

Titre : Transport de force. Deuxième partie

Auteur : Le Roy, C.

Mots-clés : Électrification*France*1870-1914

Description : 1 vol. (143 p. - 1 pl. depl.) ; 25 cm

Adresse : Paris : A. Hermann, 1913

Cote de l'exemplaire : CNAM-BIB 8 Ca 577 (2)

URL permanente : <http://cnum.cnam.fr/redir?8CA577.2>

CALCULS TECHNIQUES ET ÉCONOMIQUES
DES
LIGNES DE TRANSPORT
ET DE
DISTRIBUTION D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

8° Ca. 577

TRANSPORT DE FORCE

8° Ca. 577

CALCULS TECHNIQUES ET ÉCONOMIQUES

DES

LIGNES DE TRANSPORT

ET DE

DISTRIBUTION D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

PAR

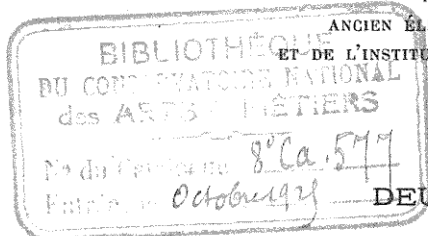


C. LE ROY

INGÉNIEUR ÉLECTRICIEN

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ET DE L'INSTITUT ÉLECTROTECHNIQUE DE MONTEFIORE



DEUXIÈME PARTIE

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN ET FILS

LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1913

CHAPITRE PREMIER

CAPACITANCE

I. — Définitions

Dans les circuits que nous étudions, les effets de capacité d'un conducteur et de la terre, et les effets de capacité mutuelle de ce même conducteur et des conducteurs voisins, peuvent souvent, comme résultat final (grandeur et direction du vecteur représentant le courant de capacité), être ramenés à un effet de capacité unique entre ce conducteur et le conducteur neutre fictif.

En appelant C la valeur de cette capacité apparente unique, l'intensité efficace du courant de capacité du conducteur considéré sera donné par la formule :

$$I_{eff} = \omega.C.U_{eff}.$$

U_{eff} étant la valeur efficace de la tension simple.

Par analogie, avec la perditance, dont le produit par la tension simple efficace donne le courant de perte, nous appellerons *capacitance* le produit de la pulsation $\omega = 2\pi n$ par le coefficient de capacité apparente.

Cette définition n'est pas universellement adoptée : certains auteurs, rapprochant la capacitance de la résistance, appellent capacitance le rapport $\frac{4}{\omega C}$, c'est-à-dire l'inverse de la quantité, que nous considérons.

La suite de cette étude montrera que, dans les lignes aériennes ou souterraines, il est plus logique de rapprocher les effets de capacité et les effets de perditance.

II. — Capacitance des lignes aériennes. — Théories et formules générales

1° THÉORIE DES IMAGES ÉLECTRIQUES. — Considérons un système de conducteurs aériens A_1, A_2, \dots, A_n , soient v_1, v_2, \dots, v_n leurs potentiels au temps t ; q_1, q_2, \dots, q_n leurs charges à la même époque.

Cherchons à déterminer les relations qui existent entre les potentiels et les charges.

Les conducteurs étant en présence de la terre, pour déterminer le potentiel en un point P donné, situé au-dessus du sol, nous avons à tenir compte non seulement des masses q_1, q_2, \dots, q_n placées sur les conducteurs $1, 2, \dots, n$; mais aussi des masses $(-q_1), (-q_2), \dots, (-q_n)$ attirées par influence à la surface de la terre.

La théorie des images de Lord Kelvin simplifie considérablement le problème.

Lord Kelvin a en effet démontré que :

La masse d'électricité $(+q)$ étant placée en S , en présence d'un plan conducteur LL' , on peut, pour tous les points tels que P situés, par rapport au plan LL' , du même côté que S , remplacer l'effet de la masse $(-q)$ répartie sur le plan, par l'effet d'une masse $(-q)$ concentrée au point S_1 , symétrique de S par rapport au plan LL' .

Voici, textuellement, la démonstration de Lord Kelvin (1) :

« Proposition. — Soit LL' un plan indéfini. Si la densité électrique varie sur ce plan, en raison inverse du cube de la distance à un point S ; la force résultante, due à l'action de l'électricité du plan LL' sur l'unité de masse placée au point P (situé du même côté que S par rapport au plan) est la même, que si toute la masse électrique du plan LL' était concentrée en S_1 symétrique de S .

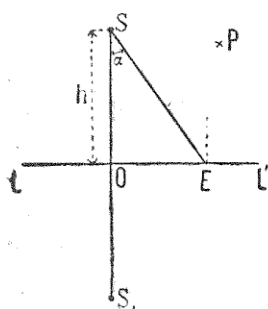


Fig. 1

En effet, prenons des axes de coordonnées ox, oy, oz .

oz étant confondu avec la verticale OS .

Les coordonnées de E sont ξ, η, o .

Celles de P : x, y, z .

(1) *Journal de l'Université de Cambridge*, 1849.

Celles de S : o, o, h .

La densité au point E est par hypothèse $\sigma = \frac{\lambda}{SE^3}$.

L'action du plan LL' sur le point P est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda d\xi d\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{2\pi\lambda}{h}}{[x^2 + y^2 + (z + h)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Ce qui exprime que l'action du plan LL' est la même que celle d'une masse électrique $\frac{2\pi\lambda}{h}$ concentrée, au point S₁.

Mais la masse totale d'électricité du plan est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda d\xi d\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi\lambda}{h}.$$

Ce qui démontre la proposition » (1).

Dans le cas que nous considérons, la densité sur le plan varie bien en raison inverse du cube de la distance.

Soit, en effet, un point S, où est concentrée, une masse d'électricité (+ q). Une masse (− q) est par influence attirée à la surface du plan LL' ou de la terre.

La densité σ , en un point E, est telle que la composante normale au plan LL' de l'action de S sur l'unité de surface du plan est égale à la tension superficielle, en ce point.

On a donc :

$$2\pi\sigma^2 = \frac{q \cdot \sigma \cos \alpha}{SE^2} = \frac{q\sigma h}{SE^3}.$$

D'où :

$$\sigma = \frac{\frac{h}{2\pi} \times q}{SE^3}.$$

2° POTENTIEL EN UN POINT P DU A UN FIL CHARGÉ ET A SON IMAGE ÉLECTRIQUE. — Nous sommes conduits en généralisant le principe de lord Kelyin à considérer les conducteurs A_1, A_2, \dots, A_n et leurs images électriques A'_1, A'_2, \dots, A'_n .

Cherchons donc pour un point P, le potentiel dû à un fil A chargé d'une masse (+ q) par unité de longueur, et à son image A'

(1) La première intégration est assez longue, la seconde est immédiate.

chargée d'une masse $(-q)$ par unité de longueur. Les conducteurs étant supposés placés dans l'air.

Soient l la longueur du conducteur A, O et O' les centres du conducteur et de son image.

a_1 , la plus courte distance dans l'espace du point P à l'axe du conducteur A ;

a_2 , la même distance à l'axe de l'image A'.

b la distance du point O au pied de la perpendiculaire abaissée de P sur l'axe du conducteur A. ($b = OB$).

Si nous supposons une distribution uniforme ⁽¹⁾ de l'électricité sur la circonférence du conducteur A, le potentiel en P dû au conducteur A devient :

$$V_1^A = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{q dx}{\sqrt{(x-b)^2 + a_1^2}} = q \left[\log[(x-b) + \sqrt{(x-b)^2 + a_1^2}] \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}.$$

$$\text{D'où : } V_1^A = q \cdot \log \frac{\sqrt{a_1^2 + \left(\frac{l}{2} - b\right)^2} + \left(\frac{l}{2} - b\right)}{\sqrt{a_1^2 + \left(\frac{l}{2} + b\right)^2} - \left(\frac{l}{2} + b\right)}.$$

Multiplions les deux termes de la fraction par $\left[\sqrt{a_1^2 + \left(\frac{l}{2} + b\right)^2} + \left(\frac{l}{2} + b\right)\right]$ le dénominateur se réduira à (a_1^2) et le numérateur à $4\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - b^2\right]$ en négligeant a_1 devant $\frac{l}{2}$. On a donc :

$$V_1^A = q \log \frac{4\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - b^2\right]}{a_1^2}.$$

L'image électrique A' du conducteur A augmente le potentiel en P de la quantité $V_1^{A'} = -q \log \frac{4\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - b^2\right]}{a_2^2}$.

Le potentiel en P dû au conducteur A et à son image est donc :

$$V_P = V_1^A + V_1^{A'} = q \cdot \log \frac{a_2^2}{a_1^2} = 2q \log \frac{a_2}{a_1}.$$

(1) En réalité la distribution de l'électricité n'est pas uniforme. La surface de densité peut être représentée par une ellipse ayant un foyer sur l'axe du conducteur ; mais si la distance entre fils D est plus grande que 25 fois le diamètre du conducteur l'erreur faite en admettant une distribution uniforme est très faible (Pender et Osborne, *Electrical World*, 22 sept. 1910).

Nous avons supposé dans cette démonstration que l'effet du conducteur A sur P était identique à l'effet de la charge du conducteur concentrée toute entière sur l'axe. Ceci suppose que la charge, comme nous l'avons dit, n'est pas trop inégalement répartie sur la circonférence du conducteur. Ceci suppose également que le point P est extérieur au conducteur.

Si le point P est situé à l'intérieur du conducteur, le potentiel en P dû à ce conducteur est le même que le potentiel en P' — P' étant situé sur l'axe ; mais alors les distances à l'axe de toutes les masses électriques du conducteur A étant égales à r . On a :

$$V_{1^A} = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{q dx}{\sqrt{(x-b)^2 + r^2}} = q \cdot \log \frac{4 \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - b^2 \right]}{r^2}.$$

et comme précédemment :

$$V_{1^{A'}} = - q \log \frac{4 \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - b^2 \right]}{S_{1,1}^2}.$$

En désignant par $S_{1,1}$ la distance entre le conducteur A et son image A'.

Faisant la somme $V_{1^A} + V_{1^{A'}}$ on a pour le potentiel en P' dû au conducteur A et à son image A' : $V_{P'} = 2q \log \frac{S_{1,1}}{r}$.

3° PROBLÈME GÉNÉRAL. — DÉTERMINATION DES COURANTS DE CAPACITÉ D'UNE LIGNE AÉRIENNE A n CONDUCTEURS ⁽¹⁾. — Abordons maintenant le problème général et désignons par :

$r_{1,1}, r_{2,2}, \dots, r_{n,n}$ les rayons des n conducteurs considérés.

v_1, v_2, \dots, v_n les potentiels (au temps t) de ces conducteurs.

q_1, q_2, \dots, q_n les charges (au temps t), par unité de longueur.

par r_{mn} la distance entre le centre du conducteur m et le centre du conducteur n .

par S_{mn} la distance entre le centre du conducteur m et le centre de l'image du conducteur n .

Le potentiel v_1 du conducteur 1 est la somme des potentiels dus aux conducteurs 1, 2, ... n et à leurs images.

On a donc :

(1) Heaviside, *Electrical papers*, I, page 42 ; II, page 403.

[illegible]

Les coefficients α dépendent seulement de la forme et de la position relative des conducteurs ; ils sont indépendants de v et de Q : ce sont les « coefficients de potentiel ».

On peut démontrer que les coefficients α sont toujours positifs et que $\alpha_{m,n} = \alpha_{n,m}$.

Dans l'application de ces formules dites « de Maxwell » ou des formules (1) du paragraphe précédent, qui n'en sont qu'un cas particulier, il est bon de se souvenir :

1° Qu'un *conducteur* d'une ligne de transport *sous tension* est caractérisé par un *voltage* v_p et une *charge* Q_p .

2° Qu'un *fil mis à la terre* est caractérisé par un *voltage nul* $v = 0$ et une charge Q_m .

3° Qu'un *fil isolé* est caractérisé par une *charge nulle* $Q = 0$ et un *voltage* v_n .

D'après ces remarques il est facile de conclure la signification d'un coefficient : α_{pp} est le potentiel que prend le conducteur p quand il est chargé de l'unité d'électricité et que tous les autres conducteurs sont isolés ; $\alpha_{q,p}$ est le potentiel du conducteur q dans les mêmes conditions (conducteur p chargé de l'unité d'électricité).

Réolvons les équations (1) par rapport à Q_1, Q_2, \dots, Q_n et mettons la longueur de la canalisation en évidence, puisqu'il s'agira toujours dans nos applications de conducteurs de grandes longueurs, nous avons :

$$\begin{aligned} Q_1 &= lq_1 = lC_{1,1}v_1 + lC_{1,2}v_2 + \dots + lC_{1,n}v_n \\ &\vdots \\ Q_n &= lq_n = lC_{n,1}v_1 + lC_{n,2}v_2 + \dots + lC_{n,n}v_n \end{aligned}$$

On démontre d'une façon générale et nous vérifierons dans de nombreux exemples algébriques et numériques :

1° Que tous les facteurs C_{pp} sont positifs et tous les facteurs C_{pq} négatifs.

2º que $C_{p,q} = C_{q,p}$.

La signification de ces coefficients est facile à établir :

Relions tous les conducteurs sauf le conducteur p à la terre, et mettons le conducteur p en communication avec une source au potentiel 1. L'autre pôle de la source étant mis à la terre.

On aura : $v_1 = 0 \dots v_p = 1 \dots v_n = 0$

et par suite : $Q_1 = l \times C_{1,p}$ $Q_p = l \times C_{pp}$ $Q_n = l \times C_{n,p}$.

On en conclut que :

$C_{p,p}$ est la charge par unité de longueur qu'il faut donner au conducteur p pour le porter à l'unité de potentiel lorsque tous les autres conducteurs sont au potentiel 0.

Le facteur C_{pp} est appelé le coefficient de capacité du conducteur p , par unité de longueur.

$C_{q,p}$ est la charge par unité de longueur que prend, en même temps, par influence le conducteur q en communication avec le sol. — On a donné divers noms à ce coefficient : c'est un coefficient d'induction mutuelle pour charges électrostatiques.

C_{pp} correspond au coefficient de self-induction. C_{qp} au coefficient d'induction mutuelle.

Définitions diverses de la capacité. — *Capacité de deux conducteurs* = Soient n conducteurs : 1, 2, ..., n .

Supposons les conducteurs 1 et 2 isolés et que les conducteurs n'aient pas de charge à l'origine. Communiquons au conducteur 1 une charge (+ q) au conducteur (2) une charge (— q).

Si le potentiel du conducteur (1) est supérieur au potentiel du conducteur (2) de $v_1 - v_2$. On appelle *capacité des deux conducteurs* le rapport de q à $v_1 - v_2$. On a : $C' = \frac{q}{v_1 - v_2}$.

« Le fait de relier à la terre, un ou plusieurs des conducteurs « 3, 4, ..., n modifie la valeur de C' . Il faut donc spécifier dans un « essai de ce genre quels sont les conducteurs mis à la terre et « quels sont les conducteurs isolés (1).

Capacité apparente d'un conducteur. — Le calcul des coefficients C_{11} , C_{12} , ..., $C_{1,n}$ etc., et les relations qui existent entre les tensions simples d'un système polyphasé, ou les valeurs particulières de ces tensions simples, nous amèneront souvent, pour certaines conditions de marche, à réduire les équations (2) :

$$Q_1 = Iq_1 = IC_{11}v_1 + IC_{12}v_2 + \dots IC_{1n}v_n$$

à la forme simple $Q_1 = ICv_1$.

C étant une combinaison des coefficients C_{11} , C_{12} , etc., sera la capacité apparente du conducteur (1).

On appellera donc *capacité apparente d'un conducteur* le rapport de la charge de ce conducteur à son potentiel absolu.

Cette définition est fort nette ; mais le coefficient ne se rapporte naturellement qu'aux conditions de marche, qui ont permis la réduction précitée. En général, lorsque l'on parle de la capacité

(1) Russel, *Traité du courant alternatif*, Traduction Seligmann-Lui.

apparente d'un conducteur, il s'agit de la marche normale, avec tous les conducteurs isolés de la terre.

Capacité d'un conducteur mis à la terre. — La capacité d'un conducteur mis à la terre est défini par la valeur de ses coefficients d'induction mutuelle électrostatique.

Détermination des courants de capacité. — Nous allons étudier les courants de capacité des lignes aériennes, dans des exemples assez nombreux. Nous partirons toujours ⁽¹⁾ des équations de Maxwell n° 1 en α . Les coefficients α sont ici très simples $\alpha_{pp} = 2 \log \frac{S_{pp}}{r_{pp}}$ et $\alpha_{p,q} = 2 \log \frac{S_{p,q}}{r_{p,q}}$. Ces coefficients sont tous positifs : il n'y a donc place pour aucune erreur. Après avoir donné aux potentiels instantanés les valeurs résultant du problème étudié, nous résoudrons les équations en α par rapport à q_1, q_2, \dots, q_n et obtiendrons ainsi les coefficients de capacité ou quelquefois la capacité apparente correspondant au cas proposé.

III. — Capacité des lignes aériennes. Formules particulières

1° CAPACITÉ ENTRE UN CONDUCTEUR ET LA TERRE SERVANT DE RETOUR. — Considérons une ligne électrique composée d'un seul fil, avec retour par la terre.

Soient h la distance du fil au-dessus du sol, et r le rayon du fil unique.

Si q_1 est la charge par unité de longueur au temps t du fil (1) et v le potentiel au temps t on a ; d'après les équations (1) de la page (6) :

$$v = 2q_1 \log \frac{2h}{r}.$$

La capacité d'un fil par rapport à la terre est donc par unité de longueur

$$C' = \frac{q_1}{v} = \frac{1}{2 \log \frac{2h}{r}}.$$



Fig. 3.

C'est exprimé en unités électrostatiques ; si nous voulons l'exprimer

(1) Il faut éviter complètement toutes les méthodes assimilant deux fils de lignes aériennes, un fil de ligne et la terre à des condensateurs parfaits : les flux électrostatiques, en effet, se mélangent et les fautes de signes sont difficiles à éviter. Nous verrons plus loin (coefficients de Potier) comment on peut se servir des capacités entre conducteurs.

en *unités pratiques* ⁽¹⁾ nous aurons à multiplier C par le rapport de transformation. On aura, en passant aux unités pratiques et employant les logarithmes vulgaires (lov.) :

$$C'' = \frac{1}{2 \times 2,303 \text{ lov. } \frac{2h}{r}} \times \frac{1}{9 \times 10^{11}} \frac{\text{farads}}{\text{centimètres}}$$

ou bien
$$C = \frac{1}{4,606} \frac{1}{\text{lov } \frac{2h}{r}} \times \frac{1}{9 \times 10^6} \frac{\text{farads}}{\text{kilomètres}} =$$

$$= \frac{0,02443}{10^6} \frac{1}{\text{lov } \frac{2h}{r}} \left(\frac{\text{farads}}{\text{kilomètres}} \right).$$

Le courant de capacité du fil (1) sera donné par l'équation

$$i_1 = C \times l \times \frac{dv}{dt}.$$

Si la ligne est branchée à un transformateur monophasé dont la tension efficace, totale, entre les points A et B est E_{eff} , on aura pour la valeur efficace du courant de capacité :

$$(I_1)_{eff} = \omega.C.l.E_{eff}.$$

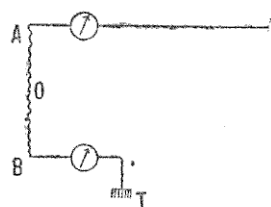


Fig. 4.

En effet, on a $v = E_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega t)$.

Application numérique. — Considérons une ligne de 76 kilomètres de longueur.

La hauteur du fil unique est de 11^m,50. Le rayon du fil 0^{cm},506. On applique à cette ligne un voltage entre fil et terre de

(1) En désignant par $e_s, i_s, q_s, r_s, c_s \dots e_m, i_m, q_m, r_m, c_m$, les unités, dans le système électrostatique, et dans le système électromagnétique, de force électromotrice, d'intensité, de quantité, de résistance et de capacité, on a :

$$\frac{e_s}{e_m} = \frac{q_m}{q_s} = \frac{i_m}{i_s} = \sqrt{\frac{r_s}{r_m}} = \sqrt{\frac{c_m}{c_s}} = 3 \times 10^{10} \text{ (vitesse de lumière dans le système C. G. S.)}.$$

Pour passer aux unités pratiques qui sont électromagnétiques, nous avons en nous servant du tableau de la page 101 (1^{re} partie) l'équivalence suivante ;

$$1 \text{ ohm vaut } \frac{10^9}{3^2 \times 10^{20}} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-11} \text{ unités électrostatiques}$$

$$1 \text{ ampère vaut } 10^{-1} \times 3 \times 10^{10} = 3 \times 10^9 \text{ unités électrostatiques.}$$

$$1 \text{ volt vaut } \frac{10^8}{3 \times 10^{10}} = \frac{1}{3} \times 10^{-2} \text{ unités électrostatiques.}$$

$$1 \text{ coulomb vaut } 10^{-1} \times 3 \times 10^{10} = 3 \times 10^9 \text{ unités électrostatiques.}$$

$$1 \text{ farad vaut } 10^{-9} \times 9 \times 10^{20} = 9 \times 10^{11} \text{ unités électrostatiques.}$$

40.000 volts. Cherchons le courant de capacité du fil, sachant que la fréquence du courant alternatif est de 25 cycles.

On a :

$$C = \frac{0,02413}{\log \frac{2h}{r}} \frac{\text{microfarads}}{\text{kilomètres}} = \frac{0,02413}{\log \frac{2.300}{0,506}} (\text{m. k.}) = 0,00665 \text{ microf par km.}$$

$$\text{et} \quad I_{eff} = \omega C E_{eff} =$$

$$= 2 \times 3,14 \times 25 \times 0,00665 \times 10^{-6} \times 76 \times 40.000 = 3^A,17.$$

Ce courant de 3^A,17 sera indiqué par l'ampèremètre A de la ligne, et par l'ampèremètre B de la terre.

2° CAPACITÉ D'UNE LIGNE MONOPHASÉE A DEUX CONDUCTEURS. — Soient D la distance entre fils, h leur distance du sol r leur rayon.

Désignant par q_1 et q_2 les charges instantanées, par v_1 et v_2 les potentiels instantanés, appliquant les équations générales, et remarquant que $S_{11} = 2h$ et $S_{12} = \sqrt{4h^2 + D^2}$; on a :

$$v_1 = 2q_1 \log \frac{2h}{r} + 2q_2 \log \frac{\sqrt{4h^2 + D^2}}{D}$$

$$v_2 = 2q_1 \log \frac{\sqrt{4h^2 + D^2}}{D} + 2q_2 \log \frac{2h}{r}.$$

Etant donné, la symétrie complète des deux fils qui ont même rayon et même situation par rapport à la terre, on a : $v_1 = -v_2$ et $q_1 = -q_2$.

Les équations (1) deviennent alors ; en remplaçant dans la première q_2 par $(-q_1)$:

$$v_1 = 2q_1 \log \left[\frac{D}{r} \cdot \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + D^2}} \right],$$

$$v_2 = 2q_2 \log \left[\frac{D}{r} \cdot \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + D^2}} \right].$$

Les deux coefficients de self-induction mutuelle électrostatique se confondent donc, dans ce cas, en un seul coefficient de capacité apparente. Si nous désignons par C' ce coefficient.

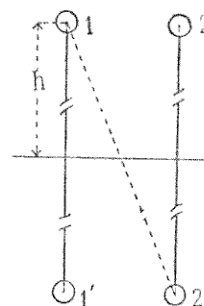


Fig. 5.

On a :

$$(2) \quad C = \frac{q_1}{v_1} = \frac{1}{2 \log \frac{D}{r} \times \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + D^2}}}.$$

La quantité $\frac{2h}{\sqrt{4h^2 + D^2}}$ est souvent très voisine de l'unité ; si nous admettons, que ce multiplicateur est égal à l'unité, il vient :

$$(3) \quad C' = \frac{1}{2 \log \frac{D}{r}}.$$

C'est la capacité par unité de longueur du conducteur (1) c'est-à-dire le rapport entre la charge de ce conducteur par unité de longueur et le potentiel absolu de ce conducteur.

Ce potentiel absolu est dans ce cas égal à la tension simple, c'est-à-dire à la tension qui existe entre ce conducteur, et, le fil neutre, que nous considérons constamment dans nos études de lignes.

La formule (3) exprime C' en unités électrostatiques, si nous passons aux unités pratiques, nous avons ⁽¹⁾ en employant les logarithmes vulgaires :

$$(4) \quad C = \frac{1}{4,606} \times \frac{1}{\log \frac{D}{r}} \times \frac{1}{9 \times 10^6} = \frac{0,02413}{10^6} \frac{1}{\log \frac{D}{r}} \frac{\text{farads}}{\text{kilomètres}}.$$

Le courant de capacité du fil (1) sera exprimé par l'équation

$$i_1 = C.l. \frac{dv_1}{dt}, \text{ ou bien en passant aux valeurs efficaces,}$$

$$I_{eff} = \omega.C.l. U_{eff} = \omega.C.l. \frac{E_{eff}}{2},$$

$$\text{on a, en effet, } v_1 = \sqrt{2} \cdot U_{eff} \sin(\omega t) = \sqrt{2} \frac{E_{eff}}{2} \sin(\omega t).$$

(1) La formule (4) n'est applicable que si $\frac{D}{r} > 12$ (Voir la note de la page 4).

Si $\frac{D}{r}$ est plus petit que 12 il faut tenir compte de l'inégalité de répartition des charges sur la circonférence du conducteur. Les fonctions hyperboliques interviennent alors et on a : $C = \frac{0,0535}{10^6} \cdot \frac{1}{\text{Arg.coh.} \frac{D}{2r}}$ farads-kilomètres. Pour

les lignes aériennes la formule (4) est presque toujours suffisante.

Si nous réunissons la ligne aux deux bornes, haute tension, d'un transformateur AB dont le voltage efficace entre les bornes A et B est E_{eff} , on aura $I_{eff} = \omega C l \frac{E_{eff}}{2}$.

Dans le montage de la figure, les ampèremètres placés sur chaque fil, indiqueront la même valeur de I_{eff} , l'aiguille de l'ampèremètre placé sur la jonction du centre du transformateur à la terre restera sur le zéro.

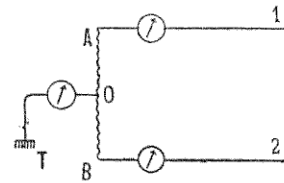


Fig. 6.

Exemple numérique. — Considérons comme précédemment une ligne de 76 kilomètres. Les deux fils sont situés à 1^m,70 l'un de l'autre. La distance des fils au sol est de 11^m,50. Le rayon des fils est 0^{cm},506. Chercher le courant de capacité lorsque la ligne est alimentée sous la tension composée entre fils de 40.000 volts et que le nombre de cycles égale 25.

$$\text{On a : } C = \frac{0,02413}{\log \frac{170}{0,506}} \frac{\text{microfarads}}{\text{kilomètres}} = 0,00954 \frac{\text{microfarads}}{\text{kilomètres}},$$

et

$$I_{eff} = 2 \times 3,14 \times 25 \times 0,00954 \times 10^{-6} \times 76 \times \frac{40.000}{2} = 2^A, 28.$$

Nous avons pris pour C la formule (4) ne tenant pas compte de l'influence de la terre ; en effet le terme

$$\frac{2h}{\sqrt{4h^2 + D^2}} = \frac{2.300}{\sqrt{2.200^2 + 170^2}} = \frac{2.300}{2.306}.$$

Diffère très peu de l'unité et son logarithme diffère très peu de zéro. Si on en tient compte, on constate que le dernier chiffre trouvé pour la valeur de C n'est pas modifié ; l'influence de ce terme ne se fait sentir que sur les millionièmes de microfarad, dans le cas actuel.

Toutes les fois que les fils sont isolés de la terre on peut négliger son influence, lorsque le rapport $\frac{D}{2h}$ est plus petit que $\frac{1}{10}$.

Si nous comparons ce cas, au cas précédent, nous constatons que le courant de capacité est plus faible. Si nous rapportons les capacités au même voltage E_{eff} , nous voyons que la capacité du fil (1) par rapport au fil (2) est : $\frac{0,00954}{2} = 0,00477$ dans le cas actuel, tandis que dans le premier exemple (retour par la terre) la capacité du fil (1) par rapport à la terre était 0,00665.

Cas particuliers. — Il est intéressant d'examiner rapidement quelques cas particuliers.

3° CAPACITÉ D'UNE LIGNE MONOPHASÉE LORSQUE L'UN DES FILS EST MIS A LA TERRE. — Si le fil 2 est mis à la terre on a $v_2 = 0$.

La différence de potentiel entre les fils restant constante le potentiel du fil (1) devient $v = E_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega t)$. Avant la mise à la terre il était $v_1 = \frac{E_{eff}}{2} \sqrt{2} \sin(\omega t)$.

Les équations de Maxwell sont donc, en posant $\sqrt{4h^2 + D^2} = 2\lambda$.

$$(1) \quad v = 2q_1 \log. \frac{2h}{r} + 2q_2 \log \frac{2\lambda}{D}.$$

$$(2) \quad 0 = 2q_1 \log \frac{2\lambda}{D} + 2q_2 \log \frac{2h}{r}.$$

De l'équation (2) on tire :

$$(3) \quad q_2 = - \frac{\log. \frac{2\lambda}{D}}{\log \frac{2h}{r}} \times q_1.$$

Portant dans l'équation (1) il vient :

$$(4) \quad v = 2q_1 \left[\log. \frac{2h}{r} - \frac{\left(\log. \frac{2\lambda}{D} \right)^2}{\log. \frac{2h}{r}} \right].$$

Les deux coefficients d'induction mutuelle et de self-induction électrostatique se confondent par le fil (1) en un seul coefficient de capacité apparente spécial à cette marche particulière.

$$(5) \quad C = \frac{\log. \frac{2h}{r}}{2 \left[\left(\log \frac{2h}{r} \right)^2 - \left(\log \frac{2\lambda}{D} \right)^2 \right]}.$$

Si nous éliminons q_1 entre les équations 1 et 3 nous trouvons :

$$(6) \quad v = 2q_2 \left[\log \frac{2\lambda}{D} - \frac{\left(\log. \frac{2h}{r} \right)^2}{\log \frac{2\lambda}{D}} \right].$$

Nous voyons que le coefficient d'induction mutuelle $C_{2,1}$ pour charge électrostatique caractérise seul la capacité du conducteur (2).

$$(7) \quad C_{2,1} = - \frac{\log \frac{2\lambda}{D}}{2 \left[\left(\log \frac{2h}{r} \right)^2 - \left(\log \frac{2\lambda}{D} \right)^2 \right]}.$$

Ce coefficient est négatif comme tous les coefficients d'induction mutuelle.

La figure (7) montre la réunion de la ligne aux bornes haute tension du transformateur. La borne B est réunie d'un côté au fil (2) de l'autre à la terre. Trois ampèremètres placés sur le fil (1) sur le fil (2) et sur la jonction à la terre permettent de mesurer les valeurs des courants.

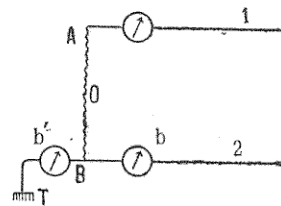


Fig. 7

Exemple numérique. — Prenons le même exemple que dans le cas précédent c'est-à-dire une ligne à 40.000 volts de 76 kilomètres de longueur. $h = 11^m,50$; $D = 1^m,70$ et $r = 0,506$; $n = 25$ cycles. Passant aux unités pratiques nous trouvons pour la capacité du fil (1) qui n'est pas à la terre :

$C = 0,00732$ microf.-kil. Le courant de capacité sera $I_1 = 3^A,49$.

Le coefficient d'induction électrostatique $C_{2,1}$ est en passant toujours aux unités pratiques : $C_{2,1} = - 0,00225$. Le courant de capacité efficace du fil (2) sera $I_2 = 1^A,07$. On a d'ailleurs $\frac{I_1 + I_2}{2} = 2^A,28$. C'est précisément le courant de capacité du fil (1) ou du fil (2) lorsqu'ils sont isolés de la terre. Il est facile de démontrer cette propriété d'une façon générale.

La mise à la terre du fil (2) a en somme augmenté de 50 0/0 environ le courant de capacité du fil (1) et diminué de 50 0/0 environ le courant de capacité du fil (2).

Le courant marqué par l'ampèremètre b' serait :

$$I_s = 3^A,49 - 1^A,07 = 2^A,42.$$

4° CAPACITÉ D'UNE LIGNE A DEUX FILS MARCHANT EN PARALLÈLE LE RETOUR S'EFFECTUANT PAR LA TERRE (1). — On aura :

$$v_1 = v_2 = v = E_{eff} \sqrt{2} \sin \omega t.$$

(1) Heaviside (*Electrical Papers*) ; Creighton *Proceedings*, mars 1911 ; *Physique de Chwolson*. Dans ce dernier ouvrage, il y a quelques exemples traités parallèlement avec la théorie des deux électricités et la théorie de Maxwell.

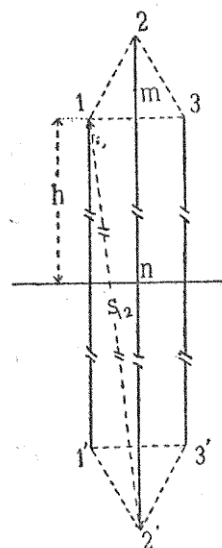
E_{eff} étant la tension efficace entre les bornes A et B du transformateur. On déduit sans difficulté des équations de Maxwell que la capacité de chaque fil est :

$$C = \frac{1}{2 \log \frac{2h}{r} \frac{\sqrt{4h^2 + D^2}}{D}} \text{ par kilomètre.}$$

Ce coefficient de capacité d'un fil par rapport à la terre est plus petit que lorsque ce fil était seul : en somme le second fil entre dans le champ électrostatique du premier, et, il en résulte une combinaison des flux de force et non une addition.

5° CAPACITÉ D'UNE LIGNE TRIPHASÉE. — Soit une ligne triphasée symétrique 1, 2, 3. Les fils de rayon r sont situés à une distance D . Les fils 1 et 3 sont placés à une distance h au-dessus du sol.

On a, en appliquant les équations générales de la page (6) :



$$v_1 = 2q_1 \log \frac{S_{1.1}}{r_{1.1}} + 2q_2 \log \frac{S_{1.2}}{r_{1.2}} + 2q_3 \log \frac{S_{1.3}}{r_{1.3}},$$

$$v_2 = 2q_1 \log \frac{S_{2.1}}{r_{1.2}} + 2q_2 \log \frac{S_{2.2}}{r_{2.2}} + 2q_3 \log \frac{S_{2.3}}{r_{2.3}},$$

$$v_3 = 2q_1 \log \frac{S_{3.1}}{r_{1.3}} + 2q_2 \log \frac{S_{3.2}}{r_{2.3}} + 2q_3 \log \frac{S_{3.3}}{r_{3.3}}.$$

On a d'ailleurs :

$$r_{1.1} = r_{2.2} = r_{3.3} = r, \quad r_{1.2} = r_{1.3} = r_{2.3} = D,$$

$$S_{1.3} = S_{3.1} = \sqrt{4h^2 + D^2}, \quad S_{1.1} = S_{3.3} = 2h,$$

$$S_{2.2} = 2h + D\sqrt{3},$$

$$S_{1.2} = S_{2.1} = S_{2.3} = S_{3.2} = \sqrt{\left(2h + D\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{D^2}{4}}.$$

Fig. 8.

Les formules obtenues, en résolvant par rapport à q_1, q_2, q_3 sont compliquées. Nous allons traiter le même problème en prenant un exemple numérique. Nous prenons comme exemple, un cas que nous traiterons plus loin comme calcul de ligne.

Il s'agit d'une ligne à 100.000 volts. $D = 3$ mètres.

La distance moyenne (m.n) des fils au sol est de 9 mètres. Le rayon des fils est de $12^{mm},5$. Les fils sont disposés en triangle équilatéral, comme sur la figure 8. On a $h = h_{moyen} - \frac{D\sqrt{3}}{3}$.

Au lieu de calculer les longueurs h , s_{11} , s_{12} , etc., nous les mesurer sur une épure construite à une échelle suffisante.

Nous trouvons ainsi :

$$S_{1,1} = S_{3,3} = 16^m,30, \quad S_{2,2} = 21^m,50, \quad S_{1,3} = S_{3,1} = 16^m,70.$$

$$S_{1,2} = S_{2,1} = S_{2,3} = S_{3,2} = 19^m.$$

Les équations de Maxwell deviennent donc :

$$v_1 = 2q_1 \log \frac{1.630}{1,25} + 2q_2 \log \frac{1.900}{300} + 2q_3 \log \frac{1.670}{300},$$

$$v_2 = 2q_1 \log \frac{1.900}{300} + 2q_2 \log \frac{2.150}{1,25} + 2q_3 \log \frac{1.900}{300},$$

$$v_3 = 2q_1 \log \frac{1.670}{300} + 2q_2 \log \frac{1.900}{300} + 2q_3 \log \frac{1.630}{1,25}.$$

Passant aux logarithmes vulgaires, remplaçant les logarithmes par leurs valeurs et résolvant par rapport à q_1 , q_2 , q_3 en employant la méthode des déterminants on a :

$$q_1 = + \frac{9,43}{122} v_1 - \frac{1,90}{122} v_2 - \frac{1,75}{122} v_3,$$

$$q_2 = - \frac{1,90}{122} v_1 + \frac{9,16}{122} v_2 - \frac{1,90}{122} v_3,$$

$$q_3 = - \frac{1,75}{122} v_1 - \frac{1,90}{122} v_2 + \frac{9,43}{122} v_3.$$

Nous vérifions que tous les coefficients d'induction mutuelle électrostatique sont négatifs, et, que tous les coefficients de capacité ou de self-induction électrostatique sont positifs.

Pour le courant de capacité du fil (1) on a : $i_1 = l \frac{dq_1}{dt}$; l étant la longueur de la ligne. On a donc, toujours en unités électrostatiques pour la valeur instantanée de i_1 :

$$i_1 = \frac{l}{122} \left(9,43 \frac{dv_1}{dt} - 1,90 \frac{dv_2}{dt} - 1,75 \frac{dv_3}{dt} \right).$$

Passant aux valeurs efficaces (1) et aux unités pratiques, on a pour déterminer la valeur efficace du courant de capacité (I_c), du fil (1), l'équation géométrique : $(\bar{I}_c)_1 = (\bar{AB})_\alpha + (\bar{BC})_\beta + (\bar{CD})_\gamma$ (fig. 10),

avec :
$$AB = \left(\frac{\omega.l}{9 \times 10^9} \times \frac{9,43}{122} U_{eff} \right),$$

(1) Nous supposons les courants sinusoïdaux, et en admettant l'égalité des valeurs efficaces de U_1 , U_2 , U_3 nous supposons que les courants de capacité diffèrent très peu : ce qui est vérifié, par la suite.

$$BC = \left(\frac{\omega l}{9 \times 10^6} \times \frac{1,90}{122} U_{eff} \right) \quad CD' = \left(\frac{\omega l}{9 \times 10^6} \times \frac{1,75}{122} U_{eff} \right),$$

et $\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2}.$

AB est en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur U_1 pris comme origine des phases.

BC est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur U_2 .

CD' est également en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur U_3 .

Le vecteur représentant le courant de capacité du fil 2 sera rigoureusement perpendiculaire au vecteur U_2 , et aura pour valeur en ampères efficaces :

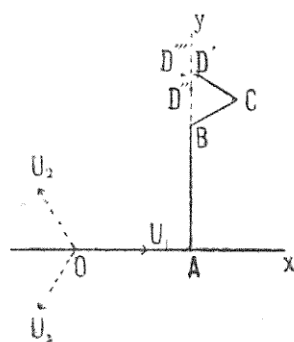


Fig. 9

$$\begin{aligned} & \frac{l \cdot \omega \cdot U_{eff}}{9 \times 10^6 \times 122} [9,16 + 1,90] \\ &= l \cdot \omega U_{eff} \times \frac{0,01007}{10^6}, \end{aligned}$$

Si nous le faisons tourner de $-\frac{2\pi}{2}$ il vient en AD''.

Enfin, pour le fil 3, nous aurons un vecteur égal à AD', qui après rotation de $\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ vient en AD''' symétrique de AD' par rapport à Ay. Les courants de capacité ne sont pas rigoureusement égaux : la ligne disposée en triangle équilatéral n'est symétrique par rapport à la terre que s'il y a *rotation des fils* : dans ce cas, la capacité apparente moyenne (C_m) intervient.

La capacité (C_m) apparente moyenne des fils 1, 2, 3, est, $\frac{AD}{l \cdot \omega U_{eff}}$, par unité de longueur, en appelant D le centre de gravité du triangle D', D'', D'''.

La projection de AD' sur Ay est :

$$\frac{l \cdot \omega U_{eff}}{9 \times 10^6 \times 122} \left[9,43 + \frac{1,90 + 1,75}{2} \right] = l \cdot \omega U_{eff} \times \frac{0,01025}{10^6}.$$

On a donc : $C_m = \frac{2 \times 0,01025 + 0,01007}{3 \times 10^6} = \frac{0,01019}{10^6}.$

L'étude des coefficients de capacité des lignes dissymétriques, simples ou doubles n'offre pas de difficulté ; mais ne présente guère d'intérêt. En effet, dans les longues lignes de transport, que nous étudions maintenant, on s'efforce d'obtenir des lignes symétriques et la rotation des fils (faite comme il a été indiqué dans

la première partie) est d'application courante. D'autre part le courant de capacité d'une ligne triphasée, double et symétrique, diffère peu du courant de capacité d'une ligne simple ; de plus, il ne faut pas oublier que nous négligeons dans cette théorie, des influences importantes : la capacité des isolateurs et les surfaces conductrices voisines de la ligne.

Calcul algébrique approché. — Pour la raison précitée on ne calcule pas comme nous venons de le faire, le courant de capacité des lignes triphasées.

Au lieu d'effectuer les calculs assez complexes que nous venons d'indiquer, et de prendre ensuite la moyenne des capacités apparentes individuelles de chaque fil, on préfère substituer dans les équations de Maxwell (en α), les valeurs moyennes qui interviennent. On prendra donc la valeur moyenne de la distance d'un fil à l'image d'un autre fil ; et la valeur moyenne de la distance d'un fil à son image. Quelquefois même on égalise ces distances, sans prendre tout à fait la valeur moyenne exacte.

Soit h_1 la distance moyenne des fils au-dessus du sol ; D leur distance entre eux. Nous prendrons pour distance moyenne d'un fil à son image $2h_1$, et, pour distance moyenne d'un fil à l'image d'un autre fil $\sqrt{4h_1^2 + D^2}$. Les équations de Maxwell deviennent :

$$v_1 = 2q_1 \log \frac{2h_1}{r} + 2q_2 \log \frac{\sqrt{4h_1^2 + D^2}}{D} + 2q_3 \log \frac{\sqrt{4h_1^2 + D^2}}{D},$$

$$v_2 = 2q_1 \log \frac{\sqrt{4h_1^2 + D^2}}{D} + 2q_2 \log \frac{2h_1}{r} + 2q_3 \log \frac{\sqrt{4h_1^2 + D^2}}{D},$$

$$v_3 = 2q_1 \log \frac{\sqrt{4h_1^2 + D^2}}{D} + 2q_2 \log \frac{\sqrt{4h_1^2 + D^2}}{D} + 2q_3 \log \frac{2h_1}{r}.$$

Nous avons :

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0 = 2(q_1 + q_2 + q_3) \left(\log \frac{2h_1}{r} + 2 \log \sqrt{4h_1^2 + D^2} \right),$$

d'où :

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0.$$

En remplaçant $q_2 + q_3$ par $(-q_1)$, etc., il vient :

$$v_1 = 2q_1 \log \frac{D}{r} \times \frac{2h_1}{\sqrt{4h_1^2 + D^2}},$$

$$v_2 = 2q_2 \log \frac{D}{r} \times \frac{2h_1}{\sqrt{4h_1^2 + D^2}},$$

$$v_3 = 2q_3 \log \frac{D}{r} \times \frac{2h_1}{\sqrt{4h_1^2 + D^2}}.$$

Les coefficients C_{11} , C_{12} , ..., C_{1n} peuvent donc être remplacés par un coefficient unique de capacité apparente (C).

On a :

$$C = \frac{1}{2 \log \frac{D}{r} \times \frac{2h_1}{\sqrt{4h_1^2 + D^2}}},$$

ou en unités pratiques :

$$(1) \quad C = \frac{0,02413}{10^6} \times \frac{1}{\log \frac{D}{r} \frac{2h_1}{\sqrt{4h_1^2 + D^2}}} \frac{\text{farads}}{\text{kilomètres}}.$$

C'est la capacité apparente par unité de longueur rapportée au potentiel absolu du conducteur.

Le facteur $\frac{2h_1}{\sqrt{4h_1^2 + D^2}}$ est assez voisin de l'unité, dans le cas de lignes à fils rapprochés, assez élevés au-dessus du sol. Si on admet que ce facteur est égal à l'unité, on a :

$$(2) \quad C = \frac{0,02413}{10^6} \frac{1}{\log \frac{D}{r}} \frac{\text{farads}}{\text{kilomètres}}.$$

Les formules (1) et (2) donnent en général des résultats très peu différents, dans la pratique.

Appliquons la formule (1) à l'exemple numérique que nous venons d'étudier, on trouve : $C = \frac{0,04016}{10^6} \frac{\text{farads}}{\text{kilomètres}}.$

Nous avons trouvé $C_m = \frac{0,04049}{10^6}$. L'erreur relative est ici très faible, et elle est toujours peu importante.

Courant de capacité. — L'équation $i_1 = C l \frac{dv_1}{dt}$ montre que le courant de capacité du fil (1) sera exprimé en valeur efficace par l'équation $I_{\text{eff}} = \omega \cdot C \cdot l \cdot U_{\text{eff}}$. C étant exprimé en farads-kilomètre.

C'est la même formule que pour le courant monophasé ; mais si la tension composée entre fils est toujours E ; les tensions simples sont $\frac{E}{2}$ pour la ligne monophasée, et $\frac{E}{\sqrt{3}}$ pour la ligne triphasée.

Relation entre le coefficient de capacité apparente et le coefficient de self-induction apparente. — En unités électromagnétiques C. G. S. on a $(L_s)_{e.m} = \frac{1}{2} + 2 \log \frac{D}{r}$. Le terme $\frac{1}{2}$ correspond aux lignes de forces intérieures au conducteur, si nous considérons simplement les lignes de force extérieures au conducteur on aura $(L'_s)_{e.m} = 2 \log \frac{D}{r}$. Ce coefficient L'_s diffère peu de L_s .

En unités électrostatiques C. G. S. on a $(C)_{e.s} = \frac{1}{2 \log \frac{D}{r}}.$

Par suite on a $(L'_s)_{e.m} \times (C)_{e.s} = 1$. Ces deux coefficients se

rapportent tous les deux au même circuit composé d'un fil de ligne et du fil neutre.

Si nous évaluons les deux coefficients en unités électromagnétiques C. G. S. nous aurons : $L'_s \times C = \frac{1}{v^2}$, v étant la vitesse de la lumière.

Cette relation est générale, et on peut démontrer qu'elle est satisfaite quelle que soit la position des fils. Au point de vue pratique, nous nous bornerons à signaler cette relation simple, parce qu'elle permet de se rendre compte de l'effet produit sur la capacité par telle ou telle modification de la ligne : il est en effet souvent plus facile d'étudier le coefficient de self-induction apparente.

6° CALCULS PRATIQUES DES COEFFICIENTS DE CAPACITÉ. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA CAPACITANCE. — Le coefficient de capacité apparente d'un *fil plein* est :

$$(1) \quad C = \frac{0,02413}{\log. \frac{D}{r}} \times 10^{-6} = \frac{0,02413}{\log. \frac{2D}{d}} \times 10^{-6} \text{ farads-kilom.}$$

C'est la capacité entre un fil de ligne et le fil neutre, c'est-à-dire que la capacité apparente est rapportée à la tension simple U .

S'il s'agit d'un *conducteur câblé*, le diamètre qui intervient, est le diamètre extérieur du câble. Si la section est donnée, on calculera le diamètre du fil plein équivalent, et, on multipliera ce diamètre par 1,14 comme il a été dit dans la première partie (page 76).

La valeur de la capacité apparente donnée par cette formule dépend simplement du rapport $\frac{D}{r}$ ou bien du rapport :

$$\frac{D}{d} = \frac{\text{Distance entre les axes des fils}}{\text{Diamètre des fils}}.$$

Si on porte en abscisses les valeurs de $\frac{D}{d}$, et en ordonnées les valeurs correspondantes de la capacité, on obtient une courbe qui ne se prête pas facilement à la vérification des calculs ; mais si on adopte pour les abscisses une *échelle logarithmique* et pour les ordonnées, l'*échelle des inverses*, la courbe se réduit à une ligne droite qui se prête bien à toutes vérifications utiles (Kennelly, *Electrical World*, octobre 1910).

Cette méthode a été employée pour la construction du troisième abaque de la planche I ; mais on s'est contenté de conserver la

droite précitée en indiquant, simplement, sur cette droite les points d'intersection avec les ordonnées et abscisses remarquables. Ces points sont toujours suffisamment rapprochés pour permettre d'interpoler à la façon ordinaire, sans erreur appréciable. On a obtenu et indiqué de la même façon la valeur de la capacitance à 25 cycles. Pour les cyclages de 50, 30 et 15, il suffit de multiplier la capacitance à 25 cycles par 2, 1,2 ou 0,6. On peut d'ailleurs se servir de la valeur de la capacité.

Exemples : soit une ligne triphasée à 25 cycles. Les fils sont distants de 2 mètres et ont 8 millimètres de diamètre.

On a : $\frac{D}{d} = \frac{200}{0,8} = 250$. Aux extrémités de la droite 250 nous

lisons : $c = 0,00894$ microfarads par kilomètre

et $(\omega c)_{25} = 1,404$ micromhos par kilomètre.

Abaques pour le calcul du coefficient de self-induction apparente et de l'inductance à 25 cycles. — Pour les lignes symétriques on a : $L_s = a + b$ avec :

$$a = (0,05 - 0,4605 \log. r) \quad \text{et} \quad b = 0,4605 \log. D.$$

a et b sont exprimés en millihenrys par kilomètre.

Les abaqes 1 et 2 de la planche I donnant a et b ont été construits d'après le principe indiqué plus haut ; mais en utilisant simplement une échelle logarithmique pour les abscisses.

L'inductance à 25 cycles $= (\omega a)_{25} + (\omega b)_{25} = A_{25} + B_{25}$.

7° COEFFICIENTS DE A. POTIER. — L'énergie d'un système électrisé est égale à $W = \sum_1^n \frac{1}{2} V_p Q_p$ s'il y a n conducteurs ; mais V_p peut s'exprimer linéairement en fonction des charges on a donc :

$$V_p = \alpha_{1p} Q_1 + \alpha_{2p} Q_2 + \dots + \alpha_{np} Q_n.$$

Dans ces équations : $\alpha_{m,n} = \alpha_{nm}$.

L'énergie du système peut donc se mettre sous la forme :

$$(1) \quad W = \sum_1^n \alpha_{m,p} Q_m Q_p + \frac{1}{2} \sum_1^n \alpha_{m,m} Q_m^2.$$

Le professeur A. Potier a fait remarquer que dans les systèmes ou $\sum Q_p = 0$ on ne modifie pas cette valeur de W en ajoutant la quantité $\sum_1^n \lambda_p Q_p \times \sum_1^n Q_p$. Les valeurs λ_p étant des constantes arbitraires en nombre n . Posons $\lambda_p = -\frac{1}{2} \alpha_{p,p}$.

Nous voyons que l'on a :

$$(2) \quad W = -\frac{1}{2} \sum_1^n (\alpha_{m,m} + \alpha_{p,p} - 2\alpha_{m,p}) Q_m Q_p.$$

Si nous posons $H_{m,p} = \alpha_{mm} + \alpha_{pp} - 2\alpha_{m,p}$, l'expression de W ne contient plus que $\frac{n(n-1)}{2}$ constantes. Auparavant elle en contenait $n + \frac{n(n-1)}{2}$ en tenant compte des égalités $\alpha_{m,p} = \alpha_{pm}$. Comme d'ailleurs on a toujours $V_p = \frac{\partial W}{\partial Q_p}$ nous voyons que les égalités donnant $V_1, V_2, \dots, V_p, V_n$, seront simplifiées de la même façon.

$$\begin{aligned} \text{On aura :} \quad V_m &= -\frac{1}{2} H_{1,m} Q_1 - \frac{1}{2} H_{2,m} Q_2 \\ &\dots - \frac{1}{2} H_{m-1,m} Q_{m-1} - \frac{1}{2} H_{m+1,m} Q_{m+1} \dots - \frac{1}{2} H_{m,n} Q_n. \end{aligned}$$

Isolons tous les conducteurs, sauf les conducteurs m et p , auxquels nous donnerons des charges égales et contraires $-Q$ et $+Q$. On aura $V_m - V_p = H_{m,p} Q$.

$H_{m,p}$ est donc l'inverse de la capacité mesurée entre les deux conducteurs.

Le maniement des coefficients de Potier ⁽¹⁾ est un peu plus délicat que celui des coefficients de Maxwell. Il ne faut pas oublier que ces coefficients ne sont applicables que si $\sum Q_p = 0$.

IV. — Gradient de potentiel.

La connaissance de la variation élémentaire du potentiel dans le voisinage des conducteurs des lignes aériennes nous sera utile pour l'étude du phénomène de couronne. Il est en effet nécessaire de connaître la valeur maxima du gradient de potentiel. La valeur du potentiel dû à un conducteur et à son image électrique a été étudiée (page 4), la détermination du gradient de potentiel s'en déduit immédiatement.

1° LIGNES MONOPHASÉES. — Les deux conducteurs sont isolées de la terre. Soit P un point situé dans le plan horizontal contenant

(1) Dans le *Cours de l'Ecole des Mines* et dans un article de l'*Eclairage Electrique*, volume XI, page 230 on trouvera quelques exemples de méthodes graphiques (théorème des hauteurs, etc.) permettant de résoudre simplement les questions relatives aux groupes de conducteurs, à l'aide de cette méthode.

les axes des conducteurs à une distance ρ du conducteur A.

On a :

$$v_p = 2q_1 \log \frac{\sqrt{4h^2 + \rho^2}}{\rho} + 2q_2 \log \frac{\sqrt{4h^2 + (D - \rho)^2}}{(D - \rho)}.$$

Mais $q_1 + q_2 = 0$.

Donc :

$$v_p = 2q_1 \log \left[\frac{\sqrt{4h^2 + \rho^2}}{\sqrt{4h^2 + (D - \rho)^2}} \times \frac{D - \rho}{\rho} \right].$$

On a d'autre part :

$$q_1 = C v_1 = \frac{v_1}{2 \log \left(\frac{D}{r} \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + D^2}} \right)}.$$

Nous avons d'ailleurs vu que le rapport $\frac{2h}{\sqrt{4h^2 + D^2}}$ pouvait être presque rigoureusement confondu avec l'unité pour les lignes ordinaires. Il en est de même du rapport

$\frac{\sqrt{4h^2 + \rho^2}}{\sqrt{4h^2 + (D - \rho)^2}}$ pour les valeurs de ρ comprises entre 0 et D.

On a donc :

$$v_p = v_1 \frac{\log \frac{D - \rho}{\rho}}{\log \frac{D}{r}}.$$

La valeur du gradient de potentiel est :

$$\frac{\partial v_p}{\partial \rho} = v_1 \frac{D}{(D - \rho)\rho \log \frac{D}{r}}.$$

Cette valeur est maxima pour ρ aussi petit que possible c'est-à-dire $\rho = r$. On a dans ce cas :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)_r = \frac{v_1 \times D}{(D - r)r \log \frac{D}{r}} = \text{sensiblement.} \frac{v_1}{r \log \frac{D}{r}}.$$

Passant aux logarithmes vulgaires nous voyons que la valeur maxima du gradient de potentiel correspondant à la valeur maxima de v_1 est :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)_r = \frac{0,217 E_0}{r \log \frac{D}{r}} = \frac{0,434 U_0}{r \log \frac{D}{r}}.$$

En effet ici, $v_1 = \frac{E_0}{2} \sin \omega t = U_0 \sin(\omega t)$.

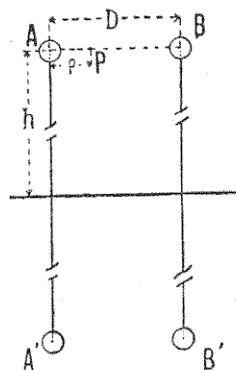


Fig. 10.

2° LIGNES TRIPHASÉES. — Il est évident qu'à égalité de tension simple U_0 — la distribution de potentiel est la même dans le voisinage du conducteur. Le gradient de potentiel est donc :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)_r = \frac{0,434 U_0}{r \log \frac{D}{r}}.$$

Mais ici $U_0 = \frac{E_0}{\sqrt{3}}.$

On a donc :
$$\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)_r = \frac{\frac{0,434}{\sqrt{3}} E_0}{r \log \frac{D}{r}} = \frac{0,250 \times E_0}{r \log \frac{D}{r}}.$$

Expression du gradient de potentiel en fonction de la capacité d'un fil par rapport au fil neutre. — On a : $C = \frac{0,02413}{\log \frac{D}{r}} \times 10^{-6}.$

Si nous éliminons $\log \frac{D}{r}$ entre cette équation et l'équation $\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)_r = \frac{0,434 \times U_0}{r \log \frac{D}{r}}$, il vient : $\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)_r = \frac{18.C}{r} \times 10^6 \times U_0.$ Ici C est

exprimé en farads-kilomètre. Ou bien si on exprime C en microfarads (soit C'), on a : $\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)_r = \frac{18.C'}{r} \times U_0$; r étant exprimé en centimètres, le gradient de potentiel sera rapporté au centimètre.

III. — Capacitance des câbles armés

1° RÉDUCTION EXACTE DES COEFFICIENTS DE CAPACITÉ A UN COEFFICIENT DE CAPACITÉ APPARENTE. — Dans les câbles armés, la distance entre les conducteurs est de même ordre de grandeur que leur diamètre ; par suite, dans une étude rigoureuse du problème, il sera nécessaire d'étudier la distribution de l'électricité sur la circonférence du conducteur, en tenant compte de l'armature.

Cette étude étant fort difficile, il s'ensuit que le calcul des coefficients de capacité C_{pp} et de mutuelle induction électrostatique C_{pq} n'est guère possible que pour les câbles concentriques. Le diélectrique est d'ailleurs souvent hétérogène ce qui complique encore le problème.

Par contre il est facile de mesurer pratiquement ces coefficients C_{pp} et $C_{p,q}$. D'autre part, nous allons voir, que pour les câbles armés, les effets complexes résultant de l'influence des coefficients

de capacité et de mutuelle induction électrostatique, peuvent se réduire, *rigoureusement*, au point de vue de la détermination du courant de capacité, à l'effet d'une capacité hypothétique unique existant entre chaque fil et le conducteur neutre (ou l'armature), toutes les fois que le câble est symétrique.

Câbles triphasés. — Prenons les secondes équations de Maxwell. En désignant par c_{00} et q_0 le coefficient de capacité et la charge, par unité de longueur, de l'armature, et, par v_0 son potentiel absolu, on a :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} q_0 = c_{0.0}v_0 + c_{0.1}v_1 + c_{0.2}v_2 + c_{0.3}v_3 \\ q_1 = c_{1.0}v_0 + c_{1.1}v_1 + c_{1.2}v_2 + c_{1.3}v_3 \\ q_2 = c_{2.0}v_0 + c_{2.1}v_1 + c_{2.2}v_2 + c_{2.3}v_3 \\ q_3 = c_{3.0}v_0 + c_{3.1}v_1 + c_{3.2}v_2 + c_{3.3}v_3 \end{array} \right.$$

L'armature enveloppant les autres conducteurs, on aura :

$$(2) \left\{ \begin{array}{ll} c_{0.0} = -(c_{0.1} + c_{0.2} + c_{0.3}) & c_{2.2} = -(c_{2.0} + c_{2.1} + c_{2.3}) \\ c_{1.1} = -(c_{1.0} + c_{1.2} + c_{1.3}) & c_{3.3} = -(c_{3.0} + c_{3.1} + c_{3.2}). \end{array} \right.$$

En effet, si nous faisons $v_1 = v_2 = v_3 = v_0$, c'est-à-dire si nous réunissons l'armature et tous les conducteurs 1, 2, 3 au même pôle d'une source électrique, il n'y aura pas de charges sur les conducteurs intérieurs, ni à l'intérieur de l'armature ; car aucune ligne de force électrostatique ne peut partir de ces conducteurs et aboutir à une charge de polarité contraire. On a donc dans ce cas $q_1 = q_2 = q_3 = q_0 = 0$. D'où les égalités (2).

Si nous supposons que l'armature est à la terre, les courants sinusoïdaux, et que le câble est symétrique on a :

$$v_0 = 0 \quad \text{et} \quad v_1 + v_2 + v_3 = 0.$$

La symétrie donne, d'autre part :

$$c_{1.1} = c_{2.2} = c_{3.3} \qquad c_{0.1} = c_{0.2} = c_{0.3}.$$

Les équations (2) nous donnent alors :

$$c_{1.2} = c_{1.3} = c_{2.3},$$

et :

$$c_{0.1} + c_{1.1} + 2c_{1.2} = 0.$$

Les équations (1) donnant les charges deviennent :

$$\begin{array}{ll} q_0 = 0. & q_2 = (c_{1.1} - c_{1.2})v_2. \\ q_1 = (c_{1.1} - c_{1.2})v_1. & q_3 = (c_{1.1} - c_{1.2})v_3. \end{array}$$

Si le câble a une longueur l . Les charges seront lq_1 , lq_2 , lq_3 . Les

courants de capacité des fils 1, 2 et 3 auront les valeurs instantanées suivantes :

$$i_1 = L.C. \frac{dv_1}{dt} \quad i_2 = LC \frac{dv_2}{dt} \quad i_3 = LC \frac{dv_3}{dt} \quad \text{avec } C = c_{1,1} - c_{1,2}.$$

Nous voyons donc que dans la recherche des courants de capacité de câbles symétriques (la démonstration serait analogue pour les câbles monophasés), dont l'armature est à la terre, on peut remplacer, rigoureusement, les effets résultant de l'influence des coefficients de capacité et d'induction mutuelle électrostatique par l'effet d'une capacité apparente unique existant entre chaque fil et le conducteur neutre ou l'armature.

Il est intéressant de connaître la valeur de $C = c_{1,1} - c_{1,2}$ pour les câbles à haute tension employés actuellement.

Roessler indique que pour divers types de câbles armés triphasés en papier imprégné, dont la section de chaque conducteur variait de 10 millimètres carrés à 120 millimètres carrés les valeurs de C étaient comprises entre :

0,158 et 0,253 microfarads par kilomètre pour des câbles à 3.000 volts.

0,142 et 0,235 microfarads par kilomètre pour des câbles à 5.000 volts.

0,130 et 0,215 microfarads par kilomètre pour des câbles à 10.000 volts.

Pour un câble à 10.000 volts dont chaque conducteur avait 85 millimètres carrés la maison Berthoud-Borel donnait : $c_{1,1} = 0,143$ microfarad par kilomètre, $c_{1,2} = -0,0245$. Par suite $C = 0,1675$.

2° FORMULES DE CAPACITÉ APPROCHÉES. — M. Lichtenstein ⁽¹⁾ a établi des formules approchées de la capacité apparente des câbles armés, en supposant une distribution de l'électricité uniforme sur la circonférence du conducteur. En s'appuyant sur la théorie des images par rapport à un cylindre, il trouve les résultats suivants :

Capacité kilométrique d'un câble triphasé (l'enveloppe à la terre).

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\delta}{\log_e \left[\frac{3a^2(R^2 - a^2)^2}{r^2 R^6 - a^6} \right]} \times \frac{1}{9} \times \frac{\text{microfarads}}{\text{kilomètre}}$$

(1) *Electrotechnische Zeitschrift*, 11 et 18 février 1904. Une traduction a été donnée dans le numéro du 7 mai 1904 de *l'Eclairage électrique*.

C étant la capacité d'un conducteur par rapport au fil neutre.

r désignant le rayon d'un conducteur en centimètres.

R le rayon intérieur de l'enveloppe en centimètres.

a la distance des axes des conducteurs à l'axe du câble en centimètres.

Q la charge par kilomètre en coulombs.

U la tension simple ou le potentiel absolu du câble.

δ la constante diélectrique de l'isolant. $\delta = 2$ pour le papier paraffiné.

Pour un câble à deux conducteurs on aurait :

$$C' = \frac{Q}{U} = \frac{\delta}{2 \log_e \left[\frac{2a}{R} \frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2} \right]} \times \frac{1}{9} \times \frac{\text{microfarads}}{\text{kilomètre}}.$$

C' étant toujours la capacité par rapport au fil neutre et U la tension simple.

3° DÉTERMINATION DE LA CAPACITÉ APPARENTE D'UN CÂBLE ARMÉ A L'AIDE DE DEUX MESURES DE CAPACITÉ ENTRE CONDUCTEURS. — Les constructeurs caractérisent souvent leurs câbles par des mesures de capacité entre deux conducteurs ou deux groupes de conducteurs. Il est facile de déduire de deux expériences de ce genre tous les coefficients $c_{1,1}$, $c_{1,2}$, etc., et par suite $C = (c_{1,1} - c_{1,2})$.

En effet nous avons vu que les coefficients $c_{1,1}$, $c_{1,2}$ etc., étaient reliés dans les câbles triphasés symétriques dont l'enveloppe est à la terre, par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= -(c_{0,1} + c_{0,2} + c_{0,3}) \\ c_{1,1} &= c_{2,2} = c_{3,3} \\ c_{1,2} &= c_{2,3} = c_{3,1} \\ c_{0,1} &= c_{0,2} = c_{0,3} \\ c_{0,1} + c_{1,1} + 2c_{1,2} &= 0. \end{aligned} \quad (A)$$

Les équations (1), page (26), donnant q_0 , q_1 , q_2 , q_3 , contiennent seize coefficients $c_{1,1}$, $c_{1,2}$, $c_{1,3}$, etc., que les relations $c_{pq} = c_{qp}$ réduisent à dix coefficients indépendants. Les huit relations précédentes ne laissent que deux coefficients indépendants. Par suite deux essais détermineront tous les coefficients $c_{1,1}$, $c_{1,2}$, $c_{1,3}$, etc.

Quand on désire simplement mesurer la capacité apparente, un seul essai peut suffire pour déterminer cette capacité apparente seule : il suffit d'obtenir $c_{1,1} - c_{1,2}$.

1° *Essai unique.* — On donne la capacité C' entre les fils 1 et 2. Le fil 3 étant isolé ainsi que l'enveloppe.

On a :

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{0.1}v_0 + c_{1.1}v_1 + c_{1.2}v_2 + c_{1.3}v_3 \\ q_2 &= c_{2.0}v_0 + c_{2.1}v_1 + c_{2.2}v_2 + c_{2.3}v_3 \\ q_3 &= q_0 = 0 \quad \text{et} \quad q_1 + q_2 = 0. \end{aligned}$$

Retranchant membre à membre, il vient en tenant compte des égalités (A) :

$$q_1 - q_2 = 2q_1 = (v_1 - v_2)(c_{1.1} - c_{1.2}).$$

On a d'ailleurs, par définition, $C' = \frac{q_1}{v_1 - v_2}$.

Donc : $C = c_{1.1} - c_{1.2} = 2C'$.

2° *Double essai* ⁽¹⁾. — On donne : 1° la capacité C'' entre trois conducteurs réunis d'une part, et l'armature d'autre part. On a :

$$C'' = \frac{q_0}{v_0 - v_1} \text{ et } v_1 = v_2 = v_3.$$

2° La capacité C''' entre le conducteur (1) d'une part et les deux autres conducteurs et l'armature d'autre part. On a :

$$C''' = \frac{q}{v_1 - v_0} \text{ et } v_0 = v_2 = v_3.$$

La première mesure se traduit dans l'équation de q_0 par l'égalité :

$$q_0 = c_{0.0}v_0 + (c_{0.1} + c_{0.2} + c_{0.3})v_1 = c_{0.0}(v_0 - v_1).$$

Donc $C'' = c_{0.0}$. Evaluons $c_{0.0}$ en fonction de $c_{1.1}$ et $c_{1.2}$.

Nous rapportant aux égalités (A) on a : $c_{0.0} = -3c_{0.1}$ en vertu de la première équation.

La dernière équation A donne $c_{0.1} = -c_{1.1} - 2c_{1.2}$. Par suite :

$$(1) \quad c_{0.0} = C'' = 3c_{1.1} + 6c_{1.2}.$$

La deuxième mesure donne :

$$q_1 = c_{1.1}v_1 + (c_{0.1} + c_{1.2} + c_{1.3})v_0 = c_{1.1}(v_1 - v_0),$$

par suite (2) $C''' = c_{1.1}$. Les relations (1) et (2) ajoutées aux relations indiquées plus haut nous déterminent tous les coefficients c_{11} , c_{12} , c_{13} , etc. En particulier la capacité apparente :

$$C = c_{11} - c_{12} = \frac{9C''' - C''}{6}.$$

(1) Guye, *Eclairage électrique*, 16 juin 1900 et Rüssel, *Courants alternatifs*.

VI. — Mesure de la capacitance sur une ligne construite

1° MESURES. — Il y a intérêt pour l'exploitant à déterminer la capacitance de la ligne, en utilisant les alternateurs qui alimenteront cette ligne, en service normal.

Si V_0 est la tension simple efficace à l'usine, l la longueur de la ligne en kilomètres et C la capacité apparente kilométrique d'un fil en farads-kilomètres, le courant de capacité de la ligne est $I = \omega \cdot V_0 \cdot C \cdot l$.

Si nous substituons à cette valeur inconnue I , la valeur du courant de charge J_0 de la ligne à circuit ouvert, lorsque le voltage au départ est V_0 , on commet évidemment une erreur qui tient à plusieurs causes.

Cause d'erreur provenant de la longueur de la ligne. — Nous verrons page (78) que le courant de charge J_0 et le voltage V_0 au départ sont donnés en fonction du voltage à l'arrivée par les séries géométriques :

$$V_0 = \bar{U}_1 + \left(\frac{\varepsilon w}{2} l^2 U_1 \right) \delta + \dots$$

$$\bar{J}_0 = (\bar{U}_1 w l)_{\theta'} + \left(\frac{\varepsilon w^2}{6} l^3 U_1 \right) \delta + \theta' + \dots$$

En prenant $V_0 = U_1$ nous faisons sur V_0 une erreur absolue au maximum égale à $\frac{\varepsilon w l^2}{2} U_1$. De même en prenant $J_0 = U_1 w l = V_0 w l$, nous faisons sur J_0 une erreur absolue qui est inférieure à $\frac{\varepsilon w^2 l^3}{6} U_1$. La première erreur est de beaucoup la plus forte. Il faut qu'elle soit négligeable. C'est ce qui a lieu pour des lignes à faible fréquence de 100 kilomètres de longueur au plus. Par contre pour des lignes de 100 kilomètres à 50 cycles l'erreur n'est déjà plus tout à fait négligeable.

La principale cause d'erreur provenant de la variation du voltage le long de la ligne, nous diminuerons sensiblement l'erreur relative, en mesurant par cette méthode, la capacité d'une ligne assez longue, en substituant à l'équation $J_0 = V_0 \cdot w \cdot l$ celle qu'on obtient en supposant que l'admittance de la ligne peut être représentée par deux admittances placées l'une au début, l'autre à la fin de la ligne. On aurait alors : $J_0 = w \cdot \frac{l}{2} \cdot U_1 + w \cdot \frac{l}{2} \cdot V_0$.

Cause d'erreur provenant des pertes à travers l'air, et des pertes des isolateurs. — Si nous égalons le courant de capacité I à J_0 , nous supposons que l'admittance w se réduit à la capacitance. On

a d'ailleurs $\omega C = w \sin \theta'$ avec $\operatorname{tg} \theta' = \frac{\omega c}{g}$. L'angle θ' varie en général de $87^{\circ}, 30'$ à 89° . Comme $\sin 87^{\circ} = 0,99878$ on voit que l'erreur de ce chef est sensiblement négligeable.

Ceci suppose que les pertes à travers de l'air sont de simples pertes de convection, et, que le voltage de la ligne est éloigné du voltage critique de disruption.

Augmentation de la capacitance de la ligne par les harmoniques, par la capacité des isolateurs, des supports et par les variations atmosphériques. — Si la courbe de voltage de l'alternateur présente des harmoniques dont les coefficients soient importants, le courant de capacité sera augmenté : nous le verrions facilement en reprenant le raisonnement que nous avons tenu pour l'inductance.

Dans l'établissement de nos formules théoriques de la capacité d'un fil nous n'avons pas tenu compte de la capacité des isolateurs, ni de l'augmentation de capacité due à la présence des supports métalliques de la ligne et d'une façon générale, de surfaces conductrices dans le voisinage immédiat de la ligne.

La capacité peut être augmentée de ce fait de 2 à 10 0/0 suivant les types d'isolateurs et de supports employés.

On conçoit également qu'en temps de pluie la surface des masses conductrices voisines de la ligne, peut être augmentée et par suite la capacité accrue. Cette influence des conditions atmosphériques existe certainement. Les ingénieurs des télégraphes signalaient, sur leurs lignes, des variations de capacité assez considérables, pouvant atteindre 10 à 12 0/0 de la valeur normale. Les essais faits en Amérique sur les lignes à 100.000 volts ne font pas mention de variations aussi considérables.

Dans des mesures assez fréquentes faites sur des lignes à 50.000 volts, j'ai constaté que les variations de la capacité par temps de pluie ou par temps sec étaient peu importantes. La capacité ne descendait jamais au-dessous de la valeur donnée par la

$$\text{formule } C = \frac{0,02413}{2 \log. \frac{D}{r}} \times 10^{-6}.$$

Mesures (1) de la capacité d'une ligne à 50.000 volts. — La ligne en expérience était une ligne triphasée à 25 cycles à 50.000 volts.

La longueur de la ligne était de 76 kilomètres. L'écartement des fils de 1^m,70. Les supports étaient métalliques.

(1) Bien que l'étude des harmoniques ait été faite d'une façon insuffisante, nous donnons ces mesures parce qu'elles comportent quelques essais se rapportant à des exemples calculés théoriquement précédemment.

Le rayon des fils de 5^{mm},06. La distance au-dessus du sol de 11 mètres. Temps légèrement pluvieux.

Peut-on substituer le courant de charge au courant de capacité ?

L'erreur provenant de la longueur de la ligne est négligeable.

L'erreur provenant des pertes par les isolateurs ou à travers l'air ne dépasse pas 2 0/0 en se basant sur une perte de 300 watts par kilomètre. (Le courant de perte se compose en quadrature).

L'étude de l'influence des harmoniques n'a pas été faite d'une façon suffisante, on s'est contenté de constater que la courbe de voltage relevée à l'ondographe avait une forme sensiblement sinusoïdale.

La capacité apparente d'un fil de ligne par rapport au fil neutre, était théoriquement égale, d'après la formule approchée, à :

$$C = \frac{0,0241}{\log \frac{170}{0,506}} = 0,00954 \text{ microfarads par kilomètre.}$$

Mesures en triphasé. — A 47.000 volts entre fils le courant de charge était de 3^A,47.

L'égalité $3,47 = 2 \times 3,14 \times 25 \times c \times 76 \times \frac{47.100}{\sqrt{3}}$ nous donne $c = 0,01072 \times 10^{-6}$.

Soit une valeur dépassant de 12,4 0/0 la valeur théorique.

Mesure en monophasé. — A 47.100 volts entre fils, le courant de charge était de 3^A.

L'égalité $3 = 2 \times 3,14 \times 25 \times c' \times 76 \times \frac{47.100}{2}$ nous donne $c' = 0,01065 \times 10^{-6}$.

Soit une valeur dépassant de 12 0/0 la valeur théorique.

Mesure en monophasé avec un fil mis à la terre. — Avec une tension de 36.800 volts entre les deux fils, le courant de charge du fil isolé était de 3^A,9.

Si nous avions eu le voltage de 47.100 volts pour cette expérience le courant de charge aurait été de 4^A,35. La mise à la terre du second fil l'a donc augmenté de 45 0/0. Ce qui correspond bien à une étude théorique précédente.

Ces mesures très simples de courant de charge, permettent d'étudier expérimentalement et très rapidement les effets de capacité dans diverses circonstances.

Par exemple, si deux lignes triphasées A, B, C, A', B', C', sont placées sur les mêmes supports, on constate que le courant de charge du fil A reste sensiblement le même, si l'on ferme les couteaux

A, B, C, seuls, ou bien les couteaux A, B, C — A', B', C', c'est-à-dire que l'influence électrostatique de la seconde ligne triphasée n'est pas très sensible. Il est évident que cette règle ne saurait être généralisée d'une façon absolue. Les équations de Maxwell sont, dans ce cas, au nombre de six, et, le calcul exact est assez laborieux.

Mesures sur des lignes aériennes à très forts courants de capacité. — Depuis la construction des lignes à très hauts voltages (100.000 volts) ayant 200 à 300 kilomètres de longueur, et fonctionnant souvent à 60 cycles, les ingénieurs américains se sont préoccupés de la constance de la capacité et de l'exactitude des formules précédemment indiquée.

L'enquête faite en 1911, à ce sujet, et les essais sérieusement étudiés qui en ont été la conséquence, ont montré que la concordance des formules était satisfaisante, malgré l'inconnu résultant des capacités des isolateurs et des capacités supplémentaires provenant des supports et des surfaces conductrices voisines.

Dans les lignes, ou l'effet de couronne n'a pas lieu, les courants de charge calculés sont à 3 ou 4 0/0 près égaux aux courants de charge mesurés.

2° PROPRIÉTÉS DE LA CAPACITANCE. — La capacitance occasionne dans la ligne une perte de puissance et une diminution de la chute de tension.

Au point de vue exploitation, le courant de capacité, qui dans certaines lignes nouvelles, à 100.000 volts, atteint près de 40 à 50^A par fil, devient fort gênant au moment de la mise en marche. Il ne faut pas moins de 7.000 à 8.000 kilovolts-ampères pour le produire. Une usine de 10.000 kilowatts ayant par exemple cinq unités ne pourrait se brancher sur la ligne à vide, qu'à condition d'avoir quatre unités en marche ; ces quatre unités fournissent d'ailleurs une puissance minime ; mais un courant égal à leur courant de pleine charge.

Diminution de la capacitance. — La diminution de la fréquence, diminue proportionnellement la capacitance.

L'accroissement du diamètre de la ligne augmente un peu la valeur de la capacitance ; si on maintient le diamètre des fils constant, en écartant les fils, on diminue la valeur de la capacitance ; en les rapprochant on l'augmente. Si D, distance entre les axes des fils varie de 50 centimètres à 2 mètres c'est-à-dire dans le rapport de 1 à 4 la capacitance diminue d'environ 20 0/0 pour les diamètres de fils moyens.

La capacité des lignes souterraines égale 15 à 20 fois la capacité des lignes aériennes pour les diamètres moyens.

Si on dédouble une ligne triphasée, en deux lignes triphasées de section moitié, on augmente très sensiblement les pertes de lignes à vide. Le courant de capacité est, en effet, sensiblement, le même que précédemment dans chaque ligne ; mais la résistance de chaque ligne est doublée, et il y a deux lignes.

Au point de vue des câbles armés, il est bon de rappeler que la valeur de la capacitance dépend du milieu, dans lequel se trouvent les conducteurs (pouvoir inducteur spécifique).

NOTE. — La formule exacte de la capacité dans le cas de fils très rapprochés peut se modifier en tenant compte de l'égalité ;

$$\text{Arg. coh. } \frac{D}{2r} = 2,303 \log. \left[\frac{D}{2r} + \sqrt{\left(\frac{D}{2r}\right)^2 - 1} \right]$$

La formule exacte donnée dans la note de la page (42) devient alors :

$$C = \frac{0,02413}{10^6} \times \frac{1}{\log. \left[\frac{D}{2r} + \sqrt{\left(\frac{D}{2r}\right)^2 - 1} \right]}$$

Sous cette forme nous voyons que la formule exacte se confond avec la formule courante lorsque $\left(\frac{D}{2r}\right)^2$ est grand vis-à-vis de l'unité. Dès que $\frac{D}{2r} = \frac{D}{d}$ est plus grand que 24, les deux formules se confondent. Il faut que $\frac{D}{d}$ (qui est toujours plus grand que l'unité) soit très petit pour que les différences soient notables.

CHAPITRE II

PERDITANCE. PERTES A TRAVERS L'AIR OU L'ISOLANT

I. — Généralités

Les lignes électriques aériennes ne sont pas plongées dans un milieu parfaitement isolant ; elles sont, d'autre part, soutenues par des supports en porcelaine (isolateurs) qui laissent passer une certaine quantité de courant. Il en est de même de l'isolant des câbles.

Ce courant de pertes, étant en phase avec la tension simple, on a tendance, dans une figuration du phénomène, à se représenter ces pertes comme produites par de hautes résistances placées tout le long de la ligne et reliant chaque fil de ligne à la terre, et aux fils voisins.

Comme l'addition de résistances placées en dérivation, donne lieu à des formules compliquées : $r = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots \frac{1}{r_n}}$, on pré-

fère substituer à la notion de résistance, la notion de conductance ou de perditance. En posant $G = \frac{1}{r}$ $g_1 = \frac{1}{r_1}$ $g_2 = \frac{1}{r_2}$ etc., on a :

$$G = g_1 + g_2 + \dots g_n.$$

La loi d'Ohm donne, dans le cas de courant continu, $U = ir$; elle devient $i = \frac{1}{r} U = GU$.

Si nous exprimons i en ampères, U en volts nous aurons G en mhos. Cette figuration que nous avons admise pour les pertes, suppose que les pertes de puissance à travers l'air ou à travers l'isolant sont proportionnelles au carré du voltage, ou bien que le courant de pertes est proportionnel au voltage.

Cette proportionnalité peut être admise pour les lignes aériennes, tant que la tension appliquée entre deux fils d'une ligne monophasée par exemple ne dépassera une certaine valeur appelée voltage critique de disruption.

Au-delà de ce voltage, les pertes croissent brusquement et obéissent à une loi parabolique spéciale. La notion de hautes résistances placées en dérivation ne peut plus être considérée comme une représentation du phénomène.

La notion de perditance suppose donc que la ligne fonctionne au-dessous de ce voltage critique. C'est presque toujours le cas pour les lignes souterraines, mais quelquefois les lignes aériennes fonctionnent en certains points particuliers au-dessus du voltage critique.

Pour mesurer la perditance sur une ligne à courant alternatif, il nous suffira de mesurer à vide, sur une courte longueur (afin d'avoir sensiblement le même voltage tout le long de la ligne) le nombre de watts dépensés par fil, et, le voltage de service. La perte en watts trouvée $\cdot K$ est égale à $U I_p = U^2 g'$. Si la longueur de ligne en expérience est de 500 mètres. La perditance par kilomètre sera $g = 2g' = 2 \times \frac{K}{U^2}$.

Nous allons étudier séparément les pertes dues aux isolateurs et celles dues à la conductibilité de l'air.

II. — Pertes dues aux isolateurs

Ces pertes sont d'une nature assez complexe. On peut considérer qu'il existe :

1° Une perte provenant de la conductibilité de la surface de l'isolateur.

2° Une perte provenant de la composante wattée du courant de capacité de l'isolateur ; composante qui existe toujours ; car la capacité de l'isolateur est toujours en série avec une résistance.

3° et 4°. Les pertes d'hystérésis et les pertes à travers la substance de l'isolateur, qui sont pratiquement négligeables.

Si nous augmentons la ligne de fuite d'un isolateur, nous diminuons la première perte ; mais il se peut, que nous augmentions la capacité de l'isolateur. Dans ce cas la deuxième perte augmenterait. Cette augmentation peut compenser la diminution précédente. Si nous plaçons l'isolateur sur une traverse en bois, nous diminuons un peu la première perte ; mais nous augmentons la

résistance en série avec la capacité de l'isolateur et par suite nous augmentons la seconde perte, tout au moins, tant que la traverse ne dépasse pas une certaine longueur. En général, cet isolement supplémentaire augmente les pertes, M. Mershon qui fit des expériences précises sur différents isolateurs constata que :

1° Toute disposition qui augmentait la capacité d'un isolateur, augmentait les pertes.

2° Si on remplaçait la ferrure d'un isolateur par un support en bois, les pertes étaient notablement augmentées tant que la longueur du support en bois était inférieure à un mètre environ.

3° La valeur des pertes variait avec le type d'isolateur, l'état d'humidité de l'air.

Les pertes de puissance en watts variaient sensiblement proportionnellement au carré du voltage, c'est-à-dire que le courant de perte était proportionnel au voltage.

L'isolateur ci-contre qui correspondait très sensiblement au type adopté en France pour les lignes à 50.000 volts, donnait par temps secs, sous une tension de 80.000 volts, entre fil et terre une perte de 30 watts ; par temps très humide la perte s'élevait à 50 watts environ.

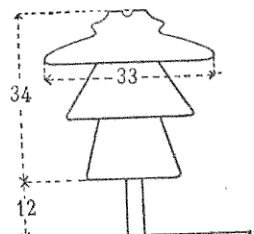


Fig. 11.

La perditance par temps sec, serait par isolateur :

$$g' = \frac{30}{80.000^2} = \frac{0,4687}{10^8} \text{ mhos.}$$

Si nous considérons une ligne à 50.000 volts entre fils, ayant quinze isolateurs du type précédent, par kilomètre pour chaque fil, la perditance kilométrique sera $g = 15g' = \frac{7,03}{10^8}$.

Les pertes sur cette ligne triphasée seraient par kilomètre pour les trois fils :

$$3U_1^2 g = 3 \times \left(\frac{50.000}{\sqrt{3}} \right)^2 \times \frac{7,03}{10^8} = 175 \text{ watts.}$$

Isolateurs du type dit à suspension. — La figure (12) nous montre le principe et les dispositions de détail d'un des meilleurs types d'isolateur de suspension.

Pour une ligne à 100.000 volts entre fils, l'isolateur complet se compose de quatre disques tels que A_2 . Les liens de suspension du disque A_3 au disque A_2 passent au-dessus des liens de

suspension du disque A_2 au disque A_1 . En cas de rupture d'un disque, le fil reste donc suspendu.

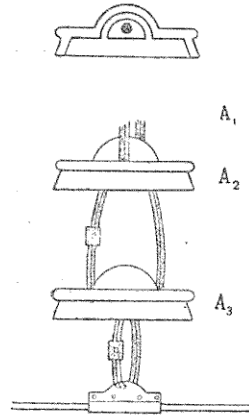


Fig. 12.

Quelles est la perdittance de ces isolateurs ? Les revues techniques donnent peu de renseignements à ce sujet. On peut toutefois déduire approximativement, cette perdittance d'expériences faites sur les lignes construites avec des isolateurs de ce type.

Pour une certaine ligne triphasée à 100.000 volts, 60 cycles, on indiquait que le voltage critique de disruption était de 120.000 volts, et que, les pertes à travers l'air et par les isolateurs étaient de 500 à 600 watts par kilomètre de ligne triphasée, à la tension de 100.000 volts.

Dans les conditions précitées nous verrons que les pertes à travers l'air peuvent être évaluées à 200 ou 300 watts par kilomètre pour les trois fils.

Les pertes des isolateurs étaient donc de 300 watts environ par kilomètre. Le nombre d'isolateurs par kilomètre étant de 30, pour les trois fils ; la perdittance d'un isolateur (quatre disques) est :

$$g' = \frac{\frac{300}{30}}{\left(\frac{100.000}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{0,3}{10^8} \text{ mhos.}$$

Par kilomètre de fil nous aurons dix isolateurs et par suite la perdittance kilométrique $g = \frac{3}{10^8}$ mhos pour les isolateurs seuls.

III. — Pertes à travers l'air. Etude expérimentale

La conductibilité de l'atmosphère, dans les lignes de transport de force à haut voltage, a donné lieu à des recherches nombreuses ; que nous résumons ci-après.

1° EXPÉRIENCES DE TELLURIDE. EFFET DE COURONNE. — Les premières recherches en date sont celles faites à Telluride (1898) par MM. Ralph Mershon et F. Scott.

La ligne d'essai de Telluride était une petite ligne en fer galva-

nisé de 40/10. Sa longueur était de trois kilomètres et demi.

Les expérimentateurs mesurèrent les pertes totales (isolateurs et air) de cette ligne pour divers espacements des fils. Ils trouvèrent que les pertes étaient fort peu considérables, tant que le voltage restait inférieur à un voltage *critique* variable avec la *distance des fils et leurs diamètres*.

Dès que le voltage devenait supérieur à ce voltage critique les pertes devenaient très importantes et augmentaient très rapidement avec le voltage.

Les courbes (figure 13) montrent cette brusque variation des pertes avec le voltage. Les chiffres (37, 55, 88, 136) indiquent en centimètres les espacements successifs adoptés pour les fils de la ligne d'essai.

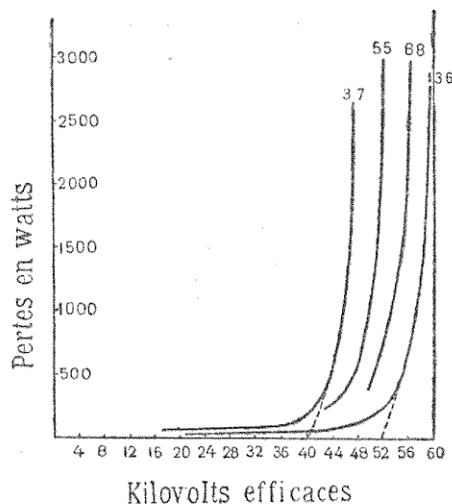


Fig. 13.

On voit qu'en augmentant l'écartement, on augmentait un peu le voltage critique.

Au moment où cette augmentation brusque des pertes se produisait on constatait que la ligne électrique devenait lumineuse dans l'obscurité; le fil semblait entouré d'une véritable « couronne ».

Les faibles pertes, constatées en dessous du voltage critique, furent attribuées aux pertes des isolateurs et les pertes très importantes à travers l'air, à partir du voltage critique à une rupture partielle du diélectrique-air. L'hypothèse concernant les pertes des isolateurs fut approximativement vérifiée en construisant une

ligne de quelques dizaines de mètres contenant un nombre d'isolateurs égal à celui de la ligne en essai.

Les expériences de Telluride complétées par d'autres observations faites au Niagara, etc., conduisirent à adopter, entre fils, des distances croissantes avec le voltage, distances fixées par cette règle pratique :

La distance entre fils évaluée en « pieds », doit égaler le premier chiffre du voltage. Ce qui donne en mètres les distances suivantes, si on fixe à 0,60 la distance minima :

Au-dessous de	20.000 volts . . .	0 ^m ,60
à	30.000 — . . .	0 ^m ,90
à	40.000 — . . .	1 ^m ,20
à	50.000 — . . .	1 ^m ,50
à	60.000 — . . .	1 ^m ,80
à	100.000 — . . .	3 ^m à 3 ^m ,50.

2^o EXPÉRIENCES DU PROFESSEUR RYAN. — *Influence de la valeur du gradient de potentiel dans le voisinage des conducteurs.* — Les expériences de Telluride n'avaient pas expliqué la nature exacte du phénomène de « couronne ».

En 1904, le professeur Ryan ⁽¹⁾ étudia le phénomène des pertes à travers l'air, dans son laboratoire. Les expériences étaient faites sur un *fil de faible longueur* placé au centre d'un cylindre métallique. Les valeurs des tensions et des courants étaient enregistrées, ainsi que les décalages.

Ces remarquables expériences ont servi de bases à toutes les recherches ultérieures.

Des fils de diamètres très différents furent expérimentés : on nota la grande influence du diamètre des fils sur la valeur du voltage critique.

S'inspirant des singularités connues de la conductibilité de l'air dans un champ uniforme et des résultats de ses expériences, M. le professeur Ryan donna l'explication suivante du phénomène de couronne :

« Tant que le gradient de potentiel était inférieur, en tous points, à la rigidité diélectrique de l'air le courant débité se réduisait sensiblement au courant dû à la capacité du fil et du cylindre enveloppant. Par contre dès que le gradient de potentiel était devenu supérieur en certains points à la rigidité du diélectrique

(1) Ces premiers travaux du professeur Ryan ont été publiés dans les *Proceedings* en mars 1904.

air, il se produisait par suite de la rupture partielle de l'atmosphère une zone conductrice de haute résistance autour du conducteur.

Cette haute résistance placée en série avec la capacité existante entre le conducteur ainsi modifié et le cylindre, produisait un décalage de courant, différant de 90°. L'effet produit était le même que si un courant de conductibilité s'établissait au travers de l'atmosphère.

En somme, avant la rupture du diélectrique air, on avait une capacité invariable dans le circuit, et après la rupture une capacité variable et une haute résistance en série ».

Examinons d'après cela, ce que devait être le voltage critique dans l'expérience précédente :

Le gradient de potentiel en un point P situé à une distance ρ de l'axe du fil placé au centre du cylindre métallique est :

$$\frac{\partial V_P}{\partial \rho} = \frac{0.434 \times U}{\rho \log \frac{R}{r}} \quad (\text{voir page 64})$$

en désignant par U la différence de potentiel entre le fil et le cylindre, et, par r et R les rayons respectifs du fil et du cylindre.

Ce gradient de potentiel est évidemment maximum lorsque $\rho = r$ et lorsque U atteint sa valeur *maxima* U_0 .

En écrivant, que cette valeur maxima du gradient de potentiel est égal à la rigidité diélectrique de l'air nous aurons une équation qui nous déterminera $(U_0)_c$, c'est-à-dire le voltage critique.

La rigidité diélectrique de l'air a été trouvée dans de nombreuses expériences assez voisine de 30.000 volts par centimètre (exactement 29.800 volts) à une température de 25° centigrades et sous une pression de 76 centimètres de mercure. Si la pression et la température varient, cette rigidité diélectrique varie proportionnellement à la densité de l'air : c'est-à-dire proportionnellement à la pression et en raison inverse de la température absolue (loi de Paschen).

En désignant par $(K)_{H,t}$ la rigidité diélectrique de l'air sous la pression H et à t degrés centigrades on aurait donc :

$$(K)_{H,t} = \frac{273+25}{76} \times \frac{H}{273+t} \times 29.800 = \frac{3.92.H}{273+t} \times 29.800.$$

Par suite la valeur du voltage critique $(U_0)_c$ est donnée par l'équation :

$$\frac{0,434 \cdot (U_0)_c}{r \cdot \log \frac{R}{r}} = \delta \times 29.800 \text{ en posant } \delta = \frac{3,92 \cdot H}{273 + t}.$$

D'où :

$$(1) \quad (U_0)_c = \delta \times 29.800 \times r \times 2,303 \log \frac{R}{r}.$$

Nous voyons que c'est le *voltage maximum qui intervient* et non le voltage efficace, les expériences confirmèrent bien ce point de vue ; mais le *voltage critique* ne fut pas trouvé tout à fait égal à la valeur donnée par l'équation (1).

Le professeur Ryan étudiait, en effet dans ces expériences, le *voltage critique visuel*. Il trouva que la couronne lumineuse n'apparaissait que si le gradient de potentiel dépassait la valeur de la rigidité diélectrique de l'air, sur une *longueur finie* (a) *variable avec le diamètre du conducteur et la pression de l'air*.

En désignant par $(U_0)_v$ le *voltage critique visuel* on avait donc :

$$(2) \quad (U_0)_v = \delta \times 29.800 \times (r + a) \times 2,303 \log \frac{R}{r}.$$

Nous verrons plus loin, que l'équation (1) donne le *voltage critique de disruption*, caractérisé par l'augmentation brusque des pertes.

Cas des lignes aériennes. — Pour les lignes aériennes la valeur du gradient de potentiel est différente ; on a (voir page 25), pour la valeur du gradient de potentiel maximum :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=r} = \frac{0,434 \times U_0}{r \log \frac{D}{r}}.$$

r étant le diamètre des conducteurs en centimètres. D la distance entre les conducteurs en centimètres et U_0 la valeur maxima de la *tension simple*. On aurait donc pour la valeur critique visuelle de la tension simple (valeur instantanée maxima) :

$$(1') \quad (U_0)_c = \delta \times 29.800 \times (r + a) \times 2,303 \log \frac{D}{r}.$$

Expériences de M. Jona. — La même année, M. Jona, en Italie, indiqua l'influence du câblage des fils. Les fils câblés présentaient une infériorité, assez sensible, sur les fils rigides. On comprend que le gradient de potentiel puisse atteindre, en certains points, une valeur locale critique, par suite du faible diamètre des fils composants. Une photographie du phénomène de la couronne, à son début, dans un fil câblé, montre nettement, en soulignant les torons du câble, que le phénomène est localisé.

3° EXPÉRIENCES NOUVELLES ⁽¹⁾ DE M. MERSHON, DE M. RYAN. EXPÉRIENCES DE MM. WHITEHEAD, RUSSEL. — De 1909 à 1911 les essais sur les lignes d'expériences, et, les essais de laboratoire alternèrent, et, permirent la mise au point de cette question si importante pour le développement ultérieur des transports de force.

Les essais de laboratoire facilitaient l'étude de l'influence de la variation de température et de la pression.

Les essais de plein air avaient l'avantage de créer une répartition du potentiel identique à celle des lignes de transport de force, et, aussi de soumettre la ligne aux influences atmosphériques variables : orages de neige, de grésil, brouillards, pluie, fumées, vents, etc. Les mises en service de quelques lignes à 100.000 volts de 200 à 300 kilomètres de longueur complétèrent cette série d'études.

Les expériences de M. Mershon contribuèrent à préciser la différence entre le voltage critique de disruption et le voltage critique visuel ; elles donnèrent également de précieux renseignements sur l'influence des conditions atmosphériques.

Le professeur Ryan précisa la théorie du phénomène de couronne en se basant sur la théorie des ions.

Les expériences de MM. Whitehead et Russel contribuèrent à donner la valeur exacte du voltage critique visuel.

4° EXPÉRIENCES DE LA « GENERAL ELECTRIC Co ». LOI DES PERTES A TRAVERS L'AIR ⁽²⁾. — Une mesure exacte des pertes de puissance, par effet de couronne, pour un voltage donné, est fort délicate. Il faut, en effet, effectuer cette mesure sur une ligne de courte longueur, de façon que le voltage puisse être considéré comme égal, en tous les points de la ligne. Dès lors, il s'agit de mesurer une très faible puissance, à très haut voltage, avec un très faible facteur de puissance. On ne peut d'ailleurs pas simplifier le problème, en effectuant les mesures du côté de la basse tension des transformateurs ; car il faut alors éliminer les pertes dans le transformateur, qui sont quelquefois presque de même ordre que la quantité à mesurer.

La « General Electric Co » fit construire une petite ligne d'essai,

(1) Les divers mémoires concernant ces études ont paru dans les *Proceedings of the American Institute of electrical Engineers*, aux dates ci-après :

Mershon, 1908, vol. XXVII, page 200 ; — Ryan, janvier 1911 ; — Whitehead, juin 1911.

(2) *Proceedings*. Peek. Law of corona, juillet 1911 et juin 1912. Nous avons emprunté à ces très intéressants mémoires la figure 14 et les formules pratiques de la page 48.

dans le but d'étudier toutes les questions intéressant le phénomène de « couronne », et, tout spécialement la valeur des pertes de puissance.

La figure (14) nous donne le résultat d'un de ces essais.

Les pertes sont données en kilowatts et rapportées au kilomètre de fil. La tension simple efficace correspondante à chaque perte est portée en abscisse et exprimée en kilovolts.

La ligne expérimentée comprenait des conducteurs câblés à 7 torons d'un diamètre total de $11^{\text{mm}},8$. La distance entre fils était de $3^{\text{m}},10$. Le temps était sec et beau.

La courbe *a, b, c* donne les pertes observées.

La courbe commence à se relever d'une façon sensible pour une tension simple efficace de 72.000 volts : les pertes par kilo-

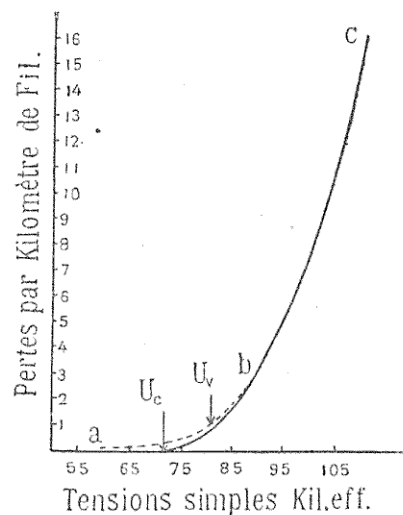


Fig. 14.

mètre de fil sont alors 260 watts : c'est-à-dire 780 watts pour un kilomètre de ligne triphasée.

Le phénomène de couronne total ne se produit que pour une tension simple de 82.000v. Les pertes sont à ce moment de $1^{\text{kW}},2$ par kilomètre de fil, c'est-à-dire $3^{\text{kW}},6$ par kilomètre de ligne triphasée.

Ces pertes très élevées montrent bien la nécessité de considérer un voltage critique inférieur au voltage critique visuel.

L'allure de la courbe de perte, spécialement dans la partie située au-dessus du voltage critique visuel suggère l'idée d'une parabole à axe vertical. L'équation des pertes serait alors :

$$p = \alpha(U - U_c)^2.$$

Il est facile de vérifier cette loi, on a en effet :

$$\sqrt{p} = \sqrt{\alpha} (U - U_c).$$

Par suite, en portant en ordonnées les racines carrées des pertes de puissance, et, en abscisses les tensions simples efficaces correspondantes, tous les points ainsi obtenus devront être en ligne droite, si la loi parabolique est exacte.

On trouva, en effet, des lignes droites dans toutes les expériences faites : la loi parabolique fut donc vérifiée.

Cette loi permet de donner une définition nette du *voltage critique de disruption*. Ce voltage sera caractérisé par l'intersection de la droite précédente avec l'axe des X. Cette droite est d'ailleurs donnée par les expériences successives faites avec la ligne considérée, à divers voltages.

Des expériences nombreuses furent faites avec cette ligne d'essai en variant, le diamètre des fils, et les distances entre fils; et en profitant des variations atmosphériques pour étudier leur influence.

5° RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES, PAR BEAU TEMPS. — *Tension simple critique de disruption*. — On trouvera que la tension simple critique de disruption, *par beau temps*, correspondait bien à un gradient de potentiel, dont la valeur à la surface du conducteur était égal à la rigidité de l'air, lorsque le fil expérimenté était rigoureusement circulaire.

Pour les fils commerciaux, les irrégularités du conducteur pouvaient abaisser cette tension simple critique de 5 0/0 environ.

Pour les conducteurs câblés à 7 torons la tension simple critique de disruption était abaissée de 15 0/0.

Tension simple critique visuelle. — Nous avons vu que, pour que le phénomène de couronne lumineuse se produise il fallait que le gradient du potentiel égalât la rigidité diélectrique de l'air, non seulement à la surface du conducteur, mais sur une longueur finie a .

Les expériences nombreuses que nous avons citées (Russell, Whitehead, etc.) et certaines expériences faites par la General Electric Co en 1912 donnèrent pour a la valeur :

$$a = 0,301 \sqrt{\frac{r}{\delta}};$$

r étant le rayon du conducteur en centimètres ;

et $\delta = \frac{3,92 \times H}{273 + t}$ le coefficient provenant de la densité de l'air.

Pertes de puissance. — a) *Pertes au-dessus de la tension simple critique visuelle.* — On trouva que ces pertes étaient :

1° Proportionnelles à la fréquence, c'est-à-dire fixes par cycle : tout au moins pour les fréquences usuelles (25, 50, etc.). Il est probable que pour des fréquences très basses les pertes diminuent moins vite que la fréquence et tendent vers la valeur des pertes par effet de couronne en courant continu ;

2° Proportionnelles au carré de l'excès de tension simple sur la tension simple critique de disruption ;

3° Proportionnelles à la racine carré du diamètre et inversement proportionnelles à la racine carrée de la distance entre fils.

b) *Pertes au-dessous de la tension simple critique visuelle.* — La figure 16 qui s'applique à un cas particulier, nous montre que pour cette ligne d'essai, les pertes au-dessous du voltage critique visuel, étaient légèrement supérieures aux pertes déduites de la loi parabolique. D'autres expériences ont montré qu'il en était ainsi, toutes les fois que le diamètre des fils était supérieur à 5 millimètres. Lorsque le diamètre des fils était inférieur à 5 millimètres, les pertes observées étaient inférieures aux pertes indiquées par la loi parabolique sans toutefois s'annuler.

Dans l'exemple de la figure 16, les pertes supplémentaires ne dépassent pas 250 watts par kilomètre de fil simple. Dans cette figure les pertes observées sont tracées en pointillé. La parabole est tracée en traits pleins. Au-dessus du voltage critique les deux courbes se confondent. Ces pertes supplémentaires sont dues principalement à des irrégularités du conducteur, on a trouvé qu'elles pouvaient être représentées par la courbe des probabilités :

$$p_1 = \beta \times e^{-h(U_c - U)^2}.$$

Dans l'exemple précité β a une valeur voisine de 3×10^{-6} et $h = 0,02$, β et h variant évidemment beaucoup avec les irrégularités du conducteur.

Pour les fils et câbles de bonne fabrication, et, de diamètres inférieurs à 15 millimètres ces pertes n'ont pas d'importance pratique considérable. Pour de très forts diamètres il est possible que ces irrégularités du conducteur aient une certaine importance, et, que les pertes de puissance qui en résultent soient à considérer.

Pour une tension inférieure de 10 0/0 à la tension simple critique de disruption, les pertes à travers l'air se réduisent à de très

faibles pertes proportionnelles au carré de la tension simple et au carré de la fréquence. On a :

$$p_2 = K \times f^2 \times U^2.$$

Pour une ligne à 100.000 volts à 60 cycles, ces pertes ne dépassent pas 100 watts par kilomètre de fil simple. Les expériences, à ce sujet, sont toutefois peu nombreuses.

Lorsque nous avons parlé de perditance, nous avons considéré les pertes de la ligne comme dues à de hautes résistances réunissant chaque élément de chaque conducteur aux éléments des conducteurs voisins et à la terre. Le courant de perte pour un fil était gU_1 par unité de longueur, et la perte de puissance gU_1^2 . Nous voyons que les seules pertes proportionnelles au carré du voltage sont les pertes des isolateurs et les faibles pertes qui se produisent lorsque le voltage de fonctionnement de la ligne est sensiblement inférieur au voltage critique de disruption.

6° RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES PAR MAUVAIS TEMPS. — *Effet des intempéries.* — La neige abaisse sensiblement la tension simple critique de disruption et augmente les pertes.

Le grésil, le brouillard, la pluie, les fumées industrielles produisent des effets analogues, mais moins importants.

Le vent et le degré hygrométrique de l'air n'ont pas d'influence sensible.

Par très mauvais temps on peut admettre que la tension simple critique de disruption est abaissée de 20 0/0 et que les pertes sont proportionnelles au carré de l'excès de la tension simple, au point considéré sur la nouvelle tension de disruption ainsi obtenue.

Lorsque le fil est entièrement mouillé la tension simple critique *visuelle* est également sensiblement abaissée.

IV. — Prédétermination du voltage critique et des pertes de la ligne par effet de couronne

1° FORMULES PRATIQUES. — Les résultats des recherches expérimentales que nous venons d'exposer donnent pour les voltages critiques et les pertes les formules suivantes.

A. *Beau temps.* — a) *Tension simple critique de disruption (par beau temps).* — On a :

$$(1) \quad U_c = m_c \times \delta \times 21,1 \times r \times 2,303 \log. \frac{D}{r}$$

en kilovolts efficaces (1).

Cette formule peut être adoptée lorsque la courbe des tensions instantanées est sinusoïdale ; ce qui a presque toujours lieu. La constante 21,1 est égale à la rigidité diélectrique de l'air en kilovolts par centimètre (29,8), divisée par $\sqrt{2}$.

Dans cette formule :

U_c désigne la tension simple critique de disruption en kilovolts efficaces. S'il était nécessaire d'avoir la valeur maxima il suffit de remplacer 21,1 par 29,8.

m_c est le coefficient d'irrégularité de surface.

$m_c = 1$ pour les fils rigoureusement circulaires.

$m_c = 0,98$ à $0,93$ pour des fils commerciaux.

$m_c = 0,87$ à $0,83$ pour des câbles à 7 torons.

$2r$ représente le diamètre *extérieur* du fil ou du câble en centimètres.

D la distance entre fils en centimètres.

$\delta = \frac{3,92 \times H}{273 + t}$ est le coefficient de densité de l'air.

H la pression atmosphérique en centimètres de mercure.

t la température de l'air en degrés centigrades.

b) *Tension simple critique visuelle (par beau temps)*. — On a :

$$(2) \quad U_v = m_v \times \delta \times 21,1 \times r \left(1 + \frac{0,304}{\sqrt{r \cdot \delta}} \right) \cdot 2,303 \log. \frac{D}{r}.$$

U_v désigne la tension simple critique visuelle en kilovolts efficaces.

m_v est le coefficient d'irrégularité.

m_v varie de 1 à 0,93 pour les fils.

$m_v = 0,72$ pour la couronne partielle avec les câbles à 7 torons.

$m_v = 0,82$ pour la couronne totale avec les câbles à 7 torons.

c) *Pertes de puissance au-dessus du voltage critique visuel (beau temps)*. — On a :

$$(3) \quad p = \frac{344}{\delta} \times n \times \sqrt{\frac{r}{D}} \times (U_x - U_c)^2 \times 10^{-3}$$

(4) On peut écrire l'équation (1) sous la forme suivante plus facile à calculer avec l'abaque de la planche I :

$$U_c = m_c \cdot \delta \times 21,1 \times \frac{r}{48 \times C}$$

C étant la capacité kilométrique en microfarads entre un fil et le fil neutre.

p est la perte de puissance en kilowatts, par kilomètre de *fil*.

U_x est la tension simple efficace en *kilovolts*, au point situé à x kilomètres de l'arrivée par exemple.

n est le nombre de cycle de la fréquence.

U_c est la tension simple efficace critique de disruption, en *kilovolts*, sa valeur est donnée par l'équation (1).

B. *Effets des intempéries. Temps d'orage.* — a') Par très mauvais temps la *tension simple critique de disruption* sera donné par la formule :

$$(1') \quad U'_c = 0,80 U_c.$$

U'_c étant la tension simple critique efficace en kilovolts par temps d'orage.

U_c étant la tension simple critique par beau temps, donnée par l'équation (1).

b') La *tension simple critique visuelle* lorsque les fils sont complètement mouillés peut être représenté approximativement par :

$$(2') \quad U'_v = 6,4 \times r \times \left(1 + \frac{0,815}{\sqrt{r}}\right) 2,303 \log. \frac{D}{r}.$$

U'_v donnant la tension simple efficace en kilovolts par temps d'orages.

Dans cette formule δ a été fait égal à l'unité, car la variation de U'_v avec δ n'a pas été suffisamment étudié.

c') Les pertes de puissance par effet de couronne, par temps d'orage sont donnés par la formule ;

$$(3') \quad p' = \frac{344}{\delta} \times n \times \sqrt{\frac{r}{D}} (U_x - U'_c)^2 10^{-8},$$

$$\text{ou bien } p' = \frac{344}{\delta} \times n \times \sqrt{\frac{r}{D}} \times (U_x - 0,80. U_c)^2 10^{-8},$$

p' est toujours exprimé en kilowatts par kilomètre de fil.

Nous allons appliquer ces formules à quelques exemples numériques : mais auparavant nous étudierons la variation du facteur de densité de l'air :

$$\delta = \frac{3,92.H}{273 + t}.$$

Limites de variation de la température et de la pression. — Dans la formule $\delta = \frac{3,92.H}{273 + t}$; t est la température de l'air ambiant en degrés centigrades. Si on veut se placer dans les plus mauvaises conditions on prendra $t = 35$ ou 40° , sinon on prendra $t = 20$ ou 25° . Cette valeur de t n'a d'ailleurs pas une très grande influence sur la valeur de δ .

H est la pression barométrique en centimètres de mercure, H varie avec l'altitude de la ligne, et peut avoir une assez grande action sur la valeur de δ .

Si nous désignons par y l'altitude en mètres, la formule de Halley, très suffisamment exacte, pour nos besoins, donne :

$$\log H = \log 76 - \frac{y}{18.336}.$$

L'annuaire du bureau des longitudes contient une table donnant H connaissant y à l'article intitulé « Table pour calculer les hauteurs par les observations barométriques ».

Le tableau ci-dessous donne une idée de la variation de H avec l'altitude y .

Valeurs de y en mètres . . .	0	500	1.000	1.500	2.000	2.500
Valeurs de H en centimètres.	76	71,3	67	62,95	59,1	55,53

2° EXEMPLES NUMÉRIQUES. — I. *Exemple.* — Proposons-nous de déterminer dans une ligne triphasée donnée, les voltages critiques et les pertes de puissance, par effet de couronne.

Soit une ligne triphasée à 25 cycles d'une longueur de 300 kilomètres. Les fils de la ligne sont constitués par des câbles à 7 torons dont la section totale égale 184 millimètres carrés (par suite $2r = 17^{\text{mm}},4$).

La température maxima extérieure est de 40° centigrades.

L'altitude de la ligne est de 1.000 mètres au départ de l'usine et reste sensiblement à ce niveau durant 100 kilomètres; dans la seconde partie de la ligne jusqu'au poste d'arrivée le niveau moyen est de 500 mètres.

La tension entre fils à l'arrivée est de 120.000 volts.

D'autre part la connaissance de la puissance distribuée et du décalage a permis de construire le diagramme des tensions le long de la ligne, et, ces diagrammes donnent 136.000 volts à l'usine et 130.000 volts à 100 kilomètres de l'usine. Ces diagrammes ont été établis, en négligeant la perditance; ou bien en ne tenant compte que de la perditance due aux isolateurs.

Solution. — Nous avons, en prenant le centimètre comme unité de longueur :

$$D = 300 \quad r = 0,87 \quad H_{1000} = 67 \quad H_{500} = 71,3 \quad t = 40^\circ.$$

A. — Etudions d'abord la partie de la ligne qui passe à 1.000 mètres d'altitude.

a) Tension simple critique de disruption, par beau temps.

Elle est donnée en kilovolts efficaces, par la formule.

$$(1) \quad U_c = m_c \times \delta \times 21,1 \times r \times 2,303 \log \frac{D}{r}.$$

On a d'ailleurs :

$$\delta_{1000} = \frac{3,92.H}{273+t} = \frac{3,92 \times 67}{273+40} = 0,839 \quad \text{et} \quad m_c = 0,83.$$

Par suite $U_c = 0,83 \times 0,839 \times 21,1 \times 0,87 \times 5,87 = 75$ kilovolts.

La tension composée critique serait donc :

$$E_c = U_c \times \sqrt{3} = 129,9 \text{ kilovolts efficaces.}$$

a') Par mauvais temps (neige, orages) on aurait *approximativement*.

$$(1) \quad U'_c = 0,80 \times U_c = 60. \quad \text{D'où : } E'_c = 103,9 \text{ kilovolts.}$$

b') La tension simple critique visuelle est par beau temps.

$$(2) \quad U_v = m_v \cdot \delta \cdot 21,1 \times r \left(1 + \frac{0,301}{\sqrt{r \cdot \delta}} \right) 2,303 \cdot \log \frac{D}{r},$$

Avec $m_v = 0,72$ pour la couronne partielle donnant $(U_v)_p$, et $m_v = 0,82$ pour la couronne complète donnant U_v .

Effectuant les calculs on a : $(U_v)_p = 88$ kilovolts et $U_v = 100,3$ kilovolts.

Les voltages entre fils correspondant sont :

$$(E_v)_p = 152,5 \quad \text{et} \quad E_v = 173,7.$$

Par mauvais temps lorsque le fil est complètement mouillé, nous savons que la valeur de U'_v donnant la couronne complète sera sensiblement inférieure à U_v .

c) *Pertes de puissance.* — Par *beau temps* les pertes de puissance *par fil*, sont données par la formule :

$$(3) \quad p = \frac{344}{\delta} \times f \times \sqrt{\frac{r}{D}} (U_x - U_c)^2 \times 10^{-5} \text{ en kilowatts.}$$

Dans le cas présent, cette formule devient :

$$p = \frac{344}{0,839} \times 25 \times \sqrt{\frac{0,87}{300}} (U_x - 75)^2 \times 10^{-5},$$

Par *mauvais temps*, avec les données actuelles, les pertes, par fil, sont approximativement données, par la formule :

$$p' = \frac{344}{0,839} \times 25 \times \sqrt{\frac{0,87}{300}} (U_x - 60)^2 \times 10^{-5},$$

déduite de la formule (3) en substituant $U'_c = 0,80 U_c$ à la valeur même de U_c .

De ces deux formules, nous avons déduit, en multipliant par 3, les pertes de la ligne triphasée, par kilomètre de ligne, pour divers voltages entre fils. Le tableau ci-dessous résume les résultats trouvés :

Tableau des pertes en kilowatts par kilomètre de ligne

Voltage entre fils en kilovolts efficaces . .	400	440	480	430	440	450	460	470	480
Pertes par beau temps .	—	—	—	—	0,563	2,23	5,00	8,88	13,86
Pertes par temps de neige	—	0,205	1,43	3,76	7,19	11,73	17,37	24,12	32,0

Ce tableau nous permet de tracer les courbes de pertes, *en kilowatts*, par kilomètre de cette partie de ligne.

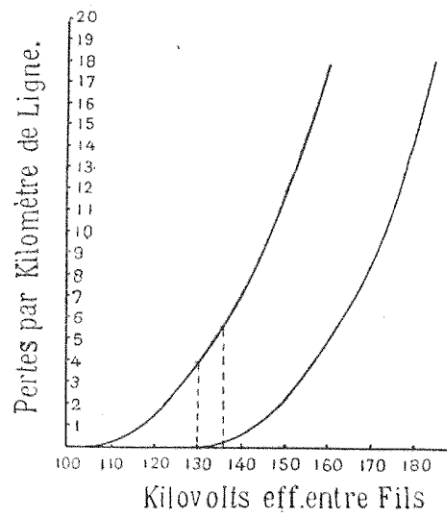


Fig. 15

Le voltage entre fils dans cette partie de ligne est d'ailleurs compris entre 136 et 130 kilovolts efficaces. Elevons les verticales correspondant à ces voltages. Nous interceptons ainsi deux portions de courbes qui donnent les pertes par beau temps et par mauvais temps sur la partie de ligne considérée.

Nous voyons que la perte totale sur ces cent kilomètres de

lignes, par effet de couronne, sera de l'ordre de 470 à 500 kilowatts par mauvais temps.

Par beau temps, les pertes seraient très faibles, 25 kilowatts environ ; mais les pertes dues aux irrégularités du conducteur.

$$p_1 = \beta . e^{-h(U_c - U_x)^2},$$

égaleraient vraisemblablement ces pertes à une centaine de kilowatts.

B. — Dans la seconde partie de la ligne la valeur de coefficient de densité de l'air n'est plus la même :

$$\delta' = \frac{3,92 \times 74,3}{273 + 40} = 0,893.$$

On a donc par beau temps la *tension simple critique de disruption* suivante :

$$U_c = 0,83 \times 21,1 \times 0,893 \times 0,87 \times 5,87 = 79^{\text{kv}}, 87.$$

Par mauvais temps (neige etc.) :

$$U'_c = 0,8 \times U_c = 63,9.$$

Pertes de puissance. — Les diagrammes de tension nous ont montré que U_x varie de $\frac{420}{\sqrt{3}} = 69,28$ à $\frac{430}{\sqrt{3}} = 75,05$.

Les pertes de puissance se réduisent donc par beau temps, aux pertes dues aux irrégularités du conducteur puisque U_c est toujours plus grand que U_x .

Par mauvais temps, nous voyons que les pertes de puissances pour les tensions simples 69,28 et 75,05 sont respectivement de : $0^{\text{kw}}, 450$ et $1^{\text{kw}}, 934$ par kilomètre de ligne. La perte de puissance totale par mauvais temps sera donc de l'ordre de 240 kilowatts.

En résumé, pour toute la ligne, nous aurons des *pertes à travers l'air*, de 150 kilowatts environ par beau temps et de 750 kilowatts environ par temps de neige.

Le fonctionnement de telles lignes présente cette particularité qu'une légère augmentation de voltage, augmente considérablement les pertes.

Si les pertes étaient très importantes, leur évaluation par la méthode précédente pourrait ne pas être très exacte. Les diagrammes de tension ont été, en effet, établis en ne tenant pas compte des pertes par effet de couronne : la répartition des voltages, trouvée ainsi, n'est donc pas tout à fait rigoureuse. On pourrait tenir compte des pertes, en concentrant la puissance ainsi

débitée en trois ou quatre points ; ce qui permettrait d'établir un diagramme des tensions plus approché. En général, une telle exactitude n'est pas nécessaire, car on cherche à éviter autant que possible ces pertes par effet de couronne, et on ne consent guère à les accepter qu'en des points spéciaux de la ligne (passage de cols élevés, etc).

Sécurité. Voltage critique de décharge. — Au point de vue de la sécurité, les pertes par effet de « couronne » ne présentent aucun inconvénient sérieux ; car les fils sont toujours suffisamment distants pour que le phénomène de décharge soit impossible, dans les lignes aériennes.

Si $\frac{D}{r}$ est plus grand que 30, le phénomène de couronne précède toujours la décharge directe entre fils.

Dans ce cas, qui concerne la pratique courante, la *tension simple efficace de décharge* est sensiblement donnée par la formule ⁽¹⁾ :

$$(a) \quad U_d = 21,1 \left(1 + \frac{0,01}{\sqrt{r}} \times \frac{D}{r} \right) \times r \times 2,303 \log \frac{D}{r}.$$

U_d est donné en kilovolts efficaces.

Cette formule (a) donne des tensions très élevées dès que D dépasse 50 à 60 centimètres.

Autres exemples numériques. — Cherchons simplement le *voltage critique de disruption* dans certains cas particuliers, de façon à nous rendre compte de l'importance de ce phénomène dans la limitation du voltage du transport de force.

Deuxième exemple. — Soit une ligne triphasée dont les fils sont écartés de 1^m,50. Le diamètre des fils employés est de 6 millimètres.

Cherchons la tension simple critique de disruption, dans une région où la ligne passe à 1.000 mètres d'altitude.

$$\text{On a :} \quad \delta = \frac{3,92 \times 67}{273 + 40} = 0,839.$$

$$\text{et} \quad U_c = 0,839 \times 21,1 \times 0,3 \times 2,303 \log \frac{150}{0,3}.$$

$$\text{D'où :} \quad U_c = 33 \text{ kilovolts efficaces.}$$

La tension composée critique est de 57 kilovolts environ.

Donc pour les lignes à 50 ou 60.000 volts, il faut des conditions tout à fait spéciales (faibles diamètres, hautes altitudes) pour que des pertes importantes soient à craindre.

(1) Peck, Law of corona, *Proceedings*, juin, 1912.

3^e EXEMPLES. LIMITES MAXIMA DE LA TENSION DES TRANSPORTS DE FORCE. — Prenons au contraire un gros câble $2r = 15$ millimètres, supposons la ligne électrique à l'altitude 0 (au niveau de la mer) et les conducteurs à 3^m,50 l'un de l'autre.

$$H = 76; \quad t = 25^\circ. \quad \text{Donc } \delta = 1.$$

Si le câble est à 7 torons, on peut prendre $m_c = 0,85$. Dès lors :

$$U_c = 0,85 \times 21,1 \times 0,75 \times 2,303. \log. \frac{350}{0,75}.$$

$$\text{D'où :} \quad U_c = 82,67 \text{ kilovolts efficaces.}$$

Pour une ligne *monophasée* la tension composée maxima (voltage entre fils) serait 165 kilovolts environ.

Pour une ligne *triphasee* $U_c \times \sqrt{3} = 143$ kilovolts efficaces.

Pour une ligne à *courant continu*, comme c'est la tension maxima qui intervient, nous voyons que le voltage maximum entre fils, serait 233 kilovolts, c'est-à-dire $2 \times U_c \times \sqrt{2}$.

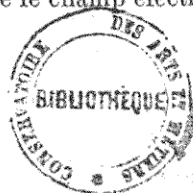
Ces chiffres nous indiquent l'ordre de grandeur de la limite des tensions possibles pour les transports de force, dont les conducteurs sont situés sur les mêmes supports. En réalité il faut abaisser ces limites de 10 à 15 0/0.

On peut reculer un peu ces limites en plaçant les conducteurs sur des supports différents ; mais le gain de ce côté n'est pas très considérable. Le prix de la ligne est, d'autre part, sérieusement augmenté.

L'utilisation de la terre, comme conducteur de retour, dans le cas d'une ligne monophasée, ne solutionne pas cette difficulté, car à voltages égaux (voltage entre fil et terre, et voltage entre fils de la ligne isolée), le gradient de potentiel, dans le voisinage du conducteur, est plus élevé pour la ligne à retour par la terre, que pour la ligne isolée. Or dans cette question du phénomène de couronne, tout dépend uniquement de la valeur du gradient de potentiel, dans le voisinage du conducteur.

V. — Application de la théorie des ions et des électrons au phénomène des pertes à travers l'air.

Nous exposerons tout d'abord les particularités remarquables que présentent la conductibilité des gaz lorsque le champ électri-



que est uniforme, et expliquerons ces particularités par la théorie des ions.

1° CONDUCTIBILITÉ DES GAZ A BASSE PRESSION, SOUMIS A L'ACTION D'UN CHAMP ÉLECTRIQUE UNIFORME CONTINU ET AUSSI A L'ACTION D'UN AGENT IONISANT : LES RAYONS X. — Prenons un condensateur à lames parallèles M et N réunies aux deux pôles d'une pile pouvant comprendre un nombre variable d'éléments. Plaçons ce condensateur dans un gaz, à basse pression, et, soumettons le gaz placé entre les deux plaques M et N à l'action des rayons X.

Si nous relevons, à l'aide d'un galvanomètre sensible, le courant débité par la pile et d'autre part le nombre d'éléments de pile c'est-à-dire le voltage ; nous constaterons que lorsque le voltage partant de zéro, croît ; le courant croît d'abord en proportion directe, puis devient sensiblement constant malgré l'augmentation continue du voltage. Toutefois lorsque le voltage acquiert une certaine valeur OA, le courant croît brusquement et augmente dès lors extrêmement vite avec le voltage. Le gaz devient alors lumineux.

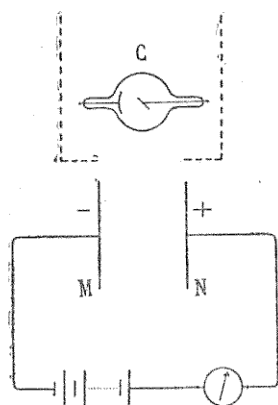


Fig. 16.

La valeur du voltage OA est telle que le gradient de potentiel à ce moment est égal au produit du rapport de la pression du gaz à la pression atmosphérique par 30.000 volts centimètres. (Nous verrons plus loin qu'il y a quelques exceptions).

La courbe de la figure (17) résume cette expérience.

Si nous écartons les plaques M et N le courant de saturation OB

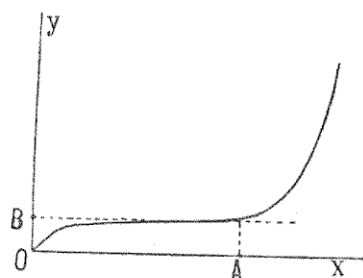


Fig. 17.

augmentera ⁽¹⁾, si le gaz compris entre les plaques reste tout entier soumis à l'agent ionisant. Si la conductibilité du gaz obéissait à la loi d'Ohm, ce serait l'inverse qui se produirait.

La théorie des ions explique facilement ces particularités.

Lorsque nous réunissons les plaques M et N aux bornes d'une bat-

(1) J. J. Thomson et Rutherford. Phil. Mag., XX, 1896.

terie composée d'un petit nombre d'éléments, les ions positifs sont attirés par la cathode, les ions négatifs par l'anode. Les charges des plateaux vont tendre à disparaître par l'afflux des ions de signes contraires qui viennent s'y déposer. La pile pour maintenir ces charges fournira un courant $i = q.e$ en désignant par q le nombre d'ions négatifs attirés en une seconde et par e la charge invariable d'un ion (1).

Au début, lorsque le voltage augmente, l'intensité du champ augmente, la vitesse de translation des ions augmente. Le trajet des ions se fait suivant la direction des forces électriques du champ; mais des chocs extrêmement nombreux sur les molécules, et, sur les autres ions, les dévient à chaque instant de leur route. Malgré cela, le nombre d'ions arrivant, par seconde, aux électrodes augmente avec le voltage; mais ce nombre ne peut pas dépasser le nombre d'ions créés, par seconde, par l'agent ionisant. Ce nombre d'ions créés est égal à $q_0 \times l \times s$, en désignant par q_0 le nombre d'ions produit par seconde, dans chaque unité de volume du gaz; par l l'écartement des plaques; et par s leur section. Nous voyons donc que le courant de saturation $OI = i_0$ est égal à $e \times q_0 \times l \times s$. Il augmente avec l'écartement des plaques.

Tant qu'une nouvelle source d'ionisation n'intervient pas, l'augmentation du voltage ne produit pas d'augmentation de courant; mais la vitesse des ions positifs et négatifs augmente constamment. A un moment donné la vitesse des ions négatifs est telle que les chocs de ces ions sur les molécules gazeuses, les dissocient et donnent naissance pour chaque molécule dissociée à un électron et à une molécule gazeuse privée d'un électron, que nous appelons ion positif: c'est le phénomène de l'*ionisation par colli-*

(1) D'après la théorie cinétique des gaz et la théorie des ions: Le *rayon* (rayon de répulsion) d'une molécule d'air est $r = \frac{4}{3} \cdot 10^{-7}$ centimètre.

Les *distances* entre molécules sont dix fois plus grandes: $\frac{4}{3} \cdot 10^{-6}$ cent.

Les molécules sont animées d'un mouvement continu, en tous sens. Le *libre parcours* est le trajet moyen que peut effectuer une molécule sans en heurter une autre.

Le libre parcours varie en raison inverse de la pression. A 0° et sous la pression de 76, ce libre parcours $\lambda = 10^{-5}$ centimètre, pour les molécules d'air et pour les ions positifs qui ont mêmes dimensions que les molécules.

L'électron, ou ion négatif isolé de la matière a un *rayon* 100.000 fois plus petit que celui de la molécule de gaz $r' = 10^{-14}$ centimètre.

Le *libre parcours* de l'électron est environ six fois plus grand que celui de la molécule ou de l'ion positif simple, sous une pression et une température données.

La valeur du libre parcours limite la valeur de l'énergie que peut acquérir l'ion.

sion. Les ions positifs interviennent également, comme nous le verrons dans le prochain exemple. L'ionisation par collision est lumineuse. Dans le cas présent, d'ailleurs, la dissociation des molécules gazeuses par les chocs répétés des ions négatifs suffirait, à la rigueur, à expliquer les phénomènes observés. En effet, dès que les ions négatifs dissocient les molécules, le courant croît très vite avec le voltage parce qu'il résulte d'une augmentation du voltage un accroissement de la vitesse des ions : les molécules sont plus facilement dissociées, les ions deviennent très nombreux et sont très vite absorbés.

2° CONDUCTIBILITÉ DES GAZ, A BASSE PRESSION, DANS UN CHAMP UNIFORME LORSQU'IL N'Y A PAS D'AGENT IONISANT. — Supprimons dans l'exemple précédent le tube de Crookes. Si nous augmentons la tension entre les deux plaques M et N, le courant croît très lentement : la courbe le figurant se distingue à peine de l'axe des X ; puis brusquement le courant croît très vite avec le voltage. A ce moment le gradient de potentiel est, *en général*, égal au produit $\frac{p}{760} \times 30.000$ en désignant par p la pression du gaz en millimètres de mercure.

Le gaz devient lumineux.

La théorie des ions explique facilement tous ces faits.

Il n'y a pas ici d'agent ionisant ; mais il y a toujours dans les gaz un certain nombre d'ions à l'état libre, car maintes causes diverses les produisent, en particulier, les émanations des matériaux radioactifs.

Lorsqu'une faible tension électrique est appliquée aux deux plaques, les ions positifs se dirigent vers la cathode, les ions négatifs vers l'anode. Comme précédemment les charges des plateaux tendent à disparaître par l'afflux des ions de signe contraire. La pile pour maintenir ces charges fournira le courant nécessaire.

Ce courant sera très faible, car le nombre des ions libres n'est pas très considérable.

La vitesse des ions augmente toujours avec le voltage ; lorsque la vitesse des ions négatifs est suffisante, les chocs de ces ions sur les molécules gazeuses, les dissocient, les ionisent et produisent, chaque fois, un électron et un ion positif. Toutefois, il est facile de voir, que dans le cas que nous étudions, l'ionisation par les

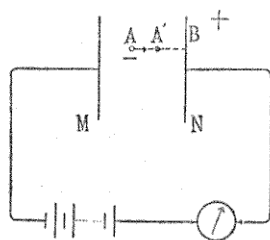


Fig. 48.

ions négatifs seuls, n'est pas suffisante pour expliquer la continuité

du phénomène observé. En effet, si nous considérons un ion négatif A, il est attiré par l'anode N, suivant le trajet AB. En chemin il ne peut ioniser que les molécules comprises entre A et B. Les électrons produits par les molécules ionisées ne pourront ioniser que les molécules situées, entre leur point de départ A' par exemple et B. Le phénomène d'ionisation se restreint donc constamment, et, finalement s'arrêtera. Nous voyons donc qu'il est nécessaire que les ions positifs aient un pouvoir ionisant.

Les expériences de MM. Clelland, J. J. Thomson ⁽¹⁾ et Austin ont effectivement montré que les ions positifs pouvaient ioniser les molécules neutres du gaz ; mais que leur action était moins importante que celle des électrons, et exigeait que le gradient de potentiel soit plus élevé que celui nécessaire à l'ionisation par collision des électrons sur les molécules. De nombreuses expériences ont montré d'autre part, que le choc des ions positifs arrivant avec une vitesse suffisante sur la cathode, ou même sur une plaque métallique, libérait des électrons.

Nous pouvons donc dire que le mécanisme de la conductibilité des gaz est le suivant : lorsque le voltage croît, la vitesse des ions positifs et négatifs augmente. A un moment donné la vitesse des ions positifs est telle, que leur choc sur la cathode produit l'émission d'électrons. Ces électrons projetés au dehors de la cathode, acquière bientôt sous l'action du champ électrique une vitesse assez grande pour pouvoir ioniser le gaz par collision. Sous les chocs *répétés* des électrons, les molécules de gaz se dissocient en ions positifs et électrons. Ces ions positifs attirés par la cathode produisent de nouveaux électrons qui, eux-mêmes, reproduisent, par collision avec les molécules, des ions positifs. L'ionisation par collision est lumineuse. Des phénomènes accessoires se produisent évidemment. Recombinaison d'un certain nombre d'ions positifs et négatifs ; ionisation des molécules neutres par les collisions des ions positifs. Aucune expérience n'a montré que le choc des ions négatifs ou des électrons sur l'anode produisait des ions.

Nous avons indiqué que, pour un gaz à une pression et à une température données, le gradient de potentiel avait une valeur, à peu près fixe *en général*, lorsque la courbe des courants se détachait nettement de l'axe des X, c'est-à-dire lorsque l'ionisation du gaz se produisait. Ceci s'explique facilement : en effet, il est naturel de penser que l'ionisation par collision, au milieu de la masse du gaz, tout au moins, se produit lorsque la vitesse de

(1) J. J. Thomson, *Conduction through gases*, page 485.

l'électron atteint une limite donnée. Il y a toutefois quelques restrictions à cette fixité de la rigidité diélectrique de l'air :

1° Si le gaz avait été purgé de tous ses ions libres, nous voyons que, théoriquement, l'ionisation ne pourrait pas se produire. En effet l'expérience montre que dans ce cas le gradient de potentiel nécessaire pour produire l'ionisation du gaz est très considérable. Ce cas ne se présente pas dans la pratique.

2° On peut abaisser quelquefois cette valeur du gradient de potentiel critique en facilitant l'émission d'électrons par la cathode (cathode recouverte de chaux et chauffée, etc.).

On peut admettre que l'ionisation par collision d'une molécule neutre n'est pas toujours obtenue par la collision unique d'un électron animé d'une vitesse suffisante ; mais que les chocs répétés d'un très grand nombre d'électrons peuvent produire le même effet à une vitesse inférieure : la molécule de gaz emmagasinerait une faible partie de l'énergie qui lui est ainsi fournie.

Tout ceci concerne les gaz à faible pression.

3° CONDUCTIBILITÉ DES GAZ A LA PRESSION ATMOSPHÉRIQUE, DANS UN CHAMP NON UNIFORME, ET ALTERNATIF. — *Phénomène de « couronne » dans les lignes aériennes.* — Supposons un voltage alternatif croissant entre les deux fils d'une ligne monophasée aérienne. Considérons une courte longueur de cette ligne.

Nous n'avons pas ici d'agent ionisant ; mais l'atmosphère contient toujours des ions à l'état libre. De plus l'ionisation naturelle, les émanations des substances radioactives, les chutes d'eau, etc., augmentent la quantité d'ions libres ; quantité limitée toutefois par les recombinaisons.

Nous avons ici un champ variable dans le temps et dans l'espace. Supposons que le voltage soit positif, voisin de sa valeur maxima, et, que cette valeur détermine dans le voisinage du conducteur un gradient de potentiel sensiblement inférieur à 30.000 volts par centimètre à la pression de 76 centimètres de mercure.

Dans ces conditions les ions positifs se dirigeront vers la *cathode momentanée* et les ions négatifs vers l'*anode momentanée*. Un très petit nombre d'ions auront le temps d'atteindre les conducteurs avant que le champ soit renversé ; les alternateurs n'auront donc à remplacer qu'une charge annulée insignifiante : les pertes seront très faibles.

Si on fait croître le voltage maxima il arrivera un moment où le voltage instantané sera suffisamment élevé, pendant une fraction de période, pour que, pendant cette fraction de période, les ions

positifs par leurs chocs sur la cathode momentanée déterminent l'émission d'électrons.

Pendant cette fraction de période le voltage entre fils est sensiblement constant, et voisin de sa valeur maxima. Dans l'espace, le champ a des valeurs variables : dans le voisinage de la cathode, le gradient de potentiel est très élevé diminue jusqu'au centre de la distance entre les deux fils puis augmente jusqu'à l'anode. Si, à un instant donné, le voltage instantané entre fils étant voisin de sa valeur maxima, nous comparons les vitesses d'électrons situés par exemple sur une courbe réunissant les axes des deux conducteurs, nous voyons que l'électron quittant la cathode à une vitesse très forte. La vitesse des électrons décroît jusqu'au milieu de la distance entre fils et croît ensuite jusqu'à l'anode.

Si au moment où le voltage instantané est voisin de son maximum l'énergie que peut céder l'électron est suffisante pour ioniser les molécules de gaz, nous aurons une couronne lumineuse autour de chaque fil.

La couronne de la cathode sera due à l'ionisation par collision des molécules d'air entourant la cathode par les *électrons expulsés* de la cathode par suite du choc des ions positifs. La couronne de l'anode sera due à l'ionisation par collision des molécules d'air entourant l'anode par les *électrons arrivant* sur l'anode.

A partir du moment où ces deux sortes d'ionisation : par *choc* sur la cathode des ions positifs, et par *collision* des molécules et des ions négatifs, se produisent ; le courant croît très vite avec le voltage, puisque comme dans les exemples précédents une augmentation de voltage accroît considérablement la vitesse des ions libres, leurs facultés ionisantes, et leur nombre.

La variation du voltage instantané complique, évidemment, le phénomène, qui devient discontinu. La couronne sur l'anode com-

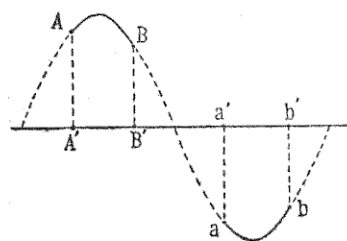


Fig. 19.

mence à un voltage instantané AA' et cesse pour un voltage instantané BB'. La couronne sur la cathode commence à un voltage aa' et cesse à un voltage bb'. Le renversement périodique du champ superpose sur chaque fil les couronnes cathodiques et anodiques. La continuité des impressions lumineuses sur la rétine fait que ces

phénomènes instantanés ne peuvent pas être aperçus sans artifices ⁽¹⁾.

La théorie des ions permet de prévoir l'influence de certains facteurs :

La formule du voltage critique s'obtiendrait, comme précédemment, en écrivant que le gradient de potentiel doit avoir une valeur de 30.000 volts centimètres sous une pression de 76 centimètres et à une température de 25° C. C'est écrire en somme que l'électron doit avoir une puissance ionisante donnée.

Une diminution de la pression, ou une élévation de température abaisse le voltage critique, car les « *libres parcours* » des molécules et des ions sont accrus dans les deux cas. La vitesse de l'électron est donc augmentée, ainsi que sa puissance ionisante; l'ionisation par collision pourra donc avoir lieu à un voltage inférieur.

On conçoit que la fréquence n'ait pas une action importante sur la valeur du voltage critique visuel, car celui-ci est déterminé uniquement par la valeur instantanée du voltage.

Par contre quelques questions restent à éclaircir, et certaines explications données, par analogie avec ce qui passe dans les gaz à faible pression, ne sont pas toujours suffisantes.

Le fait que le phénomène de couronne lumineuse se produit *seulement* lorsque le gradient de potentiel dépasse sur une longueur finie ($a = \frac{0,301 \sqrt{r}}{\sqrt{\delta}}$), dépendant du rayon r , la valeur de la rigidité diélectrique de l'air, n'est pas très facile à expliquer, surtout en ce qui concerne l'influence considérable du diamètre du conducteur, sur la valeur de cette longueur a .

L'abaissement du voltage critique visuel lorsque le fil est mouillé, peut s'expliquer par le fait que l'ionisation par choc sur la cathode

(1) Il serait particulièrement intéressant au point de vue *théorique* de mesurer les voltages instantanés AA', BB', aa', bb'. Je crois qu'il serait possible de le faire de la façon suivante :

1° Mesurer les voltages instantanés par la méthode de Joubert, et tracer la courbe de ces voltages.

2° Examiner le phénomène de couronne, pour un même voltage instantané, en employant une méthode optique calquée sur la méthode de Joubert. Cette méthode consisterait à utiliser deux plaques métalliques, présentant chacune une fente radiale. La première plaque serait circulaire et tournerait synchroniquement avec l'alternateur utilisé.

La seconde serait immobile, à un moment donné; mais pourrait être déplacé, sur un secteur concentrique à la plaque précédente (secteur analogue à celui utilisé dans la méthode de Joubert). On apercevrait le phénomène de couronne seulement lorsque les deux fentes coïncideraient c'est-à-dire seulement lorsque le voltage instantané aurait une valeur donnée.

des ions positifs est facilitée; mais c'est là une simple hypothèse.

Les pertes très importantes qui se produisent en temps de neige peuvent s'expliquer, dans une certaine mesure, par l'afflux d'ions libres apportés par la neige. S'il en était rigoureusement ainsi, *l'augmentation des pertes dues à la neige*, devrait être proportionnelle au voltage, puis rester constante malgré l'augmentation du voltage, lorsque tous les ions apportés seraient absorbés par les conducteurs (raisonnement du premier exemple). On constate bien que cette augmentation des pertes est limitée; mais cette augmentation des pertes dues à la neige est d'abord peu importante, et devient brusquement assez forte à un voltage sensiblement inférieur au voltage critique visuel et même au voltage de disruption par beau temps.

Il est possible que certains phénomènes soient compliqués, par le fait, qu'avec le courant alternatif, une seule sorte d'ionisation est suffisante pour donner lieu à un phénomène continu. Le raisonnement du deuxième exemple, prouvant la nécessité des deux ionisations (par les ions positifs et négatifs) ne tient pas, en effet, dans le cas de courant alternatif.

En résumé, la théorie des ions, permet de se rendre compte de bien des faits observés; mais l'étude théorique de ce phénomène de couronne n'est pas encore complète; elle est d'ailleurs de date récente.

Les formules pratiques d'application peuvent au contraire être considérées comme à peu près définitives; sauf peut-être, en ce qui concerne, les pertes au-dessous du voltage critique visuel, et au-dessous du voltage critique de disruption. Les expériences à ce sujet ayant été assez peu nombreuses.

Enfin le phénomène de couronne, en courant continu, a été également peu étudié.

VI. — Pertes dans les câbles armés

^{1°} RIGIDITÉ DIÉLECTIQUE. — Les pertes de puissance à travers l'isolant des câbles armés n'ont pas été étudiés d'une façon aussi complète que les pertes à travers l'air, dans le cas des lignes aériennes.

Un grand nombre d'expériences montrent que les questions de rigidité diélectrique des isolants présentait beaucoup d'analogies

avec les phénomènes que nous venons d'étudier ; mais la faible épaisseur de l'isolant fait intervenir dans les câbles la question de sécurité. On imposera donc à l'isolant, en tous points, un travail maximum sensiblement inférieur à la valeur de sa rigidité diélectrique.

Gradient de potentiel. — Déterminons le gradient de potentiel dans un câble à un seul conducteur recouvert de plomb.

Soient r le rayon du conducteur, R le rayon extérieur de l'isolant.

Considérons deux plans $OA'' - OB''$ passant par l'axe, et, faisant entre eux l'angle $(d\alpha)$. Les lignes de forces, dans l'espace, séparant les deux armatures sont normales aux surfaces cylindriques $AB, A''B''$. Appliquant le théorème de Green, aux trois surfaces fermées, constituées par les plans OA'', OB'' , passant par l'axe ; par deux plans perpendiculaires à l'axe, situés à l'unité de distance ; et, enfin, par les cylindres de rayons r, ρ et R . On a :

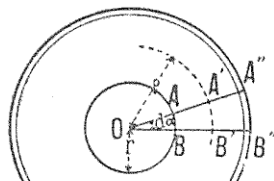


Fig. 20.

$$H_1 \cdot r \cdot d\alpha = H \cdot \rho \cdot d\alpha = H_2 R d\alpha = 4\pi K \sigma \cdot r \cdot d\alpha.$$

ou :

$$H \rho = 4\pi \cdot K \cdot \sigma \cdot r = a.$$

Mais $-dV = H d\rho$ d'où $V = -a \int \frac{d\rho}{\rho} + C. = -a \log. \rho + C,$

en désignant par H_1, H, H_2 les intensités du champ électrostatique aux distances r, ρ et R de l'axe, par V le potentiel sur le cylindre de rayon $OA' = \rho$, et, par σ la densité superficielle sur le conducteur, cette densité étant constante par raison de symétrie.

Les potentiels V_1 et V_2 des cylindres de rayon r et R étant connus, nous déterminent les constantes a et C ; d'où finalement :

$$V = V_2 + (V_1 - V_2) \frac{\log \frac{R}{\rho}}{\log \frac{R}{r}}.$$

$$\text{Le gradient de potentiel } \frac{dV}{d\rho} = (V_1 - V_2) \cdot \frac{1}{\rho \log \frac{R}{r}}.$$

En passant aux valeurs des voltages efficaces et aux logarithmes vulgaires, on a en désignant par U le voltage efficace entre le conducteur et l'armature :

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{0,434 \cdot U}{\rho \log \frac{R}{r}}.$$

Nous voyons que la variation du taux de travail des couches successives d'isolant est assez considérable. Le maximum du taux de travail se trouve en faisant $\rho = r$. Par suite si w est en volts efficaces, par millimètres, le taux de travail *avec sécurité* de l'isolant employé, l'épaisseur d'isolant e à adopter pour un câble à un seul conducteur, soumis à un voltage efficace U entre conducteur et armature, serait donné par l'équation :

$$w = \frac{0,434.U}{r \log \frac{r+e}{r}}.$$

$$\text{D'où :} \quad \log.(r+e) = 0,434. \frac{U}{w.r} + \log r.$$

Pour des câbles triphasés, le calcul se ferait en considérant la tension simple U_1 ceci donne l'épaisseur d'isolant autour de chaque conducteur. L'isolant situé sur la corde joignant les axes des conducteurs est soumis *normalement* à la tension $U_1\sqrt{3}$. Enfin *accidentellement*, l'isolant situé entre chaque conducteur et la terre peut être soumis à la tension $U_1\sqrt{3}$. Ces remarques permettent de calculer les différentes épaisseurs d'isolant ; on admettra en général un taux de travail un peu plus fort dans la partie de l'isolant situé entre conducteur et armature.

Les conditions de pose limitent d'ailleurs les épaisseurs $2R$ des câbles armés. En considérant ces câbles limites M. Jona a fait remarquer qu'on pouvait déterminer le diamètre du conducteur métallique par la condition que le travail dans le voisinage du conducteur fut minimum.

$$\text{On a : } T_1 = \frac{0,434.U}{r \log \frac{R}{r}}.$$

$$\text{Dérivant par rapport à } r \text{ on a : } r = \frac{R}{2,71}.$$

Cette équation nous montre que pour ces câbles limites, si le rayon r' du conducteur est plus petit que r on a théoriquement intérêt à augmenter le rayon du conducteur en employant des câbles à âme en chanvre ou en aluminium.

Pratiquement on gardera toujours une légère surabondance d'isolant, car cet isolant n'est jamais absolument homogène.

Ces considérations s'appliquent surtout aux câbles à un seul conducteur, mais peuvent être étendues aux câbles triphasés ;

(4) Jona, *Transact. Int. Elect. Congress*, Saint-Louis, 1904, vol. II.

car la fatigue de l'isolant est toujours maxima entre le câble et l'armature.

2° PERTES DANS LES LIGNES SOUTERRAINES. — Ces pertes sont difficiles à mesurer car elles sont extrêmement faibles, et, les courants de capacité très considérables. On se base souvent pour les évaluer sur la résistance en mégohms du kilomètre de câble. Les fabricants garantissent souvent une résistance d'isolement de 15 mégohms par kilomètre. On peut en conclure que la perditance par kilomètre est :

$$g = \frac{1}{15 \times 10^6} = 0,0667 \times 10^{-6} \quad \text{ou} \quad \frac{6,67}{10^8}.$$

C'est là sans doute une limite inférieure de la valeur de g .

Les pertes des câbles armés peuvent toujours être exprimés par la perditance parce que le voltage de service est très inférieur au voltage critique. L'étude de la rupture diélectrique de câbles armés dont les conducteurs ont différents diamètres montre qu'il se passe, lors de la rupture, des phénomènes très analogues à ceux mentionnés pour les lignes aériennes.

VII. — Mesures des pertes totales à travers l'air sur une ligne construite

Les pertes à travers l'air qui nous intéressent sont celles qui se produisent lorsque la ligne débite sa pleine puissance. On peut être tenté de mesurer ces pertes sur la ligne à vide, sauf à tenir compte des effets des courants de capacité. Pour des lignes de moyennes longueurs le résultat ainsi trouvé ne différera pas beaucoup des pertes réelles à travers l'air si la ligne fonctionne à un voltage très-inférieur au voltage critique. Il n'en serait pas de même, dans le cas, où à pleine charge, le phénomène de couronne se produirait en un ou plusieurs points de la ligne. La répartition des voltages est en effet très différente dans la ligne en charge et dans la ligne à vide.

Portons en abscisses les distances au poste de transformation, en ordonnées les tensions simples, en chaque point de la ligne.

Dans la marche à pleine charge nous avons une courbe de voltage ANB ; dans la marche à vide les diagrammes nous donneront une courbe de voltage AN'B'.

OA représentant la tension simple U_1 à l'arrivée supposée fixe, CB = U_0 sera la tension simple à l'usine en pleine charge, et CB' = U_0 la tension simple à l'usine, lorsque la ligne est à vide.

Si nous passons par un col assez élevé situé, à une distance OM de l'arrivée, nous voyons que l'effet de couronne pourra se produire à pleine charge avec le voltage MN et ne pas se produire avec le voltage MN' de la ligne à vide.

Pour obtenir sensiblement les mêmes pertes, il faudrait faire la mesure des pertes de la ligne à vide avec une tension simple CB_1 donnant sensiblement le voltage MN au col dangereux.

Si on maintenait la tension à l'usine égale à $U_0 = CB$ le voltage de la ligne à vide au point M serait, au contraire, beaucoup plus grand que MN et par suite les pertes seraient plus grandes.

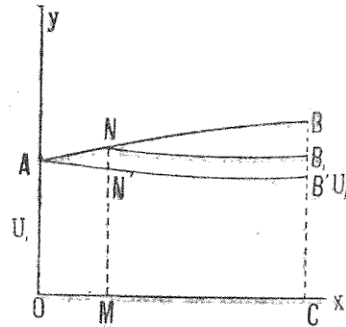


Fig. 21.

VIII. — Admittance. — Admittance dirigée

Considérons une ligne monophasée de courte longueur l , et supposons, la capacité et la perditance de la ligne concentrée en son milieu. Soit E_1 la tension entre fils à l'arrivée. Cherchons à déterminer en grandeur et en direction le vecteur du courant fourni par l'usine, lorsque la ligne est à vide.

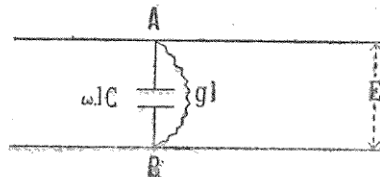


Fig. 22.

La ligne ne débitant pas de courant à l'arrivée le voltage entre les points A et B est E_1 .

La perditance $l.g$ prend un courant $l.g.E_1$ en phase avec E_1 . Nous porterons $\overline{OA} = l.g.E_1$ sur une direction parallèle à celle du vecteur E_1 . La capacité $l.\omega C$ prend un courant $l.\omega C.E_1$ qui est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur la direction du vecteur E_1 . En portant $\overline{AB} = l.\omega C.E_1$ sur une perpendiculaire à la direction du vecteur E_1 , nous avons la représentation du vecteur du courant de capacité.

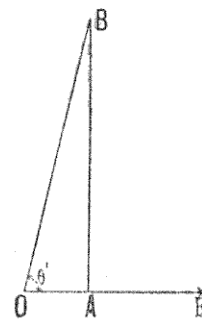


Fig. 23.

La composante $\overline{OB} = l \cdot \sqrt{g^2 + \omega^2 C^2} \times E_1$ donne, en grandeur et en direction, le courant fourni par l'usine, c'est-à-dire le courant pris par la combinaison de la perditance lg et de la capacitance $l\omega C$. Le vecteur représentatif de ce courant est en avance de l'angle θ' sur le vecteur E_1 . On a $\text{tg } \theta' = \frac{\omega C}{g}$.

La quantité $\sqrt{g^2 + \omega^2 C^2} = w$ est appelée l'admittance par unité de longueur et $l\sqrt{g^2 + \omega^2 C^2} = lw = W$ l'admittance totale de la ligne. La connaissance de cette quantité et de l'angle θ' , nous permet de déterminer immédiatement le vecteur OB . Nous le déduirons du vecteur U_1 en multipliant sa longueur par W et en augmentant sa phase de θ' .

Dans ces conditions, pour une ligne donnée, l'admittance est caractérisée par une longueur W et par un angle θ' . Cette grandeur ainsi déterminée peut être appelée l'*admittance dirigée*. Nous la désignerons par le symbole $W_{\theta'}$. Cette grandeur $W_{\theta'}$ n'est pas un vecteur ; mais $\overline{W_{\theta'}} \times U_1$ est un vecteur.

La considération des admittances et impédances dirigées, revient, en somme, à utiliser des coordonnées polaires, au lieu de coordonnées rectangulaires.

Nous verrons que leur emploi simplifie beaucoup les formules, dans l'étude des lignes avec capacitance et perditance réparties.

NOTES ET REMARQUES. — 1^o L'explication du phénomène de « Couronne » en courant alternatif, indiquée pages 41 et 42, est basée sur la théorie des deux électricités. Elle ne montre pas que le phénomène de couronne doit se produire en courant continu, comme l'expérience le prouve. Au contraire, l'explication basée sur la Théorie des Ions convient avec de légères et évidentes modifications au cas du courant continu.

2^o Il est bien probable que le phénomène de « couronne » limitera toujours le voltage des grandes lignes de transport : il serait toutefois intéressant spécialement pour les lignes à courant alternatif de reculer un peu cette limite. La différence d'aspect des couronnes cathodiques et anodiques (examinées par un procédé stroboscopique) semble indiquer que les pertes et les voltages critiques sont différents. M. C. P. Steinmetz indique que cela suggère l'idée qu'une contre-électrification de toute la ligne pourrait être assez efficace (*Proceedings*, novembre 1912).

CHAPITRE III

CALCUL DES LIGNES DE TRANSPORT D'ÉNERGIE EN TENANT COMPTE DE LA CAPACITÉ ET DE LA PERDITANCE UNIFORMÉMENT RÉPARTIES.

I. — Etudes graphiques

1^o CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES. — *Circuit fictif*. — Essayons tout d'abord de nous représenter les phénomènes de capacité et de perdittance dans une ligne triphasée. Supposons les charges équilibrées, la ligne symétrique et les circuits récepteurs et producteurs montés en étoile (fig. 24).

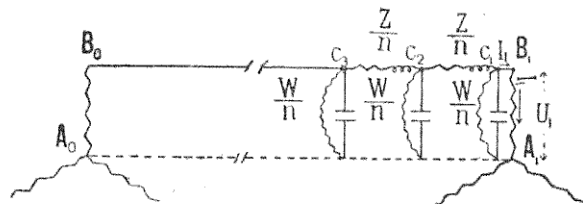


Fig. 24.

La capacité et les pertes de la ligne sont uniformément réparties tout le long de la ligne ; toutefois, en divisant la ligne en un grand nombre n de parties égales, nous pourrions supposer la capacité et la perdittance concentrée dans chacune de ces parties. Ces capacités et ces perdittances existent en réalité entre les fils (1 et 2, 2 et 3, 3 et 1) et entre chaque fil et la terre ; mais nous avons vu, que dans l'étude des courants de capacité d'un fil, on pouvait substituer à ces capacités multiples, une capacité apparente unique supposée branchée entre chaque fil et le fil neutre.

Il en était de même pour la détermination des courants de pertes. Par conséquent nous voyons que divisant la ligne en n parties, nous pourrions considérer dans chaque partie une admittance $\frac{W}{n} = \frac{l\sqrt{g^2 + \omega^2 c^2}}{n}$ branchée entre chaque fil de ligne et le fil neutre. Nous supposerons cette admittance concentrée au début de l'élément.

De même le fil de ligne ayant une impédance Z nous attribuerons à chaque tronçon une impédance $\frac{Z}{n}$.

Considérons le fil neutre et cherchons le courant qui passe dans le premier élément. La valeur instantanée de ce courant est la somme des valeurs instantanées :

1° Des trois courants utiles i_1, i_2, i_3 absorbés par les circuits récepteurs, cette somme est nulle, car ces courants sinusoïdaux ont mêmes valeurs maxima et sont décalés de $\frac{2\pi}{3}$;

2° Des trois courants d'admittance, passant dans les admittances branchées, dans le premier élément, entre les fils 1, 2, 3 et le fil neutre. Cette somme est également nulle pour la même raison.

Le courant passant dans le fil neutre est donc nul dans le premier élément, comme les courants et les tensions simples sont modifiées symétriquement dans les trois fils, cette démonstration s'applique à tous les éléments du fil neutre. Il ne circule aucun courant dans ce fil. Par conséquent sa self-induction est nulle ; d'ailleurs l'induction mutuelle est également nulle, car le fil est placé à égale distance des trois fils.

Les données de ce fil n'interviennent donc pas dans les calculs, et il présente l'avantage de simplifier le problème en décomposant la ligne triphasée en trois lignes monophasées.

Dans la portion A_1B_1 du circuit récepteur, qui a été supposé monté en étoile, circule le courant I_1 décalé de φ_1 par rapport à la tension simple U_1 . Ce courant I_1 est également le courant qui circule dans le fil de branchement C_1B_1 qui réunit le circuit récepteur au fil (1). La tension entre fils, à l'arrivée, est $E_1 = U_1 \sqrt{3}$. La puissance totale distribuée par la ligne est :

$$3U_1I_1 \cos \varphi_1 = E_1I_1 \sqrt{3} \cos \varphi_1.$$

Supposons le circuit récepteur monté en triangle. Dans la partie $B_1B'_1$ du circuit récepteur (fig. 25) circule un courant J_1 décalé de φ_1 par rapport à la tension E_1 qui existe entre les fils (1) et (2). Le courant dans le branchement C_1B_1 qui réunit le

circuit récepteur au fil (1) est $I_1 = J_1 \sqrt{3}$. Le décalage de ce courant I_1 par rapport à la tension simple U_1 est encore égale à φ_1 . La puissance transmise est $3E_1 J_1 \cos \varphi_1 = E_1 I_1 \sqrt{3} \cos \varphi_1$.

Il résulte de ces remarques que dans l'étude d'une ligne triphasée à *charges équilibrées*, on peut toujours substituer à la ligne triphasée trois lignes monophasées telles que $A_0B_0A_1B_1$ (fig. 24)

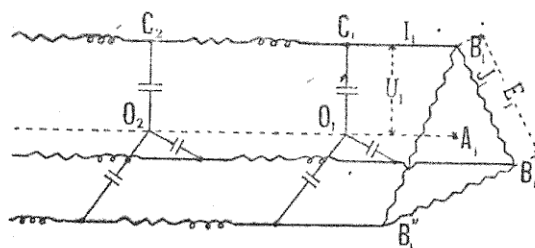


Fig. 25.

transportant chacune le tiers de la puissance fixée, fonctionnant sous la tension simple, ayant le facteur de puissance fixé et composée chacune par un fil de ligne et le fil neutre, retour commun par lequel ne passe aucun courant.

En effet de ce qui précède, il résulte que si nous fixons par exemple le voltage entre fils, le facteur de puissance à l'arrivée, et la puissance à l'arrivée, le courant dans le branchement C_1B_1 (fig. 24 et 25) sera le même et aura même décalage par rapport à la tension simple, quel que soit le montage. Les conditions initiales sont donc les mêmes en dépit des différences de montage. Or, toutes les modifications du courant et de la tension simple en divers points d'un fil de ligne seront uniquement la conséquence des réactions des constantes de la ligne ; les courants, les phases et les tensions simples seront donc les mêmes. D'ailleurs la démonstration ci-après pourrait s'appliquer sans changement quel que soit le montage des circuits, car la démonstration de la possibilité de substituer une capacité apparente unique aux capacités multiples, qui interviennent en réalité, est indépendante du montage des circuits récepteurs et producteurs. Cette possibilité et les conditions initiales sont les seules bases de la démonstration du paragraphe suivant.

On peut généraliser et appliquer une décomposition analogue aux lignes à n phases. En effet, le raisonnement précédent est général, car il est basé, en somme, sur ce fait que, si un circuit en anneau, à charges équilibrées, est branchée à n fils de lignes,

les courants qui circulent dans les fils de ligne se déduisent des courants qui circulent dans les secteurs de l'anneau, de la même façon que la tension simple se déduit des tensions entre fils. Par conséquent nous substituerons à une ligne à n phases, n lignes monophasées transportant chacune un $n^{\text{ème}}$ de la puissance, fonctionnant sous la tension simple, ayant le décalage fixé et composé par un fil de ligne et le fil neutre par lequel ne passe aucun courant.

Pour les lignes monophasées on pourrait étudier la ligne complète, il est préférable de généraliser ce mode d'étude et de décomposer même cette ligne en deux lignes monophasées transportant chacune la moitié de la puissance, fonctionnant sous le demi-voltage, que nous appellerons tension simple, avec le décalage fixé ; chaque ligne étant toujours composée d'un fil de ligne et du fil neutre. Cette complication apparente présente deux avantages : elle permet d'établir des démonstrations tout à fait générales ; elle permet également de toujours calculer les constantes d'un fil de ligne par rapport au fil neutre. Les tableaux ou abaqués de ces constantes sont ainsi plus généraux.

Le fil neutre n'intervenant pas dans les calculs, on dit souvent que l'on considère un fil de ligne et le fil de retour de résistance et de réactance nulles, ou d'impédance nulle.

2° VALEURS EXACTES DES VECTEURS DE TENSION ET DE COURANT DONNÉES SOUS FORME D'UNE SÉRIE GÉOMÉTRIQUE. — Considérons maintenant les variations de courant et de tension le long du fil A_0A_1 . Nous emploierons dans cette démonstration la notion de l'*impédance et de l'admittance dirigées*.

Dans chaque tronçon de ligne nous aurons une impédance dirigée $\left(\frac{Z}{n}\right)_\theta$ avec $Z = l\sqrt{r^2 + \omega^2 L_s^2}$ et $\text{tg } \theta = \frac{\omega L_s}{r}$, et une admittance dirigée $\left(\frac{W}{n}\right)_{\theta'}$ avec $W = l\sqrt{g^2 + \omega^2 c^2}$ et $\text{tg } \theta' = \frac{\omega c}{g}$.

Comme nous l'avons vu, toute tension U appliquée aux bornes de l'admittance dirigée $\left(\frac{W}{n}\right)_{\theta'}$ donne naissance à un courant dont le vecteur représentatif est égal en grandeur au produit $U \times \frac{W}{n}$. Ce vecteur est décalé en phase d'un angle θ' en avance sur U . De même tout courant I traversant l'impédance dirigée $\left(\frac{Z}{n}\right)_\theta$ donne lieu à une perte de tension dont le vecteur représentatif a pour

longueur $\frac{ZI}{n}$. La phase de ce vecteur est décalée de l'angle θ en avance sur (\bar{I}) .

Ceci posé, soient :

U_1 la tension simple efficace, à l'arrivée, tension entre le fil de ligne et le fil neutre.

I_1 le courant efficace à l'arrivée dans le fil de ligne.

φ_1 le décalage du courant sur la tension simple.

Nous supposons donc la ligne en charge.

Cherchons en grandeur et en direction les vecteurs $\bar{\mathcal{U}}_p$ et $\bar{\mathcal{I}}_p$ représentant la tension simple et le courant de ligne au début de l'élément p .

Nous prendrons comme axe de départ de phase, la direction du vecteur \bar{U}_1 , et, nous compterons les angles de phase positivement, en sens inverse des aiguilles d'une montre. Un vecteur sera représenté par un symbole géométrique indiquant à sa base son angle de phase : le vecteur du courant I_1 sera donc représenté par le symbole $(\bar{I}_1)_{-\varphi_1}$.

Considérons la première des n parties composant la ligne.

La différence de tension \mathcal{U}_1 , au début de cet élément, entre le conducteur B_0B_1 et le fil neutre ou le fil de retour fictif est égal à U_1 tension simple aux bornes du circuit récepteur.

On a donc :

$$(1) \quad (\bar{\mathcal{U}}_1) = (\bar{U}_1).$$

Le courant qui parcourt cet élément de ligne est la composante géométrique du vecteur $(\bar{I}_1)_{-\varphi_1}$ représentant le courant débité à l'arrivée, et du vecteur $\left(\frac{W}{n} \bar{U}_1\right)_{\theta'}$ représentant le courant qui passe dans l'admittance $\frac{W}{n}$.

On a donc :

$$(1') \quad (\bar{\mathcal{I}}_1)_{\alpha'} = (\bar{I}_1)_{-\varphi_1} + \left(\frac{W}{n} \bar{U}_1\right)_{\theta'}.$$

Le voltage \mathcal{U}_2 au début du deuxième tronçon de ligne est représenté par un vecteur qui est la composante géométrique du vecteur $(\bar{\mathcal{U}}_1) = (\bar{U}_1)$ et du vecteur représentant la chute de tension dans le premier élément. Le courant $(\bar{\mathcal{I}}_1)_{\alpha'}$ traversant un tronçon de ligne dont l'impédance dirigée est $\left(\frac{Z}{n}\right)_{\theta}$, le vecteur de chute de tension est $\left(\bar{\mathcal{I}}_1 \frac{Z}{n}\right)_{\alpha' + \theta}$.

On a d'ailleurs en vertu de l'équation (1') :

$$\left(\overline{\mathcal{J}_1 \frac{Z}{n}}\right)_{\alpha' + \theta} = \left(\overline{I_1 \frac{Z}{n}}\right)_{-\varphi_1 + \theta} + \left(\overline{\frac{WZ}{n^2} U_1}\right)_{\theta + \theta'}.$$

Par suite en posant $\theta + \theta' = \delta$ on a :

$$(2) \quad (\overline{\mathcal{U}_2})_{\beta'} = (\overline{U_1}) + \left(\overline{I_1 \frac{Z}{n}}\right)_{-\varphi_1 + \theta} + \left(\overline{\frac{WZ}{n^2} U_1}\right)_{\delta}.$$

Nous remarquerons que toute multiplication par $\frac{Z}{n}$ étant accompagnée d'une augmentation de phase de θ et toute multiplication par $\frac{W}{n}$ d'une augmentation de phase de θ' , nous pouvons nous dispenser d'inscrire les phases qui résultent immédiatement des facteurs entrant sous le signe vectoriel.

Le courant qui parcourt le deuxième élément de ligne est représenté par un vecteur qui est la somme géométrique du vecteur $(\overline{\mathcal{J}_1})_{\alpha'}$ et du vecteur du courant qui traverse la deuxième admittance dirigée $\left(\frac{W}{n}\right)_{\theta'}$ c'est-à-dire $\left(\overline{\mathcal{U}_2 \frac{W}{n}}\right)_{\beta' + \theta'}$. On a donc, en supprimant les indications d'angle de phase :

$$(\overline{\mathcal{J}_2}) = (\overline{\mathcal{J}_1}) + \left(\overline{\mathcal{U}_2 \frac{W}{n}}\right)$$

ou bien :

$$(2') \quad (\overline{\mathcal{J}_2}) = (\overline{I_1}) + \left(\overline{2 \frac{W}{n} U_1}\right) + \left(\overline{\frac{ZW}{n^2} I_1}\right) + \left(\overline{\frac{ZW^2}{n^3} U_1}\right)$$

On aurait de même pour la tension simple à l'entrée du troisième élément :

$$(3) \quad (\overline{\mathcal{U}_3}) = (\overline{U_1}) + 2\left(\overline{\frac{Z}{n} I_1}\right) + 3\left(\overline{\frac{WZ}{n^2} U_1}\right) + \left(\overline{\frac{WZ^2}{n^3} I_1}\right) + \left(\overline{\frac{W^2 Z^2}{n^4} U_1}\right).$$

D'une façon plus générale en désignant par $\overline{\mathcal{U}_p}$ et $\overline{\mathcal{J}_p}$ les vecteurs représentant la tension simple et le courant à l'entrée du tronçon d'ordre p on a :

$$(4) \quad (\overline{\mathcal{U}_p}) = (\overline{U_1}) + \alpha_{1,p} \left(\overline{\frac{Z}{n} I_1}\right) + \alpha_{2,p} \left(\overline{\frac{WZ}{n^2} U_1}\right) + \alpha_{3,p} \left(\overline{\frac{WZ^2}{n^3} I_1}\right) + \dots$$

$$(5) \quad (\overline{\mathcal{J}_p}) = (\overline{I_1}) + \beta_{1,p} \left(\overline{\frac{W}{n} U_1}\right) + \beta_{2,p} \left(\overline{\frac{WZ}{n^2} I_1}\right) + \beta_{3,p} \left(\overline{\frac{W^2 Z}{n^3} U_1}\right) + \dots$$

Le dernier terme a des formes différentes suivant que p est pair ou impair.

Les coefficients α et β ont les valeurs suivantes :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{1,p} = \frac{p-1}{1} & \beta_{1,p} = \frac{p}{1} \\ \alpha_{2,p} = \frac{p(p-1)}{1.2} & \beta_{2,p} = \frac{p(p-1)}{1.2} \\ \alpha_{3,p} = \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} & \beta_{3,p} = \frac{(p+1)p(p-1)}{3!} \\ \alpha_{4,p} = \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{4!} \text{ etc.} & \beta_{4,p} = \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{4!} \text{ etc.} \end{array} \right.$$

En faisant $p = 1$ ou 2 ou 3 nous obtenons bien les valeurs de $\overline{\mathcal{U}}_1, \overline{\mathcal{U}}_2, \overline{\mathcal{U}}_3 - \overline{\mathcal{J}}_1, \overline{\mathcal{J}}_2, \overline{\mathcal{J}}_3$ calculées précédemment.

Vérifions l'exactitude de ces formules en déduisant de leurs expressions les valeurs du voltage $\overline{\mathcal{U}}_{p+1}$ et du courant $\overline{\mathcal{J}}_{p+1}$ à l'entrée de l'élément suivant d'ordre $(p+1)$.

La chute de tension dans l'élément d'ordre p est $\Delta \mathcal{U}_p = \left(\overline{\mathcal{J}}_p \frac{Z}{n} \right)$.

Par suite on a :

$$(7) \quad \overline{\mathcal{U}}_{p+1} = (\overline{\mathcal{U}}_p) + \left(\overline{\mathcal{J}}_p \frac{Z}{n} \right).$$

Multipliant par $\frac{Z}{n}$ tous les termes de l'équation (5), ajoutant le second membre de l'équation (4) et réunissant les *termes de même phase*, on a :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,p+1} &= \alpha_{1,p} + 1 = \frac{p-1}{1} + 1 = p, \\ \alpha_{2,p+1} &= \alpha_{2,p} + \beta_{1,p} = \frac{p}{1.2} (p-1+2) = \frac{(p+1)p}{1.2}, \\ \alpha_{3,p+1} &= \alpha_{3,p} + \beta_{2,p} = \frac{p(p-1)}{3!} (p-2+3) = \frac{(p+1)p(p-1)}{3!}, \\ \alpha_{4,p+1} &= \alpha_{4,p} + \beta_{3,p} = \frac{(p+2)(p+1)p(p-1)}{4!}. \end{aligned}$$

Nous voyons que ces nouveaux coefficients peuvent se déduire des formules (6) en changeant simplement p en $p+1$.

Prenons les termes généraux, on a :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{2k,p} = \frac{(p+k-1) \dots (p+1) p \dots (p-k)}{2k!} = \beta_{2k,p} \\ \alpha_{2k+1,p} = \frac{(p+k-1) \dots p \dots (p-k)(p-k-1)}{(2k+1)!} \\ \beta_{2k+1,p} = \frac{(p+k) \dots p \dots (p-k)}{(2k+1)!} \end{array} \right.$$

L'équation (7) nous donne pour les termes généraux de même ordre de $\overline{\mathcal{U}}_{p+1}$.

$$\alpha_{2k,p+1} = \alpha_{2k,p} + \beta_{2k-1,p} \quad \text{et} \quad \alpha_{2k+1,p+1} = \alpha_{2k+1,p} + \beta_{2k,p}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \alpha_{2k,p+1} &= \frac{(p+k-1) \dots p \dots (p-k+1)}{2k!} [p-k+2k]. \\ &= \frac{(p+k) \dots (p+1-k)}{2k!}. \end{aligned}$$

On a de même :

$$\alpha_{2k+1,p+1} = \frac{(p+k) \dots (p+1) \dots (p-k)}{(2k+1)!}.$$

Ces expressions peuvent se déduire des équations 8 en changeant p en $(p+1)$. L'équation de $\overline{\mathcal{U}}_p$ vérifiée pour $p=1$, $p=2$, $p=3$, vraie pour $(p+1)$ lorsqu'elle est vraie pour p , est donc bien l'équation exacte donnant $\overline{\mathcal{U}}_p$.

La vérification de l'exactitude de l'équation géométrique donnant le vecteur $\overline{\mathcal{J}}_p$ se fera d'une façon identique.

Le vecteur du courant traversant l'élément $(p+1)$ s'obtient en ajoutant géométriquement au vecteur $(\overline{\mathcal{J}}_p)$ le vecteur $\left(\frac{W}{n} \overline{\mathcal{U}}_{p+1}\right)$. On a donc :

$$(\overline{\mathcal{J}}_{p+1}) = (\overline{\mathcal{J}}_p) + \left(\frac{W}{n} \overline{\mathcal{U}}_{p+1}\right).$$

Les coefficients numériques des vecteurs $\frac{Z^k W^k}{n^{2k}} \mathbf{I}_1$ et $\frac{Z^k W^{k+1}}{n^{2k+1}} \mathbf{U}_1$ seront donc :

$$\beta_{2k,p+1} = \beta_{2k,p} + \alpha_{2k-1,p+1} \quad \text{et} \quad \beta_{2k+1,p+1} = \beta_{2k+1,p} + \alpha_{2k,p+1}.$$

$$\text{D'où : } \beta_{2k,p+1} = \frac{(p+k) \dots (p+1)p \dots (p+1-k)}{2k!},$$

$$\text{et : } \beta_{2k+1,p+1} = \frac{(p+k+1) \dots (p+1)p \dots (p+1-k)}{(2k+1)!}.$$

Ces deux expressions se déduisent des équations 8 en changeant p en $(p+1)$.

L'équation géométrique donnant $\overline{\mathcal{J}}_p$ est donc vérifiée. Les séries géométriques donnant $\overline{\mathcal{U}}_p$ et $\overline{\mathcal{J}}_p$ contiennent comme cas particuliers toutes les méthodes d'approximation consistant à diviser la ligne en un nombre de tronçons fini et peu élevé.

Nous remarquerons toutefois que nous avons supposé que l'admittance est située au début de l'élément.

Equations géométriques donnant la valeur exacte des vecteurs de la tension simple ($\overline{\mathcal{U}_x}$) et du courant ($\overline{\mathcal{J}_x}$) de la ligne en charge, au point de la ligne situé à x kilomètres de l'arrivée.

Soient l la longueur de la ligne, w et z l'admittance et l'impédance kilométrique d'un fil de ligne nous avons : $W = l.w$ et $Z = lz$.

Si nous voulons obtenir les valeurs exactes de ($\overline{\mathcal{U}_x}$) et ($\overline{\mathcal{J}_x}$) représentant les vecteurs de la tension et du courant au point situé à une distance de x kilomètres de l'arrivée, la ligne ayant l kilomètres de longueur, il nous suffira dans les équations géométriques donnant \mathcal{U}_p et \mathcal{J}_p , de prendre $\frac{p}{n} = \frac{x}{l}$ et de faire croître n indéfiniment. Les termes généraux de $\overline{\mathcal{U}_p}$ sont :

$$\left(\overline{\alpha_{2k,p} \frac{W^k Z^k}{n^{2k}} U_1} \right) \text{ et } \left(\overline{\alpha_{2k+1,p} \frac{W^k Z^{k+1}}{n^{2k+1}} I_1} \right).$$

Si dans les coefficients de ces termes, nous remplaçons p par $\frac{x}{l} \times n$ et faisons croître n indéfiniment, nous voyons que le rapport $\frac{\alpha_{2k,p}}{n^{2k}}$ a pour limite : $\left(\frac{x}{l}\right)^{2k} \times \frac{1}{2k!}$ et que le rapport $\frac{\alpha_{2k+1,p}}{n^{2k+1}}$ a pour limite $\left(\frac{x}{l}\right)^{2k+1} \times \frac{1}{(2k+1)!}$. Si nous remplaçons W par lw et Z par lz , les termes généraux de $\overline{\mathcal{U}_p}$ qui a pour limite $\overline{\mathcal{U}_x}$ deviennent : $\left(\overline{U_1 \frac{(\varepsilon w)^k}{2k!} x^{2k}} \right)$ et $\left(\overline{I_1 \frac{\varepsilon^{k+1} w^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}} \right)$.

Dans les mêmes conditions les termes généraux de ($\overline{\mathcal{J}_p}$), qui a pour limite ($\overline{\mathcal{J}_x}$), deviennent :

$$\left(\overline{I_1 \frac{(\varepsilon w)^k}{2k!} x^{2k}} \right) \text{ et } \left(\overline{U_1 \frac{\varepsilon^k w^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}} \right).$$

Si nous réunissons ensemble les termes en U_1 et ensemble les termes en I_1 , et remettons en évidence les angles de phase, les équations géométriques donnant $\overline{\mathcal{U}_x}$ et $\overline{\mathcal{J}_x}$ deviennent :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{U}_x} &= \left\{ \begin{aligned} &(\overline{U_1}) + \left(\overline{U_1 \frac{\varepsilon w}{1.2} x^2} \right)_\delta + \left(\overline{U_1 \frac{(\varepsilon w)^2}{4!} x^4} \right)_{2\delta} + \dots \\ &+ (\overline{I_1 z x})_{-\varphi_1 + \theta} + \left(\overline{I_1 \frac{\varepsilon^2 w}{3!} x^3} \right)_{-\varphi_1 + \theta + \delta} + \left(\overline{I_1 \frac{\varepsilon^3 w^2}{5!} x^5} \right)_{-\varphi_1 + \theta + 2\delta} + \dots \end{aligned} \right. \\ \overline{\mathcal{J}_x} &= \left\{ \begin{aligned} &(\overline{U_1 w x})_{\theta'} + \left(\overline{U_1 \frac{w^2 \varepsilon}{3!} x^3} \right)_{\theta' + \delta} + \left(\overline{U_1 \frac{w^3 \varepsilon^2}{5!} x^5} \right)_{\theta' + 2\delta} + \dots \\ &+ (\overline{I_1})_{-\varphi_1} + \left(\overline{I_1 \frac{w \varepsilon}{2!} x^2} \right)_{-\varphi_1 + \delta} + \left(\overline{I_1 \frac{(w \varepsilon)^2}{4!} x^4} \right)_{-\varphi_1 + 2\delta} + \dots \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs ; z et w étant l'impédance et l'admittance kilométriques :

$$z = \sqrt{r^2 + \omega^2 L_s^2} \quad w = \sqrt{g^2 + \omega^2 c^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega L_s}{r} \quad \operatorname{tg} \theta' = \frac{\omega c}{g} \quad \delta = \theta + \theta',$$

Régimes de la ligne en circuit ouvert et en court-circuit. — Considérons les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad \overline{U}_x &= \overline{U}_1 + \left(\overline{U}_1 \frac{\varepsilon w}{1.2} x^2 \right)_\delta + \left(\overline{U}_1 \frac{(\varepsilon w)^2}{4!} x^4 \right)_{2\delta} + \dots \\ (2) \quad (\overline{J}_x) &= (\overline{U}_1 w x)_{\theta'} + \left(\overline{U}_1 \frac{\varepsilon w^2}{3!} x^3 \right)_{\theta' + \delta} + \left(\overline{U}_1 \frac{\varepsilon^2 w^3}{5!} x^5 \right)_{\theta' + 2\delta} + \dots \\ (3) \quad (\overline{V}_x) &= (\overline{I}_1 \varepsilon x)_\theta + \left(\overline{I}_1 \frac{\varepsilon^2 w}{3!} x^3 \right)_{\theta + \delta} + \left(\overline{I}_1 \frac{\varepsilon^3 w^2}{5!} x^5 \right)_{\theta + 2\delta} + \dots \\ (4) \quad (\overline{I}_x) &= (\overline{I}_1) + \left(\overline{I}_1 \frac{\varepsilon w}{2} x^2 \right)_\delta + \left(\overline{I}_1 \frac{w^2 \varepsilon^2}{4!} x^4 \right)_{2\delta} + \dots \end{aligned}$$

En comparant ces séries aux séries géométriques donnant \overline{U}_x et \overline{J}_x vecteurs donnant la tension et courant de la ligne en charge au point situé à x kilomètres de l'arrivée nous voyons que nous avons évidemment :

$$(5) \quad (\overline{U}_x) = (\overline{U}_x) + (\overline{V}_x)_{\text{rotation} - \varphi_1}$$

et

$$(6) \quad (\overline{J}_x) = (\overline{J}_x) + (\overline{I}_x)_{\text{rotation} - \varphi_1}$$

En effet (\overline{U}_x) représente la résultante de tous les vecteurs, fonctions de U_1 , qui entrent dans la formation de (\overline{U}_x) . De même (\overline{V}_x) représente la résultante de tous les vecteurs fonctions de I_1 , en supposant toutefois qu'on les a fait tourner de l'angle $+\varphi_1$.

Il en est de même de (\overline{I}_x) pour les vecteurs fonctions de I_1 qui entrent dans la composition de (\overline{J}_x) ; tandis que (\overline{J}_x) représente exactement en grandeur et direction, la résultante de tous les vecteurs fonctions de U_1 .

Les équations 1, 2, 3, 4, 5, 6, nous déterminent complètement le régime de marche au point situé à x kilomètres de l'arrivée de la ligne, lorsque la ligne débite à l'arrivée, sur chaque phase, un courant I_1 avec un décalage φ_1 sous la tension simple U_1 .

Les vecteurs nouveaux (\overline{U}_x) et (\overline{J}_x) , (\overline{V}_x) et (\overline{I}_x) que nous venons d'introduire ont une signification très nette.

Les vecteurs (\overline{U}_x) et (\overline{J}_x) s'obtiennent en faisant $I_1 = 0$ dans les équations géométriques donnant (\overline{U}_x) et (\overline{J}_x) . Ce sont donc les vecteurs de tension et de courant au point situé à x kilomètres de l'arrivée lorsque la ligne à *circuit ouvert*, ne débite aucun courant à l'arrivée.

Les vecteurs (\overline{V}_x) et (\overline{I}_x) s'obtiennent en faisant $U_1 = 0$ et $\varphi_1 = 0$ dans les mêmes équations donnant (\overline{U}_x) et (\overline{J}_x) . Ce sont donc les vecteurs de tension et de courant au point situé à x kilomètres de l'arrivée dans le régime de la ligne en *court-circuit*. Le débit dans le court-circuit à l'arrivée étant égal à I_1 . Dans ce cas, ce courant I_1 , aurait été évidemment pris comme origine de phase, si nous avions traité ce cas directement.

On peut donc dire, d'une façon abrégée, que le régime général de la ligne en charge (\overline{U}_x) et (\overline{J}_x) peut s'obtenir par la superposition des régimes à circuit ouvert et en court-circuit sous réserve de décaler ce dernier régime de l'angle $(-\varphi_1)$. (Nous sous-entendons qu'avant ce décalage nous supposons les mêmes origines de phases aux deux régimes).

Construction géométrique des vecteurs (\overline{U}_x) et (\overline{J}_x) . — Soit U_1 la tension simple efficace à l'origine. Nous prenons le vecteur U_1 comme origine de phase. Nous construirons d'abord les vecteurs (\overline{U}_x) et (\overline{V}_x) , (\overline{J}_x) et (\overline{I}_x) en supposant que U_1 et I_1 sont en phase.

En joignant l'extrémité Q de (\overline{V}_x) au point M symétrique par rapport à l'origine de l'extrémité du vecteur (\overline{U}_x) on aura en MQ le vecteur (\overline{U}_x) en grandeur et en direction dans le cas où $\varphi_1 = 0$.

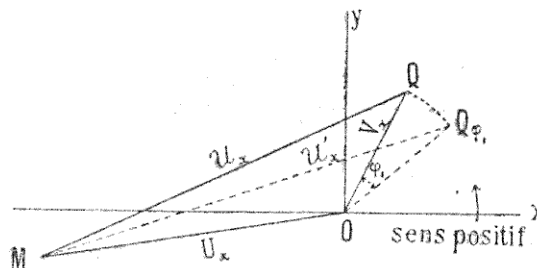


Fig. 26. — Composition des tensions

Si φ_1 est différent de zéro, il suffira de faire tourner le vecteur (\overline{V}_x) de l'angle $(-\varphi_1)$ en tenant compte du sens positif pour avoir en (MQ_{φ_1}) la valeur de (\overline{U}'_x) . Cette construction n'est que la traduction de l'équation $(\overline{U}_x) = (\overline{U}_x) + (\overline{V}_x)_{\text{rotation } -\varphi_1}$.

L'équation géométrique : $(\overline{J}_x) = (\overline{J}_x) + (\overline{I}_x)_{\text{rotation} - \varphi_1}$,

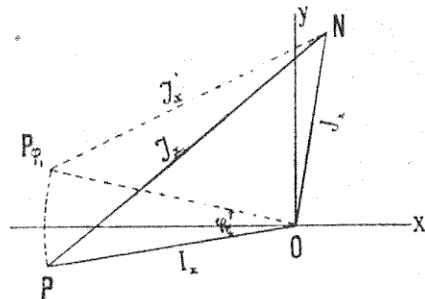


Fig. 27. — Composition des courants.

donnera de même en PN la direction et la grandeur du vecteur (\overline{J}_x) , dans le cas où $\varphi_1 = 0$ et, en NP_{φ_1} , sa grandeur et sa direction, si le décalage est différent de zéro, et a une valeur déterminée φ_1 .

Si nous pouvons construire exactement les vecteurs $\overline{U}_x, \overline{V}_x, \overline{J}_x, \overline{I}_x$ nous aurons par les constructions précédentes les vecteurs \overline{U}_x et \overline{J}_x en grandeurs et directions exactes.

2° CONSTRUCTION DES VECTEURS DE TENSION ET DE COURANT AVEC UNE APPROXIMATION CONNUE ⁽¹⁾. — Les vecteurs $(\overline{U}_x) (\overline{V}_x) (\overline{J}_x) (\overline{I}_x)$, sont définis par des séries géométriques.

Ces séries sont toutes de la forme :

$$\overline{K} = (\overline{r}_0)_{\lambda} + (\overline{r}_1)_{\lambda + \delta} + (\overline{r}_2)_{\lambda + 2\delta} + \dots$$

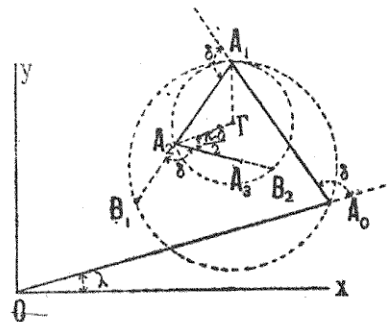


Fig. 28. — Calcul géométrique de l'erreur.

Les vecteurs $\overline{U}_x, \overline{V}_x, \overline{J}_x, \overline{I}_x$, sont donc comme le vecteur \overline{K} la somme géométrique d'une série de vecteurs r_1, r_2, \dots, r_n , décalés, régulièrement, les uns par rapport aux autres d'angles égaux. La figure O, A_0, A_1, A_2, \dots , indique la construction d'un tel vecteur

(1) En collaboration avec M. A. Blondel j'ai publié cette méthode dans le Journal *La Lumière électrique* (18 septembre 1909 et numéros suivants). L'exposé actuel contient naturellement d'assez nombreux emprunts aux articles précités.

dans le cas où $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n$, ont des valeurs décroissantes, ce qui est le cas.

Quel est le degré d'approximation obtenu, si on prend comme vecteur résultant OA_2, OA_3 ou OA_n au lieu de poursuivre la série jusqu'à l'infini ?

Nous appliquerons pour déterminer cette approximation une méthode indiquée par Laurent (*Etude des Séries*).

Prolongeons le vecteur $\overline{A_1A_2}$ jusqu'en B_1 , de façon que $\overline{A_1B_1} = \overline{A_0A_1}$. Portons également $\overline{A_2B_2} = \overline{A_1A_2}$; $\overline{A_3B_3} = \overline{A_2A_3}$, etc., et considérons les cercles circonscrits aux triangles isocèles $A_0A_1B_1, A_1A_2B_2, A_2A_3B_3$, etc.

Ces cercles ont des rayons décroissants, car ils sont circonscrits à des triangles semblables de côtés décroissants.

Le cercle d'ordre supérieur $A_1A_2B_2$, par exemple, est intérieur au cercle précédent $A_0A_1B_1$. En effet, les centres de ces deux cercles se trouvent sur la bissectrice de l'angle A_1 . C'est évident pour le cercle $A_0A_1B_1$; pour le cercle $A_1A_2B_2$, il suffit de remarquer que le centre Γ se trouve sur la bissectrice de l'angle A_1 ; en joignant ΓA_1 on a : $\Gamma A_2A_1 = \Gamma A_1A_2 = \frac{\pi - \delta}{2} = \Gamma A_1A_0$.

Les deux cercles passent par A_1 ; ils sont tangents en ce point et ont leurs centres d'un même côté sur la bissectrice de A_1 ; comme le second cercle a le plus petit rayon, c'est lui qui est intérieur. On verrait de même que le troisième cercle est intérieur au deuxième et ainsi de suite.

Cela nous permettrait de démontrer la convergence de la série, s'il en était besoin, et suffit pour calculer une limite de l'erreur commise. Si nous nous arrêtons au terme d'ordre n , l'erreur absolue sur le vecteur K est évidemment plus petite que le diamètre du cercle circonscrit au triangle isocèle $A_nA_{n+1}B_{n+1}$, puisque ce cercle contient l'extrémité limite du vecteur K .

On a d'ailleurs :

$$\frac{D}{2} \sin \frac{\delta}{2} = \frac{r_{n+1}}{2}; \quad \text{d'où} \quad D = \frac{r_{n+1}}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

L'erreur absolue faite sur le vecteur K est donc plus petite que le quotient du premier terme négligé r_{n+1} par $\sin \frac{\delta}{2}$.

Dans les lignes de transport de force aériennes ou souterraines, θ' est très voisin de $\frac{\pi}{2}$; δ est donc compris entre π et $\frac{\pi}{2}$; par suite,

$\frac{\delta}{2}$ compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$, et la plus petite valeur de $\sin \frac{\delta}{2}$ est ainsi $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'erreur absolue est donc sûrement plus petite que $r_{n+1} \sqrt{2}$.

Nous n'avons pas tenu compte dans ce raisonnement de la rapidité de décroissance des termes de la série donnant le vecteur \bar{K} . Dans le problème des lignes de transport, cette décroissance est très rapide, on trouve très souvent que r_{n+1} est 30 ou 40 fois plus petit que r_n . Ceci permet de trouver une limite supérieure de l'erreur faite sur \bar{K} , en négligeant les vecteurs \bar{r}_{n+1} , \bar{r}_{n+2} , etc., plus faible que la précédente.

En effet si nous prolongeons la série \bar{K} jusqu'au vecteur \bar{r}_{n+3} , non compris, l'erreur absolue sera plus petite que $r_{n+3} \sqrt{2}$. L'erreur absolue faite en s'arrêtant au vecteur \bar{r}_{n+1} (non compris) est donc :

$$\varepsilon < A_n A_{n+2} + r_{n+3} \sqrt{2}.$$

$A_n A_{n+2}$ étant la distance qui sépare l'extrémité A_n du vecteur \bar{r}_n de l'extrémité du vecteur \bar{r}_{n+2} . Ou bien :

$$\varepsilon < \sqrt{r_{n+1}^2 + r_{n+2}^2 - 2r_{n+1}r_{n+2} \cos(\pi - \delta)} + r_{n+3} \sqrt{2}.$$

L'angle $\pi - \delta$ diffère peu de $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ et dans les lignes que nous étudions θ est toujours plus grand que 10° (même pour les lignes souterraines) : donc $\cos(\pi - \delta)$ est plus grand que 0,15. Si nous admettons qu'un terme de la série K est p fois plus grand que le terme suivant, on a :

$$\varepsilon < r_{n+1} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{p^2} - \frac{0,3}{p}} + \frac{\sqrt{2}}{p^3} \right].$$

Dès que p est plus grand que 10 la quantité entre parenthèse est plus petite que l'unité.

Par conséquent nous pouvons toujours admettre que l'erreur absolue faite sur le vecteur \bar{K} est plus petite que le premier terme négligé.

Lorsqu'en prenant n termes nous avons une erreur absolue que nous jugeons négligeable, il est facile d'évaluer l'ordre de grandeur de cette erreur absolue. En effet, en prenant le terme \bar{r}_{n+1} nous aurions une erreur absolue 20 ou 30 fois plus petite, c'est-à-dire tout à fait négligeable. Nous pouvons donc considérer \bar{K}_{n+1} comme la vraie valeur de la série. L'erreur absolue faite en prenant seulement n termes (\bar{K}_n), est donc de l'ordre de :

$$\varepsilon = \bar{K}_{n+1} - \bar{K}_n = \text{sensiblement } r_{n+1} \cos(\bar{K}_n, r_{n+1}).$$

Cette erreur peut être très petite si le vecteur r_{n+1} fait un angle voisin de $\frac{\pi}{2}$ avec le vecteur \bar{K}_n .

Erreur relative. — L'erreur relative $\frac{\varepsilon}{K}$ s'obtient en divisant l'erreur absolue ε par la valeur exacte du vecteur. On peut, en général, la calculer avec une approximation suffisante, en remplaçant la valeur exacte du vecteur par la valeur approchée qui ne diffère pas beaucoup, en général, du premier terme de la série. Donc le rapport $\frac{r_{n+1}}{r_0}$ nous donnera *approximativement* la valeur maxima de l'erreur relative faite en s'arrêtant au vecteur \bar{r}_n compris.

Supposons que pour \bar{U}_x et \bar{I}_x nous prenions au maximum les termes en x^4 et pour J_x et V_x les termes en x_3 négligeant ainsi les termes en x^5 et x^6 .

Les valeurs approximatives des limites supérieures des erreurs relatives seraient :

$$\begin{aligned} &\text{pour } U_x \text{ et } I_x \frac{(\varepsilon w x^2)^3}{720} \\ &\text{et pour } V_x \text{ et } J_x \frac{(\varepsilon w x^2)^2}{420}. \end{aligned}$$

Valeurs du produit zw . — Le produit zw varie assez peu lorsque la distance des fils varie, parce que z et w varient en sens inverse. La diminution du diamètre des fils augmentant la résistance augmente le produit zw . Prenons des fils de 10 millimètres de diamètre situés à 150 centimètres de distance. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} \text{à 25 cycles} \quad zw &= 0,4 \times 10^{-6}; \\ \text{à 50 cycles} \quad zw &= 1,15 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Les valeurs de zw dans une grande ligne de transport seront en général plus petites, et, il faut des fils de très faibles diamètres (5 millimètres) pour doubler ces valeurs de zw .

Ecrivons que les erreurs précédentes sont plus petites que $\frac{1}{4000}$ en remplaçant zw par les valeurs ci-dessus.

L'inégalité $\frac{(\varepsilon w x^2)^3}{720} < \frac{1}{4000}$ nous donne :

$$\begin{aligned} \text{à 25 cycles} \quad x &< 1.500 \text{ kilomètres}; \\ \text{à 50 cycles} \quad x &< 900 \text{ kilomètres}. \end{aligned}$$

L'inégalité $\frac{(\varepsilon w x^2)^2}{420} < \frac{1}{4000}$ nous donne :

$$\begin{aligned} \text{à 25 cycles} \quad x &< 930 \text{ kilomètres}; \\ \text{à 50 cycles} \quad x &< 550 \text{ kilomètres}. \end{aligned}$$

Nous voyons donc qu'en négligeant les termes en x^5 et x^6 nous aurons des erreurs relatives très faibles même pour les lignes extrêmement longues.

Les valeurs limites des erreurs absolues faites sur les vecteurs \overline{U}_x , \overline{J}_x , \overline{I}_x , \overline{V}_x sont dans ce cas :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } \overline{U}_x : \frac{(\varepsilon w x^2)^3 U_1}{720} & \text{pour } \overline{I}_x : \frac{(\varepsilon w x^2)^3 I_1}{720} \\ \text{pour } \overline{J}_x : \frac{(\varepsilon w x^2)^2 w x U_1}{120} & \text{pour } \overline{V}_x : \frac{(\varepsilon w x^2)^2 \varepsilon x I_1}{120} \end{array}$$

Erreurs absolues et relatives faites sur les vecteurs \mathcal{U}_x et \mathcal{J}_x . — De la connaissance des limites des erreurs individuelles faites sur les vecteurs composants on peut déduire, comme il suit, les limites des erreurs sur les vecteurs résultants de la ligne en charge.

1° *En grandeur.* — L'erreur absolue a pour limite maxima la somme des limites maxima des erreurs des deux vecteurs ; par conséquent, si l'on arrête le développement au-dessous du terme en x^3 , on déduit immédiatement les erreurs absolues suivantes sur \mathcal{U}_x et \mathcal{J}_x , respectivement :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{(\varepsilon w x^2)^3}{720} U_1 + \frac{(\varepsilon w x^2)^2 \varepsilon x}{120} I_1, \\ \varepsilon' &= \frac{(\varepsilon w x^2)^3}{720} I_1 + \frac{(\varepsilon w x^2)^2 w x}{120} U_1. \end{aligned}$$

Les erreurs relatives s'obtiendraient en divisant respectivement par les longueurs des vecteurs eux-mêmes et seraient $\frac{\varepsilon}{\mathcal{U}_x}$, $\frac{\varepsilon'}{\mathcal{J}_x}$.

2° *En phase.* — L'erreur de phase a pour limite maximum la

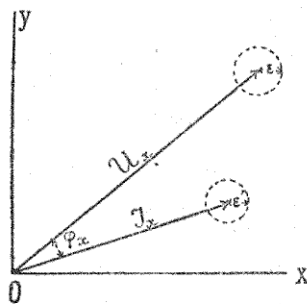


Fig. 29. — Schéma du calcul des erreurs de phase.

plus grande variation possible qu'on peut faire sur l'angle compris entre les vecteurs \mathcal{U}_x et \mathcal{J}_x , quand les extrémités de ces vecteurs se déplacent à l'intérieur des cercles limites d'erreur, ayant pour

rayons ε et ε' . La figure traduit géométriquement cette considération. Nous traçons à partir de l'origine deux vecteurs égaux à \mathcal{U}_x et à \mathcal{J}_x , et à l'extrémité, nous décrivons les deux cercles de rayon ε et ε' ; on voit de suite que l'erreur sur la phase de chacun de ces vecteurs a pour maximum sensiblement le rapport du rayon d'erreur à la longueur du vecteur, c'est-à-dire l'erreur relative calculée ci-dessus.

L'erreur maxima absolue possible sur la valeur de l'angle φ_x est donc $;\frac{\varepsilon}{\mathcal{U}_x} + \frac{\varepsilon'}{\mathcal{J}_x}$.

3° CONSTRUCTION PRATIQUE DES DIAGRAMMES DES TENSIONS ET DES COURANTS. — a) *Longues lignes de transport.* — On peut négliger pour ces longues lignes les termes en x^3 et d'ordre supérieur.

Régime à vide. — Les deux vecteurs \bar{U}_x et \bar{J}_x sont alors donnés par les équations :

$$\bar{U}_x = \bar{U}_1 + \left(\frac{\varepsilon w x^2}{2} \bar{U}_1 \right)_{\delta} + \left(\frac{\varepsilon^2 w^2 x^4}{24} \right)_{2\delta}$$

$$\bar{J}_x = (\bar{U}_1 w x)_{\theta'} + \left(\frac{\bar{U}_1 \varepsilon w^2 x^3}{6} \right)_{\theta' + \delta}$$

La figure 30 représente la construction de \bar{U}_x et \bar{J}_x , on a :

$$\bar{U}_x = \overline{OM_1} + \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} = \overline{OM_3},$$

$$\bar{J}_x = \overline{ON_1} + \overline{N_1N_2} = \overline{ON_2}.$$

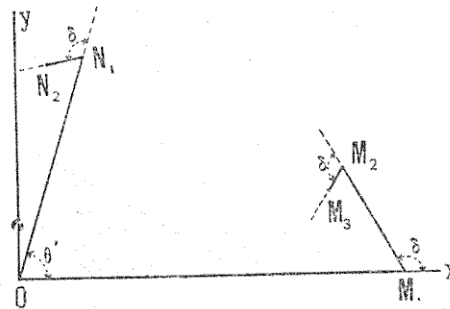


Fig. 30. — Vecteurs du régime à vide

Régime en court-circuit. — Les deux vecteurs \bar{V}_x et \bar{I}_x sont donnés par les équations géométriques :

$$\bar{V}_x = (\bar{I}_1 z x)_{\theta} + \left(\bar{I}_1 \frac{\varepsilon^2 w}{6} x^3 \right)_{\theta + \delta};$$

$$\bar{I}_x = \bar{I}_1 + \left(\bar{I}_1 \frac{\varepsilon w}{2} x^2 \right)_{\delta} + \left(\bar{I}_1 \frac{\varepsilon^2 w^2}{24} x^4 \right)_{2\delta}$$

La figure 31 représente la construction de \bar{V}_x et de \bar{I}_x , on a :

$$\bar{V}_x = \overline{OQ_1} + \overline{Q_1Q_2} = \overline{OQ_2},$$

$$\bar{I}_x = \overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} = \overline{OP_3}.$$

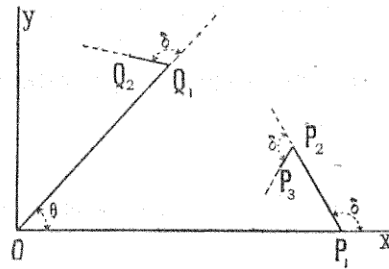


Fig. 31. — Vecteurs du régime en court-circuit.

Régime à pleine charge. — Les vecteurs \bar{U}_x et \bar{J}_x sont donnés par les relations géométriques :

$$\bar{U}_x = (\bar{U}_x) + (\bar{V}_x)_{\text{rotation} - \varphi_1} \quad \text{et} \quad \bar{J}_x = (\bar{J}_x) + (\bar{I}_x)_{\text{rotation} - \varphi_1}.$$

Si le décalage à l'arrivée φ_1 est nul le vecteur de la tension (\bar{U}_x) s'obtiendra en réunissant le point Q_2 extrémité du vecteur (\bar{V}_x), au symétrique de l'extrémité du vecteur (\bar{U}_x), de la tension à vide, par rapport à l'origine O.

Dans la figure 32 on a obtenu ce résultat en construisant directement le vecteur $\overline{OM_3}$ dans le troisième quadrant. $\overline{M_3Q_2}$ nous donne en grandeur et direction la valeur de \bar{U}_x .

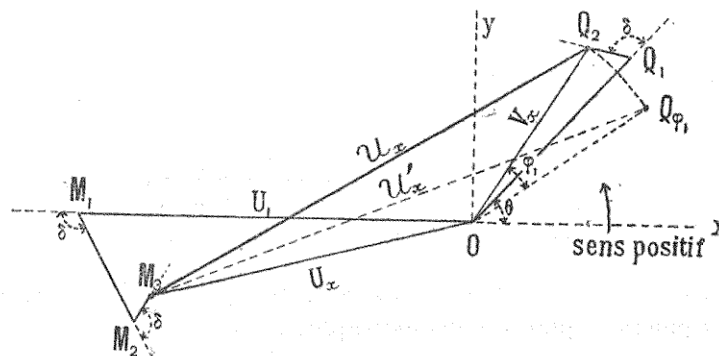


Fig. 32. — Epure des tensions.

Si φ_1 est différent de zéro, il suffira de faire tourner $\overline{OQ_2}$ de l'angle φ_1 dans le sens négatif, pour obtenir en $\overline{M_3Q_{\varphi_1}}$ le vec-

teur \overline{U}_x donnant la tension simple au point situé à x kilomètres de l'arrivée lorsque la ligne débite sur les trois phases un courant I_1 sous la tension simple U_1 avec un décalage φ_1 .

Le vecteur du courant (\overline{J}_x) s'obtiendra d'une façon entièrement analogue en joignant N_2 extrémité du vecteur (\overline{J}_x) construit dans le premier quadrant à l'extrémité P_3 du polygone donnant (\overline{I}_x) construit dans le troisième quadrant. On a $\overline{P_3N_2} = \overline{J}_x$. S'il y a un décalage φ_1 , on fera tourner le vecteur $\overline{OP_3}$ et nous aurons en $\overline{P_{\varphi_1}N_2}$ le vecteur du courant ($\overline{J'_x}$) correspondant à ces conditions (fig. 33).

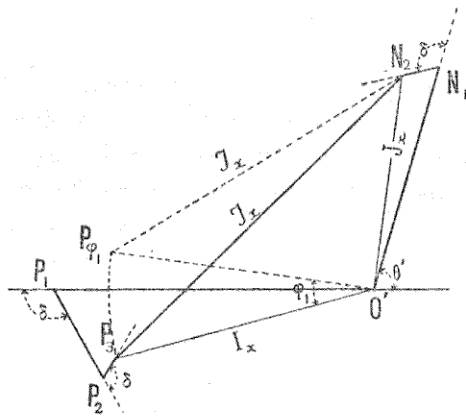


Fig. 33. — Epure des courants.

4° SIMPLIFICATIONS DE LA CONSTRUCTION GRAPHIQUE POUR DES LIGNES DE MOYENNES LONGUEURS. — A. *Première simplification.* — Si les lignes ne sont pas très longues on peut se contenter des deux premiers termes des séries. Une discussion entièrement analogue à la précédente montrerait qu'il suffit, pour que les limites approximatives des erreurs soient plus petites que $\frac{1}{1.000}$, que l'on ait : $x < 600$ kil. à 25 cycles et $x < 360$ kil. à 50 cycles. Posons $Z = zx$ et $W = wx$.

Les équations géométriques donnant \overline{U}_x et \overline{J}_x deviennent :

$$\overline{U}_x = \overline{U}_1 + \left(\frac{ZW}{2} U_1 \right)_{\delta} + (\overline{Z} I_1)_{-\varphi_1 + \theta} + \left(\frac{Z^2 W}{6} I_1 \right)_{-\varphi_1 + \theta + \delta}$$

$$\text{et } \overline{J}_x = (\overline{I}_1)_{-\varphi_1} + \left(\frac{WZ}{2} I_1 \right)_{-\varphi_1 + \delta} + (\overline{W} U_1)_{\theta'} + \left(\frac{W^2 Z}{6} U_1 \right)_{\theta' + \delta}.$$

Les figures 34 et 35 montrent la construction *en place* des vecteurs \overline{U}_x et \overline{J}_x en supposant un décalage φ_1 entre le courant à l'arrivée I_1 et la tension simple U_1 . Cette construction est la sim-

ple traduction graphique des équations géométriques précédentes. Les vecteurs tels que $\overline{M_2M_3}$, $\overline{P_2P_3}$ ont disparu.

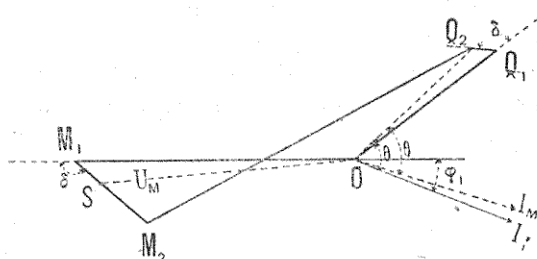


Fig. 34. — Tensions.

Construction abrégée. — Les vecteurs $\overline{OQ_2}$ et $\overline{ON_2}$ peuvent être obtenus directement par une construction abrégée, qui est avantageuse lorsqu'on n'a pas à étudier les voltages en divers points de la ligne, mais seulement à son extrémité. En effet, portons sur M_1M_2 dans le diagramme des tensions $M_1S = \frac{1}{3}M_1M_2$ et sur P_1P_2 dans le diagramme des courants $P_1T = \frac{1}{3}P_1P_2$.

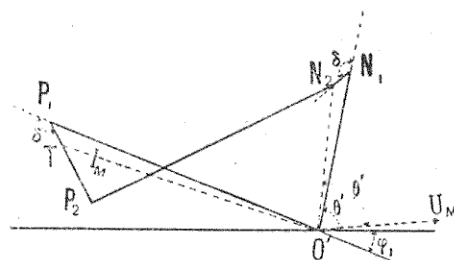


Fig. 35. — Courants.

Dans les triangles OM_1S et ON_1N_2 les angles en M_1 et N_1 sont égaux à $\pi - \delta$.

En appelant Z et W l'impédance et l'admittance totale de la ligne, on a d'autre part :

$$\begin{aligned} O'N_1 &= WU_1 & N_1N_2 &= WU_1 \times \frac{WZ}{6}, \\ OM_1 &= U_1 & M_1S &= U_1 \cdot \frac{WZ}{6}. \end{aligned}$$

Par suite $\frac{O'N_1}{OM_1} = \frac{N_1N_2}{M_1S} = W$. Les deux triangles sont donc semblables. On en déduit $\frac{O'N_2}{OS} = W$ et $\widetilde{N_2O'N_1} = \widetilde{M_1OS}$.

Par suite $O'N_2$ peut se déduire de OS que nous pouvons appeler

la tension moyenne U_M comme $O'N_1$ se déduit de U_1 tension à l'arrivée.

En comparant les deux triangles semblables $TO'P_1$ et Q_2OQ_1 on verrait de même que OQ_2 se déduit de $O'T = I_M$ comme OQ_1 se déduit de I_1 .

Les figures 36 et 37 montrent la simplification de la construction.

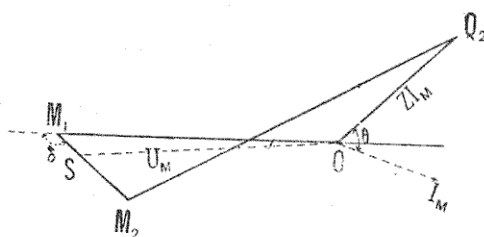


Fig. 36. — Tensions.

Si nous remarquons que les longueurs M_1M_2 et P_1P_2 sont proportionnelles au carré de la longueur l de la ligne nous voyons que S et T correspondent au point situé à une distance $\frac{l}{\sqrt{3}}$ de l'arrivée. U_M est la tension de la ligne à circuit ouvert en ce point et I_M le courant en ce point dans le régime en court-circuit débitant le courant I_1 à l'arrivée.

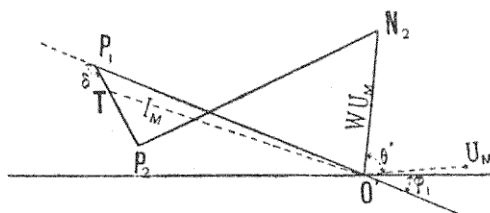


Fig. 37. — Courants.

Résumant cette construction nous voyons que OM_1M_2 et $P'O_1P_2$ se construisent comme précédemment. On prend ensuite $M_1S = \frac{1}{3}M_1M_2$ et $P_1T = \frac{1}{3}P_1P_2$. On joint OS et OT . On mesure sur l'épure $SO = U_M$ et $TO' = I_M$ et on porte sur le diagramme des tensions $OQ_2 = ZI_M$ faisant avec I_M l'angle θ et sur le diagramme des courants on porte $O'N_2 = WU_M$ faisant avec la direction U_M l'angle θ' .

Nous avons employé dans cet exemple la construction des vecteurs en place, en donnant au courant I_1 sa phase définitive ($-\varphi_1$ dès le début ; cette méthode de construction est avantageuse lorsque le facteur de puissance est parfaitement fixé. Dans la construction

abrégée ce mode de construction présente l'avantage de différencier nettement les vecteurs \overline{U}_M et \overline{I}_M de la tension et du courant moyen, et d'éviter ainsi toute erreur, à ce sujet.

Deuxième simplification. — Si la ligne se raccourcit encore on pourra négliger les termes en x^3 .

Si nous cherchons la longueur de ligne qui donne une erreur relative au plus égale à $\frac{1}{1.000}$ sur tous les vecteurs composants nous trouvons qu'il est nécessaire que les lignes soient très courtes (125 kil. environ à 25 cycles, 60 kil. environ à 50 cycles). Les erreurs relatives les plus fortes sont faites sur les vecteurs \overline{V}_x et \overline{J}_x . Or pour les lignes assez courtes, ces vecteurs sont beaucoup plus petits que les vecteurs \overline{U}_x et \overline{J}_x de la tension et du courant de la ligne à pleine charge. Une erreur absolue faite sur \overline{V}_x ou \overline{I}_x et donnant pour l'un et l'autre vecteur une erreur relative assez forte, donnera pour les vecteurs \overline{U}_x et \overline{J}_x des erreurs relatives négligeables.

Lorsqu'on néglige les termes en x^3 les erreurs absolues maxima faites sur \overline{U}_x et \overline{J}_x sont :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left(\frac{\varepsilon^2 \omega^2}{24} x^4 U_1 + I_1 \frac{\varepsilon^2 \omega}{6} x^3 \right) \quad \text{pour } \overline{U}_x, \\ \varepsilon' &= \left(\frac{\varepsilon^2 \omega^2}{24} x^4 I_1 + U_1 \frac{\varepsilon^2 \omega}{6} x^3 \right) \quad \text{pour } \overline{J}_x.\end{aligned}$$

Les erreurs relatives maxima sont donc : $\frac{\varepsilon}{\overline{U}_x}$ et $\frac{\varepsilon'}{\overline{J}_x}$.

Ces erreurs relatives ne dépassent guère $\frac{2}{1.000}$ pour des lignes de 300 à 320 kilomètres à 25 cycles et de 180 kilomètres à 50 cycles.

La perditance g est d'autre part très faible si nous faisons $g = 0$ on a $\theta = \frac{\pi}{2}$. Pour $x = l$, nous aurons les vecteurs de la tension et du courant au départ de la ligne : \overline{U}_0 et \overline{J}_0 .

Les équations géométriques qui donnent ces vecteurs sont relativement simples, on a :

$$\begin{aligned}(\overline{U}_0) &= (\overline{U}_1)_0 + \left(\frac{\varepsilon \cdot \omega C}{2} l^2 U_1 \right) \frac{\pi}{2} + \theta + (\overline{I}_1 z l)_0 - \varphi_1 \\ (\overline{J}_0) &= (\overline{I}_1)_{-\varphi_1} + \left(\frac{\varepsilon \cdot \omega C}{2} l^2 I_1 \right) \frac{\pi}{2} + \theta - \varphi_1 + (\overline{U}_1 \omega C l) \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

II. — Etudes graphiques. Exemples numériques.

Dans ce qui suit, nous donnerons quelques exemples d'application en prenant des lignes exceptionnellement longues et à tensions élevées, afin de donner le plus d'importance possible aux termes correctifs.

1° LIGNE AÉRIENNE POUR TRANSMISSION TRIPHASÉE DE 20.000 KILOWATTS A GRANDE DISTANCE (1.200 KM.) ET A TRÈS HAUTE TENSION (120.000 VOLTS ENVIRON), A LA FRÉQUENCE 25 CYCLES. — Nous supposerons d'abord $\cos \varphi_1 = 1$.

Nous considérerons un problème tel que celui de la transmission des chutes du Zambèze au Transvaal, sur une longueur d'environ 1.200 kilomètres, et nous supposerons qu'on emploie plusieurs lignes, formées chacune de trois conducteurs, portant 20.000 kilowatts; qu'on adopte pour conducteurs des câbles d'aluminium de 350 millimètres carrés de section nette, d'un rayon extérieur $a = 12^{\text{mm}},5$, espacés d'axe en axe de $d = 3$ mètres, et placés à une hauteur *moyenne* au-dessus du sol $h = 9$ mètres.

Les résistances, capacités et self-inductions se déduisent de ces données, pour $t = 15^\circ$, par les formules suivantes :

$$r = \zeta \frac{2,9(1 + 0,003915 t)}{350} = 0,096726 \text{ ohm/km.}$$

en appelant ζ le facteur correctif de Lord Kelvin $= \left(1 + \frac{\omega^2}{42r'^2 \times 10^8}\right)$ r' étant la résistance en courant continu.

$$L_s = \left[0,5 + 4,605 \cdot \log. \frac{d}{a}\right] 10^{-4} = 0,001147 \text{ henry/km.}$$

$$c = \frac{0,02413}{10^6} \frac{1}{\log \left(\frac{d}{a} \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + d^2}} \right)} = \frac{0,01015}{10^6} \text{ farads/km.}$$

Pour la perditance, nous la calculons d'après la perte d'énergie probable en ligne, soit par exemple 500 watts par kilomètre.

$$g = \frac{500}{(100.000)^2} = \frac{5}{10^8} \text{ mhos/km. environ.}$$

En effet si on désigne par p la perte de puissance par kilomètre de ligne, on a :

$$p = 3 \cdot U_x \cdot g \cdot U_x \quad \text{d'où faisant } U_x = U_1 \text{ on a : } g = \frac{p}{(U_1 \sqrt{3})^2}.$$

L'impédance et l'admittance sont :

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{314,15 L_s}{2}\right)^2} = 0,2045 \text{ ohms/km.}$$

$$w = \sqrt{g^2 + \left(\frac{314,15 c}{2}\right)^2} = \frac{4,593}{10^6} \text{ ohms/km.}$$

et les angles caractéristiques :

$$\theta = \arctg \frac{\omega L_s}{r} = \arctg \frac{314,15 \times 0,001147}{2 \times 0,096726} = 61^\circ 46' 5''$$

$$\theta' = \arctg \frac{\omega c}{g} = \arctg \frac{314,15 \times 0,01015}{2 \times 0,05} = 88^\circ 12' 12''$$

$$\delta = \theta + \theta' = 149^\circ 58' 17''$$

Le régime à l'arrivée se déduit de la tension donnée pour la réception (100.000 volts entre fils, par exemple), et de la puissance transportée (20.000 kilowatts), d'où puisque $\varphi_1 = 0$:

$$U_1 = \frac{100.000}{\sqrt{3}} = 57.736 \text{ V.}$$

$$I_1 = \frac{20.000.000}{100.000 \sqrt{3}} = 115,5 \text{ A.}$$

A quel terme devons-nous nous arrêter dans les séries ?

La discussion qui a été faite nous conduit à prendre dans les séries donnant \bar{U}_x et \bar{I}_x les termes en x^4 et dans les séries donnant \bar{V}_x et \bar{J}_x les termes en x^3 . Les erreurs relatives approximatives faites sur les vecteurs composants sont en les calculant pour $x = l = 1.200 \text{ kil.}$:

$$\frac{(\varepsilon w x^2)^2}{120} = 0,00183 \quad \text{et} \quad \frac{(\varepsilon w x^2)^3}{720} = 0,00014.$$

Si nous négligeons les termes en x^4 dans les séries donnant U_x et I_x les erreurs relatives seraient $\frac{(\varepsilon w x^2)^2}{24} = 0,00912$ et par conséquent beaucoup trop fortes. Nous prendrons donc les termes en x^4 .

Calculons les limites des erreurs absolues, on a :

$$M_3 M_4 \leq \frac{(\varepsilon w x^2)^3}{720} U_1 \leq 8^v,3 \quad Q_2 Q_3 \leq \frac{(\varepsilon w x^2)^2}{120} z x I_1 \leq 51^v,5$$

$$P_3 P_4 \leq \frac{(\varepsilon w x^2)^3}{720} I_1 \leq 0^v,016 \quad N_2 N_3 \leq \frac{(\varepsilon w x^2)^2}{120} w x U_1 \leq 0^v,203$$

On voit qu'on est parfaitement en droit de se contenter de deux termes correctifs pour le calcul de U_0 et I_0 , et d'un seul terme correctif pour le calcul de V_0 et J_0 .

Cela posé, on peut *a fortiori* négliger ces termes pour des distances x plus faibles. Les tableaux ci-dessous résument les résultats des calculs effectués pour les vecteurs et les termes correctifs de puissance inférieure à la puissance x^5 , en des points situés au centre de la ligne et à son extrémité du côté usine.

Tensions.

x	$M_1M_2 = \frac{\varepsilon w x^2}{2} U_1$	$M_2M_3 = \frac{(\varepsilon w x^2)^2 U_1}{24}$	$OQ_1 = \varepsilon x I_1$	$Q_1Q_2 = (\varepsilon x) I_1 \frac{(\varepsilon w x^2)}{6}$
600km 1200km	3.389v 13.556v	33 536	14.175 28.349	277 2.218

Courants.

x	$P_1P_2 = \frac{(\varepsilon w x^2)}{2} I_1$	$P_2P_3 = \frac{(\varepsilon w x^2)^2}{24} I_1$	$O'N_1 = w x U_1$	$N_1N_2 = (w x U_1) \frac{(\varepsilon w x^2)}{6}$
600km 1200km	6 ^h 78 27 ^h 12	0,06 1,06	55 ^h 25 110 ^h 50	1,03 8,26

Le tableau des valeurs des vecteurs de tension nous permet de construire le diagramme des tensions :

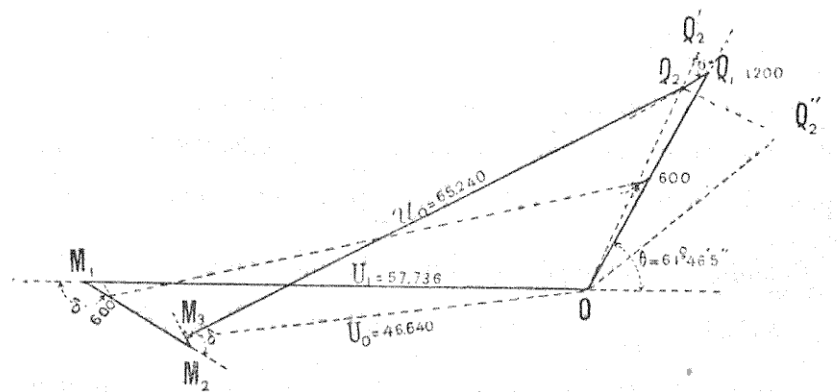


Fig. 40. — Diagramme des tensions.

NOTE. — Les points Q'_2 et Q''_2 (fig. 40) et P'_3 P''_3 se rapportent à un décalage du courant $\varphi_1 = 25^\circ 50'$ ($\cos \varphi_1 = 0,90$). La puissance débitée à l'arrivée restant la même.

Le tableau des vecteurs des courants nous permet de construire le diagramme des courants :

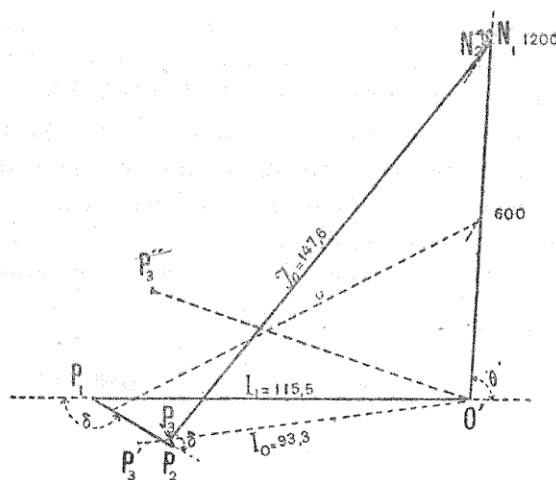


Fig. 41. — Diagramme des courants.

Résultats. — Régime à circuit ouvert. — Nous remarquons dans le diagramme des tensions que les tensions à vide qui s'obtiennent en joignant les points M_3 au point O vont en diminuant à mesure qu'on s'éloigne du point d'arrivée : c'est l'effet de sur-tension dû à la capacité. A l'extrémité de la ligne ($x = 1.200$ km.) nous avons $U_0 = 46.640$ volts.

Dans le diagramme des voltages nous trouvons le courant à vide $J_0 = 103^{\wedge},2$. Le courant à vide J_x varie presque proportionnellement avec la distance x du point considéré à l'arrivée.

Régime en court-circuit. — La tension simple V_0 au départ qui donnait un courant de $115^{\wedge},5$ dans un court-circuit placé à l'arrivée est $V_0 = 26.480$ volts. Le courant I_0 au départ serait dans ces conditions de $93^{\wedge},4$.

Régime en charge. — La tension simple au départ dans le régime en charge distribuant à l'arrivée 20.000 kilowatts est d'après le diagramme des tensions : $U_0 = 65.240$ volts.

Le diagramme des courants nous donne $J_0 = 147^{\wedge},6$.

Nous constatons que le courant J_0 est en avance sur la tension U_0 de $24^{\circ}10'$ environ. Donc $\cos \varphi_0 = 0,912$.

Rendement. — Pertes relatives de puissance. — La puissance au départ est donc :

$$3.U_0 J_0 \cos \varphi_0 = 3 \times 65.240 \times 147^{\wedge},6 \times 0,912 = 26.340 \text{ kw.}$$

$$\text{Le rendement de la ligne est égal à : } \eta = \frac{20.000}{26.340} = 0,759.$$

Les pertes relatives de puissance sont : $p = \frac{6.340}{20\ 000} = 0,317$.

Ces pertes relatives sont très considérables ; nous verrons plus loin que la régulation du voltage est également peu satisfaisante : pour que ce transport de longueur excessive soit acceptable, il faudrait pouvoir adopter un voltage de 150.000 volts au moins.

Décomposition des pertes de puissance. — Les pertes de puissance proviennent des pertes de production du courant de perditance et des pertes d'effet Joule dans la ligne. A titre de vérification, calculons ces pertes *approximativement* :

Les pertes de production de la perditance sont égales à $A = 3 \cdot \int_0^l g \mathcal{U}_x^2 dx$ ou bien sensiblement :

$$A = 3 \times g \times \frac{l}{2} [\mathcal{U}_0^2 + \mathcal{U}_1^2] = 680 \text{ kw.}$$

Les pertes d'effet Joule sont égales à $B = 3 \int_0^l r \mathcal{J}_x^2 dx$ ou approximativement :

$$B = 3 \cdot r \cdot \frac{l}{3} \left[\mathcal{J}_0^2 + \mathcal{J}_{\frac{l}{2}}^2 + \mathcal{I}_1^2 \right] = 5.860 \text{ kw.}$$

$\mathcal{J}_{\frac{l}{2}}$ est le courant qui circule au centre de la ligne, les diagrammes des courants donnent $\mathcal{J}_{\frac{l}{2}} = 124^{\text{A}}$.

La somme $A + B = 6.540$ kilowatts. La perte réelle étant de 6.340 kilowatts la concordance est satisfaisante, étant donnée la longueur de la ligne. Pour les lignes courantes cette vérification rapide donne des résultats plus concordants.

Les pertes totales d'effet Joule dans la ligne sont donc environ 6.660 kilowatts. Il est intéressant de les rapprocher des pertes d'effet Joule du courant utile supposé seul : $3RI_1^2 = 4.645$ kilowatts.

Les pertes *supplémentaires* d'effet Joule sont donc égales à :

$$6.660 - 4.645 = 1.015 \text{ kilowatts.}$$

Pertes relatives de voltage. — La perte relative de voltage de la ligne en charge est :

$$\frac{\mathcal{U}_0 - \mathcal{U}_1}{\mathcal{U}_1} = \frac{63\ 240 - 57.736}{57.736} = 0,13 \text{ soit } 13\ 0/0.$$

La perte relative de voltage de la ligne à vide est :

$$-\frac{\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_0}{\mathcal{U}_1} = -\frac{57.736 - 46.640}{57.736} = -19,2\ 0/0.$$

Supposons que dans cette ligne les interrupteurs au poste de transformation d'arrivée déclanchent brusquement sur le côté secondaire ; cherchons l'augmentation de voltage au poste de transformation.

Nous avons à tenir compte de trois effets :

1° Augmentation de vitesse des turbines ;

2° Augmentation de voltage due à la surexcitation des alternateurs par le courant déwatté en avant (courant de charge de la ligne) qui est uniquement fourni, lorsque le déclanchement a eu lieu ;

3° Augmentation de voltage due à l'action de la ligne seule.

Si nous négligeons, tout d'abord, les deux premières causes, nous pouvons admettre que le voltage à l'usine reste égal à 65.240 volts après le déclanchement. Le voltage au poste de transformation devient : $\frac{65\,240 \times 57.736}{46.640} = 80.760$ volts, car le vol-

tage au poste de transformation sera donné par un triangle semblable à OMM₁. Nous voyons que l'augmentation de voltage due à la ligne seule est de 40 0/0 environ au poste de transformation. Il faudrait presque doubler cette augmentation de voltage, si nous voulions tenir compte des deux premières causes. Aucun appareil de protection (parafoudre, etc.), ayant nécessairement une capacité de décharge limitée, ne peut servir dans ce cas, car cette surélévation de voltage est *dynamique* : l'appareil serait détruit.

« Le moyen le plus efficace de se protéger contre cette surélévation de voltage *dynamique* dit Steinmetz (*Proceeding*, mars 1912), est de s'arranger de façon que, lorsque les interrupteurs déclanchent au poste d'arrivée, ils introduisent dans le circuit une charge inductive. »

Cet exemple nous montre la grande difficulté du problème de la régulation du voltage dans les très longues lignes de transport.

2° LIGNE SOUTERRAINE DE 100 KILOMÈTRES 50 PÉRIODES. — Comme second exemple, nous prendrons une ligne souterraine à 50 périodes, voltage d'arrivée 10.000 volts étoilés (17.320 volts entre fils) ; débit 50 ampères par conducteur ; longueur (relativement considérable) 100 kilomètres. Pour n'avoir pas de chute de voltage excessive, nous réduirons la densité de courant à 1 ampère par millimètre carré. Nous adopterons par exemple un câble triphasé de 50 millimètres carrés par âme, indiqué par Roessler, avec les constantes suivantes :

$$\omega = 314,15; \quad \cos \varphi_1 = 1;$$

$$r = 0,3594 \text{ ohm par kilomètre}; \quad c = 0,185 \text{ microfarad-kil.}$$

$$L_s = 0,000352 \text{ henry par kilomètre}; \quad g = 0.$$

On déduit de ces constantes :

$$z = \sqrt{r^2 + \omega^2 L_s^2} = 0,3761 \text{ ohm/km.} \quad \theta = \arctg \frac{\omega L_s}{r} = 17^\circ 6' 10''$$

$$w = \omega c = 0,00005812 \text{ mhos/km.} \quad \theta' = \arctg \frac{\omega c}{g} = 90^\circ$$

$$\delta = 107^\circ 6' 10''$$

Supposons que nous prenions comme précédemment les termes en x^3 et x^4 et négligions les termes en x^5 et x^6 . Les erreurs relatives faites seront approximativement :

$$\frac{(\varepsilon w x^2)^3}{720} = 0,0000145 \quad \text{et} \quad \frac{(\varepsilon w x^2)^2}{120} = 0,000398.$$

Ces erreurs sont plus faibles que celles trouvées pour la ligne aérienne étudiée dans l'exemple précédent. Si dans les séries donnant U_x et I_x nous négligions les termes en x^4 , l'erreur relative serait approximativement $\frac{(\varepsilon w x^2)^2}{24} = 0,002$. Elle serait, en somme, acceptable. Les erreurs absolues faites sur les vecteurs composants ont les limites maxima suivantes ; si nous prenons les termes en x^4 :

$$\frac{(\varepsilon w x^2)^3}{720} U_1 = 0,1450 \quad \frac{(\varepsilon w x^2)^2}{120} z x I_1 = 0,7488$$

$$\frac{(\varepsilon w x^2)^3}{720} I_1 = 0,000725 \quad \frac{(\varepsilon w x^2)^2}{120} w x U_1 = 0,02314$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des vecteurs composants. Les longueurs de ces vecteurs ont été déterminées pour le milieu de la ligne $x=50$ kil. et pour l'extrémité du côté usine $x=100$ kilomètres.

x	$M_1 M_2$	$M_2 M_3$	OQ_1	$Q_1 Q_2$	$P_1 P_2$	$O'N_1$	$N_1 N_2$
50	273,2	4,24	940,2	8,5	4,36	29,3	0,26
100	1092,9	19,9	1880,5	68,5	5,46	58,4	2,12

Ces tableaux permettent de construire les diagrammes de tension et de courant reproduits dans les figures 42 et 43. La petitesse des échelles a empêché d'indiquer les vecteurs M_2M_3 et P_2P_3 qui sont d'ailleurs négligeables.

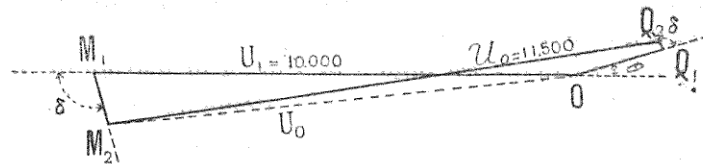


Fig. 42. — Diagramme des tensions.

Résultats. — Nous avons $U_0 = 11.500$ volts. $J_0 = 78\frac{1}{2}$.

L'angle U_0 et J_0 est $\varphi_0 = 45^{\circ},15$. Donc $\cos \varphi_0 = 0,704$.

La puissance au départ est :

$$3U_0J_0 \cos \varphi_0 = 1.894 \text{ kws.}$$

La puissance à l'arrivée était :

$$3U_1I_1 = 10.000 \times 50 \times 3 \\ = 1.500 \text{ kws.}$$

Le rendement de la ligne est donc :

$$\eta = \frac{1.500}{1.894} = 0,792.$$

Ce rendement est, en somme, assez mauvais.

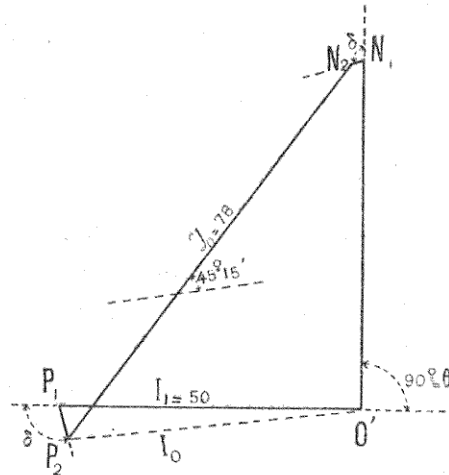


Fig. 43. — Diagramme des courants.

3° CAS DE PLUSIEURS STATIONS. — Quand une ligne est formée de tronçons successifs de différentes sections, il convient de traiter chaque tronçon séparément en déterminant le régime à son extrémité du côté usine en fonction du régime à son extrémité du côté de la station réceptrice. On peut ainsi cheminer de proche en proche en partant de cette dernière station. De même, s'il y a en cours de route des branchements importants, par exemple, si le transport de force alimente plusieurs villes sur son parcours, on divisera la ligne en tronçons limités par les points de distribution importants et on traite par les méthodes précédentes, chaque tronçon comme s'il était seul, en déterminant tout d'abord le régime total de débit à l'extrémité d'aval.

Il suffit de connaître pour chaque tronçon le régime d'entrée \mathcal{U}_0 , \mathcal{J}_0 du tronçon qui le précède en remontant. On considère cet \mathcal{U}_0 comme le U_i du nouveau tronçon et on prend pour son I_i la résultante de \mathcal{J}_0 et du courant fourni au centre de distribution qu'il dessert, en rapportant le décalage et le courant au voltage local, c'est-à-dire à \mathcal{U}_0 .

La suite des calculs est donc très simple et n'exige qu'un peu de patience; elle est rapide si on se contente de la méthode simplifiée, c'est-à-dire en négligeant les puissances en x^4 inclusive-ment. Toutefois il ne faut pas oublier que les erreurs peuvent s'ajouter, on calculera donc ces tronçons en s'imposant une erreur relative qui tienne compte du nombre de ces tronçons.

4° CABLES DISTRIBUTEURS. — Il peut arriver que des câbles armés, de longueur assez grande pour que la capacitance ne soit pas négligeable, aient des branchements très nombreux tout le long de leur parcours et que l'énergie soit distribuée d'une façon assez uniforme. On pourra calculer rapidement ces câbles en modifiant, comme l'a indiqué M. Blondel, la perditance et la capacitance de ces câbles de façon à tenir compte de la distribution en cours de route. Supposons que le câble précédent n'ait qu'une longueur de 30 kilomètres et distribue en cours de route p kilowatts par kilomètre, avec un facteur de puissance égal à $\cos \varphi$. Au lieu d'attribuer au câble une perditance $g = 0$ nous lui attribuons une perditance $g' = \frac{p \times 1.000}{(U_i \sqrt{3})^2}$ et une capacitance $(\omega C)' = \omega C - g' \tan \varphi$.

Les valeurs que les diagrammes donneront pour les voltages et courants à circuit ouvert, avec ces *constantes artificielles*, doivent se comprendre comme convenant au système continuant à distribuer en cours de route; mais supprimant la distribution à l'arrivée.

III. — Etude de l'influence des différentes circonstances d'une transmission de force

L'étude graphique que nous venons d'exposer présente le grand avantage de permettre de faire ressortir assez facilement l'influence des divers éléments de la question.

1° ETUDE DE L'INFLUENCE DES MODIFICATIONS DU RÉGIME A L'ARRIVÉE. — Il est facile d'étudier l'influence d'une modification (non instanta-

née) du régime à l'arrivée sur le régime au départ, ou en un point quelconque de la ligne ; en effet, les expressions complètes donnant \bar{I}_x et \bar{V}_x montrent la proportionnalité de ces vecteurs à I_1 . Les expressions complètes donnant \bar{U}_x et \bar{J}_x montrent la proportionnalité de ces vecteurs à U_1 et leur indépendance de I_1 . Par suite le régime nouveau à la distance x de l'arrivée, correspondant à un nouveau débit en ampères I'_1 à l'arrivée, s'obtiendra en modifiant *proportionnellement* les vecteurs \bar{V}_x et \bar{I}_x et seulement ces vecteurs, dont les longueurs deviendront : $V'_x = (V_x) \times \frac{I'_1}{I_1}$ et $I'_x = (I_x) \times \frac{I'_1}{I_1}$.

Ces vecteurs conserveront leur direction ancienne si le décalage à l'arrivée n'a pas varié. Si ce décalage devient $\varphi_1 > \varphi'_1$ on devra faire tourner les vecteurs \bar{V}_x et \bar{I}_x de l'angle $\varphi'_1 - \varphi_1$.

2° ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA VALEUR DU FACTEUR DE PUISSANCE À L'ARRIVÉE, DANS UNE LIGNE TRANSPORTANT UNE PUISSANCE CONSTANTE. —

a. *Influence sur la chute relative de tension dans la ligne à pleine charge.* — Soient U_1 la tension simple à l'arrivée, P_1 la puissance distribuée par phase. Si le décalage est nul on a $I_1 = \frac{P_1}{U_1}$.

Le diagramme des tensions sera MOQ (fig. 44). Nous aurons la tension simple U_0 au départ en MQ. Si le décalage devient φ_1 (le

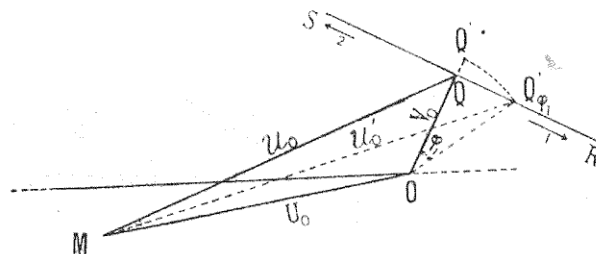


Fig. 44.

courant étant décalé en arrière) le courant sera $I'_1 = \frac{P_1}{U_1 \cos \varphi_1} = \frac{I_1}{\cos \varphi_1}$.

Le vecteur \bar{V}_0 aura pour longueur $OQ' = \frac{OQ}{\cos \varphi_1}$. Nous devons le faire tourner de l'angle $(-\varphi_1)$, il deviendra donc en OQ'_{φ_1} . Sa projection sur la direction primitive du vecteur \bar{V}_0 est constante et égale à OQ . Cette projection est, en effet, égale à $OQ'_{\varphi_1} \cdot \cos \varphi_1 = \frac{OQ}{\cos \varphi_1} \times \cos \varphi_1 = OQ$. Si la charge reste toujours inductive

$O'P'_{\varphi_1}$. La projection de $O'P'_{\varphi_1}$ sur $O'P'$ est constante et égale à OP' . Le point P'_{φ_1} se déplace donc sur la normale PR' à OP ; et nous avons $J'_0 = P'_{\varphi_1} N$.

Si la ligne est à *faible capacitance*, le vecteur J_0 sera très petit, et, son extrémité N sera par exemple, en N' très voisine de O' . Nous voyons que $N'P'_{\varphi_1}$ est plus grand que $N'P$. Donc J'_0 sera plus grand que J_0 . *A fortiori* $J'_{\frac{1}{2}}$ sera plus grand que $J_{\frac{1}{2}}$. Les pertes par effet Joule $(J_0^2 + J_{\frac{1}{2}}^2 + I_1^2)rl$ augmenteront donc puisque les trois termes augmentent.

Si la ligne est à forte capacitance le vecteur J_0 aura une forte valeur. Une augmentation ordinaire du décalage réduira le courant au départ. Le courant $J_{\frac{1}{2}}$ pourra de même être réduit et les pertes de puissance pourront très souvent être très notablement réduites par une diminution du facteur de puissance. En somme, le courant déwatté en arrière demandé par la clientèle est annulé par le courant déwatté en avant absorbé par la capacité de la ligne; la rotation de phase de la tension complique le phénomène.

Si la charge était antiinductive (courant décalé en avant) le point P'_{φ_1} se déplacerait à partir du point P dans la direction PS' (flèche 2). Tous les courants sont augmentés: en effet dans ce cas les courants déwattés demandés s'ajoutent. Les pertes de puissance par effet Joule sont donc toujours augmentées.

En résumé nous pouvons dire que dans les lignes à *forte capacitance distribuant une puissance constante, une diminution du facteur de puissance augmente les chutes relatives de tension et diminue les pertes relatives de puissance si la charge est inductive; et, produit les effets inverses si la charge est antiinductive* (moteurs synchrones surexcités).

Voici un exemple numérique qui montre l'ordre de grandeur de ces variations. (Transactions Pacific Coast. Pr. Cory 1905.)

La ligne considérée est un câble d'aluminium de 8^m,25 de diamètre. La ligne triphasée à 60 cycles a 145 kilomètres de longueur. La distance entre fils est de 1^m,22. Le voltage entre fils égale 60.000 volts. La puissance constante distribuée à l'arrivée est de 3.000 kilowatts. Le tableau ci-dessous résume les calculs des pertes relatives de voltage et de puissance, lorsque $\cos \varphi_1 = 1$ et ensuite égale 0,80 (en arrière) charge inductive et 0,80 (en avant) charge antiinductive. Cette ligne a une capacitance moyenne; les effets du décalage sont malgré cela assez nets.

	Ligne à vide	Charge de 3000 kws à l'arrivée avec		
		$\cos \varphi_1 = 1$	$\cos \varphi_1 = 0,80$ (en arrière)	$\cos \varphi_1 = 0,80$ (en avant)
Voltage à l'arrivée	60.000v	60.000	60.000	60.000
Voltage à l'usine	58.870v	63.073	63.478	60.829
Courant au départ	49,3	34,5	28,7	49,6
Facteur de puissance à l'usine	0,047	(Av.) 0,858	(Ar.) 0,997	(Av.) 0,66
Pertes de puissance en ligne en kilowatts	33,4	236,3	248	451
Rendement	»	92,7 0/0	92,4 0/0	87 0/0
Pertes relatives de puissance	»	7,8 0/0	8,25 0/0	45 0/0
Chutes relatives de voltage .	— 2 0/0	5 0/0	9,1 0/0	1,5 0/0

Si nous prenons la ligne de 1.200 kilomètres qui constitue une ligne à *forte capacitance* et supposons un décalage sur charge inductive, de $\varphi_1 = 25^\circ 30'$ ($\cos \varphi_1 = 0,90$) nous trouvons, en maintenant la puissance délivrée à l'arrivée constante et égale à 20.000 kilowatts : $U_0 = 73.660$, $I_0 = 121^A$, $\varphi_0 = 17^\circ 30'$. On en déduit $P_0 = 25.500$ kilowatts.

Les pertes relatives de puissance sont réduites à 27,5 0/0 et les pertes relatives de voltage de la ligne en charge sont fortement augmentées et deviennent égales à 27,6 0/0.

Diagramme général des pertes relatives de tension d'une ligne donnée. — Il est souvent intéressant, en exploitation, de pouvoir connaître immédiatement, sans calculs, la chute relative de tension d'une ligne donnée, lorsque cette ligne doit distribuer à l'arrivée une puissance P_1 sous un décalage φ_1 . Le diagramme suivant, conséquence immédiate des deux études précédentes permet de solutionner ce problème.

Traçons le diagramme des tensions pour la charge maxima de la ligne 20.000 kilowatts et pour un facteur de puissance égal à l'unité. Nous avons le diagramme OM, QM qui est un peu différent de notre construction habituelle, mais s'en déduit immédiatement. Le vecteur \bar{U}_0 est égal à OM. Le vecteur $\bar{V}_0 = MQ$. Si la puissance délivrée par la ligne reste constamment égale à 20.000 kilowatts et que le facteur de puissance varie, l'extrémité Q du vecteur \bar{V}_0 se déplacera sur la perpendiculaire élevée à MQ, au point Q.

Si la puissance est réduite, le courant I_1 correspondant à la marche avec un décalage nul, sera réduit proportionnellement, et il en sera de même du vecteur MQ qui est proportionnel à I_1 . En divisant MQ en quatre parties et élevant des perpendiculaires

à MQ aux points de division, nous obtiendrons les droites de régime, correspondant aux débits à l'arrivée 15.000, 10.000, 5.000 kilowatts.

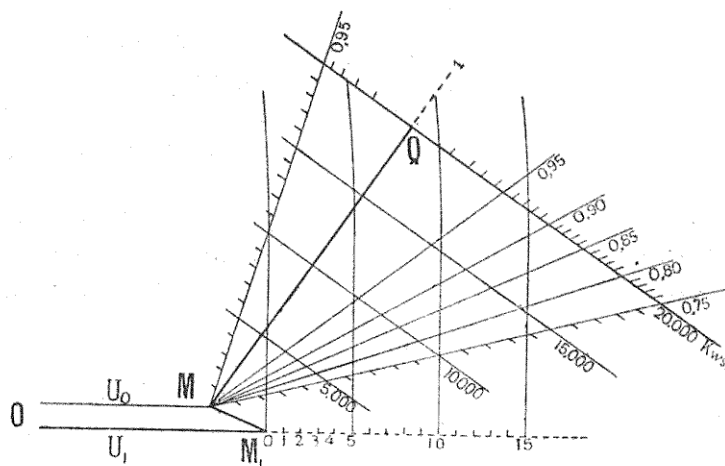


Fig. 46.

Nous tracerons à partir de M des droites faisant de chaque côté avec MQ les angles correspondants aux facteurs de puissance habituels, et, enfin de O comme centre avec des rayons U_1 , $U_1 \times 1,05$, $U \times 1,1$, etc., nous tracerons les cercles de pertes relatives de voltage.

Supposons que la ligne distribuée, à l'arrivée, 12.500 kws avec un facteur de puissance $\cos \varphi_1 = 0,90$. L'extrémité du vecteur V_0 sera situé sur la droite 0,90 à égale distance des droites de régime 15.000 et 10.000. D'après notre diagramme *schématisque*, la perte relative de voltage de la ligne en charge serait de 8,7 0/0.

Nous remarquerons que cette construction ne fait aucune hypothèse sur la longueur de la ligne : si la ligne est assez courte, nous pourrions employer pour déterminer les vecteurs composants $\overline{U_0}$ et $\overline{V_0}$ la dernière construction abrégée. Le vecteur $\overline{M_1M}$, sera égal à $\frac{z\omega}{2} U_1$, et fera avec la direction de U_1 l'angle $(\theta + \theta')$. Le vecteur $\overline{MQ} = \overline{V_0}$ sera égal à z/l_1 et fera l'angle θ avec $\overline{U_1}$. (Perrine et Baum-Proceedings 1902).

Si la ligne est longue les vecteurs $\overline{U_0}$ et $\overline{V_0}$ auront une construction un peu plus compliquée, mais le diagramme se déduira comme précédemment de ces vecteurs.

3° INFLUENCE DE LA FRÉQUENCE. — Pour bien fixer les idées nous construirons les diagrammes de tension et de courant pour un

exemple numérique ; mais les raisonnements seront indépendants de ce cas particulier. Les figures 47 et 48 donnent ces diagrammes pour une ligne de 600 kilomètres ayant même section et même écartement de fils que la ligne de transport de 1.200 kilomètres du premier exemple. Nous supposons que le voltage à l'arrivée est de 100.000 volts entre fils et que le décalage est nul. Les lettres avec apostrophe indiquent les extrémités de vecteurs à 50 cycles.

Influence de la fréquence sur la chute relative de tension. — *Ligne à vide.* — La tension U'_0 au départ de la ligne à 50 cycles est OM'_3 . Elle est plus petite que la tension U_0 de la ligne à 25 cycles qui est égale à OM_3 . Il en sera toujours ainsi car le vecteur correctif $\overline{M_1 M_3} = \left(\frac{\varepsilon w x^2}{2} U_1\right)_\delta + \left(\frac{\varepsilon w x^2}{4!} U_1\right)_{2\delta}$, croît rapidement avec la fréquence.

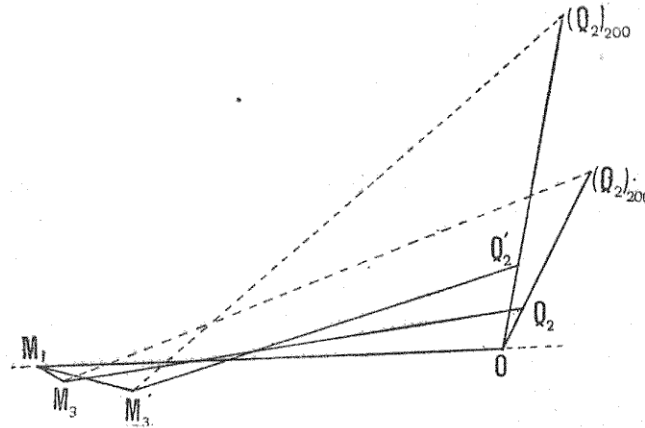


Fig. 47.

La chute négative de tension dans la ligne à vide sera donc plus grande dans la ligne à 50 cycles que dans la ligne à 25 cycles, et, la différence sera d'autant plus grande que la capacité de la ligne sera plus grande et que la tension de la ligne sera plus élevée.

Ligne en charge. — Le vecteur $\overline{V'_0} = \overline{OQ'_2}$ de la ligne à 50 cycles sera toujours plus grand que le vecteur $\overline{V_0} = \overline{OQ_2}$ de la ligne à 25 cycles et cette différence sera d'autant plus grande que le débit I_1 sera plus fort, on a en effet $\overline{OQ'_2} = (\overline{zxI_1})_0 + \left(\frac{\varepsilon^2 w}{3!} I_1\right)_{2\theta + \theta'}$.

Nous voyons donc que les vecteurs composants du vecteur de la tension au départ, dans la ligne en charge sont affectés en sens inverse par l'accroissement de la fréquence.

• U_0 décroît et V_0 croît lorsque la fréquence augmente. De plus la

diminution de U_0 est fixe, tandis, que l'accroissement de V_0 augmente avec le débit de la ligne.

Pour des lignes à faible capacité la diminution de U_0 avec la fréquence est peu importante, l'accroissement du vecteur V_0 est seule à retenir : l'accroissement de la fréquence augmentera toujours la chute de tension de la ligne en charge.

Pour les lignes à forte capacité, nous devons distinguer le régime à vide et le régime en charge. La chute négative de tension dans la ligne à vide sera toujours augmentée, en valeur absolue, par l'accroissement de la fréquence.

La chute relative de tension dans la ligne en charge sera :

Pour les très faibles débits, négative en général, et plus forte en valeur absolue dans le cas de la ligne à forte fréquence.

Pour les débits moyens, cette chute relative de tension sera plus faible pour la ligne à forte fréquence que pour la ligne à faible fréquence.

Enfin pour les très forts débits, ce sera l'inverse qui se produira.

Influence sur les pertes relatives de puissance. — La figure 48 nous donne le diagramme des courants. Les vecteurs $O'P_2$, $O'P'_2$ correspondent à un débit de 200^A . Pour un débit de 50^A les vecteurs seront quatre fois plus petit ($O'A'_3$ et $O'A_3$).

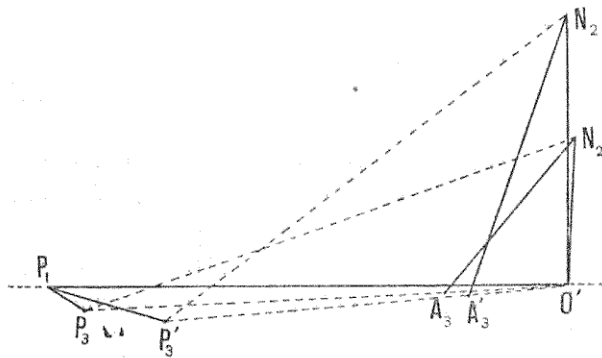


Fig. 48.

Nous voyons que, comme précédemment, les vecteurs composants de la tension sont affectés en sens inverse, par l'accroissement de la fréquence : I_0 décroît et J_0 croît lorsque la fréquence augmente.

Dans les lignes à faible capacité les deux effets sont négligeables et l'influence de la fréquence sur le rendement peut être considéré comme nulle.

Dans les lignes à forte capacité, les pertes de puissance dans la ligne à *faible charge* seront beaucoup plus grandes dans la ligne à forte fréquence que dans la ligne à faible fréquence, et par suite le *rendement à faibles charges de la ligne à forte fréquence sera très bas*.

Ainsi pour un débit de 50 ampères le rendement de la ligne précédente à 50 cycles n'est que de 57 0/0 tandis que pour le même débit il atteint 91 0/0 dans la ligne à 25 cycles. Les diagrammes de courant nous montrent nettement cet effet, le courant au départ est $N_2 A_3$ dans la ligne à 50 cycles est $N_2 A_3$ dans la ligne à 25 cycles. Par suite de la prépondérance des courants de charge, les courants qui circulent dans la ligne à 50 cycles sont beaucoup plus grands que les courants correspondants de la ligne à 25 cycles.

Pour de fortes charges l'influence des vecteurs I_0 se fait sentir et le *rendement de la ligne à forte fréquence peut devenir meilleur que celui de la ligne à faible fréquence*. — Ainsi dans l'exemple choisi, pour un débit de 100 ampères les rendements de la ligne à 25 cycles ou 50 cycles sont égaux à 88 0/0 environ. Pour un débit de 200 ampères le rendement de la ligne à 50 cycles est le meilleur. Le diagramme des courants nous montre en effet que les courants qui circulent dans la ligne à 50 cycles sont un peu plus faibles que ceux qui circulent dans la ligne à 25 cycles. En somme pour des lignes à forte capacité, transportant une puissance moyenne, on ne peut pas toujours affirmer qu'une fréquence faible est plus avantageuse qu'une fréquence forte; à tous points de vue.

4° INFLUENCE DE LA DISTANCE. RÉPARTITION DES VOLTAGES ET DES INTENSITÉS LE LONG D'UNE LIGNE. — La méthode graphique que nous venons d'exposer se prête bien à l'étude de la répartition des tensions et des intensités le long d'une ligne. Il suffit de construire les vecteurs $M_1 M_2$, $P_1 P_2$, ON_1 , OQ_1 , d'abord pour la longueur totale de la ligne, puis de diviser ces vecteurs en un certain nombre de tronçons correspondant à des points de division de la ligne (à chacun desquels correspond un certain x). Les longueurs des divisions sur $M_1 M_2$ et $P_1 P_2$ croîtront proportionnellement à x^2 , tandis que les divisions sur ON_1 et OQ_1 seront proportionnelles à x (fig. 40 et 41).

Par chacun des points de division, on tracera les vecteurs correctifs du second ordre; par exemple les vecteurs $M_2 M_3$, étant parallèles entre eux et proportionnels à x^4 , et par suite à $(M_1 M_2)^2$, la courbe qui relie les points M_3 est une parabole, ainsi que la courbe des points P_3 .

De même les courbes des points Q_2 et N_2 sont paraboliques du troisième degré, parce que les segments $\overline{Q_1Q_2}$, par exemple, sont proportionnels à x^3 , donc à $(\overline{OQ_1})^3$.

5° INFLUENCE DES VALEURS RELATIVES DES CONSTANTES DE LA LIGNE. — La méthode graphique permet souvent de faire ressortir facilement l'influence des différents éléments de la question. A titre d'exemple étudions le décalage de \overline{U} et de \overline{J}_x .

Construisons le diagramme des tensions en prenant comme unité de voltage : le voltage U_1 à l'arrivée et le diagramme des courants en prenant comme unité de courant : le courant I_1 , à l'arrivée. Supposons le décalage φ_1 à l'arrivée nul et superposons les deux diagrammes. Nous obtenons la fig. 49. Les vecteurs U_0 et I_0 se super-

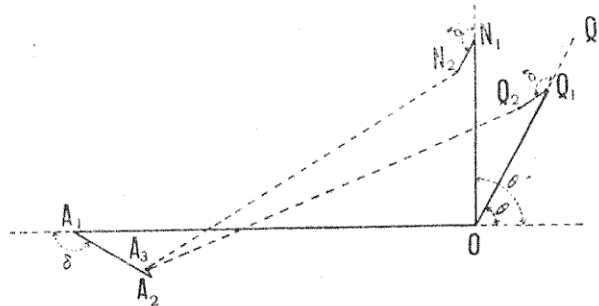


Fig. 49.

posent exactement suivant OA_1 . Le point A_3 correspond aux points P_3 et M_3 confondus. Les vecteurs V_0 et J_0 diffèrent et viennent en OQ_2 et ON_2 .

$$\begin{aligned} \text{On a : } \quad ON_1 &= \frac{WU_1}{I_1} & N_1N_2 &= \frac{WU_1}{I_1} \times \frac{ZW}{6} \\ OQ_1 &= \frac{ZI_1}{U_1} & Q_1Q_2 &= \frac{ZI_1}{U_1} \times \frac{ZW}{6} \end{aligned}$$

Nous voyons que le décalage relatif de \overline{U}_0 et \overline{J}_0 qui sont représentés en direction par A_3Q_2 et A_3N_2 tient en somme à la différence des angles θ et θ' et des quantités $\frac{ZI_1}{U_1}$ et $\frac{WU_1}{I_1}$.

S'il était possible d'avoir :

$$(1) \quad \theta = \theta' \qquad (2) \quad \frac{ZI_1}{U_1} = \frac{WU_1}{I_1}$$

les vecteurs $\overline{OQ_1}$ et $\overline{ON_1}$, $\overline{Q_1Q_2}$ et $\overline{N_1N_2}$ se superposeraient. Les vec-

teurs \overline{U}_0 et \overline{J}_0 seraient donc en phase. Mais les équations (1) et (2) reviennent à la relation :

$$(3) \quad \frac{U_1}{I_1} = \sqrt{\frac{r}{g}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

qui est indépendante de la distance x . Par suite cette propriété s'étendrait à toute la ligne et le facteur de puissance, tout le long de la ligne, serait égal à l'unité. La perditance étant presque nulle, il est impossible de satisfaire à la première partie de l'équation (3) si les constantes de la ligne sont réelles : le facteur de puissance ne sera donc jamais égal à l'unité tout le long de la ligne.

Si on avait $ZI_1^2 - WU_1^2 = 0$ le décalage φ_0 serait assez faible pour les lignes de longueur normale, car les deux vecteurs ON_1 et OQ_1 seraient égaux. Si on avait (équation 3) $CU_1^2 = LI_1^2$ le décalage serait encore moindre, en effet, comme θ' est voisin de $\frac{\pi}{2}$ cette égalité revient sensiblement à égaler la projection du vecteur OQ_1 sur ON_1 à ce vecteur ON_1 même. La comparaison des valeurs des énergies électrostatiques et magnétisantes de la ligne nous donnera donc une idée du décalage au départ dans les lignes à forte capacité.

Nous remarquerons que les relations : $\cos \varphi_1$ et $\frac{U_1}{I_1} = \sqrt{\frac{r}{g}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ donnaient un facteur de puissance égal à l'unité tout le long de la ligne *quelle que soit la longueur de la ligne* : en effet, la démonstration aurait pu être basée sur n vecteurs correctifs sans aucun changement. Il est facile de voir que ces conditions qui sont suffisantes sont nécessaires : nous verrons que si la ligne est très longue le décalage oscille aux environs de la valeur $\frac{\theta' - \theta}{2}$: Par suite si le décalage est nul tout le long de la ligne on a forcément $\theta' = \theta$. La figure 49 nous montre alors qu'il faut de plus que $\frac{ZI_1}{U_1} = \frac{WU_1}{I_1}$. La condition (3) est donc nécessaire.

IV. — Calculs algébriques

1° EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES APPROCHÉES. — Il est facile de traduire au moyen d'équations algébriques les diagrammes géométriques précédents.

Il suffit en effet de déterminer les projections des vecteurs \overline{U}_0

et \mathcal{J}_0 sur deux axes rectangulaires, l'axe OX sera confondu avec la direction de U_1 . Si on traduit algébriquement les diagrammes généraux (fig. 32 et 33) comprenant les termes en x^4 et négligeant seulement les termes en x^3 et x^6 , le calcul n'est pas plus court qu'en se servant des expressions algébriques exactes que nous établirons ci-après. Si on néglige les termes en x^4 nous avons à traduire les diagrammes des figures 34 et 35. Les équations géométriques données page 87, nous donnent immédiatement :

$$\begin{cases} (\mathcal{U}_0)_x = U_1 \left(1 + \frac{\varepsilon w x^2}{2} \cos \delta \right) + \varepsilon x I_1 \left[\cos (\theta - \varphi_1) + \frac{\varepsilon w x^2}{6} \cos (\theta - \varphi_1 + \delta) \right] \\ (\mathcal{U}_0)_y = U_1 \frac{\varepsilon w x^2}{2} \sin \delta + \varepsilon x I_1 \left[\sin (\theta - \varphi_1) + \frac{\varepsilon w x^2}{6} \sin (\theta - \varphi_1 + \delta) \right], \end{cases}$$

et de même :

$$\begin{cases} (\mathcal{J}_0)_x = I_1 \cos \varphi_1 + I_1 \frac{\varepsilon w x^2}{2} \cos (\delta - \varphi_1) + w x U_1 \left[\cos \theta' + \frac{\varepsilon w x^2}{6} \cos (\theta' + \delta) \right] \\ (\mathcal{J}_0)_y = I_1 \frac{\varepsilon w x^2}{2} \sin (\delta - \varphi_1) + w x U_1 \left[\sin \theta' + \frac{\varepsilon w x^2}{6} \sin (\theta' + \delta) \right]. \end{cases}$$

Ces expressions se prêtent mal au calcul d'une expression générale donnant \mathcal{U}_0 et \mathcal{J}_0 . On calculera donc *numériquement* ces valeurs des projections. Ce calcul numérique une fois fait on en déduit aussitôt les *valeurs numériques* des vecteurs \mathcal{U}_0 et \mathcal{J}_0 par les équations :

$$(1) \quad \mathcal{U}_0 = \sqrt{(\mathcal{U}_0)_x^2 + (\mathcal{U}_0)_y^2} \quad \text{et} \quad (2) \quad \mathcal{J}_0 = \sqrt{(\mathcal{J}_0)_x^2 + (\mathcal{J}_0)_y^2}$$

Si nous appelons α et β les angles de $\overline{\mathcal{U}_0}$ et $\overline{\mathcal{J}_0}$ avec OX, on a :

$$(3) \quad \begin{aligned} P_0 &= \mathcal{U}_0 \mathcal{J}_0 \cos \varphi_0 = \mathcal{U}_0 \mathcal{J}_0 \cos (\alpha - \beta) \\ &= \mathcal{U}_0 \cos \alpha \mathcal{J}_0 \cos \beta + \mathcal{U}_0 \sin \alpha \mathcal{J}_0 \sin \beta. \end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad P_0 = (\mathcal{U}_0)_x (\mathcal{J}_0)_x + (\mathcal{U}_0)_y (\mathcal{J}_0)_y.$$

$$\text{De même } \mathcal{U}_0 \mathcal{J}_0 \sin \varphi_0 = \mathcal{U}_0 \mathcal{J}_0 \sin (\alpha - \beta) = -(\mathcal{U}_0)_x (\mathcal{J}_0)_y + (\mathcal{U}_0)_y (\mathcal{J}_0)_x.$$

On a donc :

$$(4) \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{-(\mathcal{U}_0)_x (\mathcal{J}_0)_y + (\mathcal{U}_0)_y (\mathcal{J}_0)_x}{(\mathcal{U}_0)_x (\mathcal{J}_0)_x + (\mathcal{U}_0)_y (\mathcal{J}_0)_y}.$$

Les équations 1, 2, 3, 4 résolvent le problème.

Si on peut négliger les termes en x^3 on peut obtenir des expressions algébriques approchées donnant d'une façon générale la valeur de \mathcal{U}_0 , \mathcal{J}_0 , P_0 et $\cos \varphi_0$.

2° FORMULES GÉNÉRALES APPROCHÉES. — La deuxième simplification étant applicable, nous nous proposons de déterminer \mathcal{U}_0 , \mathcal{J}_0 , P_0 , $\cos \varphi_0$ ou ce qui revient au même les quantités suivantes :

$$e' = \frac{\mathcal{U}_0 - U_1}{U_1} \quad i' = \frac{\mathcal{J}_0 - I_1}{I_1} \quad p' = \frac{P_0 - P_1}{P_1} \quad \text{et} \quad \cos \varphi_0.$$

Les équations géométriques de la page 90 étant applicables, les projections de \mathcal{U}_0 et \mathcal{J}_0 sur les axes OX et OY² sont :

$$(\mathcal{U}_0)_x = U_1 + \frac{z \cdot \omega C}{2} l^2 U_1 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + I_1 z l \cdot \cos (\theta - \varphi_1)$$

$$(\mathcal{U}_0)_y = \frac{z \cdot \omega C}{2} l^2 U_1 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + I_1 z l \cdot \sin (\theta - \varphi_1).$$

Elevant au carré et ajoutant on a l'équation algébrique :

$$\mathcal{U}_0^2 = U_1^2 + 2U_1 I_1 z l \cdot \cos (\theta - \varphi_1) + I_1^2 z^2 l^2 - \omega^2 C L_s l^2 U_1^2 + \varepsilon_1.$$

La quantité ε se compose des termes en l^3 et l^4 . On a :

$$\varepsilon_1 = \frac{z^2 \omega^2 C^2}{4} l^4 U_1^2 - z^2 \omega C l^3 U_1 I_1 \sin \varphi_1.$$

Cette quantité est négligeable avec les longueurs de ligne admises.

Si nous remplaçons \mathcal{U}_0 par sa valeur $U_1(1 + e')$ nous avons eu résolvant par rapport à e' et posant $\beta = \frac{z l I_1}{U_1}$:

$$(3) \quad e' = -1 + \sqrt{1 + 2\beta \cos (\theta - \varphi_1) + \beta^2 - \omega^2 C L_s l^2}.$$

Nous avons vu dans la première partie comment les abaques de MM. Pender et Thomson permettait de calculer très rapidement la valeur de e' . (1^{re} Partie. Page 148).

Nous avons de même :

$$(\mathcal{J}_0)_x = I_1 \cos \varphi_1 + \frac{z \cdot \omega C}{2} l^2 I_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta - \varphi_1 \right)$$

$$(\mathcal{J}_0)_y = -I_1 \sin \varphi_1 + \frac{z \cdot \omega C}{2} l^2 I_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta - \varphi_1 \right) + U_1 \omega C l.$$

Elevant au carré et ajoutant nous avons l'équation algébrique :

$$(\mathcal{J}_0)^2 = I_1^2 + 2U_1 I_1 \omega C l \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1 \right) + U_1^2 \omega^2 C^2 l^2 - \omega^2 C L_s l^2 I_1^2 + \varepsilon'_1.$$

La quantité ε'_1 se compose des termes en l^3 et l^4 , on a :

$$\varepsilon'_1 = \frac{z^2 \omega^2 C^2}{4} l^4 I_1^2 + z \omega^2 C l^3 U_1 I_1 \cos (\theta - \varphi_1).$$

Cette quantité est négligeable.

Si nous remplaçons \mathcal{J}_0 par sa valeur $I_1 (1 + i')$, et résolvons par rapport à i' nous avons, en posant $\gamma = \frac{\omega C l U_1}{I_1}$:

$$(4) \quad i' = -1 + \sqrt{1 + 2\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) + \gamma^2 - \omega^2 C L_s l^2}.$$

i' se calcule également avec les mêmes abaques.

Pour calculer la puissance $\mathcal{U}_0 \mathcal{J}_0 \cos \varphi_0$ nous partirons des équations géométriques 1 et 2. Nous savons que le produit $\mathcal{U}_0 \mathcal{J}_0 \cos \varphi_0$ est égal à la somme des produits deux à deux des vecteurs composants, multipliés respectivement par le cosinus de la différence d'angle de phase (1). Nous avons donc, en nous reportant aux équations géométriques de la page 90 :

$$\mathcal{U}_0 \mathcal{J}_0 \cos \varphi_0 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + I_1^2 z l \cos \theta - \omega C r l^2 \sin \varphi_1 \cdot U_1 I_1 + \varepsilon_2.$$

Le terme $\varepsilon_2 = \frac{x^2 \omega^2 C^2}{4} l^2 U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_1^2 \frac{r \cdot \omega^2 C^2}{2} l^3$, est négligeable.

Le terme $-\omega C r l^2 \sin \varphi_1 U_1 I_1$ provient de la réduction du terme :

$$U_1 I_1 \frac{x \cdot \omega C}{2} l^2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \varphi_1\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta + \varphi_1\right) + 2 \cos\left(\theta - \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) \right].$$

De la valeur de $P_0 = \mathcal{U}_0 \mathcal{J}_0 \cos \varphi_0$ nous déduisons :

$$(5) \quad p' = \frac{P_0 - P_1}{P_1} = \frac{I_1^2 R}{P_1} - \omega C l R \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$$

en désignant par $R = r \cdot l$ la résistance totale d'un fil de ligne.

(1) Démontrons cette propriété : soient α et β les angles des vecteurs $\overline{\mathcal{U}_0}$ et $\overline{\mathcal{J}_0}$ avec OX ; soient xy et $x'y'$ les projections de ces deux vecteurs sur OX et OY. On a :

$$\begin{aligned} P_0 &= \mathcal{U}_0 \mathcal{J}_0 \cos \varphi_0 = \mathcal{U}_0 \mathcal{J}_0 \cos (\alpha - \beta) \\ &= \mathcal{U}_0 \cos \alpha \times \mathcal{J}_0 \cos \beta + \mathcal{U}_0 \sin \alpha \times \mathcal{J}_0 \sin \beta \\ &= xx' + yy', \end{aligned}$$

Appelons $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n$ les projections des vecteurs composant $\overline{\mathcal{U}_0}$ et $x'_1 y'_1, x'_2 y'_2, \dots, x'_m y'_m$ les projections des vecteurs composant $\overline{\mathcal{J}_0}$. On a :

$$\begin{aligned} P_0 &= xx' + yy' = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ &\quad (x'_1 + \dots + x'_m) + (y_1 + \dots + y_n) (y'_1 + y'_2 + \dots + y'_m) \\ &= \sum (x_p x'_q + y_p y'_q) = \sum u_p i_q \cos (\alpha_p - \beta_q). \end{aligned}$$

En prenant la puissance réactive nous aurons de même :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 \mathcal{J}_0 \sin \varphi_0 &= \mathcal{U}_0 \mathcal{J}_0 \sin (\alpha - \beta) = yx' - xy' \\ &= \sum (y_p x'_q - x_p y'_q) = \sum u_p i_q \sin (\alpha_p - \beta_q). \end{aligned}$$

Nous désignons par α_p l'angle du vecteur de tension composant u_p avec OX, et par β_q l'angle du vecteur de courant composant avec OX.

LE ROY

8

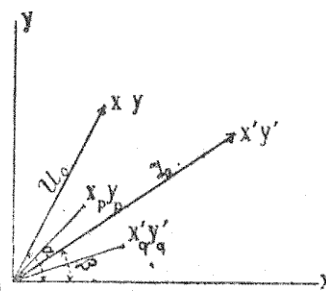


Fig. 50.

On a d'ailleurs :

$$(6) \quad \cos \varphi_0 = \frac{P_0}{\mathcal{U}_0 \mathcal{J}_0} = \frac{1 + p'}{(1 + e')(1 + i')} \cos \varphi_1$$

en divisant le numérateur P_0 par P_1 et le dénominateur par la quantité égale $\mathcal{U}_1 I_1 \cos \varphi_1$.

Nous avons vu dans la première partie un exemple numérique de ces calculs. (1^{re} Partie page 149).

Cette méthode de calcul peut s'appliquer à des lignes de 320 kilomètres de longueur à 25 cycles et de 160 à 180 kilomètres à 50 cycles ; comme nous l'avons indiqué page 90 en parlant des diagrammes géométriques correspondants.

Le calcul algébrique précédent qui ne comportait pas l'établissement de formules algébriques donnant \mathcal{U}_0 et \mathcal{J}_0 pouvait s'appliquer à des lignes de 600 kilomètres à 25 cycles et de 300 à 350 kilomètres à 50 cycles.

3^o BRANCHEMENTS EN COURS DE ROUTE. — Nous avons supposé qu'il n'y avait pas de branchements en cours de route. S'il y a des branchements on divisera la ligne, comme il a été dit, en plusieurs tronçons se terminant au branchement

A chaque branchement l'intensité I_1 d'arrivée du tronçon d'amont est la résultante de l'intensité \mathcal{J}_0 à l'entrée du tronçon d'aval avec l'intensité I_1 distribuée au point de jonction dont on connaît le décalage φ_1 par rapport à la tension locale \mathcal{U}_0 ; on a donc pour le tronçon d'amont, en projetant sur \mathcal{U}_0 et sur une perpendiculaire :

$$I_1 = \sqrt{(\mathcal{J}_0 \cos \varphi_0 + I_1 \cos \varphi_1)^2 + (\mathcal{J}_0 \sin \varphi_0 + I_1 \sin \varphi_1)^2}$$

et

$$\operatorname{tg} \varphi'_1 = \frac{\mathcal{J}_0 \sin \varphi_0 + I_1 \sin \varphi_1}{\mathcal{J}_0 \cos \varphi_0 + I_1 \cos \varphi_1}$$

$$\mathcal{U}'_1 = \mathcal{U}_0.$$

Il suffit d'introduire ces valeurs d'arrivée, dans les formules générales ci-dessus pour en déduire en grandeur et en phase les expressions de \mathcal{U}'_0 , \mathcal{J}'_0 , φ'_0 à l'entrée du tronçon d'amont considéré.

Dans le calcul de lignes à branchements multiples, il est bon de rappeler que les erreurs peuvent s'ajouter et que par suite, il est nécessaire de calculer un tronçon avec plus de précision que s'il était isolé.

4^o FORMULES POUR CÂBLES DISTRIBUTEURS. — S'il s'agit de câbles armés à branchements très nombreux on pourra calculer ces câbles

en modifiant les constantes de l'admittance : g et ωC de façon à tenir compte de la distribution (voir p. 100).

Les formules donnent \mathcal{U}_0 et \mathcal{J}_0 au départ du câble s'obtiennent immédiatement en remarquant que dans ce cas $\mathcal{U}_0 = U_0$ et $\mathcal{J}_0 = J_0$, c'est-à-dire que les valeurs de la tension et du courant de la ligne en charge sont donnés par les formules donnant les valeurs de la tension et du courant de la ligne à vide, puisque l'admittance tient compte de toute la distribution. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_0 &= U_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon w x^2}{2}\right)^2 + \varepsilon w x^2 \cos \delta} & \Phi_0 &= \alpha - \beta \\ \mathcal{J}_0 &= w x U_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon w x^2}{6}\right)^2 + \frac{\varepsilon w x^2}{3} \cos \delta} & \operatorname{tg} \beta &= \frac{\varepsilon w x^2 \sin \delta}{2 + \varepsilon w x^2 \cos \delta} \\ \text{et} & & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{6 \sin \theta' + \varepsilon w x^2 \sin (\theta' + \delta)}{6 \cos \theta' + \varepsilon w x^2 \cos (\theta' + \delta)}.\end{aligned}$$

Les constantes w et θ' sont des *constantes artificielles* tenant compte de la distribution, il faut pour que ces formules soient applicables que la quantité $\frac{(\varepsilon w x^2)^2}{24}$ qui représente l'ordre de grandeur de l'erreur relative faite sur \mathcal{U}_0 soit négligeable. Il faut *toujours* le vérifier puisque la constante w est *artificielle*. Ces formules sont préférables à celles qui ne tiennent compte que de l'impédance des câbles, car les phénomènes de capacité dans les câbles armés ont en général plus d'importance que les phénomènes de self-induction.

V. — Valeurs algébriques exactes des vecteurs de tension et de courant

1° VALEURS DES PROJECTIONS DES VECTEURS DE TENSION ET DE COURANT DANS LES RÉGIMES À VIDE ET EN COURT-CIRCUIT. — *Régime de la ligne à circuit ouvert.* — Pour le régime à vide nous avons les équations géométriques :

$$(1) \quad \overline{U}_x = \overline{U}_1 + \left(\frac{\varepsilon w}{1.2} x^2 U_1\right)_\delta + \dots + \left(\frac{(\varepsilon w x^2)^n}{2n!} U_1\right)_{n\delta} + \dots$$

(1) Dans le paragraphe qui va suivre (*Valeurs algébriques exactes des vecteurs de tension et de courant*) je me suis inspiré des belles études publiées par M. A. Blondel, dans l'*Eclairage Electrique* (t. XLIX, pages 121, 161, 241 et 321). Toutefois les points de départ étant différents, les démonstrations ont dû, être modifiées.

$$(2) \quad \bar{J}_x = (\overline{U_1 w x})_{\theta'} + \left(U_1 \frac{zw^2}{3!} x^3 \right)_{\theta' + \vartheta} + \dots$$

Projetons le vecteur \bar{U}_x sur deux axes rectangulaires OX et OY. La direction OX étant confondue avec la direction du vecteur U_1 origine des phases : on a en désignant par $(U_x)_x$ et $(U_x)_y$ les projections sur OX et OY :

$$(U_x)_x = U_1 \left[1 + \frac{zw}{1.2} x^2 \cos(\theta + \theta') \dots + \frac{z^n w^n}{n!} x^{2n} \cos n(\theta + \theta') + \dots \right]$$

$$(U_x)_y = U_1 \left[\frac{zw}{1.2} x^2 \sin(\theta + \theta') \dots + \frac{z^n w^n}{n!} x^{2n} \sin n(\theta + \theta') + \dots \right].$$

La sommation ⁽¹⁾ de ces deux séries est connue. En effet si nous prenons la demi-somme des séries A et C de la note de la page 116 nous avons une série de même forme que celle donnant $(U_x)_x$. Elle sera identique si nous faisons $\rho = \sqrt{zw} \times x$ et $\omega = \frac{\theta + \theta'}{2}$. Par suite la valeur de la série $(U_x)_x$ est :

$$(U_x)_x = U_1 \cdot \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \cdot \cos bx = U_1 \operatorname{coh}(ax) \cos(bx).$$

en posant :

$$a = \sqrt{zw} \cos \frac{\theta + \theta'}{2} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{zw} \sin \frac{\theta + \theta'}{2}.$$

(1) Cette sommation résulte immédiatement de la démonstration suivante due à Catalan (Théorie élémentaire des séries, page 128).

Si dans la formule $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ on remplace x par $\rho \cdot e^{\omega\sqrt{-1}} = \rho(\cos \omega + i \sin \omega)$ on trouve :

$$e^{\rho(\cos \omega + i \sin \omega)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} (\cos n\omega + \sqrt{-1} \sin n\omega)$$

$$\begin{aligned} \text{mais} \quad e^{\rho(\cos \omega + i \sin \omega)} &= e^{\rho \cos \omega} \times e^{\rho \sqrt{-1} \sin \omega} \\ &= e^{\rho \cos \omega} [\cos(\rho \sin \omega) + \sqrt{-1} \sin(\rho \sin \omega)]. \end{aligned}$$

Egalant les parties réelles et imaginaires on a :

$$A. \quad e^{\rho \cos \omega} \cos(\rho \sin \omega) = 1 + \frac{\rho}{1} \cos \omega + \frac{\rho^2}{1.2} \cos 2\omega + \dots$$

$$B. \quad e^{\rho \cos \omega} \sin(\rho \sin \omega) = \frac{\rho}{1} \sin \omega + \frac{\rho^2}{1.2} \sin 2\omega + \dots$$

Si nous remplaçons ρ par $-\rho$ nous avons :

$$C. \quad e^{-\rho \cos \omega} \cos(\rho \sin \omega) = 1 - \frac{\rho}{1} \cos \omega + \frac{\rho^2}{1.2} \cos 2\omega - \dots$$

$$D. \quad e^{-\rho \cos \omega} \sin(\rho \sin \omega) = -\frac{\rho}{1} \sin \omega + \frac{\rho^2}{1.2} \sin 2\omega - \dots$$

De même prenant la demi-différence des séries B et D de la note, nous avons une série de même forme que $(U_x)_Y$. Identifiant la série $(U_x)_Y$ à cette demi-somme nous avons :

$$(U_x)_Y = U_1 \cdot \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \sin(bx) = U_1 \sinh(ax) \sin(bx).$$

a et b ayant les mêmes valeurs que précédemment.

Si nous projetons le vecteur du courant (\bar{J}_x) sur les mêmes axes OX, OY, nous aurions évidemment une équation dissymétrique par rapport à θ et θ' . La sommation connue des séries A, B, C, D de la note, nous montre qu'il y a tout intérêt à obtenir la symétrie par rapport à θ et θ' de façon à avoir des multiples d'un même angle. Le terme général de la série géométrique (\bar{J}_x) est :

$$\left(U_1 \cdot \frac{w(\varepsilon w)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right)_{\theta' + n\delta}$$

par conséquent si nous projetons le vecteur (\bar{J}_x) sur des axes rectangulaires OX'OY' obtenus en faisant tourner les axes OX, OY de l'angle $+\frac{\theta' - \theta}{2}$ nous voyons que le vecteur du terme général aura pour projections :

$$\text{sur OX'} : \sqrt{\frac{w}{\varepsilon}} U_1 \times \frac{(\varepsilon w)^{\frac{2n+1}{2}} x^{2n+1}}{1.2.3... (2n+1)!} \cos \frac{(2n+1)(\theta + \theta')}{2}$$

$$\text{sur OY'} : \sqrt{\frac{w}{\varepsilon}} U_1 \times \frac{(\varepsilon w)^{\frac{2n+1}{2}} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin \frac{(2n+1)(\theta + \theta')}{2}.$$

Les projections du vecteur (\bar{J}_x) sur OX' et sur OY' sont donc :

$$(J_x)_{X'} = U_1 \sqrt{\frac{w}{\varepsilon}} \left[\frac{(\varepsilon w)^{\frac{1}{2}} x}{1} \cos \frac{\theta + \theta'}{2} + \frac{(\varepsilon w)^{\frac{3}{2}} x^3}{1.2.3} \cos \frac{3(\theta + \theta')}{2} + \dots \right]$$

$$(J_x)_{Y'} = U_1 \sqrt{\frac{w}{\varepsilon}} \left[\frac{(\varepsilon w)^{\frac{1}{2}} x}{1} \sin \frac{(\theta + \theta')}{2} + \frac{(\varepsilon w)^{\frac{3}{2}} x^3}{3!} \sin \frac{3(\theta + \theta')}{2} + \dots \right]$$

Si nous prenons la demi-différence des séries A et C de la note, nous avons une série résultante de même forme que la série entre parenthèses dans l'expression de $(J_x)_{X'}$. Identifiant il vient :

$$(J_x)_{X'} = U_1 \sqrt{\frac{w}{\varepsilon}} \sinh(ax) \cos(bx)$$

a et b ayant toujours les mêmes valeurs que précédemment. Si nous prenons la demi-somme des séries B et D de la note nous

avons une série résultante de même forme que la série entre parenthèses dans l'expression de $(J_x)_{y'}$. Identifiant on a :

$$(J_x)_{y'} = U_1 \sqrt{\frac{w}{z}} \coth(ax) \sin(bx).$$

Régime en court-circuit. — Nous avons les équations géométriques :

$$(\bar{I}_x) = \bar{I}_1 + \left(\frac{zw}{1.2} x^2 I_1 \right)_\delta + \left(\frac{z^2 w^2}{4!} x^4 I_1 \right)_{2\delta} + \dots$$

$$(\bar{V}_x) = (zx\bar{I}_1)_\theta + \left(\frac{z^2 w}{3!} x^3 I_1 \right)_{\theta+\delta} + \dots$$

Vecteur du courant. — L'équation géométrique étant la même que celle de la tension à vide à un facteur constant près (I_1 au lieu de U_1) on a immédiatement pour les valeurs des projections sur OX_1 et OY_1 — (OX_1 étant ici confondu avec la direction du vecteur \bar{I}_1 pris comme origine des phases :

$$(I_x)_{x_1} = I_1 \coth(ax) \cos(bx)$$

$$(I_x)_{y_1} = I_1 \sinh(ax) \sin(bx).$$

Vecteur de la tension. — Les projections du vecteur (\bar{V}_x) sur OX_1 et OY_1 sont dissymétriques par rapport à θ et θ' , pour avoir des projections qui soient des fonctions symétriques par rapport à θ et θ' , il suffit évidemment d'effectuer la projection sur des axes OX'' et OY'' faisant avec OX_1 et OY_1 un angle égal à $-\frac{\theta' - \theta}{2}$. Nous avons alors les valeurs des projections du vecteur (\bar{V}_x) sur ces axes OX'' et OY'' :

(1) Les quantités $\coth(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$ et $\sinh(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$ sont

appelés les *cosinus et sinus hyperboliques* de ax . L'origine géométrique de cette dénomination est la suivante : si on désigne par u le double de l'aire du secteur hyperbolique OAM , et si l'hyperbole est équilatère et a pour demi-axe l'unité, les coordonnées $x = OP$ et $y = MP$ du point M auront pour expressions :

$$x = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \quad y = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

Or les expressions des coordonnées d'un point du cercle de rayon 1 en fonction de l'arc ou du double du secteur circulaire sont :

$$x = \cos t = \frac{e^{t\sqrt{-1}} + e^{-t\sqrt{-1}}}{2} \quad \text{et} \quad y = \sin t = \frac{e^{t\sqrt{-1}} - e^{-t\sqrt{-1}}}{2}.$$

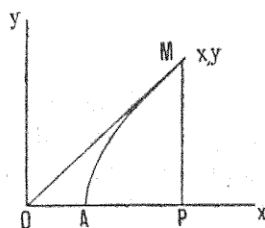


Fig. 51.

$$(V_x)_{x''} = I_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{w}} \left[\frac{(zw)^{\frac{1}{2}}}{1} x \cos \frac{\theta + \theta'}{2} + \frac{(zw)^{\frac{3}{2}}}{3!} x^3 \cos \frac{3(\theta + \theta')}{2} + \dots \right]$$

$$(V_x)_{y''} = I_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{w}} \left[\frac{(zw)^{\frac{1}{2}}}{1} x \sin \frac{\theta + \theta'}{2} + \frac{(zw)^{\frac{3}{2}}}{3!} x^3 \sin \frac{3(\theta + \theta')}{2} + \dots \right].$$

Par suite nous avons :

$$(V_x)_{x''} = I_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{w}} \operatorname{sh}(ax) \cos(bx)$$

$$(V_x)_{y''} = I_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{w}} \operatorname{ch}(ax) \sin(bx).$$

2° LONGUEURS ET DÉCALAGES DES VECTEURS DE TENSION ET DE COURANT DANS LES RÉGIMES A VIDE ET EN COURT-CIRCUIT. — Nous avons pour les projections de ces vecteurs :

1° Régime à vide. — a. Vecteur de la tension. — En projetant ce vecteur de la tension (\bar{U}_x) sur deux axes rectangulaires OX, OY. OX étant confondu avec la direction de U_1 :

$$(1) \quad (U_x)_x = U_1 \operatorname{ch}(ax) \cos(bx) \quad (U_x)_y = U_1 \operatorname{sh}(ax) \sin(bx).$$

b. Vecteur du courant. — En projetant ce vecteur sur des axes OX'OY' — OX' étant décalé de l'angle $+\gamma = +\frac{\theta' - \theta}{2}$ en avant sur OX, on a :

$$(2) \quad \begin{cases} (J_x)_{x'} = U_1 \sqrt{\frac{w}{\varepsilon}} \operatorname{sh}(ax) \cos(bx) \\ (J_x)_{y'} = U_1 \sqrt{\frac{w}{\varepsilon}} \operatorname{ch}(ax) \sin(bx). \end{cases}$$

2° Régime en court-circuit. — c. Vecteur du courant. — En projetant ce vecteur sur des OX₁OY₁, OX₁ étant confondu avec la direction de I_1 ; on a :

$$(3) \quad (I_x)_{x_1} = I_1 \operatorname{ch}(ax) \cos(bx) \quad (I_x)_{y_1} = I_1 \operatorname{sh}(ax) \sin(bx).$$

d. Vecteur de la tension. — En projetant ce vecteur sur des axes OX''OY'', OX'' étant décalé de l'angle $-\gamma = -\frac{\theta' - \theta}{2}$ par rapport à OX₁ on a :

$$(4) \quad \begin{cases} (V_x)_{x''} = I_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{w}} \operatorname{sh}(ax) \cos(bx) \\ (V_x)_{y''} = I_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{w}} \operatorname{ch}(ax) \sin(bx). \end{cases}$$

Longueurs des vecteurs. — Ces longueurs se déduisent facilement des valeurs des projections de ces vecteurs sur deux axes rectangulaires.

On a : $(U_x)^2 = (U_x)_x^2 + (U_x)_y^2.$

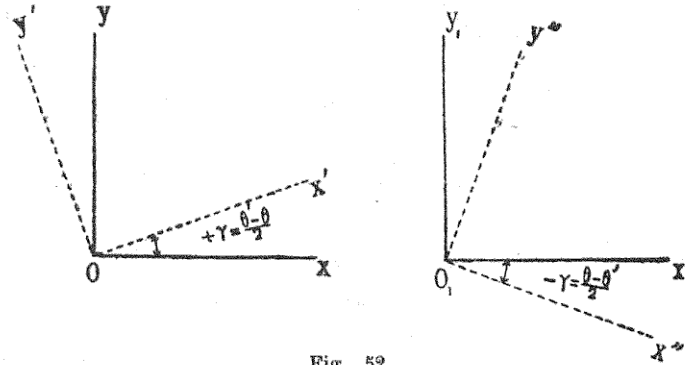


Fig. 52.

En remplaçant dans les équations (1) de la page précédente $\cosh(ax)$ par $\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$ et $\sinh(ax)$ par $\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$ on a :

$$U_x^2 = U_1^2 \left[\frac{e^{2ax} + e^{-2ax} + 2}{4} \cos^2(bx) + \frac{e^{2ax} + e^{-2ax} - 2}{4} \sin^2(bx) \right]$$

d'où :

$$(5) \quad U_x^2 = U_1^2 \left[\frac{\cosh(2ax) + \cos(2bx)}{2} \right].$$

On a de même :

$$(6) \quad (J_x)^2 = U_1^2 \frac{w}{z} \left[\frac{\cosh(2ax) - \cos(2bx)}{2} \right].$$

$$(7) \quad (V_x)^2 = I_1^2 \frac{z}{w} \left[\frac{\cosh(2ax) - \cos(2bx)}{2} \right].$$

$$(8) \quad (I_x)^2 = I_1^2 \left[\frac{\cosh(2ax) + (\cos 2bx)}{2} \right].$$

Phases et décalages des vecteurs. — 1^o Régime à vide. — Prenons tout d'abord comme origine de phase l'axe OX, confondu avec la direction de $\overline{U_1}$.

Si nous appelons α la phase de $\overline{U_x}$, on aura :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(U_x)_y}{(U_x)_x} = \frac{\sinh(ax)}{\cosh(ax)} \operatorname{tg}(bx).$$

Si β est l'angle du vecteur $(\overline{J_x})$ avec OX', la phase de $\overline{J_x}$ (l'axe OX origine) sera :

$$\beta + \gamma. \text{ Car OX' fait avec OX l'angle } \gamma = \frac{\theta' - \theta}{2}.$$

On a d'ailleurs :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(J_x)_{x'}}{(J_x)_{x'}} = \frac{\operatorname{coh}(ax)}{\operatorname{sh}(ax)} \operatorname{tg}(bx).$$

Si nous désignons par ξ l'avance du courant par rapport à la tension simple dans le régime à vide ; on a :

$$\xi = \beta - \alpha + \gamma = \sigma + \gamma.$$

On a d'ailleurs ⁽¹⁾ :

$$(9) \quad \operatorname{tg} \sigma = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin(2bx)}{\operatorname{sh}(2ax)}.$$

2° *Régime en court-circuit.* — Prenons comme origine de phases l'axe OX_1 confondu avec la direction de I_1 .

La phase de (I_x) sera α car on a :

$$\frac{(I_x)_{y_1}}{(I_x)_{x_1}} = \frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{coh}(ax)} \operatorname{tg}(bx).$$

La phase (\overline{V}_x) est $(\beta - \gamma)$. En effet l'angle du vecteur \overline{V}_x avec OX'' a pour tangente :

$$\frac{(V_x)_{y''}}{(V_x)_{x''}} = \frac{\operatorname{coh}(ax)}{\operatorname{sh}(ax)} \operatorname{tg}(bx).$$

et OX'' est décalé par rapport à OX , de l'angle $-\gamma = -\frac{\theta' - \theta}{2}$.

Le décalage du courant par rapport à la tension au point situé à x kilomètres de l'arrivée sera $\psi = \beta - \alpha - \gamma = \sigma - \gamma$.

σ étant toujours donné par l'équation (9).

3° CALCULS ALGÈBRIQUES EXACTS DE LA TENSION, DU COURANT ET DU DÉCALAGE DANS LA LIGNE EN CHARGE. — Nous avons vu (page 78) que le régime de la ligne en charge, caractérisé à l'arrivée, par la tension simple U_1 , le courant I_1 , et le décalage φ_1 , pouvait s'obtenir par la superposition du régime à circuit ouvert (donnant une tension U_1 à l'arrivée) et du régime en court circuit (le courant I_1 passant dans le court-circuit), sous réserves de décaler ce dernier régime de l'angle $(-\varphi_1)$. Les directions origines de phases OX et OX_1 étant maintenant supposées confondues avec la direction du vecteur U_1 . On a :

$$(1) \quad (\overline{U}_x) = (\overline{U}_x) + (\overline{V}_x)_{\text{rotation} - \varphi_1}.$$

$$(2) \quad (\overline{J}_x) = (\overline{J}_x) + (\overline{I}_x)_{\text{rotation} - \varphi_1}.$$

(1) Les quelques propriétés des fonctions hyperboliques qui nous sont nécessaires sont démontrées élémentairement page 127.

des vecteurs \overline{U}_x et \overline{J}_x sont donc faciles à déterminer puisque leur calcul dépend uniquement de la résolution de ces triangles.

4° MÉTHODES DE CALCUL POUR LES APPLICATIONS NUMÉRIQUES. *Première méthode* (due à M. A. Blondel). — Nous ne chercherons pas une formule algébrique donnant immédiatement les valeurs de \overline{U}_x , \overline{J}_x et $\cos \varphi_x$, mais calculerons numériquement les divers éléments de ces triangles.

Reprenons le calcul dès le début.

Nous calculons d'abord z , w , θ et θ' . Impédance et admittances dirigées. Puis successivement :

Les quantités $2ax$ et $2bx$ à l'aide des équations :

$$(1) \quad 2ax = 2\sqrt{z \cdot w} \cdot x \cdot \cos \frac{\theta + \theta'}{2} \quad (2) \quad 2bx = 2\sqrt{z \cdot w} \cdot x \cdot \sin \frac{\theta + \theta'}{2}.$$

Le coefficient d'influence du courant m et l'angle γ .

$$(3) \quad m = \sqrt{\frac{z}{w}}. \quad (4) \quad \gamma = \frac{\theta' - \theta}{2}.$$

Les quantités auxiliaires :

$$(5) \quad A = \sqrt{\frac{\cosh(2ax) + \cos(2bx)}{2}} \quad (6) \quad B = \sqrt{\frac{\cosh(2ax) - \cos(2bx)}{2}}.$$

On en déduit immédiatement les longueurs des vecteurs \overline{U}_x , \overline{V}_x , \overline{J}_x , \overline{I}_x :

$$(7) \quad U_x = AU_1. \quad (9) \quad J_x = \frac{1}{m} BU_1.$$

$$(8) \quad V_x = mBI_1. \quad (10) \quad I_x = AI_1.$$

Nous calculons l'angle σ .

$$(11) \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{\sin(2bx)}{\sinh(2ax)}.$$

Considérons maintenant le triangle MOQ_{φ_1} de la figure 53, nous déterminerons l'angle auxiliaire $\omega = \angle Q_{\varphi_1}MO$. Dans le triangle MCQ_{φ_1} on a :

$$(12) \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{V_x \sin(\sigma - \gamma - \varphi_1)}{U_x + V_x \cos(\sigma - \gamma - \varphi_1)}.$$

La connaissance de cet angle ω détermine la valeur de la tension U_x de la ligne en charge, par la formule :

$$(13) \quad U_x = \frac{V_x \sin(\sigma - \gamma - \varphi_1)}{\sin \omega}.$$

Nous voyons de même en considérant le triangle $NO'P_{\varphi_1}$, que nous avons :

$$(14) \quad \operatorname{tg} \omega' = \frac{J_x \sin (\sigma + \gamma + \varphi_1)}{I_x + J_x \cos (\sigma + \gamma + \varphi_1)},$$

La connaissance de ω' nous détermine la valeur du courant J_x de la ligne en charge. On a :

$$(15) \quad J_x = \frac{J_x \sin (\sigma + \gamma + \varphi_1)}{\sin \omega'}.$$

Quant au décalage φ_x on a :

$$(16) \quad \varphi_x = \omega' - \omega - \varphi_1.$$

Tous les éléments du problème sont donc déterminés.

Comme nous allons voir, par l'exemple numérique suivant, cette méthode (1) est assez rapide comme calcul et réduit au minimum les recherches dans les tables numériques de fonctions hyperboliques.

Exemple numérique. — Nous prendrons le premier exemple graphique que nous avons traité. Ligne aérienne triphasée de 1.200 kilomètres transportant 20.000 kilowatts. La tension entre fils à l'arrivée était de 100 000 volts et le décalage $\varphi_1 = 0$. Nous avons (voir page 93) :

$$\begin{aligned} U_1 &= 57.736. & I_1 &= 115,5 & \varphi_1 &= 0. \\ z &= 0,2045 \text{ ohms kil.} & w &= \frac{1,595}{10^6} \text{ mhos. kil.} \\ \theta &= 61^\circ 45' 5''. & \theta' &= 88^\circ 12' 12''. \end{aligned}$$

$$\text{Nous en déduisons : } \frac{\theta + \theta'}{2} = 74^\circ 59' 8''.$$

Les formules (1) et (2) nous permettent de calculer $2ax$ et $2bx$ par logarithmes. Nous avons ici en prenant $x = l = 1.200$ kilomètres :

$$2ax = 0,3552 \qquad 2bx = 1,3239.$$

Nous avons :

$$m = \sqrt{\frac{\varepsilon}{w}} = 358,1 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\theta' - \theta}{2} = 13^\circ 13' 3''.$$

Le calcul de A et B dont les valeurs sont données par les équations (5) et (6) exige le calcul de $\coth(2ax)$ et de $\cos(2bx)$.

La valeur de $(2ax)$ est 0,3552. Cherchant dans la table XIV des

(1) Cette méthode a été publiée par M. Blondel en 1906 dans l'*Eclairage électrique*.

tables numériques de Houël, nous trouvons, à la page 44, que lorsque l'argument u (colonne 1) est égal à 0,3543 le cosinus hyperbolique (colonne Ch u) est 1,0634, et si l'argument devient 0,3560 le cosinus hyperbolique devient 1,0640. Une facile interpolation nous donne coh (0,3552) = 1,0638.

La valeur de $2bx = 1,3239$. L'origine montre que $\cos(2bx)$ est le cosinus d'un arc dont la longueur, exprimée en parties du rayon, est 1,3239. L'unité employée est le *radian*. La table IX des tables numériques de Houël (page 20) donne bien la valeur des lignes trigonométriques pour les arcs évalués en radian; mais la table est peu développée. Il est nécessaire de transformer la valeur de cet arc en l'exprimant par exemple en parties du quadrant ⁽¹⁾. Avec cette nouvelle unité on a : $2b'x = \frac{2}{\pi} \times 2bx$.

$$\text{D'où : } 2b'x = \frac{2}{\pi} \times 1^{\text{r}}, 3239 = 0^{\text{e}}, 8428.$$

Les tables XIV de Houël nous donnent en même temps que les valeurs des fonctions hyperboliques les valeurs des fonctions circulaires correspondant à des arcs exprimés en parties décimales du quadrant. On a $\cos 2b'x = 0,2444 = \cos(2bx)$, on déduit de ces valeurs de coh $(2ax)$ et $\cos(2bx)$ les valeurs de A et B.

$$A = \sqrt{\frac{\text{coh}(2ax) + \cos(2bx)}{2}} = 0,8087,$$

$$B = \sqrt{\frac{\text{coh}(2ax) - \cos(2bx)}{2}} = 0,640.$$

Ces valeurs de A et B nous permettent de trouver immédiatement les valeurs des vecteurs composants. On a :

$$U_0 = U_1 \times 0,8087 = 46.690^{\text{v}}. \quad I_0 = I_1 \times 0,8087 = 93^{\text{A}}, 41.$$

$$V_0 = mBI_1 = 358,1 \times 0,64 \times 115,5 = 26.470^{\text{v}}.$$

$$J_0 = \frac{1}{m} BI_1 = 103^{\text{A}}, 2.$$

L'angle auxiliaire σ est donné par l'équation :

$$\text{tg } \sigma = \frac{\sin(2bx)}{\text{sh}(2ax)} = \frac{\sin(0,8428)}{\text{sh}(0,3552)} = \frac{0,96964}{0,3627}.$$

Calculant les angles à une demi-minute près, ce qui est suffisant, on a :

$$\sigma = 69^{\circ}, 30',$$

(1) On peut l'exprimer aussi en degrés, minutes et secondes; mais le calcul est plus long. Le radian est égal à $\frac{360 \times 60 \times 60}{2\pi} = 206.265''$.

et par suite :

$$(\sigma - \gamma) = 56^{\circ}, 17' \quad \sigma + \gamma = 82^{\circ}, 43'.$$

Nous avons pour déterminer l'angle ω l'équation :

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{V_0 \sin(\sigma - \gamma)}{U_0 + V_0 \cos(\sigma - \gamma)} \text{ puisque } \varphi_1 = 0.$$

Remplaçant les quantités algébriques par leurs valeurs, il vient $\operatorname{tg} \omega = 0,3587$.

$$\text{D'où :} \quad \omega = 19^{\circ}, 44' 8''.$$

$$\text{Donc nous avons :} \quad \mathcal{U}_0 = \frac{V_0 \sin(\sigma - \gamma)}{\sin \omega} = 63.210 \text{ volts.}$$

$$\text{De même :} \quad \operatorname{tg} \omega' = \frac{J_0 \sin(\sigma + \gamma)}{I_0 + J_0 \cos(\sigma + \gamma)} = 0,9614.$$

$$\text{D'où :} \quad \omega' = 43^{\circ}, 53' 20''.$$

$$\text{On en déduit :} \quad \mathcal{J}_0 = \frac{J_0 \sin(\sigma + \gamma)}{\sin \omega'} = 147^{\wedge}, 66.$$

$$\text{Le décalage } \varphi_0 = \omega' - \omega = 24^{\circ}, 9' 12''.$$

$$\text{La puissance au départ est } 3\mathcal{U}_0\mathcal{J}_0 \cos \varphi_0 = 26.358^{\text{kws}}.$$

Deuxième méthode (Les formules finales ont été publiées par M. le professeur Pender dans les *Proceedings* en juillet 1911). — Nous nous proposons de trouver des formules algébriques donnant directement \mathcal{U}_x , \mathcal{J}_x et $\cos \varphi_x$.

Les équations géométriques :

$$(\overline{\mathcal{U}}_x) = (\overline{U}_x) + (\overline{V}_x)_{\text{rotation} - \varphi_1} \quad \text{et} \quad (\overline{\mathcal{J}}_x) = (\overline{J}_x) + (\overline{I}_x)_{\text{rotation} - \varphi_1},$$

peuvent s'écrire en mettant en évidence les longueurs et les phases des vecteurs composants :

$$(1) \quad (\overline{\mathcal{U}}_x) = (\overline{AU}_1) + \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{w}} BI_1 \right)_{\sigma - \gamma - \varphi_1}.$$

$$(2) \quad (\overline{\mathcal{J}}_x) = \left(\sqrt{\frac{w}{\varepsilon}} BU_1 \right)_{\sigma + \gamma} + (\overline{AI}_1)_{-\varphi_1}.$$

On a d'ailleurs :

$$(3) \quad A = \sqrt{\frac{\cosh(2ax) + \cos(2bx)}{2}} \quad (4) \quad B = \sqrt{\frac{\cosh(2ax) - \cos(2bx)}{2}}$$

et

$$(5) \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{\sin(2bx)}{\sinh(2ax)} \quad (6) \quad \gamma = \frac{\theta' - \theta}{2}.$$

De l'équation (5) nous tirons :

$$(7) \quad \cos \sigma = \frac{\sinh(2ax)}{\sqrt{\cosh^2(2ax) - \cos^2 2bx}} = \frac{\sinh(2ax)}{2A \cdot B}.$$

$$(8) \quad \sin \sigma = \frac{\sin(2bx)}{2A \cdot B}.$$

Tension. — Le triangle MOQ_{φ_1} de la figure 53 ou bien l'équation géométrique (1) nous donne l'équation algébrique :

$$\mathcal{U}_x^2 = A^2 U_1^2 + \frac{\varepsilon}{w} B^2 I_1^2 + 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{w}} AB U_1 I_1 \cos(\sigma - \gamma - \varphi_1).$$

$$\text{On a : } \cos(\sigma - \gamma - \varphi_1) = \cos \sigma \cos(\gamma + \varphi_1) + \sin \sigma \sin(\gamma + \varphi_1).$$

Remplaçant dans cette expression $\cos \sigma$ et $\sin \sigma$ par leurs expressions tirées de 7 et 8 nous voyons que le produit AB disparaît dans l'expression de \mathcal{U}_x^2 . Comme A^2 et B^2 s'exprime rationnellement en fonction de $\cosh(2ax)$ et $\cos(2bx)$ nous voyons que \mathcal{U}_x^2 s'exprimera rationnellement en fonction de $\cosh(2ax)$, $\cos(2bx)$, $\sinh(2ax)$, $\sin(2bx)$. On a :

$$(9) \quad 2w \mathcal{U}_x^2 = (M \cosh 2ax + N \sinh 2ax) - (M' \cos 2bx - N' \sin 2bx)$$

(1) Démontrons rapidement et élémentairement les quelques propriétés des fonctions hyperboliques qui sont utilisées dans cette étude :

On a :

$$(1) \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2) \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ces équations nous montrent que $\cosh x = \cosh(-x)$ et que $\sinh(x) = -\sinh(-x)$.

Si nous élevons au carré ces deux équations et retranchons 2 de 1. On a :

$$(3) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

D'autre part $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ par définition. L'équation (3) donne :

$$\sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} \quad \text{et} \quad \cosh x = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}.$$

Ajoutant (1) et (2) nous avons : $\cosh x + \sinh x = e^x$.

Changeons x en $x + y$, il vient :

$$\cosh(x + y) + \sinh(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

ou

$$(4) \quad \cosh(x + y) + \sinh(x + y) = (\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y)$$

Changeons x en $-x$ et y en $-y$, on a :

$$(5) \quad \cosh(x + y) - \sinh(x + y) = (\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y).$$

Ajoutant (4) et (5) nous avons :

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

Retranchant 5 de (4) :

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x.$$

avec :

$$(10) \quad M = \varepsilon I_1^2 + w U_1^2 \quad N = 2\sqrt{\varepsilon w} U_1 I_1 \cos(\gamma + \varphi_1).$$

$$(11) \quad M' = \varepsilon I_1^2 - w U_1^2 \quad N' = 2\sqrt{\varepsilon w} U_1 I_1 \sin(\gamma + \varphi_1).$$

Posons :

$$(12) \quad \operatorname{tgh} 2\alpha = \frac{N}{M} \quad \text{et} \quad (13) \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{N'}{M'}.$$

Nous tirons de (12) et (13) :

$$(14) \quad \operatorname{sh} 2\alpha = \frac{N}{\sqrt{M^2 - N^2}} \quad \operatorname{ch} 2\alpha = \frac{M}{\sqrt{M^2 - N^2}}$$

$$(15) \quad \sin 2\beta = \frac{N'}{\sqrt{M'^2 + N'^2}} \quad \cos 2\beta = \frac{M'}{\sqrt{M'^2 + N'^2}}$$

D'ailleurs les équations (10) et (11) nous montrent que :
 $\sqrt{M'^2 + N'^2} = \sqrt{M^2 - N^2}$ et que par suite $\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\beta = \frac{2wU_1^2}{\sqrt{M^2 - N^2}}$.

On en conclut que l'équation (9) devient :

$$(16) \quad \mathcal{U}_x = U_1 \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2(ax + \alpha) - \cos 2(bx + \beta)}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\beta}}.$$

Courant. — L'équation géométrique (2) nous donne de même :

$$\mathcal{J}_x^2 = \frac{w}{\varepsilon} B^2 U_1^2 + A^2 I_1^2 + 2\sqrt{\frac{w}{\varepsilon}} AB U_1 I_1 \cos(\sigma + \gamma + \varphi_1).$$

et par un calcul entièrement analogue au précédent nous avons :

$$(17) \quad \mathcal{J}_x = I_1 \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2(ax + \alpha) + \cos 2(bx + \beta)}{\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta}}.$$

Décalage. — La valeur $\operatorname{tg} \varphi_x$ est assez complexe et assez longue à calculer, il est préférable de déterminer $\operatorname{tg}(\varphi_x + \gamma)$.

Pour cela faisons tourner le vecteur \mathcal{U}_x de l'angle $(+\gamma)$, les équations géométriques (1) et (2) deviennent :

$$(\overline{\mathcal{U}_x})_{\text{rotation} + \gamma} = (\overline{AU_1})_{+\gamma} + \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{w}} BI_1 \right)_{\sigma - \varphi_1}$$

$$(\overline{\mathcal{J}_x}) = \left(\sqrt{\frac{w}{\varepsilon}} BU_1 \right)_{\sigma + \gamma} + (\overline{AI_1})_{-\varphi_1}.$$

Si nous posons :

$$\mathcal{U}_x \mathcal{J}_x \cos(\varphi_x + \gamma) = P_a \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_x \mathcal{J}_x \sin(\varphi_x + \gamma) = P_r.$$

Nous avons : $\operatorname{tg}(\varphi_x + \gamma) = \frac{P_r}{P_a}$.

D'ailleurs le produit $\mathcal{U}_x \mathcal{J}_x \cos(\varphi_x + \gamma)$ est égal (note de la page 113) à la somme des produits des longueurs des vecteurs composants deux à deux multipliés respectivement par le cosinus de la différence des angles de phases. En réunissant les termes semblables nous avons :

$$P_a = \left(\sqrt{\frac{w}{z}} U_1^2 + \sqrt{\frac{z}{w}} I_1^2 \right) AB \cos \sigma + (A^2 + B^2) U_1 I_1 \cos(\gamma + \varphi_1).$$

De même :

$$P_r = \left(\sqrt{\frac{z}{w}} I_1^2 - \sqrt{\frac{w}{z}} U_1^2 \right) AB \sin \sigma + (A^2 - B^2) U_1 I_1 \sin(\gamma + \varphi_1).$$

Remplaçant comme précédemment $\cos \sigma$, $\sin \sigma$, A^2 et B^2 par leurs valeurs, on a :

$$\operatorname{tg}(\varphi_x + \gamma) = \frac{M' \sin 2(bx) + N' \cos(2bx)}{M \sinh(2ax) + N \cosh(2ax)}$$

$MM'NN'$ étant toujours donnés par les équations (10) et (11).

Divisons le numérateur par $\sqrt{M'^2 + N'^2}$ et le dénominateur par $\sqrt{M^2 - N^2}$, comme ces deux quantités sont égales nous n'avons pas changé la valeur du second membre ; on a donc :

$$\operatorname{tg}(\varphi_x + \gamma) = \frac{\cos 2\beta \sin 2bx + \sin 2\beta \cos 2bx}{\cosh 2\alpha \sinh 2ax + \sinh 2\alpha \cosh 2ax}.$$

Par conséquent :

$$(18) \quad \operatorname{tg}(\varphi_x + \gamma) = \frac{\sin 2(bx + \beta)}{\sinh 2(ax + \alpha)}.$$

Connaissant φ_x , \mathcal{U}_x et \mathcal{J}_x nous pouvons calculer la puissance au point x . On a $P = \mathcal{U}_x \mathcal{J}_x \cos \varphi_x$ sur chaque phase.

Résumé de la méthode. — Pour une application numérique nous calculerons comme précédemment les quantités z , w , θ , θ' .

Supposons que nous cherchions le régime au départ $x = l$. Nous calculerons les valeurs de $2al$ et $2bl$.

$$(1) \quad 2al = 2\sqrt{zw}.l. \cos \frac{\theta + \theta'}{2}.$$

$$(2) \quad 2bl = 2\sqrt{z.w}.l. \sin \frac{\theta + \theta'}{2}.$$

Nous chercherons les valeurs de $d = \frac{l.zI_1}{U_1}$ rapport de la chute

d'impédance totale à la tension simple ; $d' = \frac{I_0 \cdot U_1}{I_1}$ rapport du courant d'admittance total au courant à l'arrivée.

L'argument 2α et l'arc 2β sont donnés par les formules :

$$(3) \quad \text{tgh. } 2\alpha = \frac{2\sqrt{dd'} \cos(\gamma + \varphi_1)}{d + d'}$$

$$(4) \quad \text{tg } 2\beta = \frac{2\sqrt{dd'} \sin(\gamma + \varphi_1)}{d - d'}$$

Nous remarquerons pour déterminer complètement l'angle 2β que $\sin 2\beta$ doit avoir le signe du numérateur et $\cos 2\beta$ le signe du dénominateur, ainsi qu'il est aisé de s'en rendre compte en se reportant au calcul précédent.

Formant les arguments $2(al + \alpha)$ et les arcs $2(bl + \beta)$ nous pourrions calculer : $\cosh 2(al + \alpha)$, $\sinh 2(al + \alpha)$, $\cos 2(bl + \beta)$, $\sin 2(bl + \beta)$. Pourtant ces valeurs dans les équations (5), (6) et (7) le problème est solutionné :

$$(5) \quad U_0 = U_1 \sqrt{\frac{\cosh 2(al + \alpha) - \cos 2(bl + \beta)}{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta}}$$

$$(6) \quad I_0 = I_1 \sqrt{\frac{\cosh 2(al + \alpha) + \cos 2(bl + \beta)}{\cosh 2\alpha + \cos 2\beta}}$$

$$(7) \quad \varphi_0 = \text{arc tg} \frac{\sin 2(bl + \beta)}{\sinh 2(al + \alpha)} = \gamma$$

Ces formules sont fort simples, et, en somme, faciles à calculer. Des tables *graphiques* des fonctions hyperboliques facilitent beaucoup ces calculs (*Proceedings. Juillet 1911*).

Au sujet des arcs $2(bl + \beta)$, il est évident qu'il faut évaluer $2bl$ et 2β au moyen de la même unité. Si nous nous sommes servis pour calculer 2β de tables donnant l'arc en parties décimales du quadrant, nous transformerons $2bl$ qui est évalué en radians. On aura $2bl = \frac{2}{\pi} \cdot 2bl$ puisque le quadrant vaut $\frac{\pi}{2}$ radians.

Il n'est pas rare que l'arc $2(bl + \beta)$ (exprimé en fractions décimales du quadrant), dépasse l'unité. L'extrémité de l'arc correspondant est dans le second quadrant ; nous remplacerons $2(bl + \beta)$ par $2 - 2(bl + \beta)$, conserverons le sinus positif et donnerons le signe — au cosinus. Les tables n'ont en effet jamais plus d'un quadrant d'amplitude. Si $2(bl + \beta)$ dépassait deux unités on remplacerait $2(bl + \beta)$ par $(2bl + \beta) - 2$. On chercherait le sinus et le cosinus de cet arc et les ferait précéder tous les deux du

signe —. Il faut encore des lignes de grande longueur pour que $2(b'l + \beta)$ dépasse l'unité. (*H. Pender et H. F. Thomson. — Proceedings*).

VI. — Etude des très longues lignes

Les formules en fonction des cosinus et sinus hyperboliques sont exactes, quelle que soit la longueur de la ligne. Discutons-les en supposant une ligne extrêmement longue.

1° RÉGIMÉ A VIDE. — Les valeurs des projections des vecteurs de tension et de courant au point situé à x kilomètres de l'arrivée sont :

Pour la *tension* (projections sur OXOY ; OX confondu avec la direction de U_1) prise comme origine des phases :

$$(U_x)_x = U_1 \coth(ax) \cos(bx) \quad (U_x)_y = U_1 \sinh(ax) \sin(bx).$$

Les points pour lesquels la tension simple \bar{U}_x sera en phase avec la tension simple U_1 sont donnés par les équations :

$$\sin(bx) = 0 \quad \cos(bx) = 1.$$

D'où $bx = 2n\pi$.

La distance entre deux de ces points est : $\lambda = \frac{2\pi}{b}$.

λ est appelé la longueur d'onde de la ligne.

La valeur instantanée de la tension, au point situé à x kilomètres de l'arrivée, et à l'instant t , sera la somme des deux quantités :

$$U_1 \sqrt{2} \coth(ax) \cos(bx) \sin \omega t$$

et $U_1 \sqrt{2} \sinh(ax) \sin(bx) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$

Remplaçant $\coth(ax)$ et $\sinh(ax)$ par leurs valeurs et réunissant les termes en e^{ax} et e^{-ax} , nous avons :

$$(1) \quad u_{x,t} = \frac{U_1 \sqrt{2}}{2} [e^{ax} \sin(\omega t + bx) + e^{-ax} \sin(\omega t - bx)].$$

(1) Les deux dernières méthodes de calcul, ci-dessus indiquées, ont été exposées par leurs auteurs en partant d'équations différentielles assez compliquées, ou bien d'équations différentielles de quantités complexes. Par la démonstration des pages 72 et suivantes, j'ai cherché à rester plus élémentaire et aussi à ranger les différentes méthodes de calcul par ordre de difficultés mathématiques croissantes.

Pour le *courant*, les projections sur OX' , OY' (OX' faisant un angle $+\gamma = \frac{\theta' - \theta}{2}$ avec OX) sont :

$$(J_x)_{x'} = U_1 \sqrt{\frac{w}{z}} \sinh(ax) \cos(bx), \quad (J_x)_{y'} = U_1 \sqrt{\frac{w}{z}} \cosh(ax) \sin(bx).$$

On voit donc que la valeur instantanée du courant sera la somme des deux quantités :

$$U_1 \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{w}{z}} \sinh(ax) \cos(bx) \sin(\omega t + \gamma)$$

et

$$U_1 \sqrt{2} \sqrt{\frac{w}{z}} \cosh(ax) \sin(bx) \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right).$$

D'où en réunissant les termes en e^{ax} et e^{-ax} :

$$(2) \quad i_{x,t} = \sqrt{\frac{w}{z}} \cdot \frac{U_1 \sqrt{2}}{2} [e^{ax} \sin(\omega t + \gamma + bx) - e^{-ax} \sin(\omega t + \gamma - bx)].$$

L'équation (1) nous montre que $u_{x,t}$ est la somme de deux ondes dont la première $\frac{U_1 \sqrt{2}}{2} e^{ax} \sin(\omega t + bx)$ a des amplitudes et des avances de phases croissantes lorsque x croît ; si on la considère en sens inverse, elle aura des amplitudes *décroissantes* en s'éloignant de la source. La seconde de ces ondes est caractérisée par une amplitude maxima égale à celle de la première onde $\frac{U_1 \sqrt{2}}{2}$ et peut être considérée comme la réflexion de cette onde. On considère souvent que l'usine fournit une onde de tension qui suit la ligne et se réfléchit à son extrémité en revenant toujours plus amortie. La tension en chaque point de la ligne est la superposition de ces deux ondes.

L'équation (2) nous montre que le courant est la *différence* de deux ondes analogues.

Nous remarquerons que si nous prenons deux points distants de $\lambda = \frac{2\pi}{b}$, chacune des ondes composantes a la même phase en ces deux points.

Si nous considérons les valeurs du courant aux points de la ligne situés à des distances $\frac{\lambda}{2}$ et λ de l'arrivée, nous avons les valeurs instantanées suivantes :

$$\text{à la distance } \frac{\lambda}{2} : i' = -U_1 \sqrt{2} \sqrt{\frac{w}{z}} \sinh\left(a \frac{\lambda}{2}\right) \sin(\omega t + \gamma)$$

$$\text{à la distance } \lambda : i'' = +U_1 \sqrt{2} \sqrt{\frac{w}{z}} \sinh(a\lambda) \sin(\omega t + \gamma).$$

Par conséquent nous constatons qu'au même instant, il y a des courants de sens inverses dans la ligne.

Valeurs efficaces et décalages. — Les valeurs efficaces de la tension et du courant sont donnés par les expressions :

$$U_x = U_1 \sqrt{\frac{\cosh 2ax + \cos(2bx)}{2}}.$$

$$\text{D'où nous tirons : } U_x = \frac{U_1}{2} \sqrt{e^{2ax} + e^{-2ax} + 2 \cos(2bx)}.$$

L'allure de la variation de U_x est donnée par le terme sous le radical qui s'obtient en enroulant la courbe $y = \cos(2bx)$ autour de la courbe $y = e^{2ax} + e^{-2ax}$.

La valeur efficace du courant J_x est :

$$J_x = \frac{U_1}{2} \sqrt{\frac{w}{\varepsilon}} \sqrt{e^{2ax} + e^{-2ax} - 2 \cos(2bx)}.$$

Si nous décalons d'une demie période en avance la courbe $2 \cos(2bx)$ et procédons au même enroulement nous avons le radical de J_x . La figure 54 résume schématiquement cette construction des quantités sous les radicaux. La courbe $e^{2ax} + e^{-2ax}$ est marquée (1,1). La courbe 2 est la courbe $2 \cos(2bx)$. Les lettres U et I indiquent à quelle quantité se rapporte le radical représenté.

Cette figure nous montrent que U_x et J_x passent par des maxima et minima opposés. La distance entre deux maxima consécutifs de la tension, par exemple, est : $\frac{\pi}{b} = \frac{\lambda}{2}$.

Décalages. — Le décalage de J_x par rapport à U_x est : $\xi = \sigma + \gamma$.

Si nous remplaçons σ par sa valeur, on a :

$$\xi = \arctg \frac{\sin(2bx)}{\sinh(2ax)} + \gamma.$$

Pour $x = 0$ la valeur de ξ est indéterminée ; mais l'étude des valeurs approchées et des développements en séries nous a montré que ce décalage à l'origine était $\xi_0 = \theta'$.

Si x croît, le dénominateur de $\arctg \frac{2 \sin(2bx)}{e^{ax} - e^{-ax}}$ croît constam-

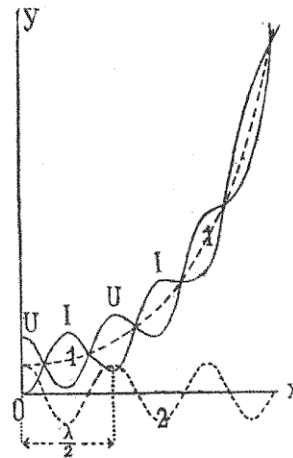


Fig. 54.

ment, par suite, la fraction passe du positif au négatif avec $\sin(2bx)$. Lorsque $\sin(2bx)$ s'annule le décalage devient à égal à $\gamma = \frac{\theta' - \theta}{2}$.

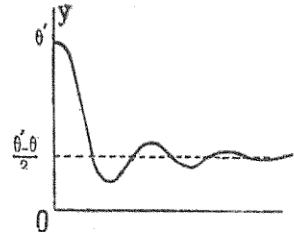


Fig. 55.

L'allure de la courbe du décalage est donnée par la figure 55. Nous remarquerons que les points où $\xi = \frac{\theta' - \theta}{2}$ sont distants de $\frac{\pi}{2b}$, c'est-à-dire d'un quart de longueur d'onde $\frac{\lambda}{4}$. Ils correspon-

dent sauf pour $x = 0$ au maxima et minima de la courbe $y = 2 \cos 2bx$.

Coefficient d'amortissement. — Coefficient de rotation de phases ou de longueur d'onde. — La quantité $a = \sqrt{zw} \cos \frac{\theta + \theta'}{2}$ est appelé le *coefficient d'amortissement* de la ligne. La quantité $b = \sqrt{zw} \sin \frac{\theta + \theta'}{2}$ est appelé le *coefficient de rotation de phases ou de longueur d'onde*.

L'étude précédente explique et justifie ces appellations.

2° Régime en court-circuit. — La discussion des formules trouvées pour le régime en court-circuit nous conduirait à des propriétés analogues.

3° Régime en charge. — Les formules (16) (17) et (18) de la page 128 donnant \mathcal{U}_x , \mathcal{I}_x et φ_x nous montrent que les valeurs de la tension et du courant oscilleront en sens inverse. Les maxima et minima du courant coïncideront avec les minima et maxima de la tension et avec des décalages égaux à $\gamma = \frac{\theta' - \theta}{2}$.

Le décalage φ_x sera égal à φ_1 pour $x = 0$ puis deviendra égal à $\gamma = \frac{\theta' - \theta}{2}$ en tous les points où on aura $2(bx + \beta) = K\pi$ ou bien $x = -\frac{\beta}{b} + K \cdot \frac{\lambda}{4}$. Pour x très grand φ_x se rapproche de plus en plus de la valeur γ . Le décalage oscille encore autour de cette valeur γ , bien que la valeur initiale soit différente.

Toutefois pour les fréquences usuelles et les longueurs de lignes habituelles, les oscillations de la tension du courant et du décalage ne sont pas sensibles.

Ordre de grandeur des longueurs d'onde. — Les longueurs d'onde λ sont en effet très longues. Pour la ligne à 100.000 volts à 25 cycles, que nous avons étudiée, nous avons $2bl = 1,324$.

D'où
$$b = \frac{1,324}{2\,400} = 5,5 \times 10^{-4}.$$

Nous en tirons
$$\lambda = \frac{2\pi}{b} = \frac{6,28}{5,5} \times 10^4 = 11.400 \text{ kilomètres.}$$

Si cette ligne avait fonctionné à 50 cycles la valeur de b aurait presque doublée et λ aurait été approximativement divisée par 2. Si la ligne avait été de plus faible section la valeur de λ aurait encore diminuée, tout en restant très grande. Ainsi pour la ligne de Lauffen-Francfort, dont les fils de cuivre n'avaient que 4 millimètres de diamètre, on trouvait pour un fonctionnement à 50 périodes : $\lambda = 4.000$ kilomètres.

Pour les câbles armés ces longueurs d'onde se réduisent encore ; mais restent même à 50 cycles de l'ordre de 1.000 à 2.000 kilomètres.

Ces phénomènes fort intéressants n'interviennent, en somme, que dans l'étude des harmoniques supérieurs, et des lignes à fréquence élevée telles que les lignes téléphoniques.

VII. — Détermination sur une ligne construite ou sur un câble armé des impédances ou admittances dirigées

Nous proposons de déterminer z , w , θ et θ' .

Mesurons à circuit ouvert, le voltage U_0 , le courant J_0 et le décalage ξ_0 entre U_0 et J_0 . Un voltmètre, un ampèremètre et un wattmètre suffisent, *théoriquement*, pour exécuter ces mesures.

Mesurons de même, *toujours au départ de la ligne*, le voltage V_0 , le courant I_0 et le décalage ψ_0 entre V_0 et I_0 , l'extrémité de la ligne étant mise en court-circuit.

En désignant par l la longueur de la ligne, nous avons :

$$(1) \quad U_0 = AU_1 \quad (2) \quad J_0 = \frac{4}{m} BU_1 \quad (3) \quad \xi_0 = \sigma + \gamma$$

$$(4) \quad V_0 = mBI_1 \quad (5) \quad I_0 = AI_1 \quad (6) \quad \psi_0 = \sigma - \gamma.$$

On a d'ailleurs :

$$(7) \quad A = \sqrt{\frac{\cosh(2al) + \cos(2bl)}{2}} \quad (8) \quad B = \sqrt{\frac{\cosh(2al) - \cos(2bl)}{2}}$$

$$(9) \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{\sin(2bx)}{\sinh(2ax)}.$$

De ces relations nous déduisons immédiatement deux relations très simples :

$$(10) \quad \frac{U_0 \times V_0}{J_0 \times I_0} = m^2 = \frac{z}{w} \quad (11) \quad \xi_0 - \psi_0 = 2\gamma = \theta' - \theta.$$

Si nous connaissions a et b les relations :

$$a = \sqrt{zw} \cos \frac{\theta + \theta'}{2} \quad b = \sqrt{zw} \sin \frac{\theta + \theta'}{2}$$

nous donneraient :

$$(12) \quad a^2 + b^2 = zw \quad \text{et} \quad (13) \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \frac{\theta + \theta'}{2}.$$

Les inconnues θ , θ' , z , w seraient déterminées par les équations (10), (11), (12) et (13).

Cherchons les valeurs a et b . Les équations (3), (6) et (9) nous donnent :

$$(14) \quad \operatorname{tg} \frac{\xi_0 + \psi_0}{2} = \frac{\sin(2bl)}{\sinh(2al)} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(2bl)}}{\sqrt{\cosh^2(2al) - 1}}.$$

Les équations (1), (2), (4), (5), nous donnent :

$$\frac{U_0 \times I_0}{J_0 \times V_0} = \frac{\Lambda^2}{B^2}.$$

D'où :

$$(15) \quad \frac{U_0 I_0 + J_0 V_0}{U_0 I_0 - J_0 V_0} = \frac{\cosh(2al)}{\cos(2bl)} = K.$$

Les équations (14) et (15) nous donnent :

$$\cos(2bl) = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\xi_0 + \psi_0}{2}}{1 + K^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\xi_0 + \psi_0}{2}}}$$

et

$$\cosh 2al = K \cos 2bl.$$

Les tables des lignes trigonométriques circulaires et hyperboliques nous donnent $2al$ et $2bl$. Portant dans les équations (12) et (13) nous avons sans difficulté z , w , θ , θ' .

Ces mesures théoriques sont malheureusement très difficiles à exécuter, avec précision, spécialement en ce qui concerne la mesure de la puissance de la ligne à vide. En effet, il est désirable d'exécuter cette mesure à un voltage voisin du voltage de service ; dès lors on doit mesurer une puissance faible, à haut voltage, avec un très fort décalage : toutes les conditions défavorables à l'exactitude de la mesure sont réunies.

Pour les câbles armés la mesure peut se faire sur une longueur de câble de 200 mètres environ.

VIII. — Rendement de la ligne de transport

1° RENDEMENT MAXIMUM THÉORIQUE. — Le rendement d'une ligne de transport à courant alternatif étant nul en court-circuit et à circuit ouvert, il existe forcément un régime de débit à l'arrivée qui donne un rendement maximum.

Cherchons rapidement le régime du rendement maximum.

Définissons le circuit à l'arrivée par son impédance dirigée $(Z_1)_{\varphi_1}$.

Si nous appelons U_1 la tension simple à l'arrivée on a : $U_1 = Z_1 I_1$.

Le rendement de la ligne est : $\eta = \frac{U_1 I_1 \cos \varphi_1}{U_0 J_0 \cos \varphi_0}$.

Si nous désignons par ξ le décalage de J_0 sur U_0 et par ψ le décalage de I_0 sur V_0 on a les deux équations géométriques connues :

$$\overline{U_0} = (\overline{AU_1}) + (m\overline{BI_1})_{-\varphi_1 + \psi}$$

$$(\overline{J_0}) = \left(\frac{1}{m} \overline{BU_1}\right)_{\xi} + (\overline{AI_1})_{-\varphi_1}.$$

A l'aide de ces deux équations, nous pouvons sans difficultés former le produit algébrique $U_0 J_0 \cos \varphi_0$ qui d'après la note de la page 113 est égal à la somme des produits algébriques deux à deux des longueurs des vecteurs composants multipliés par le cosinus de la différence d'angle de phase de ces deux vecteurs composants. Portant dans la valeur de η ou de $\frac{1}{\eta}$, on a :

$$\frac{1}{\eta} = \frac{Z_1 \cdot \frac{1}{m} AB \cos \xi + \frac{1}{Z_1} mAB \cos \psi + A^2 \cos \varphi_1 + B^2 \cos (\psi - \xi - \varphi_1)}{\cos \varphi_1}.$$

Egalant à zéro les dérivées partielles par rapport à Z_1 et φ_1 on a :

$$(1) \quad \frac{1}{m} AB \cos \xi - \frac{1}{Z_1^2} mAB \cos \psi = 0.$$

$$(2) \quad B \sin (\psi - \xi) + A \sin \varphi_1 \left(\frac{m}{Z_1} \cos \psi + \frac{Z_1}{m} \cos \xi \right) = 0.$$

La signification physique des égalités (1) et (2) est fort simple.

L'équation (1) signifie que les pertes de la ligne à vide ayant une tension simple U_1 à l'arrivée, sont égales aux pertes de la ligne en court-circuit débitant un courant I_1 à l'arrivée.

En effet cette équation peut s'écrire :

$$U_0 J_0 \cos \xi = V_0 I_0 \cos \psi.$$

L'équation (2) jointe à l'équation (1) nous donne pour φ_1 une valeur positive telle que le décalage au départ φ_0 est égal et de signe contraire au décalage à l'arrivée ⁽¹⁾ (Roessler).

Ces deux règles nous montrent que cette question du rendement maximum théorique n'a pas un grand intérêt dans la pratique.

Pour les lignes ou câbles de courtes longueurs l'application de la première règle conduirait évidemment à une densité de courant très inférieure à la densité économique. La marche économique est très éloignée du régime maximum. Le rendement maximum est d'ailleurs dans ce cas excellent pour les lignes aériennes (0,99) et bon pour les câbles.

Pour les lignes aériennes ou souterraines de grandes longueurs, l'application de la première règle pourra donner une utilisation du métal, voisine de l'utilisation économique ⁽²⁾; le rendement maximum bon pour les lignes aériennes devient assez rapidement mauvais pour les câbles armés triphasés. La deuxième règle conduirait à adopter une valeur du facteur de puissance à l'arrivée très différente de celle qu'imposerait une bonne régulation du voltage de la ligne et la construction économique de l'usine et du réseau secondaire.

Considérations sur l'amélioration pratique du rendement dans les lignes de transport de grandes longueurs. — Examinons rapidement comment peuvent être fixées les données U , I , $\cos \varphi_1$ à l'arrivée.

Le voltage à l'arrivée U_1 sera choisi d'après les considérations économiques que nous avons exposées dans la première partie. Si la ligne est très longue et très chargée, le voltage différera peu de la tension critique de disruption; il sera en somme limité par les considérations du « phénomène de couronne ».

Le facteur de puissance $\cos \varphi_1$, à l'arrivée, dépendra de la nature des moteurs de la clientèle. L'angle φ_1 sera en général positif, c'est-à-dire que le courant sera presque toujours décalé en arrière de la tension. Ce facteur de puissance devra être amélioré autant qu'il est possible, sans dépenses exagérées. En effet, si l'amélio-

(1) Nous n'insistons pas sur la démonstration de cette deuxième proposition.

Il suffit de vérifier, l'égalité $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1}$. La valeur de $\operatorname{tg} \varphi_0$ s'obtient en prenant le rapport des puissances effectives et réactives au départ en s'appuyant toujours sur la note de la page 113. L'égalité se vérifie sans difficultés.

(2) Cette utilisation économique des longues lignes de transport doit être déterminée comme il a été indiqué dans la première partie, page 57.

ration du facteur de puissance diminue un peu le rendement de la ligne de transport, elle améliore d'une façon considérable le rendement de la canalisation secondaire ou ce qui revient au même diminue son prix de revient, et, cet effet est presque toujours prépondérant. D'autre part la régulation du voltage de la grande ligne est améliorée, ce qui est fort important.

La puissance distribuée est en général fixée, cependant il arrive souvent que l'on désire distribuer toute la puissance P_0 d'une usine dans une direction donnée. Dans ce cas on pourra partager cette puissance en deux parties : la principale P_1 sera destinée à la grande ville ou aboutit le transport, la seconde P_2 pourra être distribuée en cours de route. Cette distribution en cours de route peut améliorer beaucoup le rendement du transport ; non seulement par ce fait qu'une partie de la puissance est transportée à plus courte distance ; mais surtout parce que nous pourrions supprimer une partie notable du courant dévatté dû à la capacité de la ligne. Nous disposons pour cela dans une certaine mesure du facteur de puissance dans l'installation desservie en cours de route ; $\cos \varphi_2$. Ce facteur de puissance peut être rendu assez mauvais sans grands inconvénients ; car le réseau secondaire n'est pas très important : on imposera donc par contrats dans cette distribution l'emploi de moteurs asynchrones. Dès lors $\cos \varphi_2$ variera entre 0,75 et 0,80. Si cette installation en dérivation est située vers le milieu d'une longue ligne de transport, le courant dévatté (en arrière) demandée par cette dérivation annulera un courant dévatté (en avant) égal, et à partir de ce point les pertes dans la ligne jusqu'à l'usine seront fortement réduites.

Dans les très longues lignes de transport (300 kil. et au delà) on pourra envisager la réduction préalable du courant dévatté de la ligne en cherchant à égaliser ⁽¹⁾ l'énergie électrostatique et l'énergie magnétisante de la ligne, au point d'arrivée, ou bien à rendre ces quantités peu différentes l'une de l'autre. Nous avons vu en effet, page 110 que dans ce cas le décalage au départ de la ligne était sensiblement réduit. L'égalité $\frac{U_1}{I_1} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ peut être satisfaite, le voltage étant fixé, en agissant sur la charge I_1 de la ligne ou sur le rapport $\frac{L}{C}$: malheureusement le point de vue économique limite la valeur de I_1 et la construction pratique de la ligne limite la variation du rapport $\frac{L}{C}$.

(1) Thomas, *Proceedings*, juin 1909.

Dans le premier exemple, (ligne de 1.200 kilomètres) nous avons trouvé que les *pertes supplémentaires* d'effet Joule dues à la combinaison des courants de capacité au courant utile étaient de l'ordre de 1.000 kilowatts. En proportionnant le débit de la ligne de façon à presque égaler l'énergie électrostatique et l'énergie magnétisante à l'arrivée de la ligne on réduirait sensiblement ces pertes supplémentaires.

Cette réduction sera obtenue également, et peut-être plus facilement par les distributions en cours de route convenablement étudiées, comme nous l'avons indiqué précédemment.

Ici se termine notre petit ouvrage sur le calcul des lignes électriques. Nous avons vu comment on peut calculer une ligne de transport de force, en tenant compte de la Sécurité du Bon Service et de l'Economie, *lorsque les données du problème sont connues*.

Ces données du problème peuvent se diviser ainsi qu'il suit :

1° *Données du courant*. — Nature du courant. Fréquence. Voltage.

2° *Données de l'usine*. — Puissance. Prix de l'unité de force hydraulique. Régularité du régime hydraulique. Distance de transport.

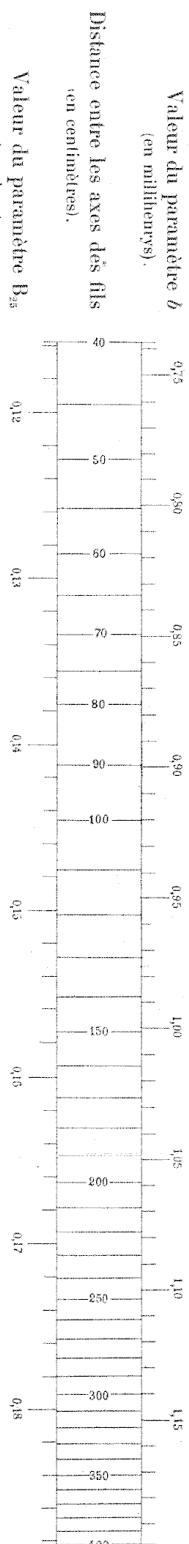
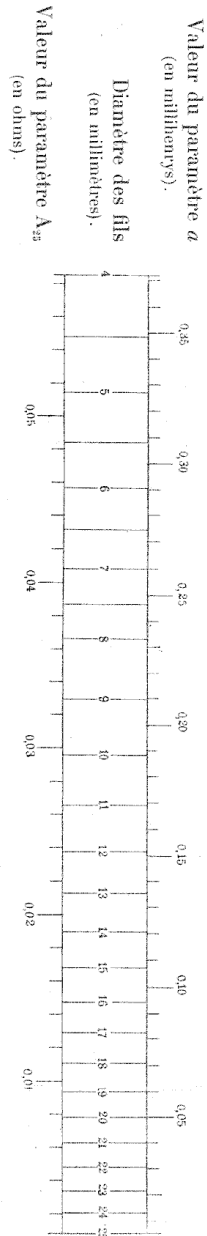
3° *Données de la clientèle*. — Puissance, Facteur de charge. Facteur de puissance. Facteur de diversité.

Ces données constituent presque tous les facteurs qui intéressent, en première ligne, la prospérité d'une entreprise de transport de force ; il suffit, en effet, d'y ajouter quelques précisions sur les possibilités du *prix de vente* à la clientèle, sur le facteur d'irrégularité de la clientèle et sur le facteur correspondant de l'usine (facteur d'élasticité ou de surcharge).

Le travail que nous venons de faire sur le calcul des lignes nous a souvent permis de voir l'influence de la variation de certaines de ces quantités sur le coût ou sur le fonctionnement de la ligne de transport. En étudiant d'autre part l'influence de la variation de ces données sur le coût ou le fonctionnement de l'Usine et des Postes de transformation, nous pourrions conclure comment il est possible de choisir ou d'améliorer logiquement ces données.

Un tel problème ne comporte évidemment pas de solution absolue ; mais il est possible de tirer de cette étude, qui fera l'objet d'une publication ultérieure, certaines règles dont il est prudent de ne pas s'écarter.

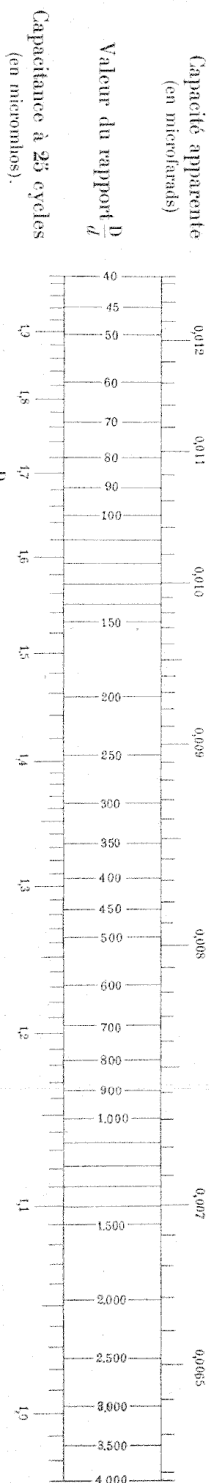
FIN

1^{er} Coefficient de self-induction apparente et inductance.

Usage. — Le coefficient de self-induction apparente d'un fil de ligne (en millihenrys) par kilomètre, est : $L_s = a + b$.
La valeur de l'inductance à 25 cycles est : $(\omega L_s)_{25} = A_{25} + B_{25}$. L'inductance à 50 cycles a naturellement une valeur double. Les formules dont ce abaque sont la traduction supposent la ligne monophasée ou triphasée symétrique.

Exemple : Soit une ligne triphasée symétrique dont les fils, distants de trois mètres, ont 45 millimètres de diamètre.
Dans le premier abaque, à l'aplomb de la verticale (15) nous lisons : $a = 0,107$ $A_{25} = 0,0168$
Dans le deuxième abaque, à l'aplomb de la verticale (15) nous lisons : $b = 1,141$ $B_{25} = 0,1792$

On a donc : $L_s = 1,248$ millihenrys et $(\omega L_s)_{25} = 0,4960$ ohms par kilomètre (v. p. 22)

2^o Coefficient de capacité apparente et capacitance.

Usage. — On calcule $\frac{D}{d}$: rapport de la distance interaxiale des fils en centimètres et du diamètre des fils évalué également en centimètres et on lit immédiatement la capacité et la capacitance à 25 cycles, par kilomètre entre un fil de ligne et le fil neutre. (Voir p. 21).

Si le conducteur est câblé le diamètre qui intervient est le diamètre extérieur du câble. Si on donne la section du conducteur, on calculera donc le diamètre du fil plein équivalent et on le multipliera par 1,44.
Pour le calcul de l'inductance cette distinction entre le diamètre du câble et le diamètre du fil plein équivalent n'a pas d'importance.

TABLE DES MATIÈRES

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER

CAPACITANCE



	Pages
I. — Définitions	1
II. — Capacitance des lignes aériennes. Théorie et formules générales.	2
1° Théorie des images électriques	2
2° Potentiel en un point P dû à un fil chargé et à son image électrique	3
3° Problème général. Détermination des courants de capacité d'une ligne aérienne à n conducteurs	5
4° Généralisation. Equations de Maxwell. Définitions diverses de la capacité	6
III. — Capacité des lignes aériennes Formules particulières.	9
1° Capacité entre un conducteur et la terre servant de retour	9
2° Capacité des fils d'une ligne monophasée à deux conducteurs.	11
3° Capacité d'une ligne monophasée lorsque l'un des fils est mis à la terre	14
4° Capacité d'une ligne à deux fils marchant en parallèle, le retour s'effectuant par la terre	15
5° Capacité d'une ligne triphasée	16
6° Calculs pratiques. Capacité kilométrique. Représentation graphique de la capacitance	21
7° Coefficients de A. Potier	22
IV. — Gradient de potentiel	23
1° Gradient de potentiel dans les lignes monophasées et triphasées	24
V. — Capacitance des câbles armés	25
1° Réduction exacte des coefficients de Maxwell à un coefficient de capacité apparente.	25
2° Formules approchées	27
3° Détermination de la capacité apparente à l'aide de mesures de capacité entre conducteurs	28
VI. — Mesures de la capacitance sur une ligne construite	30
1° Mesures	30
2° Propriété de la capacitance.	33

CHAPITRE II

PERDITANCE

I. — Généralités	35
II. — Pertes dues aux isolateurs	36
III. — Pertes à travers l'air. Etude expérimentale	38
1 ^o Expériences de Telluride.	38
2 ^o Expériences du professeur Ryan. Influence de la valeur du gradient de potentiel	40
3 ^o Expériences nouvelles de M. Mershon, Ryan, Whitehead, Russel.	43
4 ^o Expériences de la General Electric Cy. Lois des pertes à travers l'air	44
5 ^o Résultats des expériences par beau temps	45
6 ^o Résultats des expériences par mauvais temps	47
IV. — Prédétermination du voltage critique d'une ligne donnée, et des pertes de cette ligne, par effet de couronne sous un voltage donné.	47
1 ^o Formules pratiques	48
2 ^o Applications numériques. Limite maxima actuelle de la tension des transports de force	50
V. — Application de la théorie des ions et des électrons à l'étude du phénomène des pertes à travers l'air	55
1 ^o Conductibilité des gaz à basse pression soumis à l'action d'un agent ionisant (courant continu)	56
2 ^o Conductibilité des gaz à basse pression, dans un champ uniforme, lorsqu'il n'y a pas d'agent ionisant	58
3 ^o Conductibilité de l'air à la pression atmosphérique, dans un champ non uniforme et alternatif	60
VI. — Pertes dans les câbles armés	63
1 ^o Gradient de potentiel. Rigidité diélectrique	64
2 ^o Pertes dans les lignes souterraines	66
VII. — Mesures des pertes dans une ligne construite.	66
VIII. — Admittance. Admittance dirigée	67

CHAPITRE III

CALCUL DES LIGNES DE TRANSPORT D'ÉNERGIE EN TENANT COMPTE DE LA CAPACITÉ ET DE LA PERDITANCE RÉPARTIES

I. — Études graphiques	69
1 ^o Considérations générales. Circuit fictif	69
2 ^o Valeurs exactes des vecteurs de tension et de courant données sous forme d'une série géométrique.	72
2 ^o Construction des vecteurs de tension et de courant avec une approximation connue	80
3 ^o Construction pratique des diagrammes de tension et de courant des longues lignes de transport	85

4 ^o Simplification de la construction graphique pour des lignes de moyenne longueur.	87
II. — Etudes graphiques. Exemples numériques	92
1 ^o Ligne aérienne de 1.200 kilomètres à 100.000 volts et 25 cycles	92
2 ^o Ligne souterraine de 100 kilomètres à 50 périodes.	97
3 ^o Principe du calcul dans le cas de plusieurs stations.	99
4 ^o Principe du calcul des câbles distributeurs	100
III. — Etude de l'influence des diverses circonstances d'une transmission de force	100
1 ^o Etude de l'influence des modifications de régime à l'arrivée.	101
2 ^o Etude de l'influence de la valeur du facteur de puissance à l'arrivée, la puissance transmise étant supposée constante. Diagramme général des pertes relatives de tension dans une ligne donnée.	101
3 ^o Influence de la fréquence	105
4 ^o Influence de la distance	108
5 ^o Influence des valeurs relatives des constantes de la ligne. Condition théorique pour que le facteur de puissance soit égal à l'unité tout le long d'une ligne de transport.	109
IV. — Calculs algébriques approchés.	110
1 ^o Expressions algébriques approchées donnant les valeurs des projections des vecteurs sur deux axes rectangulaires.	111
2 ^o Formules générales approchées	112
3 ^o Calcul algébrique en cas de branchements en cours de routes	114
4 ^o Formules algébriques pour le calcul des câbles distributeurs	115
V. — Valeurs algébriques exactes des vecteurs de tension et de courant.	115
1 ^o Valeurs des projections des vecteurs de tension et de courant dans les régimes à vide et en court-circuit.	116
2 ^o Longueurs et décalages des vecteurs de tension et de courant dans les régimes à vide et en court-circuit.	119
3 ^o Calculs algébriques exacts de la tension du courant et du décalage dans la ligne en charge	121
Première méthode. Exemple numérique.	123
Deuxième méthode. Formules générales.	126
VI. — Etude des très longues lignes.	131
1 ^o Régime à vide. Longueur d'onde. Coefficient d'amortissement. Coefficient de longueur d'onde	131
2 ^o Régime en court-circuit et régime de la ligne en charge.	134
VII. — Détermination sur une ligne construite ou sur un câble armé des impédances et admittances dirigées	135
VIII. — Rendement des lignes de transport	137
1 ^o Rendement maximum théorique	137
2 ^o Rendement pratique. Influence de la distribution en cours de route	138
PLANCHE n° 1. — Abaques graphiques pour le calcul de l'inductance et de la capacitance.	

