° L'agent le mieux approprié à cette distribution de l'heure exacte est l'électricité.

4° Parmi les systèmes électriques de distribution de l'heure actuellement connus et expérimentés, il en est qui peuvent donner une solution excellente et complète du problème, à condition que l'on veuille organiser l'installation et l'entretien de ce service d'une manière rationnelle et méthodique rompant délibérément avec l'incohérence, l'anarchie et la routine qui ont régné jusqu'ici.

Reprenons successivement ces quatre thèses.

1. *État défectueux dans lequel nous végétons en matière de répartition de l'heure.* — Ce premier point ne comporte pas de longs développements; il n'est pas besoin de faire de longues et fréquentes courses dans Paris, par exemple, pour s'apercevoir que de nombreux cadrans, grands et petits, publics et privés, se présentent à l'œil du passant sans que celui-ci puisse dire lequel d'entre eux est le plus ou le moins menteur. Je ne dis pas qu'ils sont tous menteurs, mais il suffit que quelques-uns d'entre eux le soient pour que l'on suspecte la sincérité de tous; car la sécurité du public en fait de connaissance de l'heure n'est complète que lorsque tous les cadrans qu'il peut consulter lui indiquent à l'unanimité la même heure au même instant.

Que la situation soit très différente dans d'autres grandes villes que Paris, c'est ce que personne ne prétendra, aussi longtemps que le droit à l'existence des mauvaises horloges indiquant constamment une heure fausse sera égal à celui des bonnes horloges, ou du moins aussi longtemps que le public n'aura aucun moyen de distinguer les premières des secondes.

2. *Urgence des mesures à prendre pour arriver à une situation meilleure.* — La gravité des conséquences malheureuses d'une erreur d'heure s'accroît à mesure qu'augmente l'intensité du trafic des voies ferrées et la rapidité de marche des trains; si cette rapidité, comme il est permis de le prévoir, arrive à atteindre, grâce à la traction électrique, 100^{km}, 150^{km} et même 200^{km} à l'heure, soit 28^{m}, 42^{m} et 55^{m} à la seconde, il est évident que la connaissance exacte et continue du temps de la part de tous les employés chargés de diriger ces masses en mouvement, et de la part des voyageurs qui leur confieront leurs vies, devient une impérieuse nécessité.

L'exploitation rationnelle des tramways électriques et autres dans leurs villes et leurs banlieues, où les voitures se succèdent à cinq et même trois minutes d'intervalle, ne peut avoir lieu que si les conducteurs ont le moyen de régler leur allure d'après des cadrans unifiés, répartis en nombre suffisant le long du parcours qu'ils sont appelés à desservir.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

3. *L'agent le mieux approprié à une distribution d'heure est l'électricité.* — Ici, quelques développements seront utiles. On peut classer comme suit les divers systèmes appliqués jusqu'ici à la solidarisation d'un certain nombre de cadrans.

a. Systèmes non automatiques dans lesquels le lien entre les cadrans à unifier est un homme qui transporte avec lui l'heure vraie, ou soi-disant telle, et rectifie à intervalles plus ou moins réguliers ou opportuns la marche des horloges dont il a la surveillance.

b. Systèmes mécaniques où ce lien consiste en axes, roues dentées, ou tels autres organes rigides de transmission appropriés au but à atteindre.

c. Systèmes pneumatiques où ce lien est l'air comprimé ou un gaz quelconque, susceptible d'être dirigé, au moyen de longs tuyaux, sur les endroits où se trouvent les divers cadrans à solidariser.

d. Systèmes hydrauliques où l'on emploie l'eau ou un liquide quelconque canalisé également dans de longs tuyaux.

e. Enfin, *systèmes électriques* dans lesquels l'agent d'unification, le courant électrique, est immatériel et circule dans de simples fils.

La valeur comparative de ces divers systèmes peut être rapidement établie comme suit :

Le système non automatique, le plus primitif, mais encore le plus répandu, est la cause directe de l'anarchie horaire dont il s'agit de sortir.

Les systèmes mécaniques ne peuvent être employés que là où les distances entre les cadrans à solidariser ne dépassent pas les dimensions d'un édifice ou tout au plus d'un bloc de maisons. Ils sont dès lors inapplicables partout où il s'agit de grandes distances.

Les systèmes pneumatiques ont été appliqués sur une assez grande échelle dans différentes grandes villes, notamment à Paris. Ils présentent, selon moi, les inconvénients suivants :

a. Ils ne peuvent pas distribuer l'heure avec l'exactitude que réclame notre époque de télégraphes et de chemins de fer, la transmission des pulsations pneumatiques étant loin d'être instantanée et régulière.

b. Une canalisation par tuyaux hermétiques est coûteuse d'installation et difficile d'entretien; elle manque en outre de souplesse et rend à peu près impossible l'extension indéfinie de la zone d'uniformisation de l'heure.

c. Le rendement industriel est mauvais, c'est-à-dire que, pour effectuer le travail très minime qui consiste à mouvoir les aiguilles équilibrées des cadrans secondaires, on est obligé d'installer de véritables usines centrales analogues à celles desservant des distributions de force et de lumière.

Les systèmes hydrauliques présentent à peu près les mêmes inconvénients que les pneumatiques, même dans le cas où ils sont combinés avec ces derniers pour constituer ce qu'on a appelé les *systèmes hydropneumatiques.*

Les systèmes électriques sont les seuls qui puissent donner une solution complète du problème. Leurs principaux avantages peuvent en effet s'énumérer comme suit :

a. Instantanéité d'action rendant possible une solidarisation des cadrans à une

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

seconde et même à une fraction de seconde près, et permettant d'étendre indéfiniment la zone d'unification horaire.

b. Les fils métalliques servant de chemin au courant sont d'une installation facile et relativement peu coûteuse, et leur souplesse ne laisse rien à désirer.

c. Les réservoirs de la force électrique, consistant en piles primaires ou secondaires, sont inertes; ils sont en conséquence d'une surveillance facile.

d. Le rendement d'une bonne installation d'heure unifiée par l'électricité est tel qu'avec un courant d'une valeur équivalente à un cheval-vapeur on peut actionner sûrement jusqu'à cent vingt mille cadrans de toutes grandeurs.

e. Les applications de l'électricité dans tous les domaines ont fait de si énormes progrès pendant ces dernières années, les conditions de pose et de bon fonctionnement d'un réseau de fils et de récepteurs électriques sont tellement connues et expérimentées dans tous leurs détails, que certainement aucune difficulté technique insurmontable ne pourrait s'opposer à l'extension indéfinie d'un système d'unification purement électrique de l'heure.

f. Enfin, à supposer que, pour diverses raisons, certains centres déjà pourvus d'un réseau partiel d'unification pneumatique ou hydraulique dussent continuer à subsister tels quels, ce sera cependant l'électricité qui sera évidemment choisie pour établir à distance le lien entre ce réseau partiel et le centre primaire ou secondaire auquel il y aurait plus tard utilité de le relier.

4° *Parmi les systèmes électriques expérimentés, il en est qui donnent une solution complète et satisfaisante du problème de l'unification de l'heure.* — Ici, je m'abstiendrai d'entrer dans de longs développements. Ceux-ci seraient déplacés pour plusieurs raisons, dont la principale est que, le Congrès ne pouvant sans doute prendre aucune décision préjugeant en faveur de tel ou tel système électrique, il serait inutile d'exposer ici les mérites de l'un ou de l'autre d'entre eux.

D'ailleurs le temps, même alors qu'on s'occupe de lui et de ses intérêts, s'écoule et disparaît, et le moment est venu de formuler les conclusions de la présente étude.

Ces conclusions, je ne me sens ni la compétence ni l'autorité nécessaires pour leur donner la forme de propositions précises à soumettre à votre adoption.

Je me bornerai bien plutôt à poser devant vous les deux questions suivantes auxquelles il vous plaira peut-être d'accorder les honneurs d'une courte discussion à la suite de laquelle des résolutions utiles pourront intervenir de la part du Congrès :

Première question. — L'état actuel de l'uniformisation de l'heure civile étant en fait au-dessous des exigences modernes, ne serait-il pas utile et désirable que le Congrès international de Chronométrie de 1900 émît le vœu qu'une étude rationnelle et comparative des moyens à appliquer pour améliorer cette situation fût entreprise sans tarder?

Deuxième question. — Cette étude ne pourrait-elle et même ne devrait-elle pas tout naturellement être confiée au Bureau international des Poids et Mesures, particulièrement bien placé, me semble-t-il, pour se livrer à une enquête

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

fructueuse à ce sujet, enquête dont les résultats feraient l'objet d'un rapport à présenter au prochain Congrès de Chronométrie?

Qu'il me soit permis de clore mon Travail par l'énoncé de quelques considérations destinées à développer l'idée contenue dans la seconde des deux questions ci-dessus.

Voici les raisons qui militent en faveur du choix que je propose de faire du Bureau des Poids et Mesures :

Cette institution est internationale, qualité précieuse, selon moi, pour assurer l'entière impartialité de l'enquête à entreprendre.

Cette enquête, d'ailleurs, rentre naturellement dans l'ordre des travaux dont s'est occupé jusqu'ici ce Bureau. En effet, des trois grandeurs fondamentales qui sont à la base du système coordonné des mesures des quantités physiques, à savoir celles de l'Espace, de la Masse et du Temps, la dernière seule, celle qui nous occupe, est restée en dehors des préoccupations immédiates du Bureau international des Poids et Mesures. Il me paraît qu'il y a là une regrettable lacune à combler.

Les travaux que je propose de confier à l'Institution que je viens de nommer devant avoir, pour le moment du moins et ainsi que je l'ai proposé, le caractère d'une simple enquête destinée à rassembler, à concentrer les résultats actuellement acquis en matière de distribution du temps, de telle manière qu'il soit ensuite possible aux intéressés d'en faire l'application méthodique et extensive dont on sent le besoin, ces travaux, dis-je, ayant un tel caractère, ne nécessiteraient, de la part des gouvernements subventionnant le Bureau, que des crédits relativement modestes affectés presque exclusivement à la rétribution d'un personnel très restreint.

A supposer même que, pour des raisons qui m'échappent, la Commission internationale qui est à la tête du Bureau des Poids et Mesures estime qu'elle ne peut pas charger ce dernier de l'enquête en question, on peut cependant espérer qu'elle déférera en partie au vœu émis par le Congrès de Chronométrie de 1900, en acceptant au moins d'étudier les moyens administratifs à employer pour créer l'organe (Section d'une institution existante ou Commission nouvelle) chargé de s'occuper des travaux relatifs à la mesure et à la distribution du temps civil.

Sans doute il existe des observatoires spécialement outillés en vue de ces travaux, et plusieurs d'entre nos collègues m'objecteront peut-être que c'est à l'un de ces établissements qu'il faudrait plutôt confier l'enquête préconisée.

Je ne verrais pas un inconvénient majeur à ce qu'il fût ainsi procédé; mais je crois cependant que le caractère international du Bureau des Poids et Mesures présenterait des garanties d'impartialité et peut-être aussi de succès final que l'on ne trouverait pas réunies ailleurs au même degré.

Encore une fois, je ne prétends pas avoir indiqué ici exactement et complètement ce qu'il y a à faire; j'appelle simplement l'attention du Congrès sur une lacune importante de notre système social et sur l'initiative heureuse que le Congrès pourrait prendre pour combler cette lacune.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

APPAREIL SÉMAPHORIQUE A SIGNAUX INSTANTANÉS

DIT *SIGNAL HORAIRE,*

POUR LA TRANSMISSION DE L'HEURE DANS LES PORTS.

SYSTÈME IMAGINÉ PAR MM. HANUSSE, INGÉNIEUR HYDROGRAPHE, ET G. BORREL, CONSTRUCTEUR,

PAR

M. G. BORREL.

Cet appareil se compose de quatre parties principales qui sont :

1° L'ossature métallique servant de cadre et de bâti-support;

2° La partie optique servant à la production des signaux;

3° La partie mécanique actionnant les organes servant aux signaux;

4° La partie électromagnétique provoquant les signaux suivant des périodes déterminées et variables à volonté.

1° *Ossature métallique.*

Ainsi que le représentent en élévation de face les deux figures du signal : *fermé* et *ouvert* (*fig.* 1 et 2), l'ossature servant de cadre et de support à l'appareil se compose :

1° De deux montants verticaux M, M′ formant caissons clôturés extérieurement par des portes à charnières fermant à crémone sur battements étanches;

2° D'un soubassement S formant également caisson et clôturé sur la face antérieure par une porte à charnières sur battement étanche;

3° Enfin, d'un chapeau C réunissant les deux montants verticaux à leur partie supérieure et coiffé d'une tôle légèrement cintrée formant larmier pour rejeter les eaux pluviales en dehors de l'appareil.

Tout cet ensemble est entièrement métallique et peut être exposé, suivant les applications, soit complètement à découvert au-dessus d'un édicule *ad hoc,* soit dans l'embrasure d'une baie pour signaux lumineux nocturnes.

Le montant M sert de logement aux organes électromagnétiques; le montant M′ reçoit les organes mécaniques dont l'origine peut être disposée en un point quelconque du soubassement S.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Les dimensions extérieures de l'appareil sont de $2^m,70$ de hauteur, $1^m,80$ de largeur et $0^m,21$ d'épaisseur.

La partie vide réservée aux organes du signal optique mesure 2^m de hauteur et $1^m,50$ de large, soit 3^{mq} de surface.

2° *Partie optique servant à la production des signaux.*

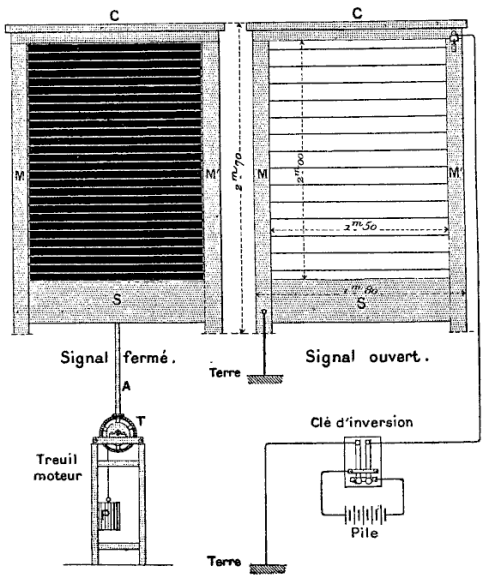
Cette partie est essentiellement composée d'un certain nombre de lames planes de faible épaisseur pouvant tourner chacune autour d'un axe horizontal accomplissant sa révolution en quatre périodes égales de 90° d'angle chacun.

La position de ces lames est réglée de telle façon qu'elles se présentent alternativement verticalement et horizontalement. Leurs dimensions sont proportionnées à celles du vide du cadre qu'elles remplissent.

Les deux formes de mouvement des lames correspondent donc :

1° Pour la position verticale, à l'apparence d'un écran peint en noir ou autre couleur, masquant le vide du cadre (*fig.* 1, signal fermé).

Fig. 1. Fig. 2.



2° Pour la position horizontale, à l'apparence du cadre vide (*fig.* 2, signal ouvert).

Les changements entre deux positions des lames s'effectuent en $\frac{1}{15}$ de seconde. condition réalisant la visibilité parfaite de signaux transmis de seconde en seconde,

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

3° *Partie mécanique actionnant les organes servant aux signaux.*

Les axes sur lesquels sont fixées les lames pivotent dans des paliers en bronze fixés dans les montants M, M′; les axes pénètrent dans l'intérieur de ces montants.

Dans le montant ou caisson M′, l'extrémité de ces axes est munie d'une roue d'engrenage conique engrenant avec un pignon fixé sur un arbre vertical de commande dont le prolongement serait en A.

Cet axe aboutit au treuil T comportant également un engrenage conique, le tout actionné par la pesanteur d'un poids moteur P.

Une disposition particulière de cette transmission permet à chaque lame une fonction amortie, afin d'éviter l'emploi d'un poids trop lourd dont l'effet brusque pourrait causer la détérioration des organes qu'il actionne.

La hauteur de chute du poids moteur est illimitée, et le mouflage de son câble de suspension sera approprié suivant les emplacements et les applications.

4° *Partie électromagnétique provoquant les signaux suivant des périodes déterminées et variables à volonté.*

Dans le montant ou caisson M sont disposés les mécanismes électromagnétiques au nombre de deux, correspondant chacun à l'une des fonctions ou positions des lames; c'est-à-dire que le même mécanisme produit toujours la position verticale des lames, tandis que le second produit toujours la position horizontale.

Chacun de ces mécanismes est commandé par l'armature d'un électro-aimant polarisé. Les deux électro-aimants sont disposés en tension afin de fonctionner sous l'influence de courants inversés, ainsi que l'indique la clef représentée.

Cette clef, qui est du modèle classique, peut être remplacée, selon les circonstances ou les applications, par un commutateur inverseur actionné par une pendule astronomique pour les périodes déterminées.

La disposition représentée du circuit prévoit le retour du courant par la terre à titre de renseignement simple.

Fonctionnement de l'appareil.

On comprend facilement, d'après ce qui précède, le fonctionnement de l'appareil dont le but principal est de transmettre l'heure dans les ports, pour le réglage des chronomètres des navires.

La différence existant entre cet appareil et les ballons généralement en usage réside dans l'avantage d'une plus grande visibilité; dans la facilité de notation des comparaisons par la continuité du signal pendant un certain temps; enfin dans l'appréciation plus exacte du moment où se produit le signal.

En effet, contrairement à l'usage, le maximum de vitesse de rotation des lames est atteint au démarrage, et la vitesse diminue au moment de l'arrêt, circonstance recherchée pour obtenir un fonctionnement aussi rapide que possible au début et ne pas provoquer de chocs brusques capables de détériorer les organes au moment de l'arrêt.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Dans ces conditions, quel que soit le mode d'émission du courant, soit par une pendule astronomique, soit à la main par clef d'inversion, quelques minutes avant l'heure fixée pour le signal d'heure, quelques évolutions rapides des lames avertiront de l'approche du moment.

Ainsi que dans l'envoi télégraphique de l'heure, le premier signal sera fait à la soixantième seconde de l'heure convenue et sera continué de seconde en seconde jusqu'à la dixième. Une interruption aura lieu jusqu'à la vingtième, d'où le signal sera continué jusqu'à la trentième, interrompu de nouveau jusqu'à la quarantième et repris jusqu'à la cinquantième.

Dans l'espace d'une minute il y aura donc eu trente-trois signaux donnés en trois reprises différentes permettant d'établir de bonnes comparaisons. Tout autre mode peut être adopté.

A la suite d'expériences nombreuses faites entre le dépôt de la Marine et les tours de Notre-Dame, le retard dû à la transmission a été trouvé de $0^s,25$.

Ce retard est sensiblement indépendant de l'intensité du courant.

Dans ces expériences, l'erreur moyenne des observations isolées a été de $0^s,06$.

Quoique construit spécialement pour donner les *signaux horaires,* cet appareil peut servir pour la télégraphie optique diurne et nocturne.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

VITESSE ANGULAIRE DU BALANCIER,

ENGRENAGES A BASCULE,

RAYON DE GIRATION D'UN BALANCIER CIRCULAIRE,

VARIATIONS DE MARCHE DES CHRONOMÈTRES,

PAR

M. E. ANTOINE.

La formule

$$\Omega = \alpha \sqrt{\frac{M}{A}}$$

de la vitesse angulaire du balancier ne rend pas compte des variations de l'amplitude.

On peut la tirer de la comparaison du moment de la force à deux balanciers de même moment d'inertie, mais de dimensions différentes.

Prenons, pour fixer les idées, un balancier pesant $0^{gr},5$ et d'un rayon de giration de 10^{mm}.

Son moment d'inertie sera

$$A = \frac{0,5 \times 10^2}{9808,8} = 0,005\,09$$

et le moment de sa force

$$pr = 0,5 \times 10 = 5.$$

Réduisons le poids du balancier à $0^{gr},25$ et modifions la masse pour conserver même moment d'inertie; on aura, en appelant r' le nouveau rayon de giration

$$A = \frac{0,25}{9808,8} \times r'^2 = 0,005\,09;$$

d'où

$$r'^2 = 199,73$$

et

$$r' = 14,14,$$

soit, pour le moment de la force du nouveau balancier,

$$p'r' = 0,25 \times 1414 = 3,535.$$

Le moment de la force du balancier a donc varié dans le rapport

$$5 : 3,535.$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Le moment d'inertie du balancier ne variant pas, le moment **M** d'élasticité du spiral et le rapport $\sqrt{\frac{M}{A}}$ dans la formule de la vitesse angulaire du balancier ne variera lui-même pas.

Les égalités $pr = M\alpha$ et $p'r' = M\alpha'$ peuvent s'écrire

$$\frac{pr}{p'r'} = \frac{M\alpha}{M\alpha'} = \frac{\alpha}{\alpha'};$$

d'où

$$\frac{p'r'}{pr} \times \alpha = \frac{3,535}{5}\alpha$$

et l'on a, pour la nouvelle vitesse angulaire, en supprimant le terme commun **M**,

$$\Omega' = \frac{3,535}{5}\Omega.$$

La vitesse *linéaire* dans les deux cas peut s'écrire

$$ar = v,$$
$$a'r' = v'.$$

Comme vérification

$$5x \times 10 = 50x,$$
$$3,535x \times 14,14 = 50x.$$

La loi s'énonce donc :

La vitesse angulaire d'un balancier, toutes choses égales, varie en raison inverse du rayon de giration ou en raison directe de la racine carrée du rapport des masses.

D'où cette déduction importante : *Sous des modifications au balancier qui laissent constant son mouvement d'inertie, la vitesse angulaire est invariable.*

Applications. — Une montre d'un balancier de $0^{gr},5$ et de rayon de giration de 10^{mm} oscille à 270°, et l'on se propose une oscillation de 300°.

On écrit directement

$$\frac{270}{300} = \frac{r}{10};$$

d'où

$$r = 9$$

et pour la nouvelle masse

$$9^2 x = 50,$$
$$x = 0,617.$$

Par là on dispose de l'amplitude pour un type donné de garde-temps.

Il n'a point été tenu compte de la variation d'amplitude résultant d'un excès de frottement, mais, les traités théoriques donnant tous la formule de cette variation, nous y renvoyons.

La loi des variations de l'amplitude ainsi exprimée, on peut considérer comme résolu le problème de la détermination du maximum de puissance vive ou de puissance réglante pour un balancier d'un moment d'inertie donné.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Le problème des engrenages dits *à bascule* employés dans certains mécanismes de remontoir à pendant n'avait jusqu'à ce jour reçu aucune solution rationnelle.

Il se réduit à ceci : *Déterminer le lieu géométrique du centre d'une circonférence tangente commune à deux circonférences de rayons différents.*

Ce lieu est une branche d'hyperbole.

L'entrée en prise et le dégagement ayant, l'une et l'autre, lieu à la tangente, on évite le cisaillement qui donne une menée dure.

Il y a lieu de remarquer que, dans la disposition habituelle des montres, l'espace manque pour deux roues fixes juxtaposées; il faut de toute nécessité les placer sur deux plans parallèles, sauf à donner à la roue qui se déplace une épaisseur suffisante pour engrener aux deux roues fixes.

La très laborieuse et incertaine détermination du rayon de giration d'un balancier circulaire peut être obtenue directement. Il suffit de prendre exactement le moment M d'élasticité du spiral et le poids P d'un balancier d'une montre réglée en temps moyen.

Le rayon de giration s'obtient alors de la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{A}{M}};$$

d'où

$$\frac{T^2 M}{\pi^2} = A = \frac{pr^2}{g}$$

et enfin

$$r = \sqrt{\frac{T^2 M g}{\pi^2 p}}.$$

Les variations de marche imputables aux actions extérieures se rapportant manifestement à la loi des percussions, il est impossible, à moins de les identifier aux battements des instruments, de les synchroniser en termes de métier, de leur donner une détermination mathématique; elles doivent, par suite, être, non calculées, mais exprimées matériellement, c'est-à-dire au moyen de graphiques. Comme ces altérations de marche sont de beaucoup les plus importantes, il en découle la convenance d'employer, en navigation, des graphiques de préférence aux formules de marche. On se gardera de conclure de là qu'il ne faut pas employer le calcul à la détermination des constantes spécifiques spéciales à chaque instrument.

Ce qui rend encore précaire l'emploi des formules en mer, c'est l'inégale constance des coefficients employés dans ces formules et dont seulement deux, la compensation en ce qui concerne son terme du premier degré, et l'état absolu en regard du temps moyen, une fois bien déterminés, peuvent être considérés comme inaltérables.

En ce qui concerne l'erreur secondaire de compensation, il convient d'observer qu'elle varie avec l'amplitude. Celle-ci ne la fait sans doute pas naître, mais l'influence. Ce point, aujourd'hui bien acquis en pratique, rencontre encore de l'incrédulité chez ceux qui ne s'occupent que de théorie; aussi doit-il être l'objet d'un nouvel examen mathématique. [Comment d'ailleurs expliquer sans cela l'erreur

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

secondaire aux balanciers circulaires coupés se déformant sous l'influence de la force centrifuge, alors que cette erreur ne se trouve jamais (Villarceau) à des balanciers où la dilatation s'exerce librement?]

Deux causes d'effet identique s'ajoutent aux effets troublants des actions extérieures; ce sont : la faible amplitude des instruments et le nombre réduit (14400) des oscillations qu'on leur fait battre.

Ces quantités, rapportées à une amplitude moyenne de 270° et à 18000 oscillations à l'heure, donnent pour le rapport des puissances vives 8:15. Il y aurait donc intérêt, toutes choses égales, à augmenter, à ce point de vue, la puissance vive au balancier des instruments. Une objection se présente : la compensation, qui serait moins parfaite. Mais ce serait en même temps mettre en cause le balancier circulaire à lames bimétalliques et s'ouvrant sous l'action de la force centrifuge.

L'action de la force centrifuge produisant sur les instruments une avance moyenne de dix à onze secondes par marche diurne, les artistes se trouvent conduits à altérer l'isochronisme théorique et à produire l'isochronisme pratique sous un retard, quant à la marche moyenne verticale, d'autant.

Le règlement tolère six secondes entre deux positions verticales comparées à 25° d'inclinaison, ce qui, pour 90°, donnerait $14^s,42$; ce serait déjà excessif. Il y a plus. Le règlement ne se préoccupe pas de la différence de la marche horizontale avec la marche moyenne verticale. Comme la suspension quitte l'horizontalité, cette différence toujours assez sensible, accrue de la différence entre deux marches verticales symétriques, prend une importance significative. Il y a donc lieu de se préoccuper d'un échappement ou d'un balancier, mais surtout d'un balancier qui, échappant aux actions déformatrices de la force centrifuge sur les lames bimétalliques, permette de revenir à une pratique plus saine, à l'emploi de spiraux rigoureusement théoriques.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

RÉPARTITEUR ANGULAIRE

DE M. GUILLERMINET.

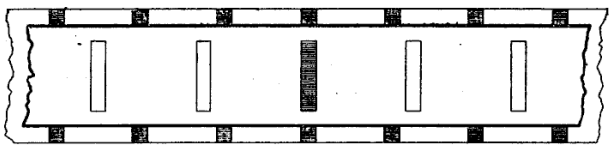
PAR

M. ROZÉ.

Le principe fondamental de l'invention de M. Guillerminet peut être exactement défini par la désignation de *vernier à guichets*.

Pour l'exposition, il convient de considérer d'abord une règle présentant des ouvertures ou guichets équidistants et une seconde règle portant des traits ou images, de même forme que les guichets, dont l'équidistance soit moindre que la partie pleine comprise entre deux guichets. La première règle est superposée à la

Fig 1.



seconde, de manière que l'un des traits ou images apparaisse exactement par l'un des guichets.

Par un déplacement de l'une des règles égal à la différence entre l'intervalle de deux guichets et celui de deux traits, l'apparition passe d'un guichet au voisin, dans un sens ou dans l'autre selon le sens du déplacement relatif des deux règles suivant leur direction. Le déplacement étant assez rapide, la sensation est pour l'observateur celle du passage d'un trait ou image unique du premier guichet au second : ainsi le déplacement réel de la règle inférieure, supposée seule mobile, apparaît amplifié dans le rapport de la différence des équidistances à l'intervalle de deux guichets. Si le déplacement réel était appliqué à la règle supérieure, l'amplification serait mesurée par le rapport de la différence des équidistances à l'intervalle de deux traits.

L'équidistance des traits pourrait au contraire être plus grande que l'intervalle des bords extérieurs de deux guichets. Dans l'un et l'autre cas le mouvement apparent est de même sens que le déplacement réel si celui-ci est appliqué à

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

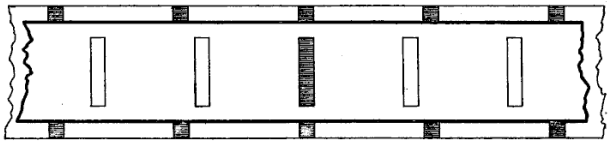
l'échelle de moindre équidistance, et de sens opposé dans le cas contraire; d'ailleurs le sens du mouvement apparent changeant avec celui du déplacement relatif des règles, on peut, pour simplifier, considérer l'échelle des guichets comme immobile, et le mouvement apparent est ainsi de même sens que le déplacement réel ou de sens contraire, selon que l'équidistance des traits ou images est moindre ou plus grande que celle des guichets.

Par une suite de déplacements successifs de même sens et d'intermittence appropriée, l'image passera, également dans un sens constant, de guichet en guichet.

Tel est le principe de l'invention dont M. Guillerminet poursuit et se réserve les applications scientifiques ou industrielles.

Il est à peine nécessaire d'observer que la qualification de *vernier à guichets*

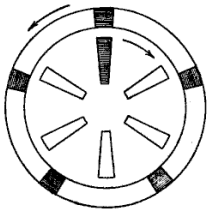
Fig. 2.



donnée ici comme caractéristique de l'invention n'implique en aucune manière qu'elle soit une conséquence plus ou moins directe de celle du vernier dont, d'ailleurs, le rôle est incompatible avec l'emploi des guichets imaginé par M. Guillerminet. Les inventions sont le fruit de l'ingéniosité appliquée à la satisfaction de besoins plus ou moins immédiats; elles naissent en toute indépendance d'une synthèse à édifier *a posteriori* en vue de diminuer l'effort d'assimilation ou d'établir une classification rationnelle.

En réalité, l'invention de M. Guillerminet se rapporte au mouvement circulaire ou de rotation : deux disques concentriques sont superposés; l'un est fixe, l'autre animé de déplacements angulaires régulièrement intermittents; par la combinaison

Fig. 3.



de guichets pratiqués dans le disque antérieur et d'images figurées sur le disque postérieur, il obtient un mouvement apparent d'amplitude amplifiée et d'une intermittence égale ou moindre, à période simple ou composée.

Les applications actuellement réalisées ressortissent à la subdivision du temps, et il reste à exposer ici sommairement quelques-unes d'entre elles.

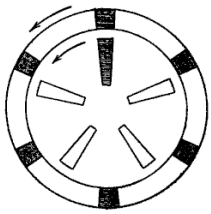
Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

I. Le disque postérieur est la roue d'échappement d'une montre ordinaire dont les bras, jouant le rôle de traits brillants, sont au nombre de six ; les déplacements, au nombre de trente par tour de la roue, ont pour période un cinquième de seconde. Le disque antérieur fixé au cadran est percé de cinq guichets équidistants.

Le mouvement apparent, de même sens que celui de la roue, est à période d'un cinquième de seconde et d'amplitude égale à un cinquième de tour.

II. Dans les mêmes conditions, si le nombre des bras est de cinq et le nombre des guichets de six, le mouvement apparent est de sens contraire à celui de la roue, de même période et d'amplitude égale à un sixième de tour; ainsi l'aiguille

Fig. 4.

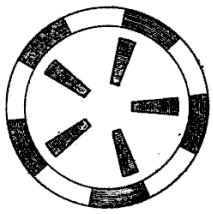


apparente fait une révolution en six cinquièmes de seconde.

Si la montre est disposée pour 21600 vibrations du système régulateur, au lieu de 18000 par heure, la période est d'un sixième de seconde et l'aiguille apparente fait une révolution en une seconde.

III. Le nombre des bras et celui des guichets étant de cinq, mais les premiers, c'est-à-dire les traits brillants, étant de largeur telle qu'ils apparaissent par le

Fig. 5.



guichets durant trois vibrations consécutives, leurs apparitions et leurs disparitions sont simultanées. Pour 21600 vibrations, chacune d'elles dure une demi-seconde. Pour 18000 vibrations, les bras et les guichets sont au nombre de six; les apparitions durent deux cinquièmes et les disparitions trois cinquièmes de seconde. La division du temps est ainsi figurée non plus par le mouvement d'une aiguille réelle ou

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

fictive, mais par l'illumination intermittente de l'ensemble des guichets, et le rythme dépend du nombre de vibrations.

IV. Le disque postérieur solidaire de la roue d'échappement porte un secteur brillant de 60° d'ouverture; le disque antérieur est à six guichets. L'apparition est

Fig. 6.

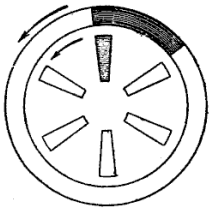
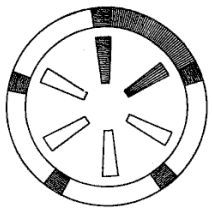
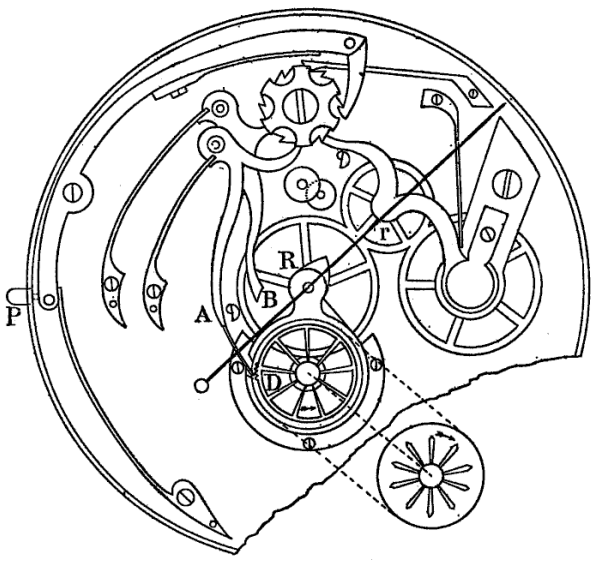


Fig. 7.



permanente au même guichet durant une seconde et passe successivement d'un guichet au suivant dans le sens du déplacement de la roue. La période est d'une

Fig. 8.



seconde et l'amplitude d'un sixième de tour.

Si le disque postérieur porte tout à la fois cinq traits d'une couleur et l'un des intervalles de deux d'entre eux teinté d'une autre couleur, les premiers donneront la sensation d'une aiguille battant le cinquième de seconde, comme dans la

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

première partie de II, et le second celle d'une autre aiguille avançant d'un sixième de tour à chaque seconde, en sens contraire de la première, de sorte que les rencontres apparentes auront lieu toutes les secondes. Le mouvement réel d'un tour en six secondes, mais à période d'un cinquième, peut encore être rendu perceptible simultanément avec les deux précédents.

V. *Application à un chronographe d'après M. Guillerminet.* — Le disque postérieur D, portant neuf traits brillants, engrène avec la roue de chronographe R par un pignon dont le diamètre est à celui de la roue dans le rapport 3 : 20; le disque antérieur porte dix guichets.

Ainsi, à côté de l'aiguille principale concentrique se trouve une aiguille fictive parcourant les dix divisions de son cadran en une seconde et rendant nettement perceptibles les lectures au dixième de seconde, à l'instant initial, pendant le mouvement et au moment de l'arrêt.

Trois actions successives sur la poussette P produisent trois effets distincts : par la première *r* cesse d'engrener avec R, tandis que l'extrémité du levier A s'engage dans l'une des 90 dents du contour du disque postérieur, de sorte que l'aiguille du chronographe et l'aiguille fictive battant le dixième de seconde s'arrêtent simultanément; par la deuxième action le levier A se relève, et en même temps celui B, agissant sur la came en cœur, produit la remise à zéro de l'aiguille du chronographe et du disque postérieur, c'est-à-dire de l'aiguille fictive au dixième de seconde; par la troisième action le levier B reprend sa position initiale et la roue *r* vient de nouveau actionner celle R et produire le mouvement des deux aiguilles.

Telles sont les principales applications déjà réalisées par M. Guillerminet en vue de la subdivision du temps. L'effet produit par chacune d'elles est à la fois saisissant et d'une séduction irrésistible; il fait pressentir des applications intéressantes à un tout autre point de vue, l'objet pouvant être de produire des transformations apparentes successives, considérées en elles-mêmes ou pour leur concomitance avec certains phénomènes, mais indépendamment de l'appréciation des intervalles de temps.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

MÉMOIRES

SUR

L'ISOCHRONISME DU SPIRAL CYLINDRIQUE,

PAR

M. E. CASPARI (1).

Les spiraux théoriques de Phillips réalisent l'isochronisme *statique* du balancier, en ce sens qu'ils produisent un moment proportionnel à l'angle d'écart de celui-ci. A l'état de mouvement, diverses perturbations interviennent pour rendre inégales les oscillations d'amplitudes différentes.

Ces perturbations, l'expérience indique qu'elles sont très petites. Il est donc permis d'examiner séparément chacune d'elles et d'admettre que la perturbation totale est égale à leur somme algébrique. L'effet de l'échappement a été traité par Yvon-Villarceau; nous allons examiner l'influence de la déformation du balancier par les forces d'inertie résultant de sa rotation, celle de l'inertie du spiral, et enfin celle des résistances passives : frottements et autres. Les résultats auxquels nous arrivons ne s'appliquent en toute rigueur qu'aux spiraux isochrones à l'état statique, notamment aux spiraux Phillips : mais les corrections qu'il faudrait leur appliquer pour d'autres spiraux sont très petites par rapport à la valeur trouvée et pourront être négligées avec une approximation pratiquement suffisante. Nous terminons par l'étude du spiral sans courbes terminales.

On a émis des doutes sur l'exactitude de résultats basés sur la théorie de la résistance des matériaux. En ce qui regarde les spiraux Phillips, ces doutes sont levés par la démonstration qu'a donnée leur savant auteur, en montrant que dans ce cas particulier la théorie ordinaire de la ligne neutre conduit aux mêmes résultats que la théorie mathématique de l'élasticité. Resal a montré aussi que, dans le cas de flexions simples (et c'est celui d'un spiral cylindrique), les deux théories conduisent aux mêmes résultats numériques. Et, en effet, comme on le verra, l'expérience a vérifié l'exactitude pratique de nos formules.

1. EFFET DE LA FORCE CENTRIFUGE DU BALANCIER.

Le balancier comprenant des masses pesantes attachées à l'extrémité de lames minces, il est facile de comprendre que les forces d'inertie développées par la rotation agissent pour le

---

(1) Le Congrès, dans sa séance du 3 août, a voté, sur la proposition de M. Jürgensen, la réimpression de ces Mémoires, dont la première édition est épuisée.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

déformer et faire varier son moment d'inertie, ce qui altérera la durée des oscillations. Nous allons montrer comment on peut calculer cet effet.

Et d'abord, nous n'aurons à considérer que les déformations dues à la force centrifuge, et nous allons faire voir que les forces d'inertie tangentielles, qui contribuent à la déformation, sont sans influence sur la perturbation dont il s'agit, et n'altèrent pas l'intervalle des battements du chronomètre.

Rappelons d'abord que l'effet en question est très petit, relativement aux dimensions du balancier. Considérons l'oscillation faite dans un certain sens. Supposons le balancier passant en un point donné de sa course avec une vitesse v: chacun de ses points a une accélération tangentielle $\frac{dv}{dt}$, et l'ensemble des forces $m\frac{dv}{dt}$ produit sur un point quelconque un déplacement déterminé. Considérons maintenant l'oscillation en sens inverse. Quand le balancier repasse par la même position, il a la même vitesse, mais en sens contraire : l'effet des forces tangentielles est donc le même en grandeur et direction, mais de sens opposé; si dans la première oscillation le moment d'inertie était augmenté d'une certaine quantité, il sera réduit de la même quantité dans l'oscillation de retour, et celle-ci se trouvera par conséquent raccourcie de la même quantité dont la précédente était allongée. Or, les battements n'ont lieu que toutes les deux oscillations, quand le balancier repasse par la même position avec une vitesse de même sens : l'intervalle des battements ne sera donc pas affecté par cette cause d'irrégularité. Il n'en est pas de même de la force centrifuge, dont le sens ne dépend pas du sens de la vitesse, puisqu'elle contient la vitesse angulaire au carré, et qu'elle conserve par suite toujours le même signe.

Cela posé, soit A le moment d'inertie primitif du balancier; soit ΔA l'accroissement de ce moment d'inertie par la force centrifuge; soient r le rayon primitif, Δr son accroissement : en raison de la petitesse de ces accroissements, on a pour chaque point l'accroissement du moment d'inertie égal à

$$m(r+\Delta r)^2 - mr^2 = 2mr\,\Delta r.$$

Les Δr sont des déplacements dus à la force centrifuge; dans le cas de faibles déformations, ces déplacements sont proportionnels à la force, c'est-à-dire encore au carré de la vitesse angulaire ω^2; donc, en faisant la somme et remarquant que ω^2 a la même valeur pour tous les points, on trouve, en désignant par c une constante,

$$\Sigma m(r+\Delta r)^2 - \Sigma mr^2 = \Sigma 2mrc\omega^2$$

ou

$$\Delta A = \omega^2 C,$$

C étant une quantité variable d'un balancier à l'autre, mais déterminée par les dimensions des organes, l'élasticité des métaux composants et la masse des diverses pièces. On peut donc poser

$$\frac{\Delta A}{A} = \omega^2\gamma^2,$$

γ^2 étant une constante pour un balancier donné.

Le spiral étant supposé isochrone, soit α l'angle dont le balancier est écarté de sa position d'équilibre, on aura pour l'équation du mouvement

$$(A+\Delta A)\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{M\alpha}{L}.$$

Posant, pour simplifier,

$$\frac{M}{AL} = k^2,$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

et remarquant que

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

il viendra

$$\left[1 + \gamma^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right] \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k^2\alpha.$$

En posant

$$\frac{d\alpha}{dt} = z,$$

et prenant α pour variable indépendante, les variables sont immédiatement séparées; et l'on aura, en intégrant entre les limites α et α_0, α_0 étant l'amplitude des oscillations,

$$z^2 = \frac{1}{\gamma^2}\left[-1 \pm \sqrt{1 + 2\gamma^2 k^2 (\alpha_0^2 - \alpha^2)}\right].$$

Le signe — du radical donnerait pour z^2 une valeur négative, et pour $\frac{d\alpha}{dt}$ une valeur imaginaire. Il ne convient donc pas.

Remplaçant z par $\frac{d\alpha}{dt}$, il vient enfin

$$dt = \frac{\gamma\, d\alpha}{\left[\sqrt{1 + 2\gamma^2 k^2 (\alpha_0^2 - \alpha^2)} - 1\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Posons

$$dt = \frac{d\alpha}{k\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}(1 + \varepsilon)$$

et déterminons ε en nous arrêtant au deuxième terme du développement, nous aurons

$$dt = \frac{1}{k}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} + \frac{1}{k}\frac{\gamma^2 k^2}{4}\frac{(\alpha_0^2 - \alpha^2)\, d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}.$$

La durée de la demi-oscillation comprise entre $\alpha = 0$ et $\alpha = \alpha_0$ sera

$$\int_0^{\alpha_0} dt = T = \frac{\pi}{2}\frac{1}{k}\left(1 + \frac{\gamma^2 k^2 \alpha_0^2}{8}\right).$$

La durée de l'oscillation est donc augmentée par la force centrifuge, et cette augmentation est proportionnelle au carré de l'amplitude extrême. Il y a donc accélération des petits arcs.

On peut calculer γ^2 en fonction des masses, des dimensions et des coefficients d'élasticité. On peut aussi le déduire de l'expérience en mesurant les déformations d'un balancier sous l'influence d'un poids donné qu'on fait agir sur les masses.

Phillips a calculé l'effet dont il s'agit pour le balancier circulaire; sa formule est assez compliquée, comme on devait s'y attendre; nous ne la reproduirons pas. Contentons-nous de citer le résultat numérique : avec le type ordinaire de chronomètre, si l'on calcule successivement les marches avec les amplitudes $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, on trouve 11 secondes environ d'accélération par jour des petits arcs.

C'est là une des causes principales qui empêchent d'obtenir l'isochronisme avec les spiraux théoriques. Cette perturbation devient négligeable avec le balancier de M. Winnerl.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

2. INFLUENCE DE L'INERTIE DU SPIRAL SUR L'ISOCHRONISME.

Yvon Villarceau a fait remarquer que si, dans l'état de repos, le spiral exerce sur le balancier une action proportionnelle à l'écartement de ce dernier de sa position d'équilibre, on ne devrait s'attendre à retrouver la même chose à l'état de mouvement qu'autant que la masse du ressort serait comme insensible par rapport à celle du balancier.

Je me suis proposé de calculer l'importance de l'effet ainsi produit par la masse du spiral qui, bien que petite, n'est nullement négligeable relativement à celle du balancier. Ce problème n'a d'intérêt qu'autant qu'on se sert des spiraux théoriques de Phillips. Dans tous les autres cas, en effet, l'isochronisme plus ou moins approché s'obtient par tâtonnement, en raccourcissant ou allongeant le spiral, ou en modifiant la forme des courbes qui le terminent; les effets perturbateurs produisant leur action dans les expériences préliminaires, les horlogers les corrigent par la même opération, sans avoir besoin d'en connaître l'importance. Il en est autrement quand il s'agit de spiraux théoriques : on ne saurait changer l'isochronisme en faisant varier la longueur; quant aux courbes, on ne pourrait les modifier sans qu'elles cessent d'être conformes à la théorie.

Nous admettrons donc qu'on opère sur un spiral du modèle de ceux que Phillips a étudiés, et pourvu des courbes terminales qu'il indique. Ce savant géomètre a démontré :

1° Que le spiral ainsi construit exerce à chaque instant sur le balancier une action dont le moment est proportionnel à l'angle dont celui-ci est écarté de sa position d'équilibre;

2° Qu'il se développe bien concentriquement, et qu'ainsi l'axe du balancier n'éprouve pas de pression latérale, ni par suite d'autres frottements que le frottement constant au contact des pivots et les résistances provenant du défaut de fluidité des huiles. Ces résistances n'altèrent pas l'isochronisme des grandes et des petites oscillations (*voir* ci-après); par suite, il nous est permis d'en faire abstraction.

Cela posé, considérons le spiral comme formé d'une série de cercles superposés; soient :

D la densité;
S la section, par un plan passant par l'axe, d'une des spires;
L la longueur totale du spiral;
s l'arc de spiral compté à partir de l'extrémité;
r le rayon des spires quand le balancier est écarté d'un angle α de sa position d'équilibre;
r_0 le rayon initial des spires;
ρ la distance à l'axe de l'élément ds;
ω la vitesse angulaire de cet élément;
enfin $p = 2n\pi + q$ l'arc total, n étant le nombre de tours.

On a

$$r = r_0 \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{p}}.$$

L'équation du mouvement s'obtiendra en écrivant que la somme des moments des forces réellement agissantes est égale à la somme des moments des forces d'inertie :

$$\Sigma \mathfrak{M} F = \Sigma m \frac{dv}{dt} \rho.$$

Pour le balancier, A étant le moment d'inertie,

$$\Sigma m \frac{dv}{dt} \rho = A \frac{d^2 \alpha}{dt^2}.$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Nous pouvons admettre que le déplacement angulaire d'un point du spiral est proportionnel à sa distance au bout fixe : on aura

$$\omega = \frac{s}{L}\frac{d\alpha}{dt}$$

et

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{s}{L}\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

La masse de l'élément est d'ailleurs DS ds.

Maintenant, puisque $v = \omega\rho$,

$$m\rho\frac{dv}{dt} = m\rho^2\frac{d\omega}{dt} + m\rho\omega\frac{d\rho}{dt}.$$

D'ailleurs, en moyenne, $\rho = r$, et, la longueur du spiral ne variant pas,

$$(r + dr)(p + \alpha + d\alpha) = r(p + \alpha);$$

donc

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{p+\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$$

et

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{s}{L}\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

On trouve enfin, par des substitutions et réductions faciles,

$$mr\frac{dv}{dt} = DSr^2\frac{s\,ds}{L}\left[\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{1}{p+\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right],$$

et l'on peut écrire

$$\Sigma mr\frac{dv}{dt} = \int_0^L \frac{DSr^2}{L}s\,ds\left[\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{1}{p+\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right];$$

et comme LDS est la masse m du spiral,

$$\Sigma mr\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{m_0^2}{\left(1+\frac{\alpha}{p}\right)^2}\left[\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{1}{p+\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right].$$

L'équation du mouvement sera donc

$$\left[A + \frac{1}{2}mr_0^2\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{p}}\right)^2\right]\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{mr_0^2}{p+\alpha}\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{p}\right)^2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = -\frac{M\alpha}{L},$$

M désignant le moment d'élasticité du spiral.

Posons

$$\frac{mr_0^2}{2A} = \delta^2, \qquad \frac{M}{AL} = k, \qquad 1 + \frac{\alpha}{p} = y,$$

l'équation deviendra

$$\left(1 + \frac{\delta^2}{y^2}\right)\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\delta^2}{y^3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + k^2(y-1) = 0.$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Posons, pour l'intégrer,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = z,$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{dz}{dy},$$

nous arriverons à l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dy}\left(1+\frac{\delta^2}{y^2}\right) - \frac{\delta^2}{y^3}z + k^2(y-1) = 0. \tag{1}$$

Posons

$$z = uv, \qquad \frac{dz}{dy} = u\frac{dv}{dy} + v\frac{du}{dy};$$

en substituant, il vient

$$\left[\frac{1}{2}v\frac{du}{dy}\left(1+\frac{\delta^2}{y^2}\right) - \frac{\delta^2}{y^3}uv\right] + \frac{1}{2}u\frac{dv}{dt}\left(1+\frac{\delta^2}{y^2}\right) + k^2(y-1) = 0. \tag{2}$$

Nous pouvons disposer d'une des indéterminées u et v de manière à annuler la quantité entre crochets : il suffit de poser

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dy}\left(1+\frac{\delta^2}{y^2}\right) - \frac{\delta^2}{y^3}u = 0$$

ou

$$\frac{du}{u} = 2\delta^2\frac{dy}{y(y^2+\delta^2)}.$$

Or, on

$$\frac{1}{y(y^2+\delta^2)} = \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2+\delta^2}\right);$$

donc, en intégrant, et l désignant un logarithme népérien,

$$lu = 2ly - l(y^2+\delta^2) + lc,$$

$$u = c\frac{y^2}{y^2+\delta^2};$$

substituant cette valeur dans (2), il vient, toutes réductions faites,

$$c\,dv = -2k^2(y-1)dy.$$

On intègre et l'on substitue à u et v leurs valeurs.

Soient α_0 l'amplitude extrême pour laquelle la vitesse $\frac{d\alpha}{dt}$ s'annule, y_0 la valeur correspondante de y, on trouve

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{y^2k^2}{y^2+\delta^2}[y_0(y_0-2) - y(y-2)].$$

Remplaçant y, y_0, $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs en α, il vient, toutes réductions faites,

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = k^2(\alpha_0^2 - \alpha^2)\frac{1}{1+\dfrac{\delta^2}{\left(1+\dfrac{\alpha}{p}\right)^2}}.$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Cette valeur de la vitesse s'annule indéfiniment pour $\alpha = \pm \alpha_0$. Les oscillations sont donc d'égale amplitude de part et d'autre de la position d'équilibre.

On tire de là

$$dt = d\alpha \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)^2}}.$$

On développera $\left[1 + \frac{\delta^2}{\left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ d'après la formule du binome, en se fondant sur ce que le deuxième terme est toujours très petit.

Pour un chronomètre de M. Winnerl, on a $\delta^2 < \frac{1}{300}$ et $\frac{\alpha}{p} < \frac{3}{40}$. Considérant $\frac{\alpha}{p}$ comme d'ordre 1 de petitesse et δ^2 comme d'ordre 2, nous pouvons nous borner, dans les développements, à l'ordre 4; on aura

$$dt = \frac{1}{k} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} \left[\left(1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}\right) - \frac{2\alpha}{p}\left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{4}\right) + \frac{3\alpha^2\delta^2}{2p^2} - \frac{4\alpha^3\delta^2}{2p^2}\right].$$

Intégrant entre les limites o et α_0, on aura la durée d'une demi-oscillation,

$$T = \pi \sqrt{\frac{AL}{M}} \left[\left(1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}\right)\frac{\pi}{2} + \frac{\delta^2\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)}{2p}\alpha_0 + \frac{3\delta^2}{2p^2}\frac{\pi}{4}\alpha_0^2 - \frac{4\delta^2\alpha_0^3}{3p^3} \cdots\right].$$

Si α_0 change de signe, les termes impairs disparaissent; on a donc, pour la durée de l'oscillation complète,

$$T = \pi \sqrt{\frac{AL}{M}} \left[\left(1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}\right) + \frac{3\delta^2}{4p^2}\alpha_0^2\right].$$

Le premier terme représente un effet constant de retard, indépendant des amplitudes, dont il n'y a pas à s'occuper au point de vue de l'isochronisme. Le deuxième, toujours positif et croissant avec α_0, exprime que les durées des grandes oscillations sont plus longues que celles des petites. En calculant sa valeur pour un spiral des chronomètres Winnerl (et la plupart des chronomètres donneraient une valeur peu différente), on trouve que, si α_0 prend successivement les valeurs $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, il y a une seconde par jour d'accélération des petits arcs.

On peut voir aussi, par un calcul fort simple, en exprimant δ^2 et p^2 en fonction des dimensions du spiral, que cet effet croît proportionnellement à la quatrième puissance du rayon. Peu nuisible dans les chronomètres ordinaires, dans lesquels les amplitudes n'atteignent jamais les limites que j'ai indiquées, il le serait beaucoup plus si l'on augmentait le rayon des spiraux. Il en résulte aussi qu'il serait six fois plus fort pour les spiraux en or pur que pour ceux en acier.

J'ai vérifié ces déductions par l'expérience.

Citons d'abord le résultat des expériences faites par M. Winnerl avec deux spiraux adaptés successivement au même balancier. Ces deux spiraux terminés par des courbes Phillips avaient même masse et même longueur; l'un avait 4^{mm} de rayon, l'autre 8^{mm}.

Voici les Tableaux de leurs marches; on a mis en regard les températures et les amplitudes; les marches sont les résultats moyens de cinq jours d'observation; le signe + indique une avance :

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Grand spiral de 8mm de rayon.

Température.	Marche.	Amplitude.
22,0	−4. 4	$\pi + \frac{\pi}{8}$
20,0	−3.55	π
19,4	−3.58,6	$\pi + \frac{\pi}{8}$

Petit spiral de 4mm de rayon.

Température.	Marche.	Amplitude.
21,60	+1.42, 8	$\pi + \frac{\pi}{8}$
22,06	+1.49,50	π
23,55	+1.49,55	π
21,16	+1.45,70	$\pi + \frac{\pi}{8}$

L'effet de retard du grand spiral sur le petit est de près de six minutes par jour.

L'effet d'anisochronisme est, en comparant les marches aux faibles amplitudes avec celles aux amplitudes plus fortes :

Pour le grand spiral..... 6s,30
Pour le petit spiral..... 5s,70
} d'avance des petits arcs.

Pour être absolument concluantes, ces observations auraient besoin d'être corrigées de l'effet de la température, mais les éléments nécessaires manquent quant à présent.

M. Leroy, expérimentant deux spiraux qui avaient respectivement 5mm,6 et 8mm,5 de rayon, a trouvé 5 et 8 secondes d'accélération.

Dans les deux cas, conformément à la théorie, l'accélération est plus forte avec les spiraux de grand rayon.

Mais on voit aussi que les petits spiraux ont encore une accélération très forte : elle est due, comme nous l'avons expliqué ci-dessus, à la force centrifuge du balancier.

3. INFLUENCE DES RÉSISTANCES PASSIVES.

La loi des résistances passives dans le mouvement des chronomètres est loin d'être bien connue, et les causes de cette incertitude sont nombreuses. La petitesse des quantités observables, qui ne sont que des résultantes de perturbations de natures très diverses; le peu de constance des causes, telles que la modification des lubrifiants, qui varie d'une nature d'huile à l'autre, qui dépend de conditions physiques difficiles à faire entrer en prévision, et où les actions capillaires prennent de l'importance; la petitesse des masses et des organes en jeu, qui empêche d'étendre à ce cas particulier les lois approximatives du frottement et des résistances résultant d'expériences faites sur des corps de plus grande dimension. Ces causes, et d'autres encore, empêchent d'établir une bonne théorie rationnelle, et les observations faites à diverses époques n'ont pas fourni de résultats suffisamment probants pour qu'on les accepte universellement.

En ce qui concerne particulièrement la résistance de l'air, on est d'accord pour en faire une fonction de la vitesse, mais cette fonction change de forme avec la vitesse même; quand celle-ci

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

est faible, on a admis sans preuve suffisante qu'elle y entre au premier degré; plus forte, on en introduit le carré; on va jusqu'au cube s'il s'agit de vitesses aussi grandes que celles des projectiles : ce sont des lois approximativement vérifiées par l'expérience.

Jacobi a traité le cas où la résistance est de la forme $a + bv^n$, n étant un nombre quelconque, entier ou fractionnaire. Dans un ordre d'idées analogue, on peut essayer une théorie, en considérant la résistance comme une fonction continue de la vitesse, développable suivant la formule de Maclaurin, ce qui donne une série de la forme

$$a + bv + cv^2 + \ldots,$$

et, tant que v ne variera pas dans des limites trop étendues, les coefficients a, b, c pourront être considérés comme constants pour un corps et un fluide donnés.

Les auteurs qui ont traité la question ont admis, d'après l'expérience, que les coefficients de la résistance sont de petites quantités, dont les carrés sont négligeables vis-à-vis des forces principales en jeu. En partant de là, Yvon Villarceau et, après lui, Resal ont montré qu'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse n'altère pas l'isochronisme. Resal a étendu cette conclusion au cas où l'on ajoute un terme constant : il en serait de même d'une résistance proportionnelle à la vitesse.

Il y a lieu de penser qu'une résistance de la forme $a + bv + cv^2$ se trouvera dans le même cas, mais cela n'est pas rigoureusement prouvé; nous allons le démontrer directement d'une façon simple, et en l'étendant à des puissances entières quelconques.

On sait que l'équation différentielle du mouvement d'un balancier libre (c'est-à-dire abstraction faite de l'échappement) actionné par un spiral théoriquement isochrone, conformément aux règles posées par Phillips, peut s'écrire

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k^2\alpha = 0.$$

α est l'angle dont le balancier est écarté de sa position d'équilibre, t le temps, k^2 une constante connue dont il est inutile d'écrire la valeur explicite. La vitesse d'un point quelconque du balancier est égale au produit de la vitesse angulaire par la distance de ce point à l'axe de rotation : de sorte qu'on peut remplacer la vitesse v par le produit de la vitesse angulaire $\frac{dx}{dt}$ par une constante. Si, de plus, nous admettons qu'il s'ajoute aux résistances passives un effet de *rigidité* du liquide, proportionnel à l'angle dont le balancier est écarté de sa position d'équilibre, l'équation du mouvement sera de la forme

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k^2\alpha = \beta_0 + \beta_1\frac{d\alpha}{dt} + \beta_2\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \ldots + \lambda\alpha.$$

En remplaçant α par $\alpha + \frac{\beta_0}{k^2 - \lambda}$, ce qui ne change pas les dérivées, cette équation deviendra

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k^2\alpha = \beta_1\frac{d\alpha}{dt} + \beta_2\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \ldots, \tag{1}$$

les β_i devant recevoir ultérieurement le double signe, puisque la résistance est toujours opposée à la vitesse. Si nous admettons que les carrés β_i^2 et les produits $\beta_i\beta_j$ sont négligeables, cette équation pourra s'intégrer par la méthode de la variation des constantes, dont Phillips a, le premier, montré l'application aux questions de Mécanique chronométrique.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Considérons l'équation privée du second membre

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k^2\alpha = 0. \tag{2}$$

Son intégrale générale est

$$\alpha = A\sin kt + B\cos kt, \tag{3}$$

et les constantes arbitraires A et B peuvent se remplacer par deux autres arbitraires α_0 et τ dont elles dépendent par les relations

$$\alpha_0 \cos k\tau = A,$$
$$\alpha_0 \sin k\tau = B,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \alpha_0 \sin k(t-\tau), \tag{4}$$

et l'on voit que τ est le temps correspondant à $\alpha = 0$, c'est-à-dire à la position d'équilibre ou point mort, et α_0 le maximum de α, ou l'amplitude de l'oscillation. On tire de (4), par différentiation, la valeur de la vitesse angulaire

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_0 k \cos k(t-\tau). \tag{5}$$

Ces solutions de l'équation (2) pourront encore satisfaire à l'équation proposée (1) en y considérant α_0 et τ non plus comme des constantes, mais comme des fonctions du temps, qu'il s'agit de déterminer. Dans ce cas, α est fonction de t, α_0 et τ, et l'on a, en distinguant par la lettre ∂ les différentielles partielles,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial\alpha_0}\frac{d\alpha_0}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dt}. \tag{6}$$

Nous avons deux fonctions arbitraires et une seule condition à laquelle elles doivent satisfaire, l'équation (1); nous nous imposerons, comme d'habitude, la deuxième condition arbitraire que $\frac{d\alpha}{dt}$ doit conserver la même forme dans le mouvement troublé, c'est-à-dire que

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t}, \tag{7}$$

d'où

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha_0}\frac{d\alpha_0}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dt} = 0. \tag{8}$$

Différentiant encore une fois et tenant compte de cette condition,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\alpha_0\,\partial t}\frac{d\alpha_0}{dt} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\tau\,\partial t}\frac{d\tau}{dt},$$

et puisque, en vertu de (4), on a

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = -k^2\alpha,$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

substituant à $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ sa valeur (1), il restera

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\alpha_0\partial t}\frac{d\alpha_0}{dt}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\tau\partial t}\frac{d\tau}{dt}=\beta_1\frac{d\alpha}{dt}+\beta^2\frac{d\alpha^2}{dt^2}+\ldots. \tag{9}$$

Cette équation est encore rigoureuse si l'on suppose que α_0 et τ soient remplacés dans $\frac{d\alpha}{dt}$ par leurs nouvelles valeurs variables.

Soient maintenant α'_0 et τ' les valeurs de α_0 et τ, constantes cette fois, qui satisfont à l'équation (2) à laquelle se réduit (1) quand on annule β_1, β_2, ... Il est clair que $\alpha_0-\alpha'_0$ et $\tau-\tau'$ sont des fonctions des β, s'annulant avec ces quantités; donc d'après le théorème de Maclaurin,

$$\alpha_0-\alpha'_0=\frac{\partial\alpha_0}{\partial\beta_1}\beta_1+\frac{\partial\alpha_0}{\partial\beta_2}\beta_2+\ldots,$$

et de même pour $\tau-\tau'$. Si donc on met α'_0 à la place de α_0 et τ' à la place de τ, dans la valeur de $\frac{d\alpha}{dt}$, l'erreur commise sur le deuxième membre de (9) sera du deuxième ordre en β_i, que nous sommes convenus de négliger. Dans l'intégration, on pourra donc considérer dans $\frac{d\alpha}{dt}$ du deuxième membre α_0 et τ comme constants. Pour calculer les dérivées partielles, différentions l'équation (4)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha_0}=\sin k(t-\tau), \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\tau}=-k\alpha_0\cos k(t-\tau),$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\alpha_0\partial t}=k\cos k(t-\tau), \qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial\tau\partial t}=k^2\alpha_0\sin k(t-\tau),$$

et d'après (7)

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\alpha_0 k\cos k(t-\tau).$$

Substituons dans le deuxième membre de l'équation (9) et résolvons le système (8), (9) par rapport à $\frac{d\alpha_0}{dt}$ et $\frac{d\tau}{dt}$, il viendra

$$d\alpha_0=\alpha_0\cos k(t-\tau)\left[\beta_1\cos k(t-\tau)+\beta_2 k\alpha_0\cos^2 k(t-\tau)+\ldots\right]dt. \tag{10}$$

$$d\tau=\frac{1}{2}\sin k(t-\tau)\left[\beta_1\cos k(t-\tau)+\beta_2 k\alpha_0\cos^2 k(t-\tau)+\ldots\right]dt. \tag{11}$$

Il résulte de l'équation (5) que la vitesse s'annule indéfiniment avec $\cos k(t-\tau)$, c'est-à-dire pour

$$k(t-\tau)=(2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

Considérons donc l'oscillation comprise entre les limites $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ de $k(t-\tau)$, sa durée sera

$$T=\frac{\pi}{k}+\delta\tau;$$

$\delta\tau$ est l'accroissement de τ quand $k(t-\tau)$ passe de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$, c'est-à-dire $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\tau$, et, en vertu du principe posé, nous pouvons calculer cette intégrale en supposant α_0 et τ constants sous le

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

signe $\int$. D'ailleurs, $T_i = \frac{\pi}{k}$ serait la durée de l'oscillation en l'absence de toute résistance : $\delta\tau$ est donc la perturbation due aux résistances. Or, l'intégrale indéfinie de $d\tau$, d'après l'expression (11), est de la forme

$$\tau = M\cos^2 k(t-\tau) + N\cos^3 k(t-\tau) + \dots$$

et aux limites $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, $\cos k(t-\tau)$ est nul, d'où $\delta\tau = 0$. *La perturbation de la durée des oscillations est donc nulle si l'on néglige les termes du deuxième degré en* β_i.

Il n'en serait pas de même de la perturbation de l'amplitude α_0, car les intégrales de la forme

$$\int \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2},$$

$$\int \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{12}\sin 3\varphi + \frac{3}{4}\sin\varphi,$$

.....

ne s'annulent ni ne prennent de valeurs égales aux limites : il serait aisé de voir que les résistances produisent une diminution des amplitudes, exprimée linéairement en β.

Pour continuer la discussion, il serait nécessaire d'avoir égard au double signe des coefficients β. Cette recherche n'aurait d'intérêt que si l'on se proposait de déterminer expérimentalement $\beta_1, \beta_2, \dots$ par l'observation du décroissement des amplitudes d'un balancier libre; mais il faudrait alors faire entrer en ligne de compte une nouvelle cause de perturbations que nous avons laissée de côté et qui a été signalée par M. Rozé : c'est la perte de travail élastique du spiral dans le mouvement.

Remarquons que l'ambiguïté du signe des β n'intervient pas dans le résultat relatif à la durée des oscillations, au moins dans les limites de l'approximation admise, puisque les coefficients des β_i dans $\delta\tau$ sont tous nuls aux limites.

La méthode indiquée pourrait servir à pousser la solution plus loin et nous permettrait de calculer une deuxième approximation de $\delta\tau$ en ayant égard aux termes du deuxième ordre : il suffirait pour cela de remplacer, dans $\frac{d\alpha}{dt}$, α_0 et τ par $\int d\alpha_0$ et $\int d\tau$. Mais comme τ se trouverait remplacé sous les signes sin et cos par un polynome en $\cos^i\alpha$, les intégrales ne s'exprimeraient plus sous une forme finie, et les calculs deviendraient très longs. Le calcul des termes du deuxième ordre fait par Yvon Villarceau, dans le cas très simple où l'on ne conserve que le coefficient du carré de la vitesse angulaire, est déjà fort long et fastidieux : il serait encore beaucoup plus compliqué dans le cas actuel, bien qu'il ne doive présenter aucune difficulté analytique.

Il est d'ailleurs évident que ces résultats s'appliqueraient à un mouvement oscillatoire quelconque, notamment à celui du pendule, pourvu qu'on puisse négliger les carrés des coefficients des résistances.

Le terme en β_0 de l'équation générale dont nous sommes partis peut représenter l'effet des frottements constants, et nous voyons que ceux-ci ne troublent pas l'isochronisme : c'est du reste ce qui a été démontré depuis longtemps, par des méthodes diverses, par Phillips, Yvon Villarceau et Resal.

4. THÉORIE DU SPIRAL CYLINDRIQUE SANS COURBES.

(Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 1er juillet 1876.)

Dans deux Mémoires présentés à l'Académie j'ai étudié les causes inhérentes au régulateur des chronomètres portatifs, qui sont de nature à rendre plus difficile l'obtention de l'isochro-

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

nisme des oscillations. En dehors de l'échappement, une des principales causes de perturbations de l'isochronisme dans les chronomètres ordinaires de marine réside dans l'élasticité de l'anneau bimétallique du balancier; j'ai calculé cet effet après M. Phillips et j'en ai évalué la grandeur. Dans le cas d'un balancier circulaire et dans le cas d'un balancier de Winnerl, la masse du spiral introduit également une petite perturbation, et son action n'est pas la même à l'état de repos et à l'état de mouvement. J'indiquais également les moyens les plus propres à parer à ces diverses perturbations, et je montrais qu'en adaptant le balancier Winnerl à des spiraux construits suivant les règles posées par M. Phillips, on pouvait réaliser un isochronisme très suffisant dans la pratique.

Je savais pourtant que les horlogers arrivent à réaliser l'isochronisme par des moyens différents et avec toutes sortes de balanciers, Hartnup, circulaire, etc. Les artistes dans ce cas terminent généralement leurs spiraux par des courbes différentes de celles dont M. Phillips a donné la formule. M. Winnerl, par exemple, a adopté pour ses courbes terminales la forme d'un demi-cercle dont le rayon est les $\frac{3}{4}$ de celui des spires. M. A.-L. Berthoud, suivant les traditions de sa famille qui se rattachent directement à l'invention de Pierre Leroy, ne change pas la courbure des extrémités; en d'autres termes ses courbes ne sont que des portions de spires circulaires. M. Phillips a démontré que dans ce cas particulier on n'obtient pas la proportionnalité rigoureuse entre le moment moteur et l'angle dont le balancier est écarté de sa position d'équilibre : l'expérience a confirmé ses déductions, et montré notamment que dans le cas de ces courbes non théoriques on n'obtient pas le développement libre et concentrique du spiral.

Enfin, la théorie indiquait que la longueur du spiral était sans influence sur son isochronisme. Ici encore ces déductions ont été vérifiées par l'expérience; il ne pouvait en être autrement, car la théorie de M. Phillips est purement mathématique, et si elle s'appuie sur les principes de la résistance des matériaux, l'auteur a montré que ces principes, dans ce cas particulier, sont en parfait accord avec la théorie mathématique de l'élasticité.

Il restait donc à concilier deux faits également vrais et contradictoires seulement en apparence : d'un côté la théorie du spiral et de l'influence de la forme des courbes; d'autre part, l'expérience des horlogers qui ont obtenu l'isochronisme en faisant varier la longueur du spiral, avec des courbes de formes variables. Il y avait grand intérêt à vérifier la valeur théorique de la belle découverte de P. Leroy, et surtout à rechercher si les résultats obtenus sont vrais dans toutes les limites de la pratique.

Voici comment il s'exprime à ce sujet (*Voyage de Cassini, etc.*):

« Il y a, dans tout ressort d'une étendue suffisante, une certaine longueur où toutes les vibrations, grandes ou petites, sont isochrones. Cette longueur trouvée, si l'on raccourcit le ressort, les grandes vibrations seront plus promptes que les petites; si au contraire vous l'allongez, les petits arcs s'achèveront en moins de temps que les grands.... Je me suis assuré un grand nombre de fois, et il est aisé de vérifier, que les plus petits arcs de vibrations et les plus grands une fois rendus isochrones par cette méthode, tous les arcs intermédiaires le sont aussi, avec la plus grande exactitude. »

J'ai repris le problème dans les conditions actuelles d'emploi du spiral, un peu différentes de celles dans lesquelles opérait Pierre Leroy. J'admets donc un spiral exactement cylindrique, faisant un grand nombre de tours serrés et de petit diamètre, dix au moins; j'admets de plus que ce spiral n'est pas *courbé,* qu'il a la forme d'une hélice dans toute son étendue, et je me propose d'étudier les conditions d'isochronisme approximatif, en examinant ce qu'il devient entre diverses limites d'amplitudes extrêmes, et cherchant dans quelle mesure la grandeur des amplitudes influe sur le degré d'approximation.

Il paraîtrait excessivement difficile et fastidieux d'étendre cette recherche au cas des courbes terminales de forme variée : mais on verra, comme conséquence de l'analyse appliquée au spiral sans courbes, comment l'esprit peut concevoir l'isochronisme pratique réalisé avec des spiraux à courbes quelconques, par le seul effet de la longueur du spiral.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Si j'ai été assez heureux pour trouver une solution satisfaisante de ce problème très curieux de Mécanique, je dirai que je le dois en grande partie à l'emploi des méthodes exposées par les savants géomètres qui ont appliqué l'analyse à l'étude des questions d'horlogerie. C'est dire de quel secours m'ont été les travaux de M. Phillips sur le *spiral réglant* et sur le *réglage des chronomètres dans les positions verticales et inclinées*, et les Mémoires de M. Resal sur la *détente des ressorts moteurs employés en horlogerie*. Ces travaux m'ont fourni les méthodes qui m'ont conduit à la solution et que je leur emprunterai parfois textuellement. M. Yvon Villarceau a bien voulu revoir mes calculs, et m'indiquer des simplifications que j'ai mentionnées en note.

Je considère le spiral comme une série de cercles superposés, en négligeant la faible inclinaison des spires sur le plan horizontal. C'est du reste moyennant cette hypothèse que M. Phillips a pu vérifier la parfaite conformité des résultats obtenus en partant de la théorie de la résistance des matériaux avec les principes de la théorie mathématique de l'élasticité.

Soit μ le moment d'élasticité du fil : si l'on appelle E son coefficient d'élasticité, l sa largeur, e son épaisseur, la valeur de μ pour les flexions que nous aurons à considérer sera

$$\mu = \frac{\mathrm{E}le^3}{12}.$$

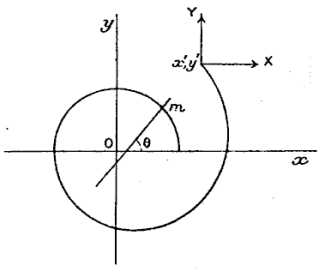
Projetons le spiral sur un plan perpendiculaire à son axe, qui est aussi celui du balancier : prenons pour origine la trace de cet axe, pour axe des x la droite passant par l'extrémité fixe du spiral, c'est-à-dire par l'encastrement fixé au bâti du chronomètre, et pour axe des y la perpendiculaire.

Nous comptons à partir de l'extrémité fixe les longueurs et les angles. Soient donc, pour un point quelconque du spiral :

s la distance au bout fixe, comptée sur l'arc d'hélice;
ρ_0 le rayon de courbure à l'état d'équilibre, constant dans toute l'étendue du spiral;
L la longueur totale entre les deux encastrements;
$p = 2n\pi + q$ l'angle total compris entre les deux extrémités, à l'état naturel, n étant le nombre entier de tours.

L'hélice étant supposée dextrorsum pour fixer les idées, faisons tourner le balancier vers la

Fig. 1.



gauche d'un angle α et évaluons les forces qui vont agir sur lui. Le sens de la rotation pour α positif sera tel que le rayon de courbure diminue en un point quelconque m de l'hélice (*fig.* 1).

Soient, après cette rotation :

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

ρ le rayon de courbure en m;
x, y les coordonnées de ce point;
θ l'angle que fait la normale à la ligne neutre avec l'axe des x;
$x'y'$ les coordonnées de l'encastrement du spiral dans le balancier.

Les actions extérieures que subit le spiral se réduisent à un couple U et à deux forces X et Y; on a donc, d'après la théorie de la résistance des matériaux, pour un point quelconque m,

$$\mu\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)=\Sigma\left[Y(x_i-x)-X(y_i-y)\right]+U;$$

les x_i, y_i désignant les coordonnées des points d'application des forces fléchissantes extérieures.

Dans le cas actuel, le spiral n'étant soumis à aucune autre action que celle du balancier, la formule se réduit, en vertu des notations expliquées, à

$$\mu\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)=-X(y'-y)+Y(x'-x)+U$$

et si $\mathfrak{M}=U-Xy'+Yx'$ représente le moment des forces extérieures

$$\mu\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)=Xy-Yx+\mathfrak{M}. \tag{1}$$

M. Resal a montré que, si l'on considère des flexions simples, les règles de la résistance des matériaux peuvent toujours recevoir leur application comme approximation, et ne conduisent pas à d'autres résultats que la théorie de l'élasticité. Nous pouvons donc admettre la relation ci-dessus. Or $\mathfrak{M}$ est le moment égal et contraire à celui que le spiral exerce sur le balancier, c'est-à-dire au moment qui produit le mouvement de ce dernier : on aura par conséquent pour l'équation de ce mouvement, en désignant par A le moment d'inertie du balancier,

$$A\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-\mathfrak{M};$$

on tire de l'équation (1)

$$\mathfrak{M}=\mu\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)-Xy+Yx.$$

Multiplions les deux membres par ds et intégrons entre les limites o et L qui comprennent toute l'étendue du ressort :

$$\mathfrak{M}L=\mu\left(\int\frac{ds}{\rho}-\int\frac{ds}{\rho_0}\right)-X\int y\,ds+Y\int x\,ds.$$

On voit aisément que $\int\frac{ds}{\rho}-\int\frac{ds}{\rho_0}$ représente la variation totale de courbure, c'est-à-dire α, et que si x_1, y_1 sont les coordonnées du centre de gravité du spiral

$$X\int y\,ds=XLy_1 \qquad \text{et} \qquad Y\int x\,ds=YLx_1;$$

donc enfin

$$\mathfrak{M}=\frac{\mu\alpha}{L}-Xy_1+Yx_1, \tag{2}$$

$$A\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-\frac{\mu\alpha}{L}+Xy_1-Yx_1. \tag{2 bis}$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Il reste à déterminer X_1, Y_1, x_1, y_1.

Les équations différentielles dont on peut déduire ces inconnues ont été écrites par M. Resal; nous suivrons sa méthode.

Remarquons d'abord que ρ_0 est rigoureusement constant dans le cas du spiral cylindrique sans courbes, pour toute l'étendue du ressort.

Si donc nous posons

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + \frac{\mu}{\rho_0}$$

nous aurons, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu d\theta}{ds} = \mathfrak{M}' + Xy - Yx. \tag{3}$$

Si l'on différentie l'équation (3) par rapport à s, et si l'on a égard aux relations évidentes

$$\frac{dx}{ds} = -\sin\theta, \qquad \frac{dy}{ds} = \cos\theta, \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

on trouvera

$$\mu \frac{d^2\theta}{ds^2} = X\cos\theta + Y\sin\theta.$$

Multipliant par $\frac{d\theta}{ds}$ et intégrant il vient

$$\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{\mu}{2\rho^2} = X\sin\theta - Y\cos\theta + D, \tag{4}$$

D étant une constante arbitraire qui se déterminera, en exprimant que l'on trouve la même valeur de ρ pour $x = \rho_0, y = 0$, au moyen de l'équation (3), et pour $\theta = 0$ au moyen de l'équation (4); d'où

$$\sqrt{\frac{2}{\mu}(D - Y)} = \frac{\mathfrak{M}' - Y\rho_0}{\mu}.$$

Posant maintenant

$$\frac{2D}{\mu} = c, \qquad -\frac{2Y}{\mu c} = a, \qquad \frac{2X}{\mu c} = b,$$

l'équation (4) donnera

$$ds = \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + a\cos\theta + b\sin\theta}} \tag{4 bis}$$

et par suite, en vertu des valeurs de $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$,

$$\left\{\begin{aligned} s &= \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 + a\cos\theta + b\sin\theta}}, \\ x - \rho_0 &= -\frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^\theta \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1 + a\cos\theta + b\sin\theta}}, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^\theta \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1 + a\cos\theta + b\sin\theta}}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Telles sont les équations de M. Resal (*loc. cit.*). On voit que nous sommes ramenés aux quadratures. Pour intégrer nous ne pouvons suivre la méthode indiquée par ce savant : elle

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

ne nous donnerait les valeurs des inconnues que pour des valeurs de α distantes entre elles de 2π. Nous remarquerons seulement que dans les cas particuliers en question M. Resal trouve

$$a = 0, \qquad b = \frac{4(R - R_0)}{L} = 0,$$

puisque dans le cas actuel $R = R_0 = \rho_0$.

On peut donc déjà présumer que, pour toutes les valeurs de α, a et b sont de petites quantités vis-à-vis de l'unité.

Pour montrer que cette conclusion est vraie dans tous les cas, remarquons que l'expérience nous apprend que, tant que α ne dépasse pas $\frac{3\pi}{2}$, le spiral conserve sensiblement la forme d'une hélice ayant pour axe l'axe du balancier, c'est-à-dire que le rayon de courbure est sensiblement le même en tous les points et égal au rayon du cylindre générateur.

Il résulte de-là que $\rho d\theta = ds$, et par conséquent $\frac{ds}{d\theta} = \rho$ est une quantité sensiblement constante pour toute l'étendue du spiral, c'est-à-dire sensiblement indépendante de θ, ce qui exige, d'après l'équation (3), que X et Y soient très petits.

Ces considérations se trouveront confirmées *a posteriori* par l'examen des valeurs numériques de a et b (1). Elles reposent en définitive sur un fait d'expérience facile à vérifier : c'est que le spiral conserve sensiblement la forme hélicoïdale pourvu que les déformations ne dépassent pas une certaine amplitude.

Il importe pour cela que le rapport de l'amplitude à l'angle total des extrémités du spiral soit petit : en pratique, ce dernier angle est 20π ou plus, et le premier ne dépasse jamais $\frac{3\pi}{2}$; le rapport est donc sensiblement inférieur à $\frac{3}{40}$. Pierre Leroy avait des spiraux de $2\frac{1}{4}$ tours, mais ses amplitudes maxima étaient inférieures à $\frac{\pi}{3}$.

M. Phillips a fait remarquer que l'expérience vient encore confirmer cette petitesse des pressions X et Y, puisque dans tous les cas l'isochronisme est très approché, et qu'on n'a jamais d'usure des parois du trou de l'axe, pourvu que l'huile n'ait pas manqué.

Il résulte de là la possibilité de simplifier l'intégration des équations (5) : a et b étant petits vis-à-vis de l'unité, il en sera de même de $a\cos\theta + b\sin\theta$, et l'on peut développer $(1 + a\cos\theta + b\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}$ par la formule du binome. Cette solution est manifestement plus simple et plus pratique que l'intégration rigoureuse par les fonctions elliptiques. Négligeant les termes du deuxième degré en a et b, il vient donc

$$(1 + a\cos\theta + b\sin\theta)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{a}{2}\cos\theta - \frac{b}{2}\sin\theta.$$

Substituant dans la valeur de s [équation (5)]

$$s = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\theta d\theta - \frac{a}{2}\cos\theta\, d\theta - \frac{b}{2}\sin\theta\, d\theta,$$

(1) Voir ces valeurs aux équations (9) et (10). Si l'on fait $L = p\rho_0 = 20\pi\rho_0$, a est généralement inférieur à $\frac{4\alpha\rho_0}{\rho_0 p(p+\alpha) - \rho_0}$ ou à $\frac{4\alpha}{20\pi(20\pi+\alpha) - 1}$ ou à peu près $\frac{\alpha}{1000}$. De même b est inférieur à ce même nombre, et comme α ne dépasse jamais 5, ces fractions sont inférieures à $\frac{1}{200}$.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

l'intégrale indéfinie est $\theta - \frac{a}{2}\sin\theta + \frac{b}{2}\cos\theta$, et l'intégrale aux limites o et θ

$$s = \frac{1}{\sqrt{c}}\left[\theta - \frac{a}{2}\sin\theta - \frac{b}{2}(1-\cos\theta)\right]; \tag{6}$$

on trouvera de même

$$x - \rho_0 = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^{\theta}\left(\sin\theta - \frac{a}{2}\sin\theta\cos\theta - \frac{b}{2}\sin 2\theta\right)d\theta,$$

d'où

$$x - \rho_0 = \frac{1}{\sqrt{c}}\left[1 - \cos\theta - \frac{a}{8}(1-\cos 2\theta) - \frac{b}{4}(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta)\right], \tag{7}$$

et de même

$$y = \frac{1}{\sqrt{c}}\left[\sin\theta - \frac{a}{4}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta) - \frac{b}{8}(1-\cos 2\theta)\right]. \tag{8}$$

L'encastrement des extrémités du spiral est tel que la normale en ces points passe par l'axe. Substituons dans les valeurs de x, y, s les quantités correspondantes à l'extrémité encastrée dans le balancier, savoir $x = \rho_0\cos\theta$, $y = \rho_0\sin\theta$, $\theta = p + \alpha$, $s = \mathrm{L} = \rho_0 p$; les équations (6) (7) et (8) donneront a, b, c, et par suite D, X, Y. Posons, pour distinguer, $p + \alpha = \theta_0$, il vient

$$\mathrm{L} = \frac{1}{\sqrt{c}}\left[\theta_0 - \frac{a}{2}\sin\theta_0 - \frac{b}{2}(1-\cos\theta_0)\right],$$

$$\rho_0(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{c}}\left[1 - \cos\theta_0 - \frac{a}{8}(1-\cos 2\theta_0) - \frac{b}{4}(\theta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_0)\right],$$

$$\rho_0\sin\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{c}}\left[\sin\theta_0 - \frac{a}{4}(\theta_0 + \frac{1}{2}\sin 2\theta) - \frac{b}{8}(1-\cos 2\theta_0)\right].$$

Divisant successivement les deux dernières relations par la première, on élimine $\sqrt{c}$, puis ayant égard à ce que $\theta_0 = p + \alpha$, on trouve par un calcul assez laborieux, mais qui n'offre pas de difficultés spéciales,

$$a = \frac{\rho_0\alpha\sin\theta_0}{\rho_0(1-\cos\theta_0) - \frac{\mathrm{L}}{4}(\theta_0 + \sin\theta_0)}, \tag{9}$$

$$b = \frac{\rho_0\alpha(1-\cos\theta_0)}{\rho_0(1-\cos\theta_0) - \frac{\mathrm{L}}{4}(\theta_0 + \sin\theta_0)}, \tag{10}$$

$$\sqrt{c} = \left[\theta_0 - \frac{\rho_0\alpha(1-\cos\theta_0)}{\rho_0(1-\cos\theta_0) - \frac{\mathrm{L}}{4}(\theta_0 + \sin\theta_0)}\right] = \frac{1}{\mathrm{L}}(\theta_0 - b) \tag{11}$$

Pour déduire de là X et Y on aura les relations

$$-\mathrm{Y} = \frac{a\mu c}{2}, \qquad \mathrm{X} = \frac{b\mu c}{2}. \tag{11 bis}$$

Restent à calculer les coordonnées x_1, y_1 du centre de gravité du spiral. Remarquons à cet effet que ces quantités, dans l'équation du mouvement, seront multipliées par X et Y, soit a et b. Il suffit donc de les calculer en supposant a et b nuls, puisque les termes ainsi négligés seraient du deuxième degré en a et b.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

On prendra $ds = \frac{d\theta}{\sqrt{c}}$ et il vient

$$x\,ds = \rho_0\,ds - \frac{1}{c}(1-\cos\theta)\,d\theta,$$

$$y\,ds = \frac{1}{c}\sin\theta\,d\theta$$

et, par suite,

$$(12)\qquad Lx_1 = \int_0^{\theta_0} x\,ds = L\rho_0 - \frac{1}{c}(\theta_0 - \sin\theta_0)$$

et

$$(13)\qquad Ly_1 = \int_0^{\theta_0} y\,ds = \frac{1}{c}(1-\cos\theta_0).$$

Il ne reste plus qu'à remplacer X, Y, x_1, y_1 par leurs valeurs dans l'équation du mouvement.

Remarquons en passant que, en vertu des valeurs de x et y, si l'on pouvait avoir $a = 0$ et $b = 0$, il viendrait

$$\frac{\rho_0 - x}{y} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta};$$

ce qui indique, conformément aux conclusions de M. Phillips, que dans ce cas le spiral se développerait concentriquement à l'axe du balancier, puisque la normale passerait constamment par cet axe.

Reprenons maintenant l'équation (2 *bis*),

$$(14)\qquad A\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{\mu\alpha}{L} + Xy_1 - Yx_1.$$

En nous rappelant que $\theta_0 = p + \varepsilon$ et $L = \rho_0 p$ il viendra, d'après les valeurs de X et Y, et en posant

$$\Delta = \frac{L}{4}(\theta_0 + \sin\theta_0) - \rho_0(1-\cos\theta_0),$$

d'abord

$$-Xy_1 = -\frac{b\mu c}{2}\frac{1}{cL}(1-\cos\theta_0) = \frac{\mu\rho_0\alpha}{2L}\frac{(1-\cos\theta_0)^2}{\Delta} = \frac{\mu\alpha}{2p}\frac{(1-\cos\theta_0)^2}{\Delta},$$

de même

$$Yx_1 = -\frac{a\mu c}{2}\frac{\rho_0 cL - \theta_0 + \sin\theta_0}{cL} = \frac{\mu\alpha}{2p}\frac{\sin\theta_0\left[\dfrac{(\theta_0-b)^2}{p} - \theta_0 + \sin\theta_0\right]}{\Delta},$$

donc

$$-Xy_1 + Yx_1 = \frac{\mu\alpha}{2p\Delta}\left[2 - 2\cos\theta_0 - \theta_0\sin\theta_0 + \frac{(\theta_0-b)^2}{p}\sin\theta_0\right].$$

D'ailleurs,

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{4}{L(\theta_0+\sin\theta_0)}\frac{1}{1-\dfrac{4\rho_0(1-\cos\theta_0)}{L(\theta_0+\sin\theta_0)}} = \frac{4}{Lp}\left(1+\frac{\alpha}{p}\right)^{-1}\left(1+\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}\right)^{-1}\left[1-\frac{4\rho_0(1-\cos\theta_0)}{L(\theta_0+\sin\theta_0)}\right]^{-1}.$$

Effectuant les développements, négligeant b devant θ_0 et nous arrêtant aux termes qui contiennent $\frac{1}{p}$, ce qui fait négliger les termes en $\frac{1}{p^2}$ et $\frac{1}{\theta_0^2}$, il viendra finalement

$$-\frac{Xy_1 + Yx_1}{A} = \frac{2\mu\alpha}{ALp^2}\left(1-\frac{\alpha}{p}-\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}\right)\left[2 - 2\cos\theta_0 - \theta_0\sin\theta_0 + \frac{(\theta_0-b)^2\sin\theta_0}{p}\right]$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

ou

$$-\frac{Xy_1+Yx_1}{A}=\frac{2\mu\alpha}{AL p^2}\left[1-\frac{1}{p}(\alpha+\sin\theta_0)\right]\left(2-2\cos\theta_0+\alpha\sin\theta_0+\frac{\alpha^2}{p}\sin\theta_0\right).$$

On pourrait à la rigueur tenir compte dans le calcul des termes en $\frac{1}{p}$ des quantités entre crochets; j'ai fait le calcul dans cette hypothèse, mais cela n'est pas nécessaire, ces termes étant toujours petits par rapport aux autres. D'ailleurs, en les négligeant, nous ne faisons que nous conformer au mode d'approximation suivi jusqu'ici, et qui est basé sur ce qu'on peut négliger les deuxièmes puissances de a et b, ce qui est parfaitement suffisant eu égard au degré d'exactitude des formules de la résistance des matériaux. Soit donc

$$Q=2-2\cos\theta_0+\alpha\sin\theta_0.$$

Posons

$$\frac{\mu}{AL}=k^2.$$

L'équation (14) du mouvement deviendra

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+k^2\alpha=-k^2\alpha\frac{2Q}{p^2}. \tag{15}$$

Le second membre de cette équation est très petit, car si $p=20\pi$, $\frac{1}{p^2}$ diffère peu de $\frac{1}{4000}$. Quoi qu'il en soit d'ailleurs de la valeur de ce terme, cette équation peut s'intégrer : on intégrera d'abord l'équation privée de second membre et l'on fera ensuite varier les constantes arbitraires (1).

Considérons donc l'équation

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-k^2\alpha. \tag{16}$$

On sait que son intégrale générale est

$$\alpha=\alpha_0\sin k(t-\tau), \tag{17}$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{dt}=k\alpha_0\cos k(t-\tau). \tag{18}$$

Cette solution renferme deux constantes arbitraires α_0 et τ. Procédant comme a fait M. Phillips, nous allons considérer ces constantes comme des fonctions à déterminer pour satisfaire à l'équation complète du mouvement. Ayant deux fonctions et une seule condition imposée, savoir l'équation (15), nous nous imposons pour deuxième condition que la dérivée $\frac{d\alpha}{dt}$ conserve la même forme que si α_0 et τ étaient des constantes.

En désignant, comme d'habitude, par la lettre ∂ les différentielles partielles, la condition que

(1) M. Yvon Villarceau a intégré cette équation d'une façon plus simple, par un développement en série. Nous avons néanmoins conservé la méthode de variation des constantes, parce qu'elle nous permettra, en changeant simplement la forme du deuxième membre, d'intégrer par le même procédé l'équation qui donne l'influence des frottements.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

$\frac{d\alpha}{dt}$ conserve la même forme revient à

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t};$$

or

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial\alpha_0}\frac{d\alpha_0}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dt},$$

donc

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha_0}\frac{d\alpha_0}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dt} = 0. \tag{19}$$

L'autre condition est

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k^2\alpha - k^2\alpha\frac{2Q}{p^2}.$$

Or, on a

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\alpha_0\,\partial t}\frac{d\alpha_0}{dt} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\tau\,\partial t}\frac{d\tau}{dt}$$

et identiquement

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = -k^2\alpha;$$

la condition revient donc à

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\alpha_0\,\partial t}\frac{d\alpha_0}{dt} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\tau\,\partial t}\frac{d\tau}{dt} = -k^2\alpha^2\frac{2Q}{p^2}. \tag{20}$$

Ces équations (19) et (20) détermineront $d\alpha_0$ et $d\tau$ une fois que les dérivées partielles auront été calculées.

Or, on a, en différentiant l'équation (17),

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha_0} = \sin k(t-\tau), \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\tau} = -k\alpha_0\cos k(t-\tau),$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial\alpha_0} = k\cos k(t-\tau), \qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial\tau} = \alpha_0 k^2\sin k(t-\tau).$$

Ces dérivées substituées dans (19) et (20) donnent $d\tau$ et $d\alpha_0$. Cette dernière valeur est inutile à considérer pour le but que nous nous proposons. Quant à $d\tau$, on a

$$d\tau = -\frac{\alpha}{\alpha_0}\frac{2Q}{p^2}\sin k(t-\tau)\,dt,$$

et, en vertu de l'équation (17),

$$d\tau = -\sin^2 k(t-\tau)\frac{2Q}{p^2}dt. \tag{21}$$

La vitesse angulaire étant donnée par l'équation (18) s'annule périodiquement avec $\cos k(t-\tau)$, c'est-à-dire pour

$$k(t-\tau) = (2i+1)\frac{\pi}{2},$$

i étant un entier quelconque, positif ou négatif. On en tire

$$t = (2i+1)\frac{\pi}{2k} + \tau. \tag{21'}$$

La durée d'une oscillation sera la différence des valeurs de t qui correspondent à deux valeurs

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

successives de i. Si τ a la valeur τ_1 pour la première oscillation et $\tau_1 + \delta\tau$ pour la suivante, la durée de l'oscillation sera

$$T = \frac{\pi}{k} + \delta\tau. \tag{22}$$

Cette différence $\delta\tau$ représente l'accroissement que reçoit τ quand i augmente de 1 ou $k(t-\tau)$ de π; c'est la différence des valeurs de τ pour deux valeurs obtenues en faisant, par exemple, $i = -1$ et $i = 0$, ce qui fait $k(t-\tau)$ égal à $-\frac{\pi}{2}$ et à $+\frac{\pi}{2}$, donc

$$\delta\tau = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\tau = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \frac{2Q}{kp^2}\, d\varphi.$$

Car, en posant $k(t-\tau) = \varphi$, on a

$$dt = \frac{d\varphi}{k}.$$

La question est donc ramenée aux quadratures.

Dans la valeur de Q remplaçons θ_0 par $p + \alpha = p + \alpha_0 \sin\varphi$, ce qui nous donne

$$\delta\tau = -\frac{1}{k}\frac{2}{p^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi [2 - 2\cos p\cos(\alpha_0\sin\varphi) + 2\sin p\sin(\alpha_0\sin\varphi) + \alpha_0\sin p\sin\varphi\cos(\alpha_0\sin\varphi) + \alpha_0\cos p\sin\varphi\sin(\alpha_0\sin\varphi)]. \tag{23}$$

Si nous posons

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha_0\sin\varphi)\, d\varphi = \pi Z(\alpha_0) \tag{24}$$

et

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\sin(\alpha_0\sin\varphi)\, d\varphi = \pi\alpha_0 S(\alpha_0); \tag{25}$$

si, de plus, nous remarquons que $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha_0\sin\varphi) = 0$ et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos(\alpha_0\sin\varphi) = 0$, puisque entre les limites de l'intégration leurs éléments sont égaux deux à deux et de signes contraires, il viendra

$$\delta\tau = -\frac{2}{kp^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi [2 - 2\cos p\cos(\alpha_0\sin\varphi) + \alpha_0\cos p\sin\varphi\sin(\alpha_0\sin\varphi)], \tag{26}$$

d'où, après réduction,

$$\delta\tau = -\frac{2\pi}{kp^2}\left\{1 + [\alpha_0^2 S(\alpha_0) - Z(\alpha_0)]\cos p\right\}. \tag{27}$$

Telle est la quantité qu'il faut ajouter à la durée des oscillations supposée égale à $\frac{\pi}{k}$ pour avoir

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

la durée des oscillations réelles. Pour discuter cette formule, il faut avoir la valeur des fonctions $S(\alpha_0)$ et $Z(\alpha_0)$. Nous donnons leurs principales propriétés dans la Note ci-dessous (1).

---

(1) Pour calculer

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha_0 \sin\varphi)\, d\varphi,$$

on développe le cosinus en série

$$\cos(\alpha \sin\varphi) = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2}\sin^2\varphi + \frac{\alpha^4}{4!}\sin\varphi + \frac{(-1)^{r+1}\alpha^{2r+2}}{(2r+2)!}\sin^{2r+2}\varphi + \ldots.$$

On sait que

$$(-1)^{r+1}2^{2r+2}\sin^{2r+2}\varphi = 2\left[\cos(2r+2)\varphi - \frac{2r+2}{1}\cos 2r\varphi + \ldots\right] \pm \frac{(2r+2)(2r+1)\ldots(r+2)}{(r+1)!}.$$

Le signe + convient au cas où r est impair; alors le premier membre est aussi positif, etc. L'intégration transforme ces cosinus en sinus qui s'évanouissent aux limites $\pm\frac{\pi}{2}$ de φ. Reste le terme constant dont le produit par le coefficient de $\sin^{2r+2}\varphi$, multiplié par $d\varphi$ et intégré entre les limites, donne

$$\frac{\pi(-1)^{r+1}\alpha^{2r+2}}{2^{2r+2}(r+1)!\,(r+1)!}.$$

Par suite

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha_0 \sin\varphi)\, d\varphi = \pi Z(\alpha_0).$$

On trouvera par la même méthode

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \sin(\alpha \sin\varphi)\, d\varphi = \pi\alpha S(\alpha).$$

L'intégration par parties permet de ramener à ces fonctions les intégrales

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1}\varphi \sin(\alpha\sin\varphi)\, d\varphi \qquad \text{et} \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\varphi \cos(\alpha\sin\varphi)\, d\varphi.$$

On trouve ainsi

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos(\alpha\sin\varphi)\, d\varphi = \pi[Z(\alpha) - S(\alpha)],$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \sin(\alpha\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{\alpha}[Z(\alpha) + (\alpha^2 - 2)S(\alpha)].$$

On trouve encore par la dérivation des séries

$$\frac{d.Z(\alpha)}{d\alpha} = -\alpha S(\alpha)$$

et la dérivée de $\alpha^2 S(\alpha) - Z(\alpha)$ est $\alpha[S(\alpha) + Z(\alpha)]$.

La transcendante $Z(\alpha)$ n'est autre que la fonction de Bessel notée I^0_α. Et l'on a $\alpha S(\alpha) = I'_\alpha$. Nous n'avons pas adopté ces notations parce que la série S a été déjà employée et désignée ainsi dans le Mémoire classique de Phillips sur la marche des chronomètres inclinés.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Avant d'aller plus loin, nous rappellerons que, vu la petitesse du deuxième membre de notre équation, au lieu d'appliquer la méthode générale de la variation des constantes arbitraires, on aurait pu se servir d'un développement en série. M. Yvon Villarceau a bien voulu vérifier par cette méthode le résultat qu'on vient d'exposer, et, comme on devait s'y attendre, le résultat est le même, et l'on trouve, pour l'expression de la durée des oscillations,

$$(27\ bis) \qquad T = \frac{\pi}{k}\left\{\left(1 - \frac{2}{p^2}\right) - \frac{2\cos p}{p^2}\left[\alpha_0^2 S(\alpha_0) - Z(\alpha_0)\right]\right\}.$$

Si, pour le moment, nous faisons abstraction de toutes les causes perturbatrices de l'isochronisme, il est aisé de voir, par les formules (27) et (27 *bis*), que T, la durée de l'oscillation, sera indépendante de α_0 ou de son amplitude si $\cos p = 0$, ce qui revient à $p = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$, n étant un entier quelconque qui doit être suffisamment grand et que nous admettrons n'être pas moindre que 10, pour que les hypothèses dont nous sommes partis soient exactes en pratique.

Pour obtenir l'isochronisme, on devra donc établir l'encastrement de la virole du balancier en un point distant d'un nombre entier de tours $\pm \frac{1}{4}$ de circonférence de l'extrémité fixe du spiral ou de son encastrement dans le piton, et nous pourrons ainsi énoncer le théorème suivant :

Pourvu que le nombre des spires soit suffisamment grand, il existe dans chaque spire deux points diamétralement opposés, et situés à angle droit avec l'extrémité fixe du spiral, c'est-à-dire avec le point par lequel le spiral est encastré dans le piton, qui procurent l'isochronisme des oscillations, en les choisissant comme points d'attache de la virole du balancier.

Ainsi se trouve justifiée théoriquement la règle empirique formulée par Pierre Leroy : elle est complétée et étendue à des spiraux d'un nombre de tours quelconque, pourvu que ce nombre soit suffisamment grand. Au lieu d'un seul point d'isochronisme dans l'étendue du ressort, nous en trouvons deux dans chacun des tours dont le ressort se compose.

Si, dans l'équation (15), nous introduisons l'hypothèse $p = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$, elle peut s'écrire, comme on s'en assure facilement,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k^2\alpha\left[1 + \frac{2}{p^2} \pm (2\sin\alpha + \alpha\cos\alpha)\right].$$

Le moment moteur n'est donc pas proportionnel à l'angle dont le balancier est écarté de sa position d'équilibre; cette condition, suffisante pour l'isochronisme, n'est donc pas nécessaire. Ceci fait comprendre comment diverses formes de spiraux peuvent donner l'isochronisme.

Nous ferons encore une autre remarque. L'expérience de Pierre Leroy a été faite avec des spiraux d'environ deux tours; notre analyse ne s'y applique donc pas. Néanmoins, en réfléchissant au mode d'approximation employé, on s'apercevra que nous n'avons supposé le nombre de tours assez grand qu'afin de pouvoir admettre que les déformations sont petites. Si donc, en même temps que nous réduisons le nombre de tours, nous réduisons proportionnellement les amplitudes limites des oscillations, entre lesquelles on a besoin d'obtenir l'isochronisme, les déformations de chaque spire en particulier resteront sensiblement les mêmes.

Or c'est précisément ce qui arrivait dans le chronomètre de Pierre Leroy : les amplitudes ne dépassaient pas 120°, soit $\alpha_0 = 60°$, tandis que, dans certains chronomètres modernes, elles vont jusqu'à 450°; il n'est donc pas étonnant que le résultat que nous avons obtenu s'applique à ce cas particulier. Il est plus que probable que, passé ce maximum de 120°, on n'aurait plus pu réaliser l'isochronisme.

Pour discuter complètement le problème, il nous faut avoir les valeurs de la parenthèse $\alpha_0^2 S(\alpha_0) - Z(\alpha_0)$ pour différentes valeurs de l'amplitude. Nous donnons plus loin le Tableau

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

des valeurs numériques des diverses fonctions pour des valeurs de α_0 variant de o à 6,3, c'est-à-dire de o° à 361°. Cette dernière amplitude est impossible matériellement pour une pièce à échappement; il n'y a donc aucun intérêt à aller au delà.

Avant de discuter les résultats numériques il importe d'envisager les causes de perturbation qui empêchent l'isochronisme pratique. En dehors de l'influence de l'échappement, les principales de ces causes sont :

1° La déformation produite sur les lames élastiques du balancier par les forces d'inertie auxquelles la rotation donne naissance;

2° L'influence négligée dans nos calculs de la masse du spiral;

3° Les frottements.

Ces perturbations, nous le savons déjà, sont de petites quantités; nous pouvons donc les calculer successivement et indépendamment les unes des autres, c'est-à-dire évaluer chacune comme si les autres n'existaient pas.

Dans un précédent Mémoire j'ai rappelé l'expression de la perturbation résultant de la force centrifuge; les forces d'inertie tangentielles n'ont pas d'influence sur la durée des oscillations. La perturbation en question est représentée par l'addition, à la durée des oscillations, d'un petit terme proportionnel :

1° Au carré de l'amplitude;

2° A une constante spécifique m, caractéristique de chaque balancier; elle est donc de la forme $m\alpha_0^2$.

J'ai vérifié ce résultat, dû à M. Phillips, en suivant une méthode différente : il est d'ailleurs d'accord avec l'expérience.

J'ai trouvé également une expression de la perturbation due à l'inertie du spiral. Cette perturbation pourrait devenir assez sensible, si l'on augmentait le rayon, ou si l'on faisait le spiral en or : elle a peu d'importance pour les spiraux en acier des dimensions généralement employées.

Quoi qu'il en soit de sa valeur numérique, elle est aussi de la forme $m\alpha_0^2$: pour en tenir compte il suffit donc d'assigner une valeur convenable à la constante m : le plus simple sera, une fois qu'on aura une valeur approchée, d'en approcher davantage par la discussion même des expériences d'isochronisme.

Mes conclusions sur ce sujet sont peut-être un peu moins exactes dans le cas actuel que dans le cas des spiraux à développement concentrique; mais en revoyant les calculs qui y conduisent on verra qu'ils s'appliquent encore avec une approximation suffisante au spiral sans courbes.

Reste maintenant l'effet des frottements. MM. Phillips, Yvon Villarceau et Resal ont traité la question du frottement constant et ont prouvé, par des méthodes variées, que *le frottement constant n'altère pas l'isochronisme.* Nous n'avons donc pas à tenir compte de celui dû à la pression verticale résultant du poids du balancier. Mais il faut examiner les frottements latéraux dus aux réactions X et Y des parois des trous sur les pivots du balancier. Ces frottements, en effet, sont variables d'un instant à l'autre de la durée de l'oscillation.

Ces pressions latérales ont pour résultante $\sqrt{X^2+Y^2}$; soient r le rayon, très petit, du pivot, f le coefficient de frottement, variable avec l'âge des huiles (M. Resal adopte $f=0,16$ pour le coefficient de frottement de l'acier sur une pierre lubrifiée par de l'huile). Le moment du frottement sera

$$fr\sqrt{X^2+Y^2}.$$

Le moment est toujours de sens opposé à la vitesse $\frac{d\alpha}{dt}$, et l'équation du mouvement est

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{\mu\alpha}{AL} \mp \frac{fr}{A}\sqrt{X^2+Y^2},$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

le signe supérieur convenant au cas où la vitesse est positive. Nous conserverons provisoirement le signe supérieur, sauf à introduire le double signe devant f quand une fois les calculs seront achevés.

Substituant à X et Y leurs valeurs tirées des équations (9), (10) et (11) en ayant égard aux relations (11 *bis*), on trouvera

$$\sqrt{X^2+Y^2}=\frac{c\mu}{2}\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\mu(\theta_0-b)^2}{2L^2}\,\frac{\rho_0\alpha\sqrt{2-2\cos\theta_0}}{L(\theta_0+\sin\theta_0)-4\rho_0(1-\cos\theta_0)},$$

puis, ayant égard à ce que

$$\theta_0=p+\alpha,\qquad L=\rho_0 p$$

et négligeant b devant θ_0,

$$\sqrt{X^2+Y^2}=\frac{\mu\alpha}{L}\,\frac{\left(1+\frac{\alpha}{p}\right)^2\sin\frac{\theta_0}{2}}{p\rho_0\left[1+\frac{\alpha+\sin\theta_0}{p}-\frac{4(1-\cos\theta_0)}{p^2}\right]},$$

négligeant les termes en $\frac{1}{p^2}$ et développant le dénominateur, multipliant enfin par fr,

$$fr\sqrt{X^2+Y^2}=\frac{\mu\alpha}{L}\,\frac{fr}{L}\left(1+\frac{\alpha}{p}-\frac{\sin\theta_0}{p}\right)\sin\frac{\theta_0}{2}.$$

Posons $Q=\frac{fr}{L}$. Q est une quantité très petite destinée à recevoir ultérieurement le double signe; on aura, dans le cas où $\frac{d\alpha}{dt}>0$, l'équation du mouvement

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-k^2\alpha-k^2Q\alpha\left[1+\frac{\alpha}{p}-\frac{\sin(p+\alpha)}{p}\right]\sin\left(\frac{p+\alpha}{2}\right).$$

Procédant comme nous avons fait pour intégrer l'équation (15) nous aurons, avec $k(t-\tau)=\varphi$,

$$\sin\varphi\,\frac{d\alpha_0}{dt}-k\alpha_0\cos\varphi\,\frac{d\tau}{dt}=0,$$

$$k\cos\varphi\,\frac{d\alpha_0}{dt}+k^2\alpha_0\sin\varphi\,\frac{d\tau}{dt}=-k^2\alpha Q\sin\left(\frac{p+\alpha}{2}\right)\left[1+\frac{\alpha}{p}-\frac{\sin(p+\alpha)}{p}\right].$$

On a, d'ailleurs,

$$\alpha=\alpha_0\sin\varphi,\qquad \frac{d\alpha}{dt}=k\alpha_0\cos\varphi,$$

et l'on tire des équations ci-dessus

$$d\tau=-\frac{Q}{k}\,d\varphi\left[1+\frac{\alpha}{p}-\frac{\sin(p+\alpha)}{p}\right]\sin\left(\frac{p+\alpha}{2}\right)\sin^2\varphi.$$

Considérons maintenant le balancier au moment où, passant par sa position d'équilibre, il se

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

meut dans le sens des α positifs : c'est l'instant où $\varphi = 0$. Alors

$$\text{Pour } \varphi = 0 \ldots\ldots \quad \alpha = 0, \qquad \frac{d\alpha}{dt} = k\alpha_0$$

Q négatif, ou plutôt $d\tau$ négatif;

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \cdots\cdots \quad \alpha = \alpha_0, \qquad \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

Q positif;

$$\varphi = \pi \ldots\ldots \quad \alpha = 0, \qquad \frac{d\alpha}{dt} = -k\alpha_0$$

Q positif;

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} \cdots \quad \alpha = -\alpha_0, \qquad \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

Q négatif.

$$\text{Pour } \varphi = 2\pi \ldots\ldots \quad \alpha = 0, \qquad \frac{d\alpha}{dt} = k\alpha_0$$

On aura

$$\tau = \int \left[1 + \frac{\alpha_0 \sin\varphi}{p} - \frac{\sin(p + \alpha_0 \sin\varphi)}{p}\right] \sin^2\varphi \sin\left(\frac{p + \alpha_0 \sin\varphi}{2}\right) d\varphi.$$

Pour avoir l'influence du frottement sur la durée de l'oscillation il faut intégrer cette expression. Ce qui a réellement de l'importance dans le problème qui nous occupe, c'est la durée de la double oscillation, ou l'intervalle des battements du chronomètre. Il faut donc faire varier φ de 0 à 2π. Il est facile de voir que dans le cas actuel la perturbation est nulle. En effet, considérons d'abord le terme le plus important,

$$\int \sin^2\varphi \sin\left(\frac{p + \alpha_0 \sin\varphi}{2}\right) d\varphi = \sin\frac{p}{2} \int \sin^2\varphi \cos\left(\frac{\alpha_0}{2}\sin\varphi\right) d\varphi + \cos\frac{p}{2} \int \sin^2\varphi \sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\sin\varphi\right) d\varphi.$$

Posons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos\left(\frac{\alpha_0}{2}\sin\varphi\right) d\varphi = A, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\sin\varphi\right) d\varphi = B.$$

Fig. 2.

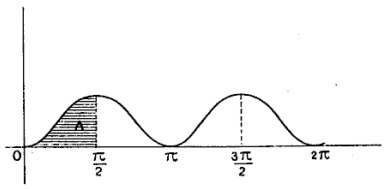
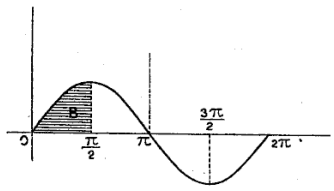


Fig. 3.



Considérons les courbes

$$y = \sin^2\varphi \cos\left(\frac{\alpha_0}{2}\sin\varphi\right), \qquad y = \sin^2\varphi \sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\sin\varphi\right),$$

qui ont respectivement les formes ci-dessus, symétriques par rapport à $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

On verra que les intégrales totales seront, pour les diverses valeurs de φ,

$$\text{de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{2}\ldots. \quad +A\sin\frac{p}{2}+B\cos\frac{p}{2} \text{ à multiplier par } -Q$$

$$\text{de } \frac{\pi}{2} \text{ à } \pi\ldots. \quad +A\sin\frac{p}{2}+B\cos\frac{p}{2} \quad \text{»} \quad +Q$$

$$\text{de } \pi \text{ à } \frac{3\pi}{2}\ldots. \quad +A\sin\frac{p}{2}-B\cos\frac{p}{2} \quad \text{»} \quad +Q$$

$$\text{de } \frac{3\pi}{2} \text{ à } 2\pi\ldots. \quad +A\sin\frac{p}{2}-B\cos\frac{p}{2} \quad \text{»} \quad -Q$$

la somme des produits par Q affecté du signe convenable est donc évidemment nulle, et la durée d'une double oscillation n'est pas affectée par le frottement.

Nous arriverons à une conclusion analogue pour la deuxième partie de l'intégrale

$$\frac{\alpha_0}{p}\int \sin^3\varphi \sin\frac{(p+\alpha_0\sin\varphi)}{2}\,d\varphi;$$

il suffit pour cela de répéter mot pour mot le même raisonnement.

Enfin, pour l'intégrale

$$-\frac{1}{p}\int \sin^2\varphi \sin\left(\frac{p+\alpha}{2}\right)\sin(p+\alpha)\,d\varphi,$$

elle se ramène à la forme

$$-\frac{1}{2p}\int \sin^2\varphi\left[\cos\frac{p+\alpha}{2}-\cos\frac{3(p+\alpha)}{2}\right]d\varphi$$

et se traite comme les précédentes.

Le principe commun de ces démonstrations repose sur ce que les intégrales sont les aires des courbes symétriques par rapport aux ordonnées $\varphi=\frac{\pi}{2}$ et $\varphi=\frac{3\pi}{2}$, en vertu des relations

$$\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}+x\right]=\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}-x\right].$$

Par conséquent, l'intégrale de $d\tau$ prise entre les limites o et 2π est nulle, et l'on en conclut que *le frottement variable dû aux pressions* X *et* Y *n'altère pas l'isochronisme des oscillations*.

Ceci suppose, il est vrai, que les amplitudes sont égales de part et d'autre de la position d'équilibre : ce qui n'est pas rigoureusement vrai. Mais il est aisé de voir qu'en considérant, comme nous l'avons fait, Q comme une très petite quantité, l'erreur ainsi commise sur les amplitudes serait également très petite; celle qui résulterait de l'hypothèse de leur égalité, introduite dans le calcul des durées, serait une petite quantité du second ordre. Or

$$\frac{4fr}{L}=\frac{4fr}{p\rho_0}=\text{environ}\,\frac{4\times 0,16\times 0^{mm},1}{20\pi\times 5^{mm},3},$$

dont le carré $\dfrac{\overline{0,064}^2}{400\pi^2\times\overline{5,3}^2}$ est absolument négligeable et inférieur à $\dfrac{1}{25\,000\,000}$.

Nous ne nous arrêterons pas à discuter les durées comparées des deux parties d'une même oscillation, lesquelles ne sont pas exactement égales. Remarquons seulement qu'en posant la proportionnalité entre l'angle d'écart et le moment moteur, nous avons aussi commis une petite

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

erreur; mais d'après la méthode suivie pour l'intégration, l'intégrale obtenue serait indépendante de cette omission, et, en appelant $\delta_1\tau$ l'intégrale relative au frottement, on aurait trouvé pour la durée de l'oscillation

$$T = \frac{\pi}{k} + \delta\tau + \delta_1\tau.$$

Il nous reste à discuter les formules obtenues et à voir dans quelles limites l'isochronisme peut s'obtenir dans la pratique. C'est ici, à vrai dire, la question intéressante au point de vue de l'horlogerie. S'il y avait un intérêt théorique assez grand à vérifier la règle de Pierre Leroy, et à montrer qu'elle est en effet rationnelle, il y a un intérêt pratique plus grand encore à voir dans quelle mesure et suivant quelles règles on peut arriver à en faire l'application. Comme dans ce qui suit nous n'avons à considérer que les amplitudes extrêmes, nous les représenterons simplement par α en supprimant l'indice zéro.

Le problème se ramène en définitive à résoudre par rapport à p l'équation

$$m\alpha^2 + \delta\tau = \text{const.},$$

c'est-à-dire à trouver la longueur de spiral qui rend la durée des oscillations indépendante de leur amplitude.

Posé ainsi, il est aisé de voir que le problème est insoluble, c'est-à-dire que, dans le cas actuel, aussi bien que lorsqu'il s'agit de spiraux théoriques, l'isochronisme pratique ne peut s'obtenir que dans certaines limites. La solution $\cos p = 0$ est une première solution approchée, mais on peut arriver à un résultat plus exact.

Pour discuter complètement la question il faut d'abord voir quelles sont les limites d'amplitude dont on aura à s'occuper.

Les balanciers des chronomètres de marine, quand les huiles sont fraîches, font généralement des oscillations de $1 + \frac{1}{8}$ tour, soit $\alpha = \frac{9\pi}{8}$. Cette quantité se réduit à $1 - \frac{1}{8}$ tour, soit $\alpha = \frac{7\pi}{8}$ quand, au bout des trois ans de marche réglementaires, l'épaississement des huiles a produit son effet.

Ces amplitudes correspondent aux valeurs 2,75 et 3,53 de α : c'est donc pour ces valeurs qu'il importe principalement d'obtenir l'égalité de marche.

On sait d'ailleurs comment se font les expériences d'isochronisme. En pratique, les horlogers observent en donnant au ressort moteur d'abord sa force normale, puis en le désarmant de moitié, ce qui réduit environ de moitié le moment moteur moyen (je dis *environ*, parce que la fusée construite pour une force motrice donnée ne s'applique plus exactement à la régularisation de cette force diminuée de moitié). Alors, conformément à la remarque qui en a été faite par M. Yvon Villarceau, les amplitudes sont proportionnelles à la racine carrée du moment moteur. Si les amplitudes primitives sont $\alpha = 3,5$, elles seront $\alpha = 2,5$ après qu'on aura désarmé le ressort $\left(\text{en effet, } \overline{2,5}^2 = 6,25 ; \overline{3,5}^2 = 12,25\right)$.

Écrivons maintenant l'équation de l'isochronisme

$$m\alpha^2 - \frac{2}{p^2}[\alpha^2 S(\alpha) - Z(\alpha)]\cos p = \text{const.} \tag{30}$$

La valeur du coefficient m dépend du balancier : pour le balancier circulaire bimétallique généralement adopté, M. Phillips a trouvé que, en expérimentant aux amplitudes successives $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, on a une avance de $11^s,2$ par 24 heures des petits arcs sur les grands, d'où

$$m\left[\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] = \frac{11,2}{86400}, \qquad m = \frac{1}{150000} \text{ en nombre rond.}$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Le premier membre de l'équation (30) est le coefficient de $\frac{\pi}{k}$ dans la valeur de $\delta\tau$ dans (27), et, comme $\frac{\pi}{k}$ est à peu près la durée de l'oscillation, ce premier membre représente l'altération proportionnelle, en d'autres termes, pris en valeur absolue, l'altération de la durée de la seconde du chronomètre sous les diverses influences considérées.

Considérons le deuxième terme.

Le Tableau des valeurs de $\alpha^2 S(\alpha) - Z(\alpha)$ montre que ce coefficient varie très différemment de α^2, il ne peut donc être question de trouver une valeur de p qui rende l'expression

$$m\alpha^2 - \frac{2\cos p}{p^2}[\alpha^2 S(\alpha) - Z(\alpha)]$$

constante pour toutes les valeurs de α : ce qui revient à dire que dans ce cas l'isochronisme entre des limites étendues est impossible. Il faut donc se borner à une approximation. D'abord il est aisé de voir que l'on peut généralement déterminer p de manière à avoir la même marche à deux amplitudes données α_1 et α_2; on devra pour cela résoudre l'équation

$$m\alpha_1^2 - \frac{2\cos p}{p^2}[\alpha_1^2 S(\alpha_1) - Z(\alpha_1)] = m\alpha_2^2 - \frac{2\cos p}{p^2}[\alpha_2^2 S(\alpha_2) - Z(\alpha_2)].$$

Comme $\cos p$ est très petit par rapport à p^2, nous donnerons à ce dernier sa valeur très approchée $\left(2n\pi \pm \frac{\pi}{2}\right)^2$ et nous résoudrons par rapport à $\cos p$ ce qui nous fournira une correction de p. Substituant cette valeur corrigée, on peut déterminer $\cos p$ par approximations successives.

Comme application numérique, faisons $m = \frac{1}{150000}$, $p = 20\pi + \frac{\pi}{2}$.

Soient

$$\alpha_1 = 2,5 = 143^\circ,$$
$$\alpha_2 = 3,5 = 200^\circ;$$

on trouve

$$\cos p = -\frac{1}{300000}\,\frac{\left(20\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 (12,25 - 6,25)}{1,291 - 0,861},$$

et l'on en tire, pour le plus petit angle dont $\cos p$ a cette valeur,

$$90^\circ + 10^\circ 50'.$$

Avec $20\pi - \frac{\pi}{2}$ on aurait trouvé $-10^\circ 7'$.

En général, si l'on ne sort pas des limites de la pratique, on trouvera toujours pour $\cos p$ une valeur inférieure à l'unité en valeur absolue, et par suite une valeur réelle pour p. Il peut arriver pourtant qu'on trouve deux valeurs de $\alpha^2 S(\alpha) - Z(\alpha)$ peu différentes, ce qui rend très petit le dénominateur de $\cos p$ et peut faire $\cos p$ supérieur à l'unité. Dans ce cas il n'y a pas en réalité impossibilité : il y a indétermination et, en effet, quel que soit p, dès que les valeurs de $\alpha^2 S(\alpha) - Z(\alpha)$ sont égales pour deux valeurs de α, on aura la même durée d'oscillation à ces amplitudes pour ce qui regarde l'effet du spiral seul; mais cette égalité ne s'étendra pas aux amplitudes intermédiaires. Le cas le plus favorable à l'expérience est celui où la fonction $\alpha^2 S(\alpha) - Z(\alpha)$ n'a pas de maximum entre les amplitudes considérées.

Or, il est facile de voir que cette fonction est maximum pour une valeur de α peu différente de 2,75. En effet, la dérivée de $\alpha^2 S(\alpha) - Z(\alpha)$ est $Z(\alpha) + S(\alpha)$ et l'on voit à l'inspection du

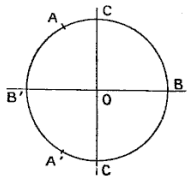
Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Tableau que l'équation $Z(\alpha) + S(\alpha) = 0$ a une racine peu différente de 2,75. Dans les essais d'isochronisme, si l'on veut que l'expérience soit précise, on doit donc prendre pour les petites amplitudes $\alpha = 2,75 = 158°$, et les grandes amplitudes les plus convenables seront de 223° environ, soit 1 $\frac{1}{4}$ tour. Si, au contraire, on réglait l'isochronisme pour des amplitudes voisines de 115° et 195°, on aurait les mêmes valeurs du coefficient de $\cos p$, qui se trouverait par conséquent très mal déterminé, et l'isochronisme serait peu rigoureux.

Quoi qu'il en soit, les amplitudes usuelles sont supérieures à $\alpha = 158°$. A partir de cette valeur, $\alpha^2 S(\alpha) - Z(\alpha)$ va décroissant jusqu'à $\alpha = 326°$. Donc, dans les cas usuels, on trouvera toujours pour $\cos p$ une valeur négative, c'est-à-dire que si B représente la projection du bout fixe, c'est en A et A′ qu'il conviendra d'encastrer la virole du balancier.

D'après la forme de l'équation, on voit que les arcs AC, A′C′ (*fig.* 4) sont d'autant plus grands que le nombre de tours ou p est plus grand. Nous avons trouvé 10° pour un spiral de 10 tours et un balancier ordinaire.

Fig. 4.



Il est aisé de voir que l'égalité de durée à deux amplitudes n'entraîne pas l'égalité aux amplitudes intermédiaires.

Supposons l'isochronisme réglé pour 2,75 et 4,00; on trouvera $\cos p = -\sin 5°30'$.

Pour calculer les marches y aux diverses amplitudes on emploiera la formule

$$y = 86400\,\delta\tau,$$

qui donnera le retard en secondes par jour, le chronomètre étant supposé réglé quand $\delta\tau = 0$.

On aura, les marches — désignant des retards :

α.	y.	Accélération.	Y.	Δ Y.
	s	s		
2.....	— 7,48	+2,28	— 4,47	
2,5.....	— 8,94	+0,82	— 6,47	2,00
3.....	—10,50	—0,72	— 8,04	1,57
3,5.....	—10,66	—0,90	— 8,98	0,94
4.....	— 9,76	0,00	— 9,42	0,44
4,5.....	— 8,70	+1,06	—10,07	0,65

Les marches à 2,75 et 4 étant 9,76, on voit que le chronomètre retarde légèrement aux amplitudes intermédiaires et avance nettement aux amplitudes plus faibles et plus fortes. Cet effet irrégulier peut être diminué en donnant un peu d'accélération aux petits arcs; dans ce cas, par exemple, en réduisant l'angle de 5°30′ à 2°45′, on aurait les marches de la colonne Y, et l'on voit qu'entre les amplitudes 3,5 et 2,5 on aurait une accélération régulière des petits arcs allant à 2^s,5 environ. On voit qu'avec ce spiral il est aisé d'obtenir l'isochronisme dans la mesure que l'on cherche.

La formule qui donne la durée des oscillations donne encore lieu à une autre remarque. Si

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

l'on fait abstraction des autres perturbations et qu'on ne considère que le terme

$$\delta\tau = -\frac{2\cos p}{p^2}[\alpha^2 S(\alpha) - Z(\alpha)],$$

on voit d'abord qu'il est maximum quand la dérivée de $\frac{\cos p}{p^2}$ s'annule, ce qui donne

$$\operatorname{tang} p = -\frac{2}{p};$$

p étant très grand, $\operatorname{tang} p$ est très petit; donc le *maximum d'anisochronisme* correspond aux points voisins de B et B′ sur la figure.

Supposons d'abord $\cos p > 0$. Les amplitudes croissant de 0 à 2,75, $\delta\tau$ croît en valeur absolue, donc $T_1 = T + \delta\tau$ décroît; quand α croît, les grandes vibrations sont plus rapides. Au delà de $\alpha = 2{,}75$, les petites vibrations durent moins que les grandes; les petits arcs avancent, comme on dit, sur les grands.

Si $\cos p < 0$, les petits arcs avancent entre les amplitudes 0 et 2,75, et de 2,75 à 5,00 les petits arcs retardent. En pratique, les amplitudes ne descendent pas au-dessous de 2,50; il y a retard des petits arcs sur les grands dans le demi-cercle de gauche, avance des petits arcs sur les grands dans le demi-cercle de droite. L'inverse arrivait dans le chronomètre de Pierre Leroy, dans lequel α n'atteignait jamais 2,5.

Les résultats qui viennent d'être exposés sont conformes à l'expérience.

1° M. Vissière, élève de L. Berthoud, m'a communiqué le résultat des expériences qu'il a faites chez son maître. On opérait avec des balanciers à trois ou quatre branches, très légers, avec des amplitudes ne dépassant pas un tour ($\alpha = 180°$). Dans ces conditions, on recherchait une très légère avance des petits arcs sur les grands, et l'on obtenait l'isochronisme très approché en attachant la virole à angle droit avec le piton. Alors $\cos p = 0$, et $\delta\tau = m\alpha^2$ était négligeable.

2° M. Aug.-Louis Berthoud, à qui j'ai demandé les résultats de ses expériences personnelles, m'a écrit une lettre dont j'extrais ce qui suit :

« Argenteuil, 12 juin 1876.

» Suivant le désir que vous m'en avez manifesté, j'ai l'honneur de vous adresser l'exposé des principes de la méthode de réglage de l'isochronisme employée par Louis Berthoud, et complétée plus tard par son fils Auguste Berthoud. Les voici tels que mon oncle les formulait. Dans tous les ressorts de forme hélicoïde ou conique, pour chacun des tours, il y a :

» 1° Deux points d'attache où les vibrations d'inégale étendue sont isochrones;

» 2° Un point où la durée des grands arcs est plus courte;

» 3° Un point où la durée des petits arcs est également plus courte.

» ... La position des points d'isochronisme est N tours + 100° et N tours + 260°.

» Le point d'avance des grands arcs est entre N tours + 100° et N tours + 260°.

» Le point d'avance des petits arcs est entre N tours + 260° et (N + 1) tours + 100° ....

» Feu Auguste Berthoud, mon oncle, dans sa longue carrière d'horloger, n'a jamais trouvé d'exceptions à ces propositions. J'ai moi-même expérimenté entre des limites de longueur (ou nombre de tours) plus étendues que celles qu'il est possible d'employer dans la pratique de l'horlogerie, et sur des métaux et alliages très variés, et j'ai toujours trouvé la loi exacte .... »

Cette lettre confirme de la façon la plus complète les résultats de la théorie.

3° Enfin M. Berthoud m'a communiqué une expérience qu'il a faite, et qui montre que, conformément à mes conclusions, les frottements latéraux sont sans influence sur l'isochronisme.

Il a construit un chronomètre (le n° 31) acquis par la Marine à la suite d'un concours; il a muni ce chronomètre de deux spiraux symétriques, ce qui annulait les frottements latéraux.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Or, sur ces spiraux, les points d'isochronisme se sont trouvés au même endroit que la théorie indiquait; ce n'est donc pas le frottement qui produit l'isochronisme.

4° Je dois citer encore un fait curieux qui, bien qu'il ne rentre pas directement dans les données de ma théorie, n'en présente pas moins une particularité très remarquable. M. Winnerl a adopté comme type de spiral un spiral cylindrique à courbes non théoriques. Ce spiral se compose de dix tours d'hélice, plus deux courbes en demi-cercle ayant les trois quarts du diamètre du spiral. Or la longueur totale du spiral est égale à

$$20\pi\rho_0 + \frac{3}{4}2\pi\rho_0 = \rho_0\left(22\pi - \frac{\pi}{2}\right).$$

C'est donc une des longueurs que donne la théorie pour un spiral isochrone sans courbes.

Je me contenterai d'indiquer cette analogie qui ne peut pas se rattacher à notre théorie, mais qui fait bien comprendre comment on peut obtenir l'isochronisme avec des spiraux de diverses formes.

Le principal inconvénient des spiraux dans lesquels l'isochronisme est réalisé avec des courbes différentes de celles dont M. Phillips a donné la formule, c'est que leur développement ne se fait pas concentriquement, et que le centre de gravité du spiral se déplace et n'est pas sur l'axe. Le spiral sans courbes se développe d'une façon qui ne satisfait pas l'œil. Ce défaut serait peu de chose, mais ces déplacements du centre de gravité ont un inconvénient plus sérieux : c'est de rendre plus difficile le réglage en positions. Tant que l'axe du spiral reste vertical, il n'y a pas de perturbations; mais dans les positions verticales et inclinées du cadran, le moment de la pesanteur sur le spiral prend une valeur appréciable et variable dans le cours de l'oscillation. On peut se proposer de calculer cet effet : nous nous bornerons à montrer comment il faudrait procéder pour cela.

Supposons qu'on ait placé le cadran verticalement. Nos anciens axes sont $O\xi$ passant par le piton, $O\eta$ perpendiculaire à $O\xi$. Prenons pour nouveaux axes l'horizontale $O\xi'$ et la verticale $O\eta'$. Soit φ l'angle que fait l'ancien axe des ξ avec le nouveau. Les formules de transformation

$$\xi' = \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi,$$
$$\eta' = \eta\cos\varphi - \xi\sin\varphi$$

permettent de trouver dans le nouveau système les coordonnées ξ'_1 et η'_1 du centre de gravité du spiral. Soit ϖ le poids du spiral; le moment de son poids sera $\varpi\xi'_1$. Or en substituant, dans la première formule de transformation, les valeurs de ξ_1 et η_1 données par les équations (12) et (13), nous trouvons après réduction

$$\xi'_1 = -\frac{\rho_0}{p+\alpha}[\alpha\cos\varphi + \sin\varphi + \sin(p+\alpha-\varphi)];$$

ce moment doit être ajouté au deuxième membre de l'équation (D), qui devient alors

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k^2\alpha = -k^2\alpha\frac{2}{p^2}[2 - 2\cos(p+\alpha) + \alpha\sin(p+\alpha)]$$
$$+ \frac{\varpi\rho_0}{A(p+\alpha)}[\alpha\cos\varphi + \sin\varphi + \sin(p+\alpha-\varphi)].$$

Pour intégrer cette équation, on suivrait exactement la marche suivie pour intégrer l'équation notée (15), et l'on arriverait à ajouter à la valeur de $d\tau$ [formule (21)] la quantité

$$\frac{\varpi\rho_0}{\alpha_0 k^2}\frac{\sin k(t-\tau)}{p+\alpha}[\alpha\cos\varphi + \sin\varphi + \sin(p+\alpha-\varphi)]\,dt;$$

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

on remplacerait α par $\alpha_0 \sin k(t-\tau)$, et l'on arriverait à des intégrales prises entre les limites $\pm \frac{\pi}{2}$, dont les unes pourraient se trouver sous forme finie, et les autres pourraient se calculer par des développements en série. Mais il est à peine besoin de faire remarquer la complication des formules auxquelles on parviendrait ainsi, et il n'est guère possible d'arriver par cette voie à des conclusions pratiques. Nous nous contenterons donc de cette simple indication.

Pour une amplitude donnée, on peut arriver, par les tâtonnements familiers aux horlogers, à produire l'égalité de durée des oscillations aux diverses orientations du cadran incliné, mais il paraît évident que ce réglage en positions, fait pour une amplitude déterminée, ne serait plus exact si l'amplitude variait notablement : à cet égard, les spiraux théoriques de M. Phillips conservent une supériorité indiscutable. Deux spiraux symétriques, viroles à 180°, corrigeraient ce défaut.

Conclusion.

1° Si l'on peut négliger les causes perturbatrices telles que la *force centrifuge,* l'*inertie du spiral,* etc., le spiral hélicoïdal sans courbes permet d'obtenir l'*isochronisme rigoureux :* les points d'isochronisme sont $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$.

2° Le *frottement, variable* avec l'angle d'écart qui résulte des pressions latérales que produit le spiral, est *sans influence sur l'intervalle des battements du chronomètre,* et, par conséquent, on peut en faire abstraction au point de vue de l'isochronisme. Ce frottement n'a d'autre effet que de rendre inégales les deux parties d'une même oscillation, c'est-à-dire les durées comprises entre les instants auxquels le balancier passe par sa position d'équilibre en venant de l'amplitude extrême et en y allant. L'expérience confirme ce résultat.

3° Pour déterminer l'isochronisme par l'expérience, en tenant compte des autres perturbations, on cherche par tâtonnement la position de la virole sur un point plus éloigné du piton que 90°; alors l'isochronisme n'est plus aussi rigoureux, mais il est encore suffisant. La théorie indique que les meilleures conditions pour expérimenter l'isochronisme sont les amplitudes comprises entre 2,75 [maximum de $\alpha^2 S(\alpha) - Z(\alpha)$] et 4,00, soit entre 158° et 230° de part et d'autre. Ce sont, du reste, des amplitudes peu différentes de celles qu'on expérimente en pratique.

4° Les amplitudes équidistantes de 158° sont les plus défavorables pour la détermination expérimentale de l'isochronisme. En général, il faut que la différence des valeurs de $\alpha^2 S(\alpha) - Z(\alpha)$ pour les deux amplitudes considérées soit la plus grande possible. *Ce résultat est très important* et ne paraît pas avoir été aperçu empiriquement par les horlogers.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

α.		S.	Z.	$\alpha^2 S$.	$\alpha^2 S - Z$.
	°				
0,0	0	+0,5000	+1,0000	0,0000	−1,0000
0,1	5,7	4994	0,9975	+0,0050	0,9925
0,2	11,5	4975	9900	0199	9701
0,3	17,2	4944	9776	0445	9331
0,4	22,9	4901	9604	0784	8820
0,5	28,6	+0,4845	+0,9385	+0,1211	−0,8174
0,6	34,4	4779	9120	1720	7400
0,7	40,1	4700	8812	2303	6509
0,8	45,8	4611	8463	2951	5512
0,9	51,6	4511	8075	3654	4421
1,0	57,3	+0,4401	+0,7652	+0,4401	−0,3251
1,1	63,0	4281	7196	5180	2016
1,2	68,8	4152	6711	5979	−0,0732
1,3	74,5	4016	6201	6786	+0,0585
1,4	80,2	3871	5669	7587	1918
1,5	85,9	+0,3720	+0,5118	+0,8369	+0,3251
1,6	91,7	3562	4554	9118	4564
1,7	97,4	3400	3980	9822	5842
1,8	103,1	3231	3400	+1,0467	7067
1,9	108,9	3059	2818	1,1042	8224
2,0	114,6	+0,2884	+0,2239	+1,1535	+0,9296
2,1	120,3	2706	1666	1,1934	1,0268
2,2	126,1	2527	1104	1,2231	1,1127
2,3	131,8	2348	0555	1,2417	1,1862
2,4	137,5	2167	+0,0025	1,2484	1,2459
2,5	143,2	+0,1988	−0,0484	+1,2427	+1,2911
2,6	149,0	1811	0968	1,2241	1,3209
2,7	154,7	1636	1424	1,1923	1,3347
2,8	160,4	1463	1850	1,1472	1,3322
2,9	166,2	1295	2243	1,0887	1,3125
3,0	171,9	+0,1130	−0,2601	+1,0172	+1,2773
3,1	177,6	0971	2921	+0,9329	1,2250
3,2	183,4	+0,0817	−0,3202	+0,8363	+1,1565
3,3	189,1	0667	3443	7282	1,0725
3,4	194,8	0527	3643	6094	0,9737
3,5	200,5	+0,0393	−0,3801	+0,4808	+0,8609
3,6	206,3	0265	3918	3437	7355
3,7	212,0	0145	3992	1992	5984
3,8	217,7	+0,0034	4026	+0,0487	4513
3,9	223,5	−0,0070	4018	−0,1062	2956

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

α.		S.	Z.	$\alpha^2 S$.	$\alpha^2 S - Z$.
4,0	229,2	—0,0165	—0,3972	—0,2642	+0,1330
4,1	234,9	0252	3887	4233	—0,0346
4,2	240,7	0330	3766	5823	2057
4,3	246,4	0400	3610	7392	3782
4,4	252,1	0461	3423	—0,8922	5499
4,5	257,8	—0,0512	—0,3205	—1,0398	—0,7193
4,6	263,6	0558	2961	1,1801	8840
4,7	269,3	0594	2693	1,3117	1,0424
4,8	275,0	0622	2404	1,4328	1,1924
4,9	280,8	0642	2097	1,5420	1,3323
5,0	286,5	—0,0655	—0,1776	—1,6379	—1,4603
5,1	292,2	0661	1443	7192	1,5749
5,2	298,0	0660	1103	7846	1,6743
5,3	303,7	0653	0758	8336	1,7578
5,4	309,4	0640	0412	8649	1,8237
5,5	315,1	—0,0621	—0,0068	—1,8779	—1,8711
5,6	320,9	0597	+0,0270	1,8723	1,8993
5,7	326,6	0568	0599	1,8476	1,9075
5,8	332,3	0536	0917	1,8040	1,8957
5,9	338,0	0500	1220	1,7413	1,8633
6,0	343,8	—0,0461	+0,1506	—1,6601	—1,8107
6,1	349,5	0419	1773	1,5608	1,7381
6,2	355,3	0375	2017	1,4441	1,6458
6,3	361,0	—0,0330	+0,2238	—1,3109	—1,5347

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT V
Bureau du Congrès VI
Liste par ordre alphabétique des membres du Congrès VII
Commission d'organisation XI
Associés étrangers XII
Délégués XIV
Procès-verbaux des séances XV

RAPPORTS, MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Allocution de M. Caspari 1
Épreuves et concours pour les chronomètres de poche. Comparaison des règlements, par M. P. de Vanssay 5
Mémoire sur la compensation thermique des pendules, par M. J.-M. Faddegon 13
Rapport sur la question : Définition du chronomètre, genre d'échappement qu'il comporte, par M. A.-H. Rodanet 34
Classification des échappements, par M. Paul Ditisheim 40
Sur l'horloge à grand balancier de l'observatoire de Nice, par M. A. Cornu 47
Action du champ magnétique terrestre sur la marche d'un chronomètre aimanté, par M. A. Cornu 55
Réglage des chronomètres de poche aux positions verticales. Appareils servant à déterminer exactement et pratiquement la position du point d'attache du spiral à la virole, pour une montre donnée, par M. Favre Heinrich 60
Étude sur la montre à billes, par M. Maillard-Salin 63
Le prix d'un chronomètre et sa valeur scientifique, par M. Le Dr Kaiser 66
Pendule à restitution électrique constante, par M. C. Féry 69
Détermination des constantes des formules des marches par le calcul. Étude sur les méthodes de Tobie Mayer et de Cauchy, par M. Goedseels 73
Les aciers au nickel et leurs applications à la Chronométrie, par M. Ch.-Ed. Guillaume 90
Chronographe, par M. C.-W. Schmidt 113
Application de chronomètres décimaux à la pratique de la navigation, par M. E. Guyou 116
Décimalisation du jour entier, par M. de Rey-Pailhade 122
Décimalisation du temps et des angles, tables de réduction, par M. E. Goedseels 126
Système métrique décimal dans le calcul du temps, par M. le Dr Florenzo Jaja 143
Horloge électrique, par M. R. Thury 146
Rapport de la Commission chargée de l'étude des épreuves et concours pour les chronomètres, dans le but d'obtenir une uniformisation des épreuves dans les observatoires, par M. R. Gautier 153

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires

Pages
Sur les chronomètres de la marine française, par M. E. Caspari 157
Sur un moyen de maintenir à pression constante une horloge placée dans une enveloppe à peu près étanche, par M. G. Bigourdan 162
Lois des variations rapides d'amplitude du balancier des chronomètres, par M. Marcel Brillouin 164
Sur la définition d'une unité de temps indépendante du mouvement diurne, par M. G. Lippmann 175
Rapport de la Commission des formules de marche, par M. Goedseels 177
Les unités de l'horlogerie, par M. Ch.-Ed. Guillaume 179
Rapport sur les délibérations de la Commission des unités, par M. Faddegon 184
Étude sur les lames bimétalliques des balanciers compensateurs et sur les divers systèmes de compensation supplémentaire qui ont été employés dans les chronomètres, par M. A.-L. Berthoud 187
L'heure perpétuelle par la marée, par M. L. Poultier 193
Appareil pour la construction des courbes terminales des spiraux, par M. Ch.-Ed. Guillaume 195
Sur la distribution de l'heure civile, par M. A. Favarger 198
Appareil sémaphorique à signaux instantanés dit *signal horaire,* pour la transmission de l'heure dans les ports. Système imaginé par MM. Hanusse, ingénieur hydrographe, et G. Borrel, constructeur, par M. G. Borrel 204
Vitesse angulaire du balancier, engrenages à bascule, rayon de giration d'un balancier circulaire, variations de marche des chronomètres, par M. E. Antoine 208
Répartiteur angulaire de M. Guillerminet, par M. Rozé 212
Mémoires sur l'isochronisme du spiral cylindrique, par M. E. Caspari 217
TABLE DES MATIÈRES 253

ERRATA.

Page 198, ligne 3, *au lieu de* FAVERGER, *lisez* FAVARGER.

29113 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Droits reservés au Cnam et à ses partenaires