

## Conditions d'utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- [Le Conservatoire numérique](#) communément appelé [le Cnum](#) constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre ([www.eclydre.fr](http://www.eclydre.fr)).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n° 78-753 du 17 juillet 1978 :

- la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue ([Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - https://cnum.cnam.fr](https://cnum.cnam.fr))
- la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- les reproductions de documents protégés par le droit d'auteur, uniquement consultables dans l'enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

4- Pour obtenir la reproduction numérique d'un document du Cnum en haute définition, contacter [cnum\(at\)cnam.fr](mailto:cnum(at)cnam.fr)

5- L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment possible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d'utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

## NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

Auteur(s)	Bréguet, Louis (1880-1955)
Titre	Stabilité longitudinale des avions
Adresse	Paris : Librairie aéronautique Étienne Chiron, 1927
Collation	1 vol. (p. 305-387) ; 25 cm
Nombre de vues	88
Cote	CNAM-BIB 8 Ca 617
Sujet(s)	Avions -- Stabilité Avions, Stabilité longitudinale Aérodynamique
Thématique(s)	Transports
Typologie	Ouvrage
Langue	Français
Date de mise en ligne	01/10/2012
Date de génération du PDF	05/01/2026
Recherche plein texte	Non disponible
Notice complète	<a href="https://www.sudoc.fr/066162130">https://www.sudoc.fr/066162130</a>
Permalien	<a href="https://cnum.cnam.fr/redir?8CA617">https://cnum.cnam.fr/redir?8CA617</a>

STABILITÉ LONGITUDINALE

DES

AVIONS

## A LA MÊME LIBRAIRIE

---

EIFFEL. — <i>Nouvelles recherches sur la résistance de l'air et l'aviation.</i>	150	>
— <i>Résumé des principaux travaux exécutés pendant la guerre . . .</i>	60	>
— <i>Études sur l'hélice aérienne . . . . .</i>	150	>
BRUNET. — <i>Théorie élémentaire de l'avion . . . . .</i>	12	>
DEVILLERS. — <i>La dynamique de l'avion (en réimpression) . . . . .</i>	32	>
GALTIER. — <i>Aide-mémoire de l'élève pilote (en réimpression) . . . . .</i>	3	>
— <i>Le pilotage des aéroplanes. . . . .</i>	4	50
GOUSSOT. — <i>Précis de photographie aérienne. . . . .</i>	12	>
GRAMONT. — <i>Exposé élémentaire des connaissances utiles aux aviateurs</i>	3	>
HUGUET. — <i>La construction des avions. . . . .</i>	15	>
ORAIN. — <i>Construction des aéroplanes. . . . .</i>	6	>
SÉE. — <i>Les lois expérimentales de l'aviation . . . . .</i>	11	25
SOREAU. — <i>L'hélice aérienne propulsive . . . . .</i>	12	>
— <i>Théorie du vol des avions. . . . .</i>	6	>

(MAJORIZATION EN SUS : 20 %.)

---

*Revue Générale de l'Aéronautique. Trimestrielle.*

Le numéro : 25 fr.

Abonnement d'un an : 80 fr. ; Étranger: 100 fr.

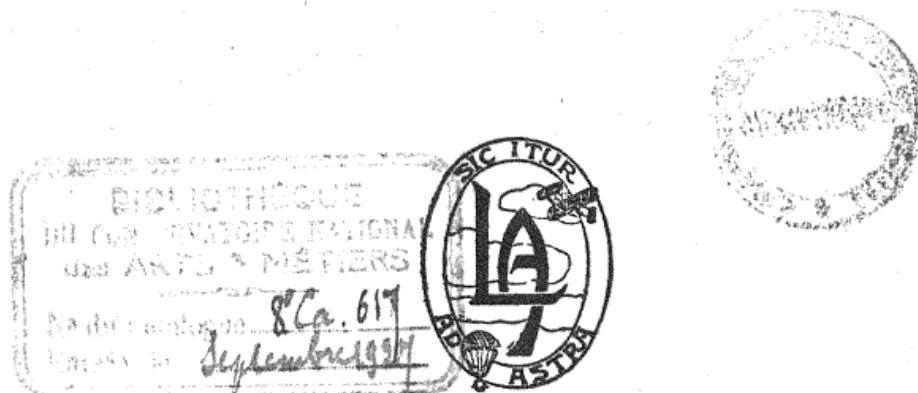
*Copyright by Chiron 1926.*

*Tous droits de traduction et de reproduction réservés.*

8<sup>e</sup> Ca. 617  
LOUIS BREGUET  
Ingénieur-Constructeur

8<sup>e</sup> Ca 617

# STABILITÉ LONGITUDINALE DES AVIONS



LIBRAIRIE AÉRONAUTIQUE  
Étienne CHIRON, éditeur  
40, rue de Seine, PARIS

*Ce rapport a été présenté au Congrès International de la Navigation Aérienne de Bruxelles, La pagination est celle du compte rendu officiel des travaux.*

# Stabilité longitudinale des avions<sup>(1)</sup>

par Louis BREGUET  
*Ingénieur-Constructeur*

**Introduction.** — C'est vers le milieu du siècle dernier qu'a commencé à s'édifier une théorie rationnelle de l'aéroplane. Les premières bases en ont été apportées presque simultanément par Penaud et le colonel Charles Renard qui les a, par la suite, développées et complétées, d'une façon lumineuse, dans son cours professé à Chalais-Meudon de 1886 à 1901.

Depuis, de nombreux techniciens, tant en France qu'à l'étranger, ont, par l'ensemble de leurs travaux, amené la théorie du vol et des surfaces portantes à un degré de perfection qui satisfait actuellement le désir de comprendre de notre esprit et les exigences pratiques de l'ingénieur.

Nous avons nous-mêmes, par une série d'études poursuivies ces dernières années, créé une théorie du vol en air agité qui vient prolonger et compléter la théorie du vol en air calme qui seule avait été envisagée jusqu'ici. Nous avons montré que les accélérations internes des masses d'air toujours superposées à leurs mouvements d'ensemble peuvent améliorer d'une façon remarquable les caractéristiques aérodynamiques apparentes des avions qui les subissent. Cependant, malgré tous ces travaux, la question primordiale de la stabilité dont l'intérêt, aussi bien théorique que pratique, n'est en rien inférieur à celui de l'étude des différents régimes de vol, a tenté peu de techniciens et n'a pu encore aboutir à l'énoncé de lois nettes et certaines. Aucune théorie sur ce sujet ne satisfait entièrement l'esprit, suffisamment précise et complète pour ne négliger aucun facteur essentiel, suffisamment simple en même temps pour que des lois et des principes puissent s'en dégager.

En nous plaçant au strict point de vue de l'ingénieur qui sait à quel point les mathématiques appliquées sans discernement peuvent compliquer jusqu'à l'inextricable, nous avons cherché si une théorie de la stabilité des avions en vol peut s'édifier, suffisamment simple pour

(1) Cette communication sur la stabilité statique longitudinale est la première partie d'un ensemble d'études qui comprendra la maniabilité d'un avion, la stabilité dynamique en vol et la stabilité en air agité.

que des lois et des conclusions puissent s'en dégager et suffisamment rigoureuse pour les besoins de la pratique.

Nous avons constaté que, dans le cas des petits mouvements toujours envisagé dans les recherches de stabilité, il était possible, sans avoir recours à aucune approximation grossière, d'obtenir des équations différentielles immédiatement intégrables et se prêtant à une discussion complète.

Nous n'avons étudié ici que la stabilité longitudinale, la méthode employée s'adaptant d'ailleurs à l'étude des deux autres stabilités. Déjà, en 1923, nous avions montré, sans approfondir la question, dans un article paru dans la *Technique Moderne* et ne s'adressant pas aux spécialistes, comment se définissait et se calculait le coefficient de stabilité statique qui est l'un des facteurs essentiels de la stabilité dynamique en vol.

D'autres après nous ont repris ce premier problème en analysant notamment les différents facteurs correctifs à apporter à notre formule dans une étude plus complète. En particulier M. Toussaint a publié récemment quelques résultats tirés de ses essais au laboratoire aérodynamique de Saint-Cyr qui constituent à cet égard une contribution des plus intéressantes.

Nous reprendrons donc tout d'abord le calcul du coefficient de stabilité statique d'une façon beaucoup plus approfondie que nous ne l'avions fait tout d'abord. Nous passerons ensuite à l'étude nouvelle de la stabilité dynamique en vol en tenant compte des ondulations verticales du centre de gravité de l'avion qui, par suite des variations d'incidence, accompagnent nécessairement les oscillations longitudinales autour du centre de gravité. La superposition de ces deux mouvements conduit à une équation de tangage du troisième ordre intégrable qui montre que la théorie classique enseignée couramment qui consiste à écrire l'équation du mouvement oscillatoire de tangage en négligeant l'ondulation verticale du centre de gravité conduit à des approximations beaucoup trop grossières et dans certains cas à des résultats erronés.

Les ondulations verticales ont pour effet, non seulement d'amortir considérablement les rotations, mais aussi de modifier profondément le coefficient du couple stabilisateur statique.

Pourtant, un ingénieur italien éminent, Crocco, dont la lucidité d'esprit s'apparente d'une façon indiscutable à la lumineuse clairvoyance que possédait à un si haut degré le colonel Charles Renard, avait, il y a environ quinze ans, analysé cette influence d'une façon aussi simple que précise pour le dirigeable.

En composant le mouvement ondulatoire et l'oscillation longitudinale, il devient fort simple de rechercher le mouvement résultant en un point quelconque de l'avion.

Une telle analyse de la stabilité dynamique consiste, l'avion subissant une impulsion instantanée, à rechercher suivant quelle loi il reviendra à sa position d'équilibre. Nous plaçant ensuite à un point de vue différent, nous avons étudié comment se comportait un avion passif dans une houle aérienne permanente et périodique.

Cette étude constitue un complément des plus logiques à nos recherches précédentes sur le vol en air agité de pulsations verticales périodiques.

Elle permet de savoir comment dans un tel milieu s'opère la variation périodique de l'incidence si aucune action n'intervient de la part du pilote ou inversement, le coefficient de stabilité statique à adopter pour obtenir dans une certaine houle telle loi des incidences fixée à priori.

En résumé, le but pratique de nos recherches sera de permettre d'analyser et de discuter l'influence du coefficient de stabilité statique sur le mouvement d'un point quelconque de l'avion, soit en air calme après une perturbation passagère, soit en air agité d'une façon permanente.

**Considérations générales.** — Nous rappellerons d'abord les deux principes fondamentaux de mécanique rationnelle qui régissent le mouvement le plus général d'un avion :

1<sup>o</sup> Le centre de gravité se meut comme un point auquel seraient concentrées la masse de l'avion et les forces en présence;

2<sup>o</sup> Le mouvement angulaire autour du centre de gravité sous l'action des forces en présence s'opère comme si ce point était fixe.

Ce dernier principe est fondamental. On n'a pas le droit, en effet, de supposer fixe un autre point que le centre de gravité, le centre de poussée, par exemple, comme certains l'ont fait, et de considérer le mouvement autour de ce point sous l'action des forces appliquées. On démontre que, pour avoir le droit d'opérer ainsi, il faudrait adjoindre, à chaque instant, aux forces en présence une force d'inertie appliquée au centre de gravité, force qu'il est impossible de connaître à priori.

Quand il existe un mouvement oscillatoire, soit amorti, soit permanent, autour du centre de gravité, le mouvement du centre de gravité et les oscillations autour de ce point sont liés d'une façon inséparable et il est impossible de ne pas les étudier simultanément dans une analyse même approchée.

La loi instantanée des incidences est, en effet, profondément modifiée du fait des ondulations verticales de la trajectoire et c'est précisément cette loi qui régit l'influence du couple stabilisateur statique tel qu'il sera défini par la suite et qui est le facteur fondamental de la stabilité longitudinale.

La combinaison des deux mouvements conduit naturellement à la discussion simultanée de deux équations différentielles, ce qui constitue toute la difficulté du problème.

La méthode simple que nous employons conduit, par éliminations entre ces deux équations, à une équation différentielle de tangage du troisième ordre, mais dont l'équation caractéristique a une racine nulle. En ne négligeant aucun facteur essentiel du problème, nous sommes donc parvenu à une équation se prêtant à la même discussion que l'équation classique du second ordre du mouvement oscillatoire amorti à laquelle elle est immédiatement réductible.

Ceci posé, il convient tout d'abord d'examiner l'acheminement logique des idées et les problèmes successifs qui se posent pour pouvoir finalement analyser avec une rigueur suffisante la stabilité dynamique en vol.

En tout premier lieu il convient de chiffrer par une formule suffisamment simple la valeur du coefficient de stabilité statique de l'avion, ainsi que nous l'avions fait dès 1923 en négligeant alors divers coefficients correctifs à introduire dans une étude plus approfondie.

Pour définir la stabilité statique, il suffit de se borner à rechercher la grandeur du couple de rappel aérodynamique d'un avion empenné provoqué par une variation d'incidence acquise statiquement, c'est-à-dire sans vitesse de rotation. Cette étude constitue l'analyse du degré de stabilité dans les variations d'incidence sans s'occuper des couples amortisseurs dus à la vitesse angulaire de la rotation. Soit  $M$  le moment résultant des forces aérodynamiques par rapport à l'axe transversal passant par le centre de gravité. Pour chaque position d'équilibre,  $M$  est nul. Si, au voisinage de cette position, l'incidence varie de  $di$ , il se produit, sur un avion convenablement empenné, un couple aérodynamique de rappel qui doit, pour que l'équilibre statique soit assuré, être opposé à  $di$  et ramener ainsi l'avion à sa position initiale d'équilibre.

La stabilité statique sera d'autant plus énergique que la variation  $dM$  de  $M$  correspondant au changement  $di$  d'incidence sera plus prononcée, c'est-à-dire que  $\frac{dM}{di}$  sera plus grand en valeur absolue.

Il suffira donc, pour chaque braquage de l'équilibrEUR, de connaître

les variations de  $M$  en fonction de l'incidence et de calculer la valeur  $\frac{dM}{di}$  de sa dérivée pour  $M = 0$ . La condition de stabilité statique est que cette dérivée soit négative et sa valeur absolue donne la mesure de la stabilité. En divisant cette dérivée par certaines quantités convenablement choisies, on pourra obtenir un coefficient sans dimension qui sera le coefficient de stabilité statique permettant la comparaison de divers avions.

La connaissance précise de ce coefficient a d'autant plus d'importance, qu'il est, comme nous le montrerons, directement lié à la maniabilité longitudinale de l'appareil définie comme sensibilité au changement d'incidence par la manœuvre de l'équilibreur.

Pour passer maintenant à l'étude des oscillations de tangage, il convient d'écrire séparément l'équation différentielle du mouvement vertical du centre de gravité et celle qui régit les rotations autour de l'axe de tangage.

Les ondulations verticales de la trajectoire qui accompagnent les oscillations longitudinales viennent modifier la loi des incidences, de sorte que l'effet du couple stabilisateur statique n'est pas proportionnel à la rotation autour du centre de gravité ainsi que le supposent les auteurs qui considèrent ces ondulations comme négligeables. Elles ont en réalité sur l'amplitude et l'amortissement des mouvements de tangage un effet favorable qu'on ne pourrait, sans erreur grossière, dans aucun cas négliger.

Enfin, la rotation autour du centre de gravité superpose au couple stabilisateur statique proportionnel à la variation d'incidence un couple amortisseur proportionnel à chaque instant à la vitesse angulaire de la rotation et qui amortit le mouvement comme le ferait un frottement proportionnel à la vitesse.

Pour pouvoir traiter simplement le problème, nous nous sommes bornés, comme on le fait dans toute question de stabilité, au cas des petits mouvements, et nous avons, en conséquence, supposé que la grandeur de la vitesse aérodynamique n'était pas affectée par le tangage.

Il conviendrait, en effet, de traiter le problème de tout autre façon si l'on envisageait des mouvements de grande amplitude tels que les variations de la vitesse aérodynamique ne soient plus négligeables; nous n'avons pas voulu aborder ce cas sans intérêt pratique.

Avec cette hypothèse des petits mouvements, la combinaison des deux équations du mouvement du centre de gravité et du mouvement autour de ce point permet, par éliminations judicieuses, d'obtenir en

fin de compte une équation unique du tangage qui se ramène immédiatement à une équation linéaire complète du second ordre.

La discussion de cette équation permet de séparer nettement l'effet du coefficient de stabilité statique de celui de l'amortissement et de déterminer dans chaque cas leurs influences respectives.

Il est, en effet, généralement insuffisant d'envisager le rôle d'un empennage au seul point de vue de la stabilité statique qu'il procure. La grandeur de son couple amortisseur a, sur le confort des passagers d'un avion de transport, par exemple, une importance qu'on ne saurait négliger et il y a intérêt à savoir dans quels cas il est avantageux de se contenter d'une faible stabilité statique en augmentant l'amortissement.

Le but de notre étude est d'apporter les éléments de cette discussion.

### I. — La stabilité statique.

La détermination rigoureuse du coefficient de stabilité statique n'est qu'un calcul de moments qui doit être basé en partie sur nos connaissances générales d'aérodynamique, en partie sur des données de laboratoire que nous ne possédons pas toutes actuellement.

Il est cependant possible d'indiquer nettement comment doit s'opérer un calcul suffisamment rigoureux pour les besoins de l'ingénieur et les phases successives de ce calcul montreront quels sont, dans l'état actuel de nos connaissances, les éléments insuffisamment connus sur lesquels devra se porter toute l'attention des laboratoires.

Tout élément d'un avion, au point de vue aérodynamique, est complètement caractérisé par la connaissance de la grandeur des efforts aérodynamiques qu'il subit et du moment de ces efforts par rapport à un point quelconque.

On connaît, par exemple, le moment  $M_A$ , par rapport au point A des efforts aérodynamiques de résultante R. Pour obtenir le moment par rapport à un autre point A', il suffit de supposer R appliqué en A et d'ajouter à  $M_A$  le moment de cette force par rapport à A'.

Nous utiliserons constamment, par la suite, cette correspondance des moments.

Nous étudierons séparément la réduction des forces aérodynamiques des différents éléments d'un avion ; aile seule, système d'ailes, fuselage, résistances passives, empennages, pour passer ensuite à leur superposition qui doit permettre le calcul du couple central des forces aérodynamiques, ainsi qu'à l'évaluation de sa dérivée par rapport à l'incidence qui constitue, comme nous l'avons dit, le critère de la stabilité statique.

**1<sup>o</sup> Aile monoplane isolée.** — La droite de référence pour les incidences et les moments est la corde du profil médian commune à ce profil et au plus grand cercle qui lui est bitangent. Cette corde coupe l'avant du profil en un point A qui est, par définition, son bord d'attaque et c'est par rapport à ce point que les laboratoires donnent actuellement le moment des forces aérodynamiques agissant sur l'aile.

La grandeur de la résultante aérodynamique est déterminée par ses projections  $F_x$  et  $F_z$  dites « traînée » et « poussée » sur la direction de la vitesse aérodynamique et la direction perpendiculaire dans le plan de symétrie de l'aile. Ces deux composantes sont toujours définies par les coefficients sans dimension bien connus  $c_x$  et  $c_z$  déterminés en fonction de l'incidence et tels que, pour une aile de surface S, une vitesse aérodynamique V, un air de poids spécifique  $\alpha$  :

$$F_x = \frac{\alpha V^2}{2 g} S c_x, \quad (1)$$

$$F_z = \frac{\alpha V^2}{2 g} S c_z. \quad (2)$$

La quantité  $q = \frac{\alpha V^2}{2 g}$ , maintenant officiellement admise dans nos notations, a les dimensions d'une pression, c'est pourquoi on l'appelle généralement la pression vive de l'air. Il est possible, entre certaines limites d'utilisation, d'obtenir pour  $c_x$  et  $c_z$  des lois analytiques simples et générales susceptibles d'être utilisées avec une précision suffisante dans des calculs tels que ceux qui sont effectués ici.

Un élément caractéristique essentiel de l'aile intervenant dans l'expression de ces lois est son *allongement*  $\lambda = \frac{L^2}{S}$  défini comme le rapport du carré de son envergure à sa surface.

D'après la théorie de Prandtl, la traînée  $c_x$  est la somme de deux traînées distinctes, l'une  $c_{x0}$ , indépendante de l'incidence, est la traînée de profil, l'autre  $c_{xi}$  est la traînée induite qui croît comme le carré de la portance et en raison inverse de l'allongement de l'aile, ce qui permet d'écrire :

$$c_x = c_{x0} + c_{xi} = c_{x0} + \frac{c_z^2}{\pi \lambda}. \quad (3)$$

Cette formule n'est applicable qu'à condition de ne pas trop s'approcher de l'incidence de portance maximum pour laquelle la polaire de l'aile cesse d'être parallèle à la parabole induite

$$c_{xi} = \frac{c_z^2}{\pi \lambda}.$$

C'est ce que nous supposerons essentiellement par la suite.

Le coefficient  $c_{x0}$ , peu variable pour les bonnes ailes, dépend du nombre de Reynolds et peut être estimé avec une approximation suffisante sans qu'il soit nécessaire de chercher à l'expliciter, quoiqu'on puisse le faire assez facilement.

Le coefficient de portance  $c_z$ , dans le champ des variations d'incidence que nous considérons ici, peut se représenter, avec une rigueur toujours acceptable, par une fonction linéaire de l'incidence aérodynamique :

$$c_z = A + Bi. \quad (4)$$

Nous supposerons toujours, par la suite, que tous les angles et particulièrement l'incidence sont exprimés en radians, la valeur d'un angle en degrés étant égale à sa valeur en radians multipliés par 57,3.

Ainsi que nous l'avons déjà indiqué dans nos recherches antérieures sur le vol à voile dynamique des oiseaux, le coefficient B est indépendant du profil et ne dépend que de l'allongement en fonction duquel il varie, conformément à la théorie de Prandtl, suivant un arc d'hyperbole d'équation :

$$B = \frac{Bo}{1 + \frac{Bo}{\pi\lambda}}. \quad (5)$$

D'après les essais de Prandtl et ceux plus récents de M. Toussaint, il convient d'adopter pour Bo la valeur 5,3 ce qui donne :

$\lambda =$	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
B =	2,87	3,16	3,39	3,57	3,72	3,85	3,97	4,06	4,13	4,21	4,26

L'ordonnée à l'origine A de la droite des  $c_z$  est fournie par les essais de l'aile au laboratoire. Ces essais montrent que le coefficient A, lorsque l'allongement varie, reste proportionnel à B, toutes les droites du faisceau des  $c_z$  en fonction de l'incidence concourant en un même point  $i = -i_0$  de l'axe des incidences. La loi linéaire de variation de  $c_z$  en fonction de l'incidence pourra donc s'écrire sous la forme qui sera utilisée par la suite :

$$c_z = B(i + i_0). \quad (6)$$

Dans cette formule,  $i_0$  est une constante caractéristique ne dépendant que du profil et non de l'allongement. D'après les essais systématiques de M. Toussaint sur des séries d'ailes à profils de courbures différentes,  $i_0$  serait proportionnel à la flèche relative maximum  $\frac{f}{l}$  de la

ligne moyenne du profil,  $f$  étant la flèche et  $l$  la corde de cette ligne moyenne.

M. Toussaint a déduit de ses essais pour  $i_0$  la valeur :

$$i_0 = 1,5 \frac{f}{l}. \quad (7)$$

Cette formule, de par la façon même dont elle a été établie, n'est, en principe, valable que pour les profils dérivés par incurvation d'un profil initial biconvexe symétrique.

Il en résulte cependant que  $i_0$  est nul pour tout profil symétrique et, pour tout autre profil, d'autant plus grand que le profil est plus incurvé.

Ayant ainsi défini les lois générales régissant, dans les limites qui nous intéressent, les variations de  $c_x$  et de  $c_z$  pour une aile monoplane, il convient de remarquer dès maintenant que, dans tous les calculs de stabilité, ces deux coefficients ne sont pas les plus commodes à considérer.

La position du centre de gravité de l'avion par rapport à l'aile se définit, en effet, par ses deux coordonnées par rapport au bord d'attaque, l'une parallèle à la corde du profil et l'autre perpendiculaire. Il en résulte qu'il est particulièrement avantageux de rapporter aux mêmes axes de référence les éléments de la résultante aérodynamique.

Nous substituerons donc aux composantes unitaires  $c_x$  et  $c_z$  suivant la vitesse aérodynamique et sa normale les composantes unitaires  $c_t$  et  $c_n$  suivant la corde du profil et suivant sa normale.  $c_t$  sera considéré comme positif dans le sens de la traînée  $c_x$  et  $c_n$  dans le même sens que la portance  $c_z$ .

Les formules de transformation permettant de passer des premiers coefficients aux seconds sont d'ailleurs immédiates.

Le degré d'approximation de cette étude, suffisant d'ailleurs à tout calcul d'aérodynamique appliquée, permet de supposer que le sinus de l'incidence  $i$  est assimilable à l'angle et son cosinus à l'unité.

Avec la même précision, nous négligerons aussi  $ic_x$  devant  $c_z$ .

Ces approximations sont en tous points légitimes et ne fausseront pas la validité des équations différentielles écrites en les admettant, car nous supposerons que notre analyse de la stabilité n'est appliquée ni au voisinage de la portance maximum pour lequel l'incidence est grande, ni au voisinage immédiat de la portance nulle pour lequel  $c_z$  pourrait être du même ordre de grandeur que la quantité  $ic_x$ .

L'étude spéciale de la stabilité autour de ces deux régimes est d'ailleurs facile, mais exige un mode de calcul différent de celui que nous appliquons au cas général qui seul nous intéresse ici.

La simple application de théorème des projections montre que les valeurs rigoureuses des composantes unitaires  $c_t$  et  $c_n$  suivant la corde et sa normale sont respectivement :

$$c_x \cos i - c_z \sin i \text{ et } c_z \cos i + c_x \sin i.$$

Avec les approximations que nous venons d'indiquer, nous adopterons donc les expressions simples, suffisantes pour les besoins de la pratique :

$$c_t = c_x - i c_z, \quad (8)$$

$$c_n = c_z. \quad (9)$$

Remplaçons alors  $c_x$ , par sa valeur (3) en fonction de la traînée induite et  $i$  par sa valeur en fonction de  $c_z$  qui sont respectivement :

$$c_x = c_{x0} + \frac{c_z^2}{\pi \lambda}, \quad i = \frac{c_z}{B} - i_0,$$

il vient :

$$c_t = c_{x0} + i_0 c_z - \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{\pi \lambda} \right) c_z^2. \quad (10)$$

Mais le coefficient angulaire  $B$  de la droite des portances varie, comme nous l'avons dit, en fonction de l'allongement  $\lambda$  suivant un arc d'hyperbole dont l'équation (5) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{B} - \frac{1}{\pi \lambda} = \frac{1}{B_0}.$$

Finalement, en se rappelant que nous avons assimilé  $c_n$  à  $c_z$ , l'équation de la polaire caractéristique rapportée à la corde et à sa normale peut se mettre sous la forme remarquable :

$$c_t = c_{x0} + i_0 c_z - \frac{c_z^2}{B_0}. \quad (11)$$

Il est bien entendu que cette représentation n'est valable que tant que la traînée varie comme la résistance induite, c'est-à-dire tant qu'on n'est pas au voisinage de la portance maximum. Nous supposerons admise une fois pour toutes cette condition restrictive.

Il apparaît tout d'abord, et cette particularité est digne de remarque, que l'équation de la polaire ainsi rapportée à la corde et à sa normale ne contient plus que trois coefficients  $B_0$ ,  $c_{x0}$  et  $i_0$  qui sont essentiellement des coefficients de profil indépendants, par conséquent, de l'allongement de l'aile.

Plus généralement encore, cette conclusion s'applique aussi à une

cellule biplane qui est équivalente à une aile monoplane de même surface, mais d'allongement réduit donné par le calcul.

Dans l'un ou l'autre cas, seule la correspondance entre l'incidence et la portance variera en fonction de l'allongement réel d'une aile monoplane ou de l'allongement réduit correspondant à une cellule biplane. La polaire rapportée à la corde et à sa normale, dans les limites qui ont été précisées et qui seules nous intéressent ici, sera la même dans les deux cas.

L'équation (11) de cette polaire peut se discuter facilement en fonction des caractéristiques du profil et particulièrement de  $i_0$ .

Ainsi que nous l'avons admis, le coefficient  $B_0$  peut être considéré comme une constante égale à 5,3 pour tout profil. Le second coefficient  $c_{x0}$ , constitué surtout par du frottement, dépend cependant un peu de la forme du profil et ne peut, avec la même rigueur que pour  $B_0$ , être considéré comme une constante pour tout profil.

La partie de  $c_{x0}$  qui correspond uniquement au frottement a été évaluée par plusieurs auteurs en fonction du nombre de Reynolds. La plupart de ces formules admettent la proportionnalité du coefficient de frottement dans l'air à  $(Vl)^{-0,15}$ ,  $V$  étant la vitesse et  $l$  la profondeur de l'aile. En prenant le coefficient donné par M. Toussaint, on peut admettre que la partie de  $c_{x0}$  qui n'est que du frottement est  $0,01224(Vl)^{-0,15}$ , ce qui donne  $0,00612$  pour  $Vl = 100 \text{ m}^2 \text{ sec}$ .

A ce terme, il convient d'ajouter, pour obtenir le  $c_{x0}$  total, une résistance de profil fonction de l'épaisseur relative  $\frac{e}{l}$  et de la flèche relative  $\frac{f}{l}$  de la ligne moyenne du profil.

L'influence de l'épaisseur et de la flèche sont tout à fait du même ordre et, pour fixer les idées, on peut approximativement admettre que toute augmentation de 1 % de l'épaisseur ou de la flèche relatives accroît  $c_{x0}$  de la quantité 0,0005. Cette appréciation rapide de l'ordre de grandeur de  $c_{x0}$  n'est cependant valable que si la flèche de la ligne moyenne n'excède pas 6 à 7 %, des courbures plus prononcées provoquant généralement de brusques augmentations de  $c_{x0}$ .

Pour une aile moyennement épaisse et incurvée telle que  $\frac{e}{l} = 8 \%$  et  $\frac{f}{l} = 3 \%$ , on trouve qu'au total  $c_{x0} = 0,0116$ , ce qui correspond sensiblement à l'aile du Bréguet XIX.

Pour une bonne aile épaisse, telle que la somme de l'épaisseur et de la flèche relatives soit 20 %, on peut escompter un  $c_{x0}$  de l'ordre de 0,016.

Ces considérations montrent en définitive que, pour toutes les ailes qui ne sont pas trop dissemblables,  $c_{x_0}$  varie assez peu.

Il ne diminue nettement que pour le profil symétrique très mince ; il ne subsiste plus alors que l'influence du frottement.

Enfin, le troisième et dernier coefficient de profil  $i_0$  est celui dont l'importance est la plus grande en ce qui concerne la forme de la polaire représentée par l'équation (11). Comme nous l'avons dit,  $i_0$  semble dépendre de la courbure de la ligne moyenne du profil et prend la valeur zéro pour tout profil biconvexe symétrique.

Nous allons montrer par quelques formules simples, tirées de l'équation (11), comment la forme de la polaire dépend essentiellement de ce coefficient caractéristique  $i_0$ . Pour les faibles valeurs de  $c_z$ ,  $c_t$  est d'abord positif, c'est-à-dire dirigé dans le sens des résistances. Dans le cas particulier du profil symétrique pour lequel  $i_0$  est nul,  $c_t$  décroît dès que  $c_z$  augmente à partir de zéro. Dans le cas général où  $i_0$  n'est pas nul,  $c_t$  commence d'abord par croître avec  $c_z$  pour passer par un maximum :

$$(c_t)_M = c_{x_0} + \frac{i_0^2 B_0}{4}, \quad (12)$$

atteint pour

$$c_z = c_{z_2} = \frac{i_0 B_0}{2}. \quad (13)$$

La portance continuant à croître,  $c_t$  décroît et s'annule lorsque :

$$c_z = c_{z_2} = \frac{i_0 B_0}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4 c_{x_0}}{i_0^2 B_0}} \right). \quad (14)$$

Nous effectuerons les calculs en adoptant pour  $c_{x_0}$  une valeur moyenne 0,012. En remplaçant  $B_0$  par 5,3, on obtient aisément les chiffres du tableau ci-après :

$i_0 =$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12
$c_{z_2} =$	0	0,053	0,106	0,159	0,212	0,265	0,318
$(c_t)_M =$	0,012	0,0125	0,0141	0,0168	0,0205	0,0253	0,0311
$c_{z_2} =$	0,252	0,310	0,380	0,457	0,543	0,630	0,724

$c_t$  étant positif, c'est-à-dire dirigé vers les résistances quand  $c_z$  varie de 0 à  $c_{z_2}$ , il apparaît que, pour les profils peu incurvés,  $c_t$  s'annule rapidement pour devenir négatif. Au contraire, pour les profils très incurvés,  $c_t$  reste positif pour toutes les valeurs d'utilisation courante de  $c_z$  et son maximum atteint des valeurs importantes qui ne sont pas négligeables dans l'équation des moments (fig. 1).

En ce qui concerne les valeurs négatives de  $c_t$ , il est bien évident que ce sont les profils peu incurvés qui fournissent, pour une même valeur de  $c_s$ , les valeurs de  $c_t$  les plus élevées en valeur absolue. Si, pour les profils symétriques ou très légèrement incurvés, nous limi-

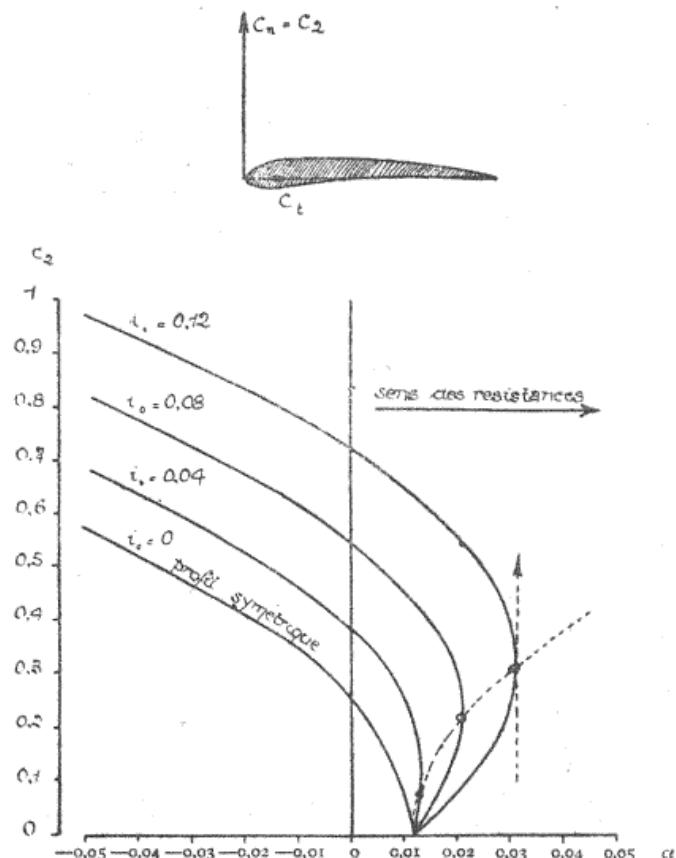


Fig. 1.

tons à  $c_s = 0,8$  le champ d'utilisation de la formule (11),  $c_t$  atteindra alors la valeur  $-0,11$ . Pour la même portance, un profil tel que  $i_0 = 0,10$  donnerait seulement  $c_t = -0,03$  et  $c_t = -0,077$  à la portance  $c_s = 1$  qui est encore dans les limites de la formule pour de tels profils.

Ayant ainsi analysé le mode de représentation de la résultante aérodynamique que nous avons jugé le plus pratique dans cette étude, nous passerons maintenant à la détermination du moment par rapport à un point des forces aérodynamiques subies par une aile. On a longtemps évalué ce moment en définissant la position de la résultante aérodynamique par sa trace sur la corde de l'aile appelée *centre de poussée*.

Le laboratoire fournissait alors une courbe expérimentale donnant, en fonction de l'incidence, les déplacements du centre de poussée. Cette courbe est, pour le calcul, d'un maniement peu commode et son usage est complètement abandonné actuellement. Il est maintenant universellement admis de situer, comme l'a fait le premier le laboratoire de Göttingen, la résultante aérodynamique agissant sur une aile par son moment  $M_A$  par rapport au bord d'attaque.

La théorie et l'expérience montrent que, pour un profil d'aile donné, le moment  $M_A$  est proportionnel à la surface  $S$  de l'aile et à sa profondeur  $l$  sans dépendre de son allongement.

On définit donc  $M_A$  par un coefficient  $c_m$  sans dimension tel que, par définition :

$$M_A = \frac{\alpha}{2g} c_m S V^2 l. \quad (15)$$

Les laboratoires donnent les variations de  $c_m$  en fonction du coefficient de portance  $c_x$ .

Il est remarquable de constater que, pour toutes les bonnes ailes ne présentant pas de décollement des filets d'air aux incidences d'utilisation,  $c_m$  est une fonction linéaire du coefficient  $c_x$ .

Cette loi, conforme à la théorie et constamment vérifiée par l'expérience, s'étend jusqu'au maximum de  $c_x$ . Cependant, pour certaines ailes et notamment celles dont la courbure de la ligne moyenne est trop prononcée, des décollements aux faibles incidences provoquent une augmentation brusque de  $c_x$  et une diminution de  $c_m$  qui possède alors une valeur à l'origine  $c_{m0}$  plus petite que celle des bonnes ailes. De telles ailes étant généralement à rejeter, nous ne nous occuperons pas ici de cette particularité et nous admettrons la loi linéaire :

$$\left. \begin{array}{l} c_m = c_{m0} + m c_x \\ \end{array} \right\} c_m = c_{m0} + m c_x. \quad (16)$$

Dans sa théorie si remarquable des surfaces sustentatrices, Joukowski déterminait le moment des efforts aérodynamiques par rapport au bord de fuite et il obtenait une formule, d'ailleurs assez complexe, qui peut, par changement d'origine et quelques transformations, se ramener à la forme (16).

La théorie de Joukowski montre, ainsi que l'expérience le justifie, que, pour toutes les ailes ne présentant pas de flèche vers l'arrière,  $c_{m0}$  et  $m$  sont des coefficients de profil ne dépendant par conséquent ni de l'allongement, ni de la forme en plan, ni du gauchissement de l'aile.

Nous étudierons spécialement, par la suite, l'influence de la flèche et nous nous bornerons, pour l'instant, au cas des ailes à bord d'attaque droit pour lesquelles  $m$  est une constante et  $c_{m0}$  un coefficient de profil.

On constate, en effet, en ce qui concerne  $m$ , que les droites représentant  $c_m$  en fonction de  $c_z$  sont toutes parallèles, leur coefficient angulaire  $m$  étant 0,25, le même, par conséquent, pour tous les profils.

Par contre, le coefficient  $c_{m0}$  qui est la valeur que prend  $c_m$  pour la portance nulle, dépend de la courbure de la ligne moyenne du profil et il est toujours nul pour tout profil biconvexe symétrique.

Dans certaines limites, et uniquement pour des profils de même famille dont la ligne moyenne ne soit pas à double courbure, on peut admettre la proportionnalité de  $c_{m0}$  à la flèche relative maximum  $\frac{f}{l}$  de la ligne moyenne de corde  $l$ , de sorte que :

$$c_{m0} = k \frac{f}{l}. \quad (17)$$

On peut déduire des formules données par Joukowski que pour les profils tracés suivant sa méthode, tels, par exemple, que le profil 430 de Göttingen,  $k$  serait théoriquement égal à 3,14. Pour passer aux valeurs expérimentales, il convient de réduire d'environ 15 % ce chiffre théorique, de sorte que, pour les ailes du genre de la 430,  $k$  est pratiquement égal à 2,7.

C'est ainsi que, pour l'aile 430,  $\frac{f}{l} = 0,05$  et  $c_{m0} = 2,7 \times 0,05 = 0,135$ .

D'un autre côté, M. Toussaint, à la suite d'expériences sur des ailes dérivées d'un profil biconvexe symétrique par incurvation régulière de la partie arrière, donne, pour de telles ailes, au coefficient  $k$  la valeur 1,88.

A défaut de détermination plus précise, on pourra adopter l'un de ces deux coefficients  $k$  ou un coefficient intermédiaire, suivant le genre du profil choisi.

Lorsque la flèche relative  $\frac{f}{l}$  devient importante et dépasse environ 7 %, on constate généralement, comme nous l'avons dit précédemment, que, pour les faibles valeurs de  $c_z$ ,  $c_m$  diminue brusquement, de sorte que la loi linéaire n'est plus respectée et la valeur de  $c_{m0}$  mesurée au laboratoire est beaucoup plus faible que celle que donnerait le calcul. Ce résultat se manifeste, par exemple, avec netteté sur l'aile 431 de Göttingen de flèche relative 7,5 %. Pour cette aile, la loi linéaire est parfaitement respectée jusqu'à  $c_z = 0,2$ . Lorsque  $c_z$  descend en dessous de 0,2,  $c_m$  diminue brusquement jusqu'à  $c_{m0} = 0,14$ , tandis que la valeur théorique serait  $c_{m0} = 0,2$  avec  $k = 2,7$ , valeur que l'on obtient d'ailleurs en prolongeant jusqu'à l'axe des  $c_m$  la partie linéaire de la droite des moments.

Ces considérations sur l'influence de la flèche relative maximum ne s'appliquent plus aux profils dont la ligne moyenne est à double courbure, le changement de courbure étant produit par le relèvement du bord de fuite de l'aile.

Avec de tels profils à double courbure, il est possible de diminuer et d'annuler  $c_{m_0}$ , le profil se comportant dans ce dernier cas, au point de vue des moments, comme un profil symétrique, dont le centre de poussée est immobile, ainsi que nous le verrons.

Des profils de cette nature ont été théoriquement étudiés par le professeur von Misses à l'aide de tracés analogues à ceux de Joukowski. Ils n'ont pas encore été étudiés systématiquement au laboratoire et on peut craindre que la diminution de  $c_{m_0}$  n'entraîne un abaissement de la portance maximum. En effet, pour la plupart des profils essayés, les ailes ayant la portance maximum la plus élevée sont ceux qui donnent à  $c_{m_0}$  les plus grandes valeurs.

Nous n'insisterons pas davantage sur la discussion des variations de  $c_{m_0}$  suivant les profils, les catalogues d'ailes dressés par les laboratoires en fournissant la valeur d'une façon très précise.

Nous montrerons maintenant comment la notion de centre de poussée se rattache fort simplement à la connaissance de  $c_m$ .

Soit, en effet,  $s$  la distance au bord d'attaque de la trace sur la corde de l'aile de l'effort aérodynamique qu'elle subit,  $s$  étant, par définition, tel que le moment de cet effort par rapport au bord d'attaque A soit égal au moment  $M_A$  défini par la connaissance de  $c_m$ .

La résultante aérodynamique unitaire étant, au centre de poussée, décomposée en ses deux éléments  $c_t$  et  $c_n$  suivant la corde, de longueur  $l$ , et sa normale, il vient, en assimilant, comme nous l'avons fait précédemment,  $c_n$  à  $c_z$  :

$$M_A = \frac{a}{2g} c_z S V^2 s = \frac{a}{2g} c_m S V^2 l,$$

d'où :

$$\frac{s}{l} = \frac{c_m}{c_z} = \frac{c_{m_0} + mc_z}{c_z} = m + \frac{c_{m_0}}{c_z} \quad (18)$$

Cette équation représente la courbe des variations de  $\frac{s}{l}$  en fonction de  $c_z$ . C'est une hyperbole équilatère dont les axes sont la corde de l'aile et la normale à cette corde passant par le point  $\frac{s}{l} = m$ . Comme  $m = 0,25$  pour tous les profils, le centre de l'hyperbole est toujours situé au quart de la profondeur de l'aile à partir du bord d'attaque. Il apparaît immédiatement qu'une variation déterminée de  $c_z$  entraîne

un déplacement du centre de poussée d'autant plus réduit que  $c_{m0}$  est plus petit, ce qui fait que c'est uniquement la grandeur du coefficient  $c_{m0}$  qui régit l'amplitude des déplacements du centre de poussée.

En particulier, pour tout profil symétrique ou à double courbure pour lequel  $c_{m0}$  est nul, le centre de poussée reste immobile *au quart de la profondeur à partir du bord d'attaque*.

Cette particularité remarquable des profils symétriques d'avoir un centre de poussée immobile au quart de la profondeur à partir du bord d'attaque a été, dès 1910, signalée par le professeur Kutta, puis établie théoriquement par Joukowski.

Lorsque  $c_{m0}$  n'est pas nul, le centre de poussée s'éloigne progressivement jusqu'à l'infini vers le bord de fuite quand  $c_z$ , étant positif, décroît jusqu'à la valeur zéro.

Pour les très faibles valeurs de  $c_z$ , ce mode de représentation ne permet donc pas d'obtenir avec quelque précision la valeur du couple de torsion de l'aile dont l'importance a échappé très longtemps. Supposons en effet une aile au régime de portance nulle, le couple unitaire de torsion de l'aile par rapport à son bord d'attaque étant, par suite,  $c_{m0}$ . La composante  $c_t$  se réduit alors à la résistance de profil  $c_{x0}$  et tout se passe comme si cette résistance était à une distance  $r$  en dessous de la corde telle que :

$$r c_{x0} = l c_{m0}, \frac{r}{l} = \frac{c_{m0}}{c_{x0}}. \quad (19)$$

Si  $c_{m0}=0,10$ ,  $c_{x0}=0,01$  on voit que  $r$  est égal à dix fois la profondeur de l'aile. En piqué vertical à sustentation nulle, la traînée totale de l'aile d'un avion peut être environ la moitié du poids total  $P$  de l'appareil, ce qui fait que le couple de torsion  $M_A$  de l'aile serait, dans ces conditions :

$$M_A = \frac{\alpha}{2g} c_{x0} S V^2 r = 0,5 P r = 5 P l. \quad (20)$$

Le couple de torsion autour du bord d'attaque sera ainsi équivalent à celui que provoquerait une poussée égale à cinq fois le poids total de l'avion et appliquée au bord de fuite de l'aile normalement à la corde. Ce simple exemple montre à quel point il est erroné de supposer, comme on l'a fait trop souvent en ne considérant que la courbe des centres de poussée, qu'au voisinage des portances nulles, une aile ne subit plus aucun couple aérodynamique.

Nous terminerons cette discussion relative aux coefficients  $c_{m0}$  et  $m$  en recherchant la modification à apporter à la formule donnant  $c_m$  en fonction de  $c_z$  lorsque l'aile, dans sa forme en plan, présente une cer-

taine flèche. Comme nous le montrerons, l'influence de cette flèche ne peut, dans aucun cas, être négligée, même lorsqu'elle est peu prononcée.

Nous introduirons dans notre calcul, en même temps que la flèche, une variation de l'incidence des profils du milieu aux extrémités de l'aile, ce qui nous permettra de démontrer facilement que le gauchissement de l'aile n'a d'influence sur la stabilité et les déplacements du centre de poussée que s'il est accompagné d'une forme en flèche.

Ce point mérite d'être fixé avec précision, car il est courant d'admettre qu'une simple diminution de l'incidence du milieu aux extrémités de l'aile a sur la stabilité longitudinale une influence favorable.

**Influence de la flèche et du gauchissement combinés.** — Une aile présente de la flèche lorsque, dans la forme en plan, le bord d'attaque n'est pas droit et normal au plan de symétrie de l'aile, mais dessine la forme d'un angle dont le sommet est généralement dirigé vers l'avant. L'aile est alors en flèche vers l'arrière.

Une légère flèche vers l'arrière est quelquefois utilisée pour permettre, en reculant le centre de gravité, de faciliter le centrage.

Nous étudierons l'influence sur la courbe des moments d'un tel dispositif en supposant que l'aile présente en même temps de la flèche vers l'arrière et un certain gauchissement caractérisé par une diminution de l'incidence du milieu aux extrémités de l'aile. Nous admettrons que ce gauchissement est obtenu par rotation des profils autour de leur bord d'attaque, sans d'ailleurs que cette hypothèse soit indispensable à la validité de nos conclusions.

Pour effectuer un calcul simple, nous supposerons que, sans gauchissement, la poussée est uniformément répartie le long de l'envergure. Il serait certes plus rigoureux d'admettre la répartition elliptique, mais le calcul se complique alors sans que la précision des résultats y gagne sensiblement. L'aile sera définie par son envergure projetée  $2L$ , sa profondeur  $l$  suivant la marche et son angle de flèche  $\beta$  (fig. 2).

En supposant  $l$  constant, l'allongement à considérer sera  $\frac{2L}{l}$ , la surface alaire étant, comme on le voit facilement,  $S = 2Ll$ , quel que soit  $\beta$ .

La décroissance de l'incidence du milieu à l'extrémité des ailes sera supposée linéaire en fonction de la distance  $xL$  au plan de symétrie, comptée suivant l'envergure projetée.

La poussée étant, sans gauchissement, supposée uniformément répartie et égale à  $c_{z0}$ , variera le long de l'aile gauchie suivant une loi linéaire :

$$(c_z)_x = c_{z0} - ex. \quad (21)$$

Le coefficient  $e$  de cette formule est d'ailleurs égal à  $B\Delta i$ ,  $B$  étant le coefficient angulaire des droites de portance  $c_z$  et  $\Delta i$  la diminution

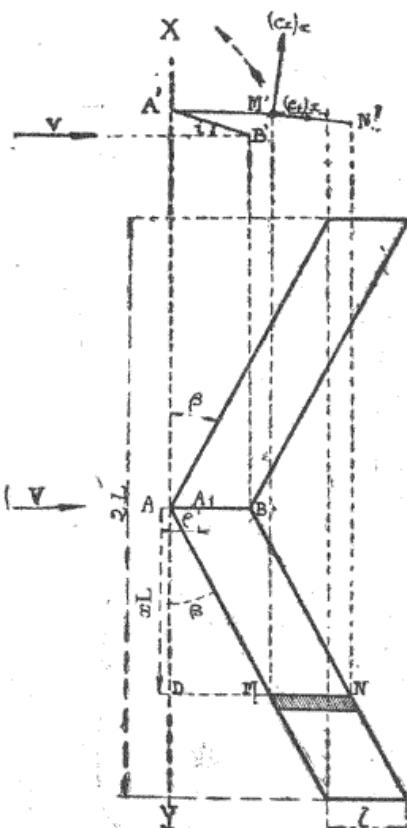


Fig. 2.

totale de l'incidence en radians. Le moment résultant des efforts aérodynamiques agissant sur l'aile sera pris par rapport au bord d'attaque XY qu'aurait l'aile sans flèche. Pour calculer ce moment  $M_A$ , nous considérerons en MN suivant la profondeur un élément d'aile de surface  $dS = lL dx$ . La réduction des efforts aérodynamiques de cet élément par rapport à son bord d'attaque M donnera un couple de coefficient unitaire  $c_m = c_{m0} + m(c_z)_x$  et une résultante appliquée en M de composantes unitaires  $(c_l)_x$  et  $(c_z)_x$  suivant la corde et sa normale.

La composante  $(c_l)_x$  a un moment négligeable par rapport à l'axe XY des moments, tandis que le bras de levier de la composante  $(c_z)_x$  est très sensiblement égal à  $M D = x L \operatorname{tg} \beta$ .

En se rappelant que  $c_{m0}$  et  $m$  sont les constantes de profil dont nous avons discuté la valeur pour l'aile à bord d'attaque droit, le moment élémentaire sera :

$$dM_A = \frac{\alpha V^2}{2g} l dS \left[ c_{m0} + m(c_z)_x + \frac{L}{l} x \operatorname{tg} \beta (c_z)_x \right], \quad (22)$$

ou, en remplaçant  $dS$  par  $l L dx$  et  $(c_z)_x$  par sa valeur (21) en fonction de  $x$  :

$$dM_A = \frac{\alpha V^2}{2g} l^2 L \left[ (c_{m0} + mc_{z0}) dx + \left( \frac{L}{l} c_{z0} \operatorname{tg} \beta - em \right) x dx - \frac{L}{l} e \operatorname{tg} \beta x^2 dx \right].$$

Il suffit d'intégrer entre  $x=0$  et  $x=1$  pour obtenir le moment d'une moitié d'aile et de multiplier le résultat par 2 pour avoir le moment total  $M_A$ . Pour passer au moment réduit  $c'_m$  défini comme  $c_m$ , il suffit de diviser  $M_A$  par

$$\frac{\alpha V^2}{2g} S l = \frac{\alpha V^2}{2g} 2 L l^2,$$

ce qui donne finalement :

$$c'_m = c_{m0} + mc_{z0} + \frac{1}{2} \left( \frac{L}{l} c_{z0} \operatorname{tg} \beta - em \right) - \frac{L}{3l} e \operatorname{tg} \beta. \quad (23)$$

Mais  $c'_m$  ne doit pas s'exprimer en fonction de  $c_{z0}$ , mais bien du coefficient de portance  $c_z$  de l'aile entière. Ce coefficient de portance peut s'évaluer facilement par la formule générale

$$c_z S = \int (c_z)_x dS,$$

qui donne ici :

$$c_z = \int_0^1 (c_{z0} - ex) dx = c_{z0} - \frac{e}{2}. \quad (24)$$

En remplaçant alors dans la formule (23)  $c_{z0}$  par  $c_z + \frac{e}{2}$ ,  $\frac{2L}{l}$  par l'allongement géométrique  $\lambda$ , et en groupant les termes, nous obtenons en fin de compte la relation simple cherchée donnant le coefficient de moment d'une aile en flèche et gauchie :

$$c'_m = c_{m0} - \frac{\lambda e}{24} \operatorname{tg} \beta + \left( m + \frac{\lambda}{4} \operatorname{tg} \beta \right) c_z. \quad (25)$$

Ainsi qu'il a été dit,  $c_{m0}$  est un coefficient de profil et  $m=0,25$  un coefficient constant. Nous avons supposé, dans notre démonstration,

la profondeur  $l$  de l'aile constante. Un calcul tout semblable pourrait s'effectuer si la profondeur  $l$  était variable le long de l'envergure et fonction de  $x$ . Il suffirait d'introduire cette fonction dans les intégrales qui ont été calculées.

Cette formule est en bon accord avec les essais d'ailes en flèche et gauchies effectués au laboratoire de Gottingen avec un angle  $\beta$  de 23 degrés et une variation d'incidence allant jusqu'à 10 degrés (tome II, page 53).

Il apparaît que la courbe de  $c'_m$  en fonction de  $c_x$  reste linéaire et que :

a) Son coefficient angulaire ne dépend que de la flèche et pas du tout du gauchissement;

b) Le moment de portance nulle dépend simultanément de la flèche et du gauchissement, *un gauchissement sans flèche n'ayant aucun effet.*

Si l'aile n'est pas gauchie,  $e$  est nul et le moment de portance nulle n'est pas affecté, seule la pente de la droite des moments étant augmentée quand  $\beta$  est positif, c'est-à-dire quand la flèche a lieu vers l'arrière, et diminuée au contraire si la flèche a lieu vers l'avant.

Cette variation de coefficient angulaire sous l'influence de la flèche, avec ou sans gauchissement n'a aucun effet sur la stabilité, car pour retrouver le coefficient angulaire normal, il suffit d'un simple déplacement sur la corde du profil central du point par rapport auquel est pris le moment  $M_A$ .

Pour le vérifier, il suffit d'évaluer le moment  $M_A$  par rapport à un certain point  $A_1$  de la corde et à la distance  $\rho$  du bord d'attaque dans le sens de la flèche.

En tenant compte de ce que le sens positif du moment  $c'_m$  est tel qu'il tende à faire piquer l'aile, on voit que, par rapport à  $A_1$ , le nouveau coefficient de moment sera :

$$c''_m = c'_m - \frac{\rho}{l} c_x,$$

c'est-à-dire :

$$c''_m = c_{m0} - \frac{\lambda e}{24} \operatorname{tg} \beta + \left( m + \frac{\lambda}{4} \operatorname{tg} \beta - \frac{\rho}{l} \right) c_x.$$

Il en résulte que la droite des moments aura conservé son coefficient angulaire  $m$  si le déplacement relatif du centre des moments sur la corde est :

$$\frac{\rho}{l} = \frac{\lambda}{4} \operatorname{tg} \beta. \quad (26)$$

Il suffit donc bien d'un simple décalage de l'origine des moments dans le sens de la flèche pour obtenir toujours des droites de moment parallèles.

Il est impossible, dans un calcul précis de la stabilité et du centrage, de négliger l'influence de la flèche, même lorsqu'elle est faible. Pour un allongement de 6, par exemple, et une flèche de 3 degrés,  $\frac{\rho}{l}$  est égal à 7,86 pour 100, le coefficient angulaire de la droite  $c'_m$  étant 0,328 au lieu de 0,25.

En ce qui concerne maintenant le moment de portance nulle, il y a évidemment intérêt à ce que sa valeur soit aussi faible que possible, puisque c'est uniquement lui qui produit les déplacements du centre de poussée.

Il en résulte immédiatement que, quand il y a du gauchissement,  $e \operatorname{tg} \beta$  doit toujours être positif, ce qui signifie, comme nous l'avons admis, qu'une incidence décroissante vers les extrémités ne peut se superposer qu'à une flèche vers l'arrière et une incidence croissante à une flèche vers l'avant. Il est bien entendu, comme nous l'avons dit, que, sans flèche, la variation d'incidence n'a aucun effet.

Pour réaliser une aile à centre de poussée immobile, il suffit que le moment de portance nulle soit nul, ce qui donne :

$$e \operatorname{tg} \beta = \frac{24 c_{m0}}{\lambda}. \quad (27)$$

Si  $\lambda = 6$  et  $c_{m0} = 0,05$ , il faut  $e \operatorname{tg} \beta = 0,2$ , d'où, avec  $B = 4,13$

$$i \operatorname{tg} \beta = 0,0485.$$

Il semble que, sans nuire aux qualités aérodynamiques de l'aile, on ne peut dépasser pour  $i$  10 degrés, soit 0,174 en radians. Il faudrait alors une flèche de 16 degrés.

Si la variation d'incidence est de 6 degrés, il faut une flèche de 25 degrés.

Comme la valeur de  $c_{m0}$  admise ici n'est pas élevée, nous voyons que pour rendre immobile le centre de poussée, on serait conduit à des variations d'incidences très prononcées pouvant abîmer la polaire si la flèche n'est pas excessive, ou, inversement, à une flèche très marquée si les variations d'incidence sont modérées. Nous retiendrons finalement de cette analyse que, lorsque l'aile présente de la flèche et du gauchissement, on peut, par un simple décalage de l'origine des moments sur la corde de l'aile, ramener la courbe des moments à sa forme canonique :

$$c_m = c_{m0} + m c_z,$$

le coefficient  $c_{m0}$  se trouvant simplement modifié du fait du gauchissement.

**Influence du V avec ou sans gauchissement.** — Une aile présente du V lorsqu'en projection verticale le bord d'attaque n'est pas droit, mais dessine la forme d'un angle dont les côtés sont inclinés de l'angle  $\gamma$  sur l'horizontale. Nous supposerons que, normalement, le V a lieu vers le haut, l'angle  $\gamma$  étant alors considéré comme positif, et que l'aile présente en même temps un gauchissement caractérisé par une diminution progressive de l'incidence du milieu aux extrémités. Comme pour l'aile en flèche, nous admettrons que, sans gauchissement, la poussée est uniformément répartie le long de l'enver-

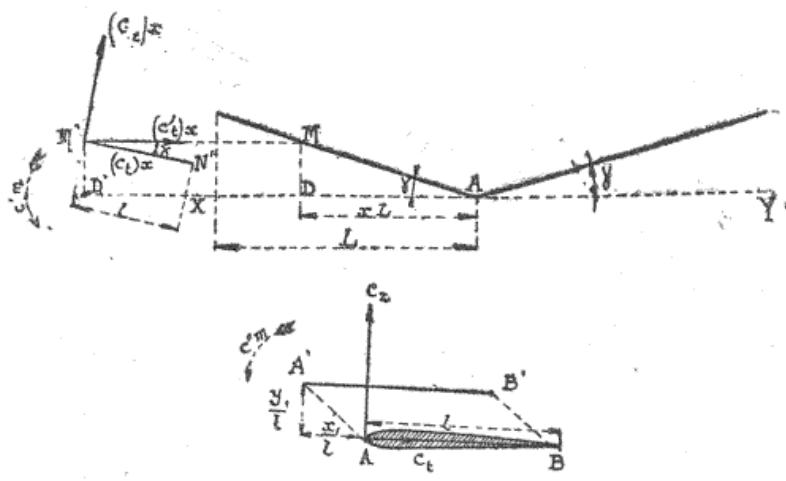


Fig. 3.

gure et nous prendrons les moments par rapport au bord d'attaque XY que posséderait l'aile si elle n'avait pas de V. L'aile sera définie par son envergure projetée  $2L$ , sa profondeur  $l$  supposée constante, l'angle  $\gamma$  et une loi linéaire de décroissance de l'incidence (fig. 3).

L'allongement  $\lambda$  à considérer sera  $\frac{2L}{l}$  et la surface à introduire dans les calculs sera la surface  $\delta$  projetée  $2Ll$ .

La décroissance de l'incidence étant linéaire en fonction de la distance  $xL$  au plan de symétrie comptée suivant l'envergure projetée, si  $\Delta i$  est la variation totale d'incidence et  $B$  le coefficient angulaire de la droite de portance de l'aile, on peut écrire :

$$(c_z)_x = c_{z0} - ex = c_{z0} - Bi x. \quad (28)$$

Pour calculer le moment résultant  $M_A$  par rapport à l'axe XY des moments, nous considérerons en MN, suivant la profondeur, un élément d'aile de surface projetée  $dS = lL dx$ . La corde MN est inclinée de l'angle  $\alpha$  sur le plan normal à celui qui contient les bords d'attaque et l'axe XY des moments,  $\alpha$  décroissant par suite du gauchissement du milieu aux extrémités de l'aile suivant la formule  $\alpha = \alpha_0 - x\Delta i$ .

La réduction des efforts aérodynamiques de l'élément par rapport à son bord d'attaque M donnera un couple de coefficient unitaire

$$c_m = c_{m0} + m(c_z)_x$$

et une résultante appliquée en M de composantes unitaires  $(c_t)_x$  et  $(c_z)_x$  suivant la corde et sa normale,  $(c_t)_x$  étant donné par la formule (11).

Le moment de cette résultante par rapport à XY est égal à celui de sa composante  $(c'_t)_x$  normale au plan des bords d'attaque, le bras de levier du couple étant  $MD = xL \operatorname{tg} \gamma$ .

En assimilant  $\cos \alpha$  à l'unité,  $\sin \alpha$  à  $\alpha$  et en remplaçant  $(c_t)_x$  par sa valeur, on trouve immédiatement :

$$(c'_t)_x = \alpha (c_z)_x + (c_t)_x = c_{z0} + (i_0 + \alpha) (c_z)_x - \frac{(c_z)_x^2}{B_0}.$$

Dans cette formule,  $c_{z0}$  ne représente pas la valeur de  $c_z$  au milieu de l'aile, mais la traînée de profil.

Dans ces conditions, le moment élémentaire autour de XY sera :

$$dM_A = \frac{\alpha V^2}{2g} l dS \left[ c_{m0} + m(c_z)_x - \frac{L}{l} x \operatorname{tg} \gamma (c_t)_x \right]. \quad (29)$$

Il suffit, dans cette équation, de remplacer  $dS$  par  $lL dx$ ,  $(c_t)_x$  par sa valeur, puis  $\alpha$  par son expression  $\alpha_0 - x\Delta i$  et d'intégrer entre  $x=0$  et  $x=1$  pour obtenir le moment d'une demi-aile.

En multipliant le résultat par deux, on a l'expression du moment  $M_A$  et il est facile, comme pour l'aile en flèche, de passer au moment unitaire  $c'_m$  après avoir remplacé  $c_{z0}$  par sa valeur  $c_z + \frac{e}{2}$  en fonction de la portance  $c_z$  de l'aile entière.

On constate que le terme constant de  $c_m$  n'est pas sensiblement modifié, que le coefficient de  $c_z$  l'est légèrement et qu'un terme additif peu important en  $c_z^2$  se trouve introduit.

En remplaçant  $\frac{2L}{l}$  par l'allongement  $\lambda$ , on peut finalement représenter le nouveau moment unitaire par la formule approchée, mais suffisamment précise :

$$c'_m = c_{m0} + \left( m - \frac{i_0 + \alpha_0}{4} \lambda \operatorname{tg} \gamma \right) c_z + \frac{\lambda \operatorname{tg} \gamma}{4 B_0} c_z^2. \quad (30)$$

Il apparaît donc que, sur une aile en V, le gauchissement n'a aucune influence sensible sur la courbe des moments, les seules modifications à considérer pratiquement étant dues à l'influence du V. Cherchons enfin de quelles quantités il faut décaler fictivement le profil central pour que la formule des moments par rapport à son bord d'attaque ait la forme canonique d'une droite de coefficient angulaire  $m=0,25$ . Soit (fig. 3)  $\frac{x_t}{l}$  la translation vers l'avant rapportée à la corde et  $\frac{y_t}{l}$  la translation vers le haut à faire subir à la corde du profil.

Le nouveau moment deviendra, en tenant compte du sens des couples additifs provoqués par  $c_t$  et  $c_z$ :

$$c''_m = c'_m + \frac{x_t}{l} c_z + \frac{y_t}{l} c_t = c'_m + \frac{x_t}{l} c_z + \frac{y_t}{l} \left( c_{x0} + i_0 c_z - \frac{c_z^2}{B_0} \right). \quad (31)$$

Il suffit de remplacer  $c'_m$  par sa valeur et d'écrire que d'une part le terme en  $c_z^2$  est nul et d'autre part le coefficient de  $c_z$  est égal à  $m$ , ce qui donne immédiatement :

$$\frac{y_t}{l} = \frac{\lambda \operatorname{tg} \gamma}{4}, \quad (32)$$

$$\frac{x_t}{l} = \alpha_0 \frac{\lambda \operatorname{tg} \gamma}{4} = \alpha_0 \frac{y_t}{l}, \quad (33)$$

le moment de portance nulle étant devenu :

$$c'_{m0} = c_{m0} + \frac{y_t}{l} c_{x0} = c_{m0} + \frac{\lambda \operatorname{tg} \gamma}{4} c_{x0} \dots \quad (34)$$

Pour toutes les valeurs usuelles de l'angle  $\gamma$ ,  $c'_{m0}$  peut être, sans erreur sensible, confondu avec le coefficient de profil  $c_{m0}$ , de sorte qu'en décalant la corde centrale de la quantité calculée, on pourra considérer l'aile comme une aile droite ordinaire, les coefficients de la droite des moments étant uniquement des coefficients de profil.

Si par exemple  $\lambda=6$ ,  $\operatorname{tg} \gamma=0,10$ ,  $\alpha_0=0,10$ , on trouve :

$$\frac{y_t}{l}=0,15, \quad \frac{x_t}{l}=0,015.$$

**Moment aérodynamique d'une aile par rapport à un point quelconque. Courbe métacentrique d'une aile.** — Le moment  $c_m$  donné par les laboratoires étant positif lorsqu'il tend à faire piquer l'aile, nous conserverons pour les moments ce même sens positif, bien qu'il soit inverse du sens positif des incidences. Il suffira de se rappeler cette convention de signe dans l'évaluation du coefficient de stabilité.

Nous définirons la position du point G par rapport auquel nous voulons calculer le moment par sa distance  $x$  au bord d'attaque comptée parallèlement à la corde et par sa distance  $y$  à la corde (fig. 4),  $x$  sera positif en arrière du bord d'attaque et  $y$  en dessous de la corde.

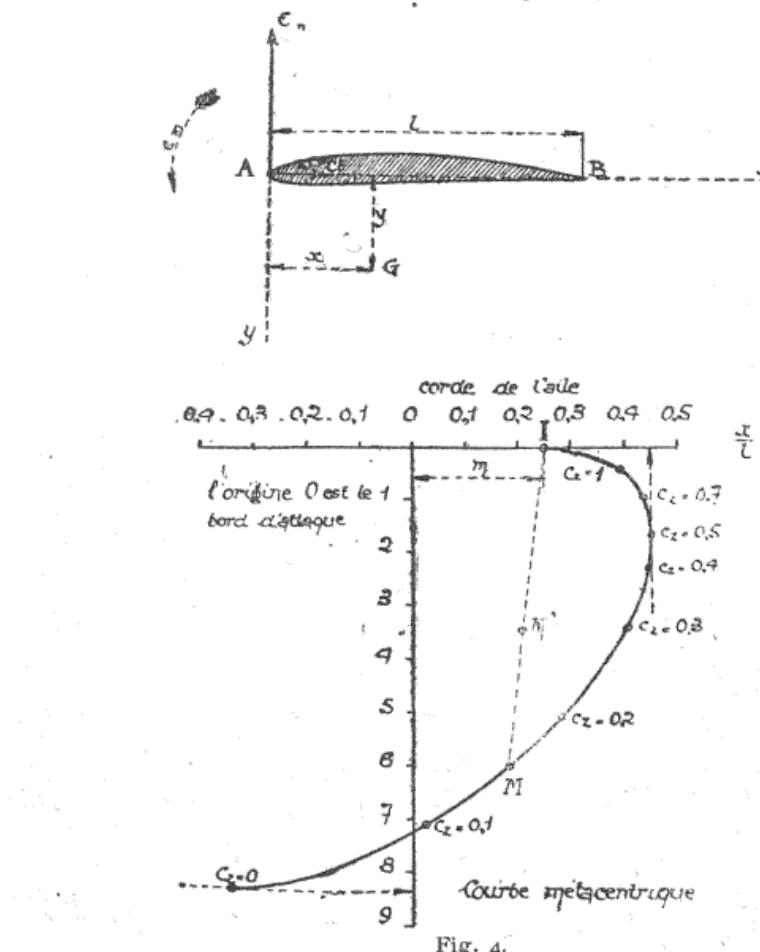


Fig. 4.

Les éléments de réduction des efforts aérodynamiques par rapport au bord d'attaque A sont, comme nous l'avons montré :

- a) Les deux coefficients unitaires  $c_t$  et  $c_n$  de la résultante aéody-

namique suivant la corde et sa normale,  $c_n$  étant assimilable à  $c$  et  $c_t$  étant connu par la formule (11) :

$$c_t = c_{x0} + i_0 c_z - \frac{c_z^2}{B_0}, \quad (35)$$

dans laquelle  $c_{x0}$ ,  $i_0$  et  $B_0$  sont trois coefficients de profil;

b) Le coefficient de moment, précédemment discuté :

$$c_m = c_{m0} + m c_z. \quad (36)$$

Si  $l$  est la longueur de la corde du profil, en se rappelant que  $c_m$  est défini en divisant le moment effectif  $M_A$  par  $\frac{\alpha}{2g} V^2 S l$ , on trouve immédiatement que le nouveau coefficient de moment par rapport à G est donné par la formule :

$$c_{mg} = c_m - \frac{x}{l} c_z - \frac{y}{l} c_t, \quad (37)$$

c'est-à-dire en remplaçant  $c_m$  et  $c_t$  par leurs valeurs (36) et (35).

$$c_{mg} = c_{m0} - c_{x0} \frac{y}{l} + \left( m - \frac{x}{l} - i_0 \frac{y}{l} \right) c_z + \frac{y}{l} \frac{c_z^2}{B_0}. \quad (38)$$

Cette relation montre que :

a) Pour tous les points de la corde, pour lesquels  $y=0$ , le coefficient de moment est une fonction linéaire de  $c_z$  et ce sont les seuls points jouissant de cette propriété. En particulier, pour le point de la corde situé au quart de la profondeur à partir du bord d'attaque pour lequel  $\frac{x}{l} = m = 0,25$ , ce coefficient est constant et égal à  $c_{m0}$ ;

b) Pour tous les points situés en dehors de la corde, le coefficient de moment varie suivant une fonction parabolique du coefficient de portance  $c_z$ .

Pour chaque valeur de  $c_z$  le lieu des points pour lesquels  $c_{mg}$  est nul est une droite R qui n'est évidemment autre que la ligne d'action de la résultante aérodynamique appliquée à l'aile et qui a pour équation :

$$c_{m0} - c_{x0} \frac{y}{l} + \left( m - \frac{x}{l} - i_0 \frac{y}{l} \right) c_z + \frac{y}{l} \frac{c_z^2}{B_0} = 0. \quad (39)$$

Cette droite, dont la position dépend du paramètre  $c_z$  enveloppe lorsque  $c_z$  varie, la courbe métacentrique de l'aile et lui est tangente au métacentre qui délimite sur R, comme nous allons le montrer, les zones théoriques de stabilité.

En effet, pour que, pour une certaine valeur de  $c_z$ , l'aile puisse être en équilibre autour de G, il faut que G soit situé sur la droite particulière R qui correspond à cette valeur de  $c_z$ , le coefficient  $c_{mg}$  étant alors nul. Pour que la position d'équilibre ainsi réalisée soit stable, il faudrait, d'après le sens positif des moments inverse de celui des incidences, qu'au voisinage de sa valeur zéro,  $c_{mg}$  augmente en même temps que l'incidence, c'est-à-dire que  $\frac{dc_{mg}}{dc_z}$  soit positif.

Pour discuter cette condition, nous chercherons d'abord quel est le point de la droite R pour lequel l'équilibre est indifférent, condition qui s'exprime par :

$$\frac{dc_{mg}}{dc_z} = m - \frac{x}{l} - i_0 \frac{y}{l} + \frac{2y}{l} \frac{c_z}{B_0} = 0. \quad (40)$$

Cette seconde équation représente, pour chaque valeur de  $c_z$ , une droite qui passe par le point fixe  $y=0$ ,  $\frac{x}{l}=m=0,25$  et qui coupe la droite R d'équation (39) au point cherché d'équilibre indifférent. Ce point caractéristique n'est autre que le métacentre qui décrit la courbe métacentrique lorsque  $c_z$  varie. En effet, pour l'enveloppe de la droite (39), il suffit, comme on le sait, d'éliminer  $c_z$  entre cette équation et l'équation dérivée par rapport à  $c_z$  qui n'est autre que l'équation (40) qui exprime la condition d'équilibre indifférent.

Pour tous les points de R situés d'un côté du métacentre  $\frac{dc_{mg}}{dc_z}$  sera positif et l'équilibre stable, pour le métacentre, l'équilibre sera indifférent, et pour tous les autres points de R,  $\frac{dc_{mg}}{dc_z}$  étant négatif, l'équilibre sera instable.

Il nous paraît commode, pour la discussion, d'expliciter l'équation de la courbe métacentrique sous forme paramétrique,  $x$  et  $y$  étant exprimés en fonction de  $c_z$ . La combinaison des deux équations (39) et (40) donne immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{l} = m - c_{mo} \frac{i_0 - \frac{2c_z}{B_0}}{c_{x0} + \frac{c_z^2}{B_0}}, \\ \frac{y}{l} = \frac{c_{mo}}{c_{x0} + \frac{c_z^2}{B_0}}. \end{array} \right. \quad (41)$$

La courbe ainsi définie est du second degré et n'a pas de branches infinies, le dénominateur de  $x$  et  $y$  ne pouvant s'annuler. Elle repré-

sente donc un arc d'ellipse, toujours situé en dessous de la corde, car y ne peut être négatif.

Les coefficients des équations précédentes étant des coefficients de profil, toutes les ailes de même profil ont même courbe métacentrique, sauf quand elles ont de la flèche et du gauchissement modifiant  $c_{m0}$ .

Cette remarque s'étend, comme nous le montrerons, aux cellules biplanes.

Il apparaît immédiatement, ce qui est évident géométriquement en raisonnant directement sur la courbe métacentrique, que le coefficient  $\frac{dc_{mg}}{dc_z}$  est positif lorsque G est en dessous du métacentre dont les coordonnées sont définies par les équations (41) et (42), la position d'équilibre étant alors stable.

Lorsque  $c_z$  varie, ce métacentre décrit un arc d'ellipse partant du point de la corde  $\frac{x}{l} = m = 0,25$  situé au quart avant de la profondeur. Lorsque  $c_{m0}$  est nul, la courbe métacentrique se réduit à ce point qui est le centre de poussée immobile. A titre d'exemple, nous admettrons pour le profil utilisé, les caractéristiques :

$$m = 0,25, \quad B_0 = 5,3, \quad c_{x0} = 0,012, \quad i_0 = 0,07, \quad c_{m0} = 0,10,$$

dont la connaissance permet, pour chaque valeur de  $c_z$ , de calculer la position du métacentre :

$c_z$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\frac{x}{l}$	-0,334	0,018	0,279	0,400	0,432	0,450	0,446	0,432	0,424	0,414	0,403
$\frac{y}{l}$	8,33	7,19	5,12	3,45	2,25	1,68	1,25	0,956	0,752	0,606	0,498

L'arc d'ellipse correspondant a été tracé sur la figure 4, l'échelle des ordonnées  $\frac{y}{l}$  étant dix fois plus faible que celle des abscisses  $\frac{x}{l}$ .

Pour d'autres valeurs de  $c_{m0}$ , on obtiendrait des arcs d'ellipses homothétiques par rapport au point I de la corde situé à la distance du bord d'attaque égale au quart de la profondeur  $l$ .

Remarquons d'ailleurs que le pôle d'homothétie I est toujours situé sur l'ellipse dont un arc représente la courbe métacentrique, l'ellipse étant tangente en ce point à la corde.

Si G est le centre de gravité de l'avion, il apparaît que, pour  $c_z = 0,5$  par exemple, il faudrait, pour que l'aile soit en équilibre

stable autour du G avec  $c_{m0} = 0,10$ , que ce point soit en dessous de la corde à une distance supérieure à  $1,68 l$ .

Cette distance minimum diminue proportionnellement à  $c_{m0}$  pour n'être plus que  $0,84 l$  si  $c_{m0} = 0,05$ .

Il résulte de ceci qu'en règle générale, il serait impossible de mettre G assez bas pour que l'aile seule soit en équilibre stable autour de ce point pour des portances de l'ordre de 0,5 et à fortiori pour des portances plus faibles. Cependant, pour les ailes à profil biconvexe symétrique ou les ailes simultanément gauchies et en flèche pour lesquelles  $c_{m0}$  est nul, la courbe métacentrique se réduit au point I situé au quart avant de la profondeur et l'équilibre de l'aile autour de G sera stable si ce point est en dessous de la corde sur la résultante aérodynamique passant par I.

D'une façon plus générale, nous étudierons maintenant la stabilité ou l'instabilité apportée par le couple aérodynamique de l'aile lorsque le centre de gravité G n'est pas sur la ligne d'action de la résultante aérodynamique, soit par l'effet de l'effort de traction de l'hélice, soit par celui d'un couple additionnel provoqué par l'empennage.

Il est bien entendu que nous n'analyserons ici que la *seule influence du couple aérodynamique de l'aile* pour une position quelconque de G non astreinte, d'après notre hypothèse, à la condition que  $c_{m0}$  soit nul.

Le critère décisif de la stabilité sera toujours la valeur et le signe de la dérivée  $\frac{dc_{mg}}{dc_z}$  fournie par l'expression (40), l'aile apportant de la stabilité ou de l'instabilité suivant que cette dérivée est positive ou négative.

Il suffit, comme nous l'avons dit, de considérer la droite  $\frac{dc_{mg}}{dc_z} = 0$  partageant le plan en deux régions, l'une de stabilité et l'autre d'instabilité. Comme, pour le bord d'attaque,  $\frac{dc_{mg}}{dc_z}$  est positif et égal à  $m$ , il en résulte que *l'aile apportera de la stabilité si G est, par rapport à la droite (40), du même côté que le bord d'attaque*.

Cette droite caractéristique passe par le point fixe I de la corde situé au quart avant de la profondeur ( $y = 0$ ,  $\frac{x}{l} = m = 0,25$ ) et son inclinaison  $\psi$  sur l'axe des  $y$  normal à la corde est, d'après l'équation (40) :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2c_z}{B_0} - i_0. \quad (43)$$

L'angle  $\psi$  étant calculé par cette formule, l'équation (40) de la droite D d'équilibre indifférent peut s'écrire :

$$\frac{dc_{mg}}{dc_z} = m - \frac{x}{l} + \frac{y}{l} \operatorname{tg} \psi = 0. \quad (44)$$

Cette forme d'équation est, comme nous allons le montrer, particulièrement commode pour évaluer, d'une façon absolument générale, la valeur de la stabilité en fonction de la situation du point G.

En effet, si G n'est pas sur la droite précédente, mais en point quelconque du plan de coordonnées  $x$  et  $y$ ,  $\frac{dc_{mg}}{dc_z}$  prend une valeur positive ou négative dont nous allons chercher l'expression générale.

Soit  $h$  la distance de G à la droite D considérée comme positive quand G est du même côté que le bord d'attaque par rapport à D, le bord d'attaque étant, comme nous l'avons supposé, l'origine des coordonnées.

Une formule bien connue de géométrie analytique donne :

$$\frac{h}{l} = \frac{m - \frac{x}{l} + \frac{y}{l} \operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} = \frac{dc_{mg}}{dc_z} \cos \psi. \quad (45)$$

Mais la parallèle à D menée par G rencontre en H' la corde de l'aile. La longueur  $h' = IH'$  est évidemment liée à  $h$  par la relation  $h = h' \cos \psi$  (fig. 5), d'où finalement

$$\boxed{\frac{dc_{mg}}{dc_z} = \frac{h}{l \cos \psi} = \frac{h'}{l}}. \quad (46)$$

La longueur  $h'$  est positive, donc l'aile est un facteur de stabilité, quand le point H' se trouve entre le bord d'attaque et le point I situé au quart avant de la profondeur.

*On peut ainsi énoncer le principe que l'effet stabilisateur de l'aile est uniquement déterminé par la position de la projection oblique H' à l'angle  $\psi$  du centre de gravité sur la corde de l'aile, cet effet étant mesuré par la distance IH' comptée positivement vers le bord d'attaque.*

Cette règle générale et l'expression donnée du coefficient de stabilité s'applique naturellement au cas déjà étudié où G est sur la ligne d'action de la résultante aérodynamique.

Il apparaît ainsi que, contrairement à l'opinion courante, l'aile d'un avion peut apporter sa part de stabilité dans l'équilibre autour du centre de gravité, l'importance de cette participation dépendant des

caractéristiques du profil et surtout de la position du centre de gravité. Il résulte immédiatement de la formule (46) que :

a) Pour une portance donnée, toutes les positions du centre de gravité donnant même coefficient de stabilité  $\frac{dc_{mg}}{dc_z}$  sont sur même droite inclinée de  $\psi$  sur la normale à la corde.

b)  $h'$  croît, donc la stabilité est améliorée quand on déplace le centre de gravité vers le bord d'attaque, parallèlement à la corde.

c) Pour toutes les portances pour lesquelles  $\psi$  est positif,  $h'$  croît, donc la stabilité est améliorée, quand le centre de gravité est abaissé perpendiculairement à la corde, le résultat étant inverse pour les portances pour lesquelles  $\psi$  est négatif.

Comme cas particulier, si le centre de gravité est en I,  $\frac{dc_{mg}}{dc_z}$  est nul à toutes les incidences et l'aile, étant indifférente, n'intervient en rien dans l'obtention de la stabilité.

Il est particulièrement intéressant d'utiliser les formules précédentes pour voir comment varie en fonction de la portance la stabilité apportée par l'aile pour une position déterminée du centre de gravité.

Il est commode, pour cette étude, de définir la position du centre de gravité, par ses coordonnées polaires par rapport au point caractéristique I de la corde, c'est-à-dire, par sa distance  $e$  au point I et par l'angle  $\delta$  de IG avec la normale à la corde dirigée vers le bas,  $\delta$  étant positif dans le cas de la figure (fig. 5).

Le sens positif étant fixé pour  $\delta$ , le sens positif se trouve de ce fait également déterminé pour  $e$ .

En remarquant que

$$h = e \sin(\psi - \delta),$$

la formule (46) donne immédiatement

$$\frac{dc_{mg}}{dc_z} = \frac{e \sin(\psi - \delta)}{l \cos \psi}, \quad (47)$$

$\psi$  étant, d'autre part, connu par la formule (43) :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2c_z}{B_0} - i_0. \quad (48)$$

Le coefficient  $\frac{dc_{mg}}{dc_z}$  pour un centrage déterminé varie toujours linéairement en fonction du coefficient de portance  $c_z$ , car son expression développée ne contient effectivement que  $\operatorname{tg} \psi$ . Si  $e$  est positif, et

les conclusions sont inverses si  $e$  est négatif, il apparaît que l'aile apporte de la stabilité à toutes les incidences pour lesquelles  $\psi$  est supérieur à  $\delta$  et, au contraire, de l'instabilité quand  $\psi$  est inférieur à  $\delta$ ,

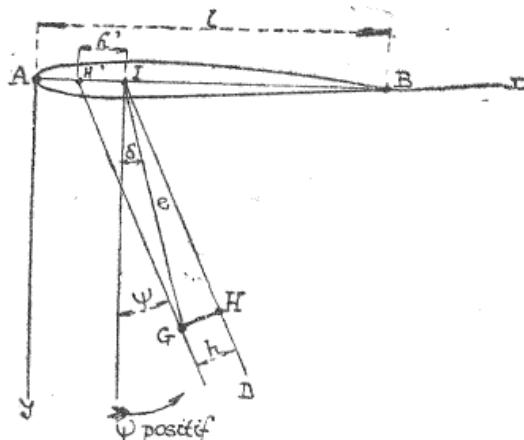


Fig. 5.

la limite de la stabilité correspondant à  $\psi = \delta$ , c'est-à-dire à la portance :

$$c_{z0} = \frac{B_0}{2} (i_0 + \operatorname{tg} \delta) \quad (49)$$

En développant l'expression (47) et en introduisant la valeur de  $c_{z0}$  calculée par l'expression précédente, on trouve finalement la formule simple et d'une application commode :

$$\boxed{\frac{dc_{mg}}{dc_z} = \frac{2e \cos \delta}{l} (c_z - c_{z0})} \quad (50)$$

La discussion par ces formules ne convient pas au cas où le centre de gravité est sur la corde de l'aile ou très près de cette corde, mais on sait que, dans ce cas, le coefficient de stabilité précédent est constant et égal au rapport à la corde de la distance du centre de gravité au point I, positive vers le bord d'attaque.

Dans le cas général, cherchons s'il est possible que l'aile apporte de la stabilité; donc que  $\frac{dc_{mg}}{dc_z}$  soit positif à toutes les portances positives.

*1<sup>er</sup> cas. —  $e \cos \delta > 0$  le centre de gravité est en dessous de la corde de l'aile.*

Il faut que  $c_z - c_{z0}$  soit toujours positif, ce qui exige que  $c_{z0}$  soit

négatif ou nul, c'est-à-dire que  $i_0 + \operatorname{tg} \delta$  soit également négatif ou sensiblement,  $\delta < -i_0$ . L'angle  $\delta$  doit donc être négatif et être au moins égal à  $i_0$  en valeur absolue, la droite IG étant, par rapport à la normale à la corde, inclinée vers le bord d'attaque. Comme  $i_0$  ne dépasse pas en général 6 à 8°, cette condition conduit à des valeurs minima de  $\delta$  assez modérées.

*2<sup>e</sup> cas. —  $e \cos \delta < 0$ , le centre de gravité est au-dessus de la corde de l'aile.*

Il faut que  $c_x - c_{x0}$  soit toujours négatif, donc  $c_{x0}$  supérieur à la plus grande portance que l'on envisage.  $\delta$  doit être positif et supérieur à une certaine valeur, la droite IG étant encore inclinée vers le bord d'attaque par rapport à la normale à la corde.

Si, par exemple, la portance maximum envisagée est égale à 1, si le coefficient de profil  $i_0$  a la valeur moyenne 0,07, on voit en remplaçant  $B_0$  par 5,3, que  $\operatorname{tg} \delta$  doit être supérieur à 0,307, donc  $\delta$  plus grand que 17 degrés.

Etudions maintenant, d'une façon générale, que le centre de gravité soit en dessous ou au-dessus de la corde de l'aile, les variations de  $c_{x0}$  en fonction de  $\delta$ , en admettant toujours pour le coefficient de profil  $i_0$  la valeur moyenne 0,07 et son remplaçant  $B_0$  par 5,3.

Il est bien évident que  $c_{x0}$  est un simple coefficient et que sa valeur n'est pas limitée et peut dépasser notablement les portances à envisager.

Avec les chiffres admis, la formule (49) donne immédiatement :

$$c_{x0} = 0,185 + 2,65 \operatorname{tg} \delta.$$

Nous obtenons ainsi :

$\delta =$	- 20°	- 10°	0°	10°	20°	30°	40°
$c_{x0} =$	- 0,780	- 0,283	0,185	0,653	1,15	1,72	2,40

La formule (50) permet alors de tracer pour différentes valeurs de  $\delta$  les droites représentant en fonction de la portance les variations du coefficient de stabilité  $\frac{dc_{mg}}{dc_x}$ .

Dans cette formule,  $\frac{e \cos \delta}{l}$  n'est autre que la distance relative  $\frac{y}{l}$  du centre de gravité à la corde, positive quand le centre de gravité est en dessous de la corde.

Nous avons effectué l'application numérique dans les deux cas où le centre de gravité est à la même distance relative 0,2 de la corde de l'aile, soit en dessous, soit en dessus, ce qui donne :

$$\frac{dc_{mg}}{dc_z} = \pm \frac{0,4}{B_0} (c_z - c_{z0}) = \pm 0,0755 (c_z - c_{z0}),$$

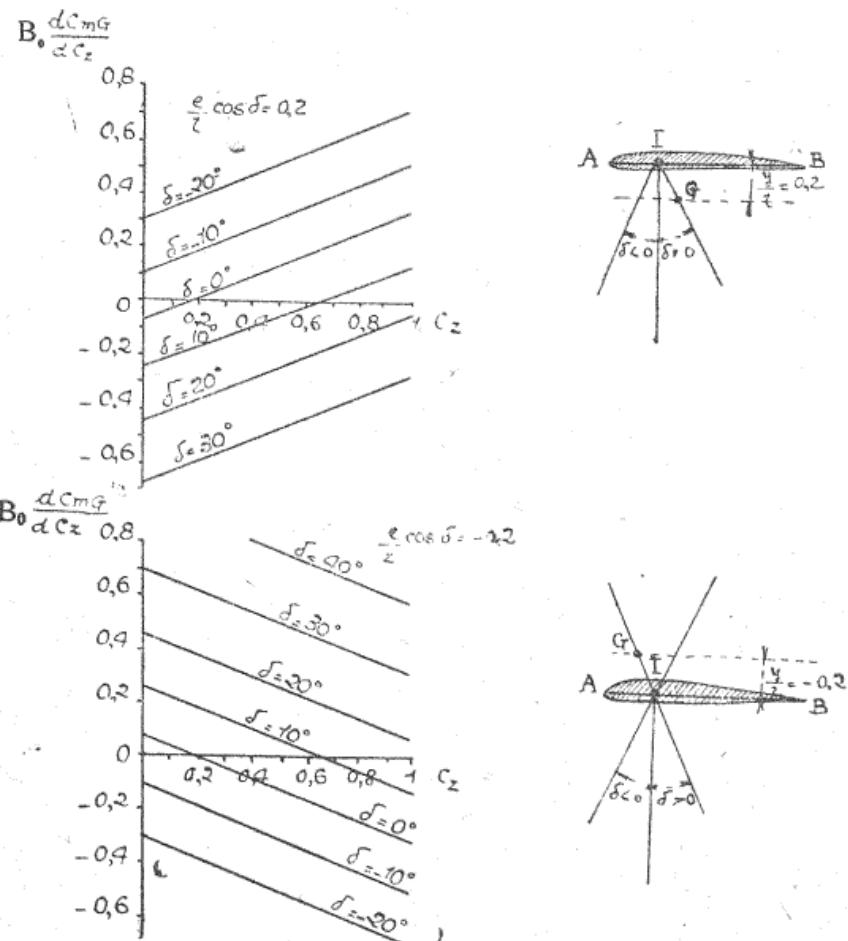


Fig. 6.

le signe + s'appliquant quand le centre de gravité est au-dessous de la corde, le signe — quand il est en dessus.

Il est bien évident que pour d'autres valeurs de  $\frac{y}{l} = \frac{e}{l} \cos \delta$ , il suffit d'effectuer la proportionnalité de  $\frac{dc_{mg}}{dc_z}$  à ces valeurs. Avec le chiffre  $\pm 0,2$  et différentes valeurs de  $\delta$ , nous avons obtenu le réseau de droites de la figure 66.

Le simple examen de cette figure, comme d'ailleurs l'analyse de la formule (50), conduit à la conclusion suivante :

*1<sup>o</sup> Lorsque le centre de gravité est en dessous de la corde de l'aile, la stabilité apportée par l'aile croît toujours lorsque la portance augmente.*

*2<sup>o</sup> Lorsque le centre de gravité est au-dessus de la corde de l'aile, la stabilité apportée par l'aile décroît toujours lorsque la portance augmente.*

Dans le cas intermédiaire où le centre de gravité est sur la corde de l'aile, le coefficient de stabilité de l'aile seule est *constant, donc indépendant de la portance*, ainsi que le montre la formule (44).

Il est évidemment avantageux que le coefficient de stabilité d'un avion ne diminue pas quand la portance augmente. Le couple de stabilité est, en effet, proportionnel au produit du coefficient de stabilité par le carré de la vitesse aérodynamique et, comme cette vitesse diminue quand la portance augmente, l'avion peut se trouver insuffisamment stable aux portances élevées.

Le coefficient de stabilité total étant la somme du coefficient de stabilité de l'aile et de celui de l'empennage, un accroissement de la stabilité de l'aile avec la portance est un élément favorable. Les ailes monoplanes très surbaissées sont, à cet égard, nettement défavorisées et la détermination des empennages dans ce cas doit retenir toute l'attention de l'ingénieur qui désire réaliser un avion suffisamment stable à toutes les portances.

Pour terminer ces considérations sur la stabilité d'une aile, nous analyserons la condition d'équilibre d'une aile seule autour du centre de gravité sous l'action des efforts aérodynamiques qu'elle subit et de l'effort de traction de l'hélice.

C'est le problème qui se pose pratiquement quand on veut déterminer le centrage pour une certaine portance arbitrairement fixée sans action de l'empennage. La présence des résistances nuisibles modifie les coefficients de la courbe métacentrique, comme nous le verrons plus loin, mais ne change rien à la discussion.

Le vol étant supposé horizontal, soit  $i$  l'incidence de la corde placée en position de vol (fig. 7). La direction de l'effort de traction  $F$  de l'hélice coupe en  $G_0$  la résultante aérodynamique  $R$  appliquée à l'aile. Il est facile de situer exactement la ligne d'action de cette résultante. Le poids  $P$ , vertical, de l'avion devant équilibrer  $F$  et  $R$  doit passer par  $G_0$ .

*Le lieu des positions possibles de G permettant l'équilibre des forces et des moments est la verticale  $G_0Z$  passant par  $G_0$ . Si G est en  $G_0$ , l'effort de traction de l'hélice n'intervient en rien dans l'équilibre des moments. Si G est sur  $G_0Z$  en un point différent de  $G_0$ , le moment des forces*

aérodynamiques est  $R \times GS$ , piqueur ou cabreur suivant que G est au-dessus ou en dessous de  $G_0$ . Si le moteur est brusquement arrêté, il est favorable que l'avion ait tendance à piquer. Il faut donc, en principe, que G soit au-dessus de l'effort de traction. Si  $\epsilon$  est la distance de G à F, il est évident que le couple qui tend à faire piquer ou cabrer

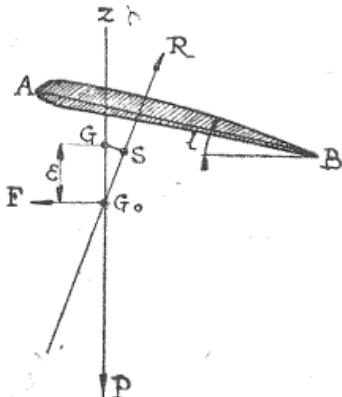


Fig. 7.

l'avion quand le moteur s'arrête, a pour grandeur  $F \epsilon$ ; lorsque  $\epsilon$  est faible, l'effet de ce couple est d'ailleurs très peu sensible.

Nous arrêterons à ces considérations l'étude de la stabilité d'une aile isolée pour passer, comme nous l'avons annoncé, à l'analyse de l'effet des organes annexes et tout d'abord du fuselage.

**2<sup>e</sup> Influence d'un fuselage.** — Le premier, dans une communication mémorable faite à l'Académie des sciences, le 6 juin 1904, le colonel Charles Renard a mentionné et chiffré l'instabilité propre d'un corps fusiforme de révolution autour du centre de gravité de son volume. Plus tard, par des essais effectués dans un bassin, Crocco a fait de nouvelles mesures sur la carène du dirigeable italien n° 1 et a, de plus, mesuré la réaction subie par la carène normalement à son axe lorsque ce dernier est dévié d'un petit angle sur la vitesse d'avancement.

Les laboratoires d'aérodynamique n'ont pas, à notre connaissance, effectué de mesures sur la stabilité propre des fuselages, de sorte qu'en l'absence de données plus précises que celles résultant d'essais de carènes de dirigeable, nous nous bornerons à indiquer la nature et l'ordre de grandeur des phénomènes mis en jeu.

Considérons (fig. 8) un corps fusiforme de révolution dont le maître couple ait un diamètre  $d$  et recevant le vent relatif sous une certaine incidence  $\alpha$  comptée par rapport à son axe.

Dans le cas qui nous occupe ici, cet axe est supposé dévié dans un plan vertical, mais le raisonnement et les conclusions s'appliqueraient intégralement au cas où la déviation se produirait dans un plan horizontal.

La résultante aérodynamique  $R'$  appliquée à la carène est, comme on sait, dirigée suivant l'axe  $A'B'$  lorsque  $\alpha$  est nul. Mais lorsque  $\alpha$  varie, elle est modifiée en grandeur et direction *et enveloppe la courbe métacentrique  $\Gamma$  de la carène*, sa trace I sur  $A'B'$  étant *le centre de dérive*.

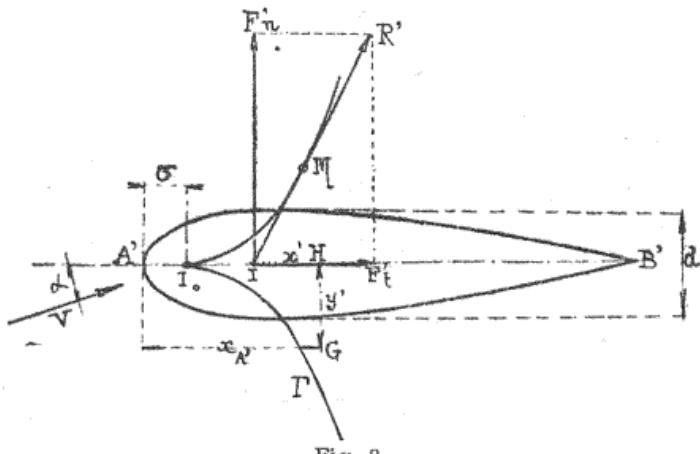


Fig. 8.

La courbe métacentrique est symétrique par rapport à l'axe  $A'B'$  et présente sur cet axe, pour  $\alpha = 0$ , un point  $I_0$  de rebroussement qui se confond alors avec le centre de dérive.

Lorsque l'angle  $\alpha$  reste petit, et c'est le cas dans le problème qui nous occupe ici, la partie utile de la courbe métacentrique est très voisine de son point de rebroussement et l'on peut la confondre avec ce point, *le centre de dérive étant alors considéré comme immobile en  $I_0$* .

Cette approximation légitime correspond aux formules données par Renard et par Crocco.

La résultante aérodynamique  $R'$  peut, au centre de dérive I se décomposer en  $F'_t$  suivant l'axe et  $F'_n$  suivant la normale à l'axe et l'on peut poser :

$$F'_t = \frac{\alpha}{2g} c'_t d^2 V^2, \quad F'_n = \frac{\alpha}{2g} c'_{tn} d^2 V^2, \quad (51)$$

$c'_{tn}$  et  $c'_t$  étant deux coefficients sans dimension dont la connaissance en fonction de  $\alpha$  définit la polaire de la carène rapportée à l'axe et sa normale. Pourachever de déterminer les caractéristiques aérodynamiques de la carène, il suffit de déterminer au laboratoire le moment

de la résultante par rapport au point avant A' où l'axe coupe la surface de la carène ou plus simplement la position du centre de dérive  $I_0$ .

On peut admettre, avec une approximation suffisante, que  $c'_t$  est pratiquement constant et égal au coefficient de résistance de la carène tandis que  $c'_{tt}$  est proportionnel à  $\alpha$ .

Si le centre de gravité de l'avion est à une distance  $y'$  en dessous de l'axe A'B', sa projection sur cet axe étant à une distance  $x'$  du centre de dérive, le moment des forces aérodynamiques appliquées à la carène sera :

$$M = -\frac{\alpha}{2g} d^2 V^2 (x' c'_{tt} + y' c'_t), \quad (52)$$

le signe — correspondant au sens positif admis pour les moments, les couples piqueurs étant considérés comme positifs.

$c'_t$  étant constant ainsi que la dérivée de  $c'_{tt}$  par rapport à  $\alpha$ , il en résulte, en supposant I immobile en  $I_0$ , que  $\frac{dM}{d\alpha}$  est constant et a le signe de  $-x'$ .

La stabilité de l'équilibre exigerait que  $\frac{dM}{d\alpha}$  fût positif, il en résulte qu'une carène est instable autour de tout point dont la projection sur l'axe est en arrière du centre de dérive.

Comme le centre de dérive est très près du point A' tandis que le centre de gravité G est en général beaucoup plus en arrière, on peut énoncer qu'en principe un fuselage d'avion apporte de l'instabilité dans l'équilibre des moments. Cette instabilité est cependant faible et absorbe, comme nous le verrons, pour sa compensation, une partie minime de la surface totale de l'empennage.

Pour des carènes d'allongement 5 à 6, les essais de laboratoire montrent que  $c'_t$  est en moyenne égal à 0,05. Ce coefficient doit être légèrement majoré pour un fuselage d'avion pour tenir compte des résistances extérieures et des discontinuités de la surface (trous d'homme).

En ce qui concerne  $c'_{tt}$ , des mesures faites au bassin par Crocco ont donné pour la carène du dirigeable italien n° 1  $c'_{tt} = 1,2 \alpha$ , l'angle  $\alpha$  étant exprimé en radians. Il apparaît ainsi qu'aux grandes incidences de l'aile, la portance d'un fuselage d'avion n'est pas négligeable. Si, par exemple,  $d = 1$  mètre 50,  $\alpha = 0,10$ ,  $V = 45$  m. s., aux conditions atmosphériques du sol,  $F'_{tt} = 34$  kilos pour une résistance  $F'_t$  de 14 kilos.

Quant au couple aérodynamique, Renard et Crocco le mesurent par rapport au centre de gravité du volume de la carène, et ils ont constaté que pour les petites valeurs de  $\alpha$ , ce couple d'instabilité est proportionnel à  $\alpha$ , ce qui revient à supposer  $c_m$  proportionnel à  $\alpha$  et le centre de dérive immobile en  $I_0$ .

Nous avons cherché à déduire de ces mesures la distance au point  $A'$  du centre de dérive  $I_0$  en remarquant que, pour tout point de l'axe, le couple mesuré n'est autre que le moment de l'effort normal  $F'_n$  supposé appliqué en  $I_0$ .

Nous avons ainsi trouvé que, pour les essais du colonel Renard,  $\sigma = A'I_0 = 0,05 d$ , le centre de dérive étant par conséquent très voisin du point  $A'$ .

Comme application de ce résultat, il est très instructif de chercher quelle est la surface  $s$  d'empennage susceptible d'annuler le couple d'instabilité, l'équilibre de la carène étant ainsi rendu indifférent.

Le centre de gravité de l'avion autour duquel s'étudie l'équilibre se projette sur l'axe de la carène  $A'B'$  en un point situé à une certaine distance  $x_{A'}$  du point  $A'$ ; nous supposerons que la longueur de la carène est six fois son diamètre maximum  $d$ , le centre d'action de l'empennage étant en  $B'$ . Pour des empennages tels que ceux actuellement utilisés, les essais de laboratoire montrent que le coefficient angulaire de la droite de portance en fonction de l'incidence est, en moyenne, égal à 3,5, de sorte que toute variation d'incidence  $\alpha$  de l'empennage provoque la variation  $3,5 \alpha$  du coefficient de poussée. En négligeant les interactions sur l'empennage, il suffit d'écrire qu'il y a équilibre entre le moment perturbateur de l'effort  $F'_n$  appliqué en  $I_0$  et le moment correcteur de l'empennage, ces deux moments étant proportionnels à l'angle  $\alpha$ . On trouve immédiatement la condition :

$$\frac{a}{2g} 1,2 \alpha d^2 V^2 (x_{A'} - 0,05 d) = \frac{a}{2g} 3,5 \alpha s V^2 (6d - x_{A'}),$$

$$\frac{s}{d^2} = \frac{1,2}{3,5} \frac{\frac{x_{A'}}{d} - 0,05}{6 - \frac{x_{A'}}{d}} = 0,34 \frac{\frac{x_{A'}}{d} - 0,05}{6 - \frac{x_{A'}}{d}}. \quad (53)$$

En évaluant alors  $\frac{s}{d^2}$  en fonction de  $\frac{x_{A'}}{d}$  il vient :

$\frac{x_{A'}}{d} =$	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6
$\frac{s}{d^2} =$	0,0346	0,049	0,0645	0,0814	0,10	0,12	0,142	0,166	0,192	0,222	0,255

Pour un fuselage d'avion,  $\frac{x_A'}{d}$  est en général compris entre 1 et 1,6.

Il apparaît donc que  $\frac{s}{d^2}$  ne dépasserait pas 0,10 avec les chiffres que nous avons admis. Si, par exemple,  $d = 1$  met 40, on voit que la fraction de la surface de l'empennage compensant strictement l'instabilité du fuselage, n'excéderait pas 0,2 m. q., fraction très faible de la surface totale de l'empennage.

En résumé, si l'on déterminait au laboratoire les caractéristiques aérodynamiques propres du fuselage, il serait possible de calculer la fraction d'empennage strict annulant son instabilité. Le fuselage n'agirait plus alors que comme une résistance parasite indépendante de l'incidence.

Il sera généralement plus pratique et plus expéditif d'essayer au laboratoire l'ensemble de l'aile et du fuselage dont la présence modifiera légèrement la courbe des moments par rapport au bord d'attaque de l'aile. Pour fixer les idées, nous apprécierons l'ordre de grandeur de cette modification, soit (fig. 9),  $h = AA_1$  la distance du bord d'attaque A de l'aile à l'axe du fuselage,  $h$  étant positif quand  $A_1$  est en dessous de la corde de l'aile et  $e = A_1 I_0$  la distance au centre de dérive de la projection  $A_1$  de A sur l'axe du fuselage,  $e$  étant positif quand  $A_1$  est en avant de  $I_0$ .

Pour se rendre compte de la façon dont est modifié le moment unitaire  $c_m$  par rapport au bord d'attaque, il suffit de faire la réduction par rapport à ce point des efforts aérodynamiques appliqués à la carène. On voit immédiatement que l'effort axial  $F'_t$  de coefficient unitaire  $c'_t$  constant se comporte comme une résistance indépendante de l'incidence et a pour double effet :

1<sup>o</sup> d'augmenter le coefficient unitaire  $c_t$  de l'aile suivant sa corde de  $c'_t \frac{d^2}{S}$  quantité égale, par exemple, à 0,002 si  $c'_t = 0,05$ ,  $d = 1$  met 40,  $S = 50$  m. q.

2<sup>o</sup> d'augmenter également le coefficient unitaire  $c_{m0}$  de moment de portance nulle de l'aile de la quantité  $c'_t \frac{d^2}{S} \frac{h}{l}$ , égale à 0,002 avec les chiffres précédents et  $\frac{h}{l} = 1$ . Au lieu d'une augmentation du coefficient  $c_{m0}$ , on obtiendrait, au contraire, une diminution si  $h$  était négatif, le point A' étant alors au-dessus de la corde de l'aile.

Pour évaluer de la même façon l'influence de l'effort  $F'_n$  normal à

l'axe, il convient tout d'abord d'évaluer son coefficient unitaire  $c'_n$  en fonction de la portance  $c_z$  de l'aile.

$c'_n$  étant, comme nous l'avons montré, proportionnel à la déviation  $\alpha$  de l'axe du fuselage sur le vent relatif est, par suite, une fonction

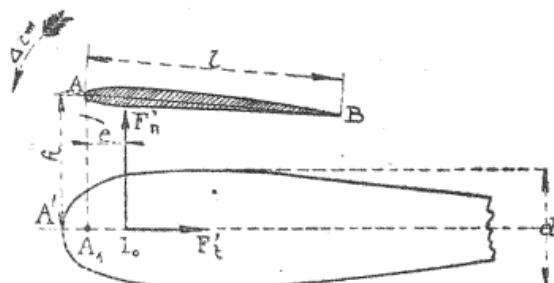


Fig. 9.

linéaire de l'incidence de l'aile, donc aussi de sa portance  $c_z$ , en s'annulant pour  $c_z = c_{z0}$ , l'axe du fuselage étant alors parallèle au vent. On peut donc poser :

$$c'_n = B'(c_z - c_{z0}). \quad (54)$$

Le calcul de  $B'$  est immédiat, car si  $B$  est le coefficient angulaire de la droite des  $c_z$  en fonction de l'incidence,  $k$  le coefficient de proportionnalité de  $c'_n$  à  $\alpha$ , on a  $BB' = k$ , ce qui donne  $B' = 0,3$  pour  $B = 4$  et  $k = 1,2$ , cette dernière valeur étant celle que nous avons précédemment admise.

Dans la réduction des forces par rapport au point A, il en résulte que  $F'_n$  a pour effet :

1° d'augmenter le coefficient de portance  $c_z$  assimilable au coefficient unitaire de l'aile suivant la normale à sa corde, de la quantité  $c'_n \frac{d^2}{S} = B' \frac{d^2}{S} (c_z - c_{z0})$ . Si  $c_z = 1$ ,  $c_{z0} = 0,5$ ,  $d = 1,40$ ,  $S = 50$  m. q.,  $B' = 0,3$ , cette augmentation de  $c_z$  est assez minime et n'atteint que 0,006.

2° d'augmenter également le coefficient unitaire  $c_m$  du moment de l'aile de la quantité  $c'_n \frac{d^2 e}{S l} = B' \frac{d^2 e}{S l} (c_z - c_{z0})$ . On obtiendrait, au contraire, une diminution du moment si  $e$  était négatif, le centre de dérive  $I_0$  étant en avant de la projection  $A_1$  du bord d'attaque de l'aile sur l'axe du fuselage, ce cas étant d'ailleurs le cas le plus généralement rencontré.

En considérant donc  $e$  comme positif ou négatif, le coefficient  $c_{m_0}$  de moment de portance nulle se trouve majoré de  $-B' \frac{d^2}{S} \frac{e}{l} c_{z_0}$ , tandis que le coefficient  $m$  de  $c_z$  dans l'expression de  $c_m$  se trouvera majoré de  $B' \frac{d^2}{S} \frac{e}{l}$ .

Supposons, par exemple,  $\frac{e}{l} = -\frac{1}{2}$  et, pour les autres coefficients, les mêmes valeurs que précédemment.  $c_{m_0}$  sera majoré de 0,003 et  $m$  diminué de 0,006.

Il est ainsi possible de corriger facilement la courbe des moments d'une aile pour tenir compte de l'influence d'un fuselage dont on connaît tout au moins approximativement les caractéristiques aérodynamiques, les deux coefficients  $c_{m_0}$  et  $m$  de la droite des moments étant simultanément modifiés.

Le plus souvent, on déterminera au laboratoire la courbe des moments de l'ensemble, aile et fuselage. Les considérations que nous venons de développer permettront dans tous les cas de prévoir l'ordre de grandeur des résultats et en faciliteront la discussion.

**3<sup>o</sup> Influence des résistances nuisibles.** — Nous envisagerons ici les résistances accessoires de toute nature offertes à l'action de l'air, mais supposées telles que les forces aérodynamiques qu'elles engendrent puissent être considérées comme uniquement proportionnelles au carré de la vitesse et indépendantes de l'incidence aérodynamique de l'aile.

Cette hypothèse s'applique en principe à toutes les résistances nuisibles d'un avion autres que le fuselage dont nous avons traité l'effet séparément. Si, cependant, certains organes résistants sont carénés de façon à pouvoir donner une légère sustentation fonction de l'incidence, leur effet pourra s'analyser par une méthode absolument identique à celle que nous venons d'indiquer pour le fuselage.

Ce cas particulier étant excepté, nous définirons toute résistance parasite élémentaire par la surface  $\sigma$  du plan mince qui, exposé normalement au vent, fournirait la même résistance. Ce plan mince est caractérisé par un coefficient de résistance, uniforme dans tous les cas, tel qu'à V mètres par seconde, il offre au vent, aux conditions atmosphériques normales du sol, la résistance :

$$f = 0,08 \sigma V^2, \quad (55)$$

où, avec la notation précédemment adoptée :

$$f = \frac{\alpha}{2g} 1,28 \sigma V^2. \quad (56)$$

Considérons alors (fig. 10) une résistance nuisible de grandeur  $f$  appliquée en D à la distance  $h = DH$  de la corde de l'aile, le plan mince orthogonal de résistance équivalente ayant une surface  $\sigma$ . La

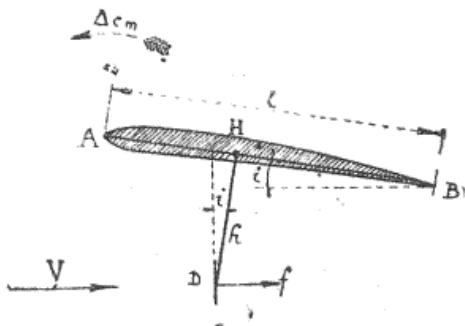


Fig. 10.

distance  $h$  sera considérée comme positive lorsque la résistance est en dessous de la corde de l'aile. Si  $i$  est l'incidence, la composante  $f \sin i$  de  $f$  suivant DH sera négligée et  $f$  pourra être considérée comme normale à DH, così étant assimilable à l'unité.

Il en résulte, en représentant  $f$  par la formule (56), que, dans la réduction du système des forces aérodynamiques par rapport au bord d'attaque A de l'aile, cette résistance élémentaire aura pour effet :

1<sup>o</sup> D'augmenter le coefficient unitaire  $c_f$  de la résultante aérodynamique suivant la corde de l'aile de la quantité  $1,28 \frac{\sigma}{S}$ ;

2<sup>o</sup> D'augmenter également le coefficient  $c_{m_0}$  du moment de portance nulle de l'aile de la quantité  $1,28 \frac{S}{\sigma} \frac{h}{l}$ . Si  $h$  est négatif, c'est-à-dire, si la résistance est au-dessus de l'aile,  $c_{m_0}$  se trouvera, au contraire, diminué.

Les résistances nuisibles provoquent ainsi un simple décalage parallèlement à la corde de la polaire de l'aile rapportée à la corde et à sa normale et un simple décalage parallèlement à l'axe des  $c_m$  de la courbe des moments unitaires  $c_m$  en fonction de la portance  $c_z$ . Ces deux décalages peuvent être immédiatement évalués.

Si maintenant on considère l'équilibre des couples autour du

centre de gravité, sont seules favorables à la stabilité longitudinale *les résistances qui sont au-dessus du centre de gravité.*

En effet, ces résistances, provoquant un couple cabreur, permettent, pour les équilibrer, d'avancer le centre de gravité vers le bord d'attaque de l'aile parallèlement à la corde, résultat qui, comme nous l'avons montré, accroît toujours la stabilité apportée par l'aile. Au contraire, dans le cas où des résistances importantes, telles que celles que peuvent provoquer des flotteurs sont très en-dessous du centre de gravité, il faut, pour les équilibrer en reculant le centre de gravité, se rappeler qu'un tel procédé diminue toujours la stabilité.

Nous terminerons ce sujet en notant qu'en général, on sera obligé de déterminer par le calcul, comme nous venons de l'indiquer, les modifications apportées par les résistances aux caractéristiques aérodynamiques de l'aile.

Le laboratoire ne peut, en effet, essayer avec une précision suffisante une maquette d'avion munie de tous ses accessoires. Pour ces derniers, à une échelle des dimensions trop réduite, les résistances mesurées différeraient trop notablement des résistances réelles réduites par similitude et un calcul, même très approché, est toujours préférable.

**4<sup>e</sup> Cas d'une cellule biplane.** — Nous allons établir que toute cellule biplane, au point de vue de ses efforts aérodynamiques et de leur moment, est équivalente à une aile monoplane de même profil et d'allongement donné par le calcul. Nous montrerons où il faut situer l'origine des moments pour retrouver la même formule linéaire du coefficient de moment que pour une aile monoplane. Les calculs relatifs à la stabilité statique seront ainsi ramenés à ceux d'une aile monoplane et s'effectueront exactement comme il a été indiqué.

Dans une cellule biplane de surface totale  $S$ , l'aile supérieure porte la fraction  $x_1$  de la sustentation totale du biplan et l'aile inférieure la fraction  $x_2$ , ces deux coefficients étant liés par la relation  $x_1 + x_2 = 1$ . En toute rigueur,  $x_1$  et  $x_2$  dépendent de l'incidence, mais pratiquement, on peut admettre qu'ils gardent la même valeur à toutes les incidences, ou tout au moins pour les entreplans usuels. C'est ainsi que, pour des biplans à ailes égales, l'expérience a montré que l'aile supérieure a la même portance que si elle était isolée, tandis que l'aile inférieure porte environ 20 % de moins.

Si  $\mu$  est le rapport de l'envergure  $L_2$  de l'aile inférieure à l'envergure  $L_1$  de l'aile supérieure,  $c_z$  le coefficient de portance de la cellule, la théorie de Prandtl, basée sur la répartition elliptique des poussées

en envergure, indique que la traînée induite d'un biplan a pour expression :

$$c_{xi} = \frac{c_x^2 S}{\pi L_1^2} \left( x_1^2 + \frac{x_2^2}{\mu^2} + 2\sigma \frac{x_1 x_2}{\mu} \right). \quad (57)$$

Dans cette formule,  $\sigma$  est un coefficient d'interaction donné par Prandtl en fonction de  $\mu$  et de l'entreplan relatif  $\frac{2h}{L_1 + L_2}$  rapporté à l'envergure moyenne :

Valeurs de  $\sigma$ .

$\frac{2h}{L_1 + L_2}$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$\mu = 1$	0,780	0,655	0,561	0,485	0,420	0,370	0,327	0,290
$\mu = 0,8$	0,690	0,600	0,523	0,459	0,401	0,355	0,315	0,282
$\mu = 0,6$	0,540	0,485	0,437	0,394	0,351	0,315	0,285	0,255

Il résulte de ce qui précède qu'en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k^2} = x_1^2 + \frac{x_2^2}{\mu^2} + 2\sigma \frac{x_1 x_2}{\mu}, \\ \lambda' = \frac{k^2 L_1^2}{S}, \end{array} \right. \quad (58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{xi} = \frac{c_x^2}{\pi \lambda'}, \end{array} \right. \quad (59)$$

on aura

$$c_{xi} = \frac{c_x^2}{\pi \lambda'}. \quad (60)$$

Ces formules sont également applicables aux biplans droits et aux biplans à ailes décalées.

On peut en conclure que la courbe polaire caractéristique de la cellule biplane sera la même que celle d'une aile isolée de même profil et d'allongement  $\lambda'$ . Le coefficient angulaire  $B$  de la droite des portances  $c_x = B(i + i_0)$  se calculera, comme nous l'avons indiqué pour une aile isolée, par la formule :

$$B = \frac{B_0}{1 + \frac{B_0}{\pi \lambda'}}, \quad (61)$$

dans laquelle  $B_0 = 5,3$ .

Remarquons qu'ici  $\frac{L_1^2}{S}$  représente l'allongement apparent de la cel-

lule, en supposant que c'est l'envergure de l'aile supérieure qui est la plus grande, sinon il faudrait intervertir  $L_1$  et  $L_2$ .

Il est bien certain que, pour un allongement apparent donné, le biplan est toujours moins résistant que le monoplan, puisque, comme nous le verrons,  $k$ , égal à l'unité pour le monoplan, est toujours supérieur à l'unité pour le biplan.

Supposons que le biplan ait ses deux ailes égales et identiques, l'allongement géométrique individuel de chaque aile sera  $\lambda_0 = \frac{L^*}{0,5 S}$ . Tout se passe donc comme si chaque aile avait la trainée induite donnée par la formule (60) qui peut s'écrire :

$$c_{xi} = \frac{S}{\pi k^2 L_1^2} c_x^2 = \frac{0,5 S}{0,5 \pi k^2 L_1^2} c_x^2 = \frac{2 c_x^2}{\pi k^2 \lambda_0}. \quad (62)$$

On peut donc dire aussi qu'au point de vue global, pour un biplan à ailes égales, tout se passe comme si l'interaction était nulle, à condition de remplacer dans les calculs aérodynamiques l'envergure géométrique  $\lambda_0$  de chacune des ailes par l'envergure corrigée  $\lambda_0 \frac{k^*}{2}$ , plus petite que  $\lambda_0$  et égale à  $\lambda'$ . Il ne faudrait pas en conclure qu'en réalité chaque aile considérée isolément est soumise aux mêmes actions que cette aile monoplane équivalente, car cette équivalence n'est valable qu'en considérant l'ensemble du biplan. Les polaires respectives des deux ailes ne sont pas en effet identiques, les interactions n'étant pas les mêmes pour l'aile supérieure et l'aile inférieure, et ces polaires individuelles ne peuvent être considérées comme correspondant à celles d'une aile monoplane.

Il est intéressant d'appliquer, comme l'a fait Prandtl, les formules générales que nous venons de rappeler aux biplans de résistance induite minimum.

Pour un biplan dont les envergures  $L_1$  et  $L_2$ , des deux ailes et la surface totale  $S$  sont données, il est bien évident qu'à toutes les portances la résistance induite sera minimum si la répartition de la sustentation entre les deux ailes est telle que  $\lambda'$ , donc  $k$  soit maximum. En remplaçant, dans la formule (58),  $x_1$  par  $1 - x_2$  et en annulant la dérivée de l'expression obtenue par rapport à  $x_2$ , on trouve que le meilleur biplan aura une aile inférieure portant la fraction  $x_2$  du poids total telle que :

$$x_2 = \frac{\mu(\mu - \sigma)}{1 + \mu^2 - 2\mu\sigma}. \quad (63)$$

En remplaçant ensuite  $x_2$  par cette valeur et  $x_1$  par  $1 - x_2$  dans l'équation (58), on obtient la valeur correspondante de  $k^2$  qui peut se mettre sous la forme simple :

$$k^2 = 1 + \frac{(\mu - \sigma)^2}{1 - \sigma^2}. \quad (64)$$

Cette formule montre bien, ainsi que nous l'avons annoncé, que le coefficient  $k$  est toujours plus grand que l'unité.

Notons que ce coefficient  $k$ , dont l'expression résulte des travaux de Prandtl, a également été introduit par Munk qui l'a déterminé expérimentalement et les valeurs qu'il a mesurées diffèrent peu de celles que donne la formule précédente.

Pour calculer les caractéristiques  $x_2$  et  $k$  des biplans de résistance minimum, il suffit de remplacer  $\sigma$  par sa valeur précédemment donnée en fonction de l'entreplan et du rapport  $\mu$  des envergures. En rapportant ici l'entreplan  $h$  à l'envergure  $L_1$ , on obtient les chiffres des tableaux ci-après qui pourront être utilisés, même pour les biplans s'écartant sensiblement de la répartition la plus favorable des sustentions :

I. — Valeurs de  $x_2$ .

$\frac{h}{L_1} =$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$\mu = 1$	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
$\mu = 0,8$	0,172	0,246	0,285	0,310	0,327	0,338	0,347	0,355
$\mu = 0,6$	0,06	0,104	0,134	0,157	0,176	0,191	0,202	0,211

II. — Valeurs de  $k$ .

$\frac{h}{L_1} =$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$\mu = 1$	1,060	1,100	1,132	1,160	1,186	1,210	1,230	1,246
$\mu = 0,8$	1,015	1,036	1,059	1,080	1,100	1,119	1,136	1,150
$\mu = 0,6$	1,005	1,015	1,024	1,037	1,049	1,059	1,070	1,079

On voit que  $k$  augmente quand l'entreplan augmente ou que  $\mu$  se rapproche de l'unité, ainsi que le montre d'ailleurs la formule (64).

*Le biplan le plus avantageux est donc à envergures égales* (<sup>4</sup>). Pour les très grands entreplans,  $\sigma$  tend vers zéro et la valeur optimum de  $x_2$  tend vers  $\frac{\mu^2}{1+\mu^2}$ ,  $k^2$  ayant lui-même pour valeur limite  $1 + \mu^2$ . En particulier, si les envergures sont égales, les valeurs limites de  $x_2$  et de  $k$  sont respectivement 0,5 et  $\sqrt{2}$ , résultat évident à priori.

Le graphique de la figure 11 donne en fonction de l'entreplan relatif  $\frac{h}{L_1}$  les valeurs de  $k$  et de  $x_2$  pour différentes valeurs de  $\mu$ . En particulier, pour les biplans à envergures égales, on trouve  $x_2 = 0,5$ , quel que soit l'entreplan, et :

$$k = \sqrt{\frac{2}{1+\sigma}} \quad (65)$$

Ce coefficient, appliqué à des biplans constitués par deux ailes identiques, donne des résultats en bon accord avec l'expérience, ainsi que l'a constaté M. Toussaint. Considérons, par exemple, un tel biplan dont chacune des ailes ait un allongement géométrique de 6 :

$$\lambda_0 = \frac{2 L_1^2}{S} = 6,$$

l'allongement apparent  $\frac{L_1^2}{S}$  de la cellule étant, par suite, égal à 3.

Supposons un entreplan relatif  $\frac{h}{L^2} = 0,10$  pour lequel  $k = 1,1$ .

L'envergure corrigée  $\lambda'$  à introduire dans les calculs sera

$$\lambda' = \frac{k^2 L_1^2}{S} = 3,62,$$

La cellule biplane se comportera, au point de vue aérodynamique, comme une aile monoplane d'allongement 3,62. On peut dire aussi qu'on peut négliger l'interaction en considérant que chaque aile constitutive n'a pas l'allongement 6, mais l'allongement 3,62.

Considérons maintenant la cellule du Bréguet XIX pour laquelle :

Plan supérieur :  $S = 33 \text{ mq.}$ ,  $L = 14 \text{ m.}$  go  $\frac{L^2}{S} = 6,72$ ,

Plan inférieur :  $S_2 = 15 \text{ mq.}$   $L_2 = 10 \text{ m.}$  80,

Surface totale :  $S = S + S_2 = 48 \text{ mq.}$

Allongement apparent :  $\frac{L^2}{S} = 4,64$ ,  $\mu = \frac{L_2}{L_1} = 0,725$ ,

(<sup>4</sup>) Cette conclusion n'est évidemment exacte que pour une valeur donnée de l'allongement apparent  $\frac{L^2}{S}$ .

Entreplan :  $h = 1 \text{ m. } 70$ ,  $\frac{h}{L} = 0,114$ .

Pour ces valeurs de l'entreplan et de  $\mu$ , la participation optimum

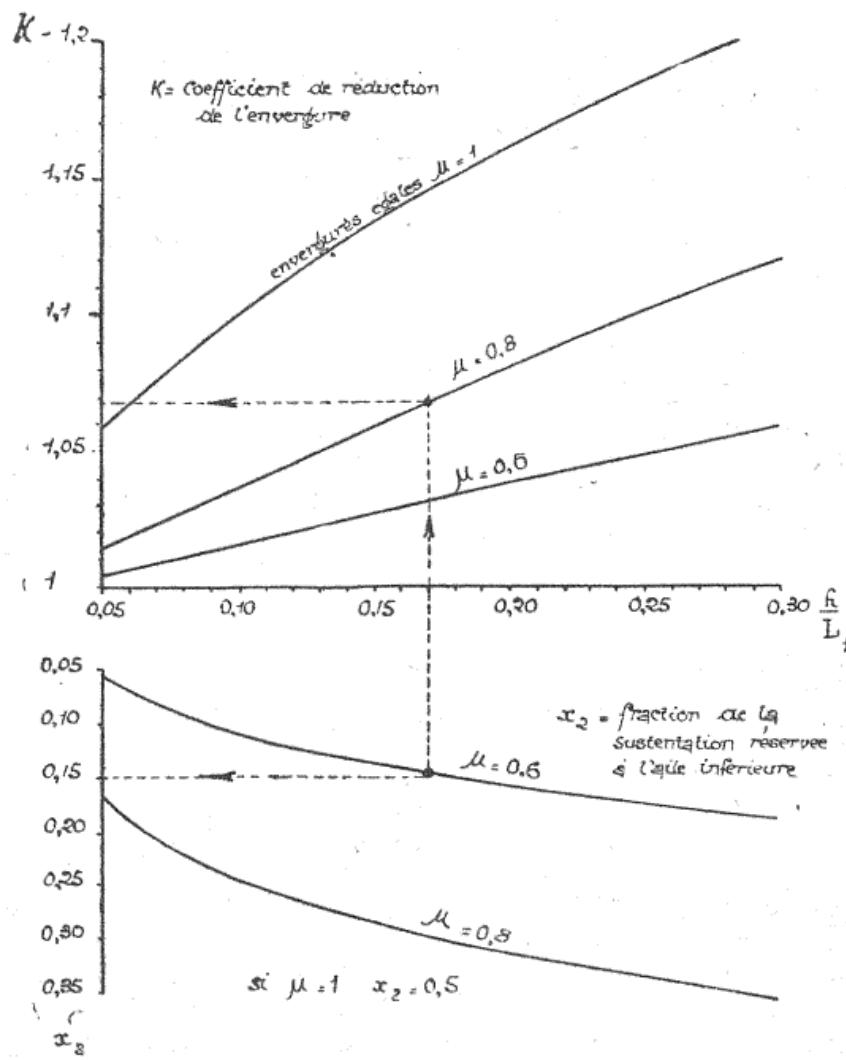


Fig. II.

de l'aile inférieure à la sustentation totale serait d'environ 20 %, un peu plus petite que la sustentation réalisée puisque  $\frac{S_2}{S} = 0,31$ . Néanmoins, cet appareil est voisin de l'optimum et  $k$  variant peu au voisinage de son maximum, nous prendrons la meilleure valeur  $k = 1,03$ . Il en résulte que l'ensemble des deux ailes est sensiblement équivalent à une aile monoplane de même profil et d'allongement  $(1,03)^2 \times 4,64 = 4,9$ .

En résumé, il résulte de ces considérations que, pour tenir compte de l'interaction des ailes d'un biplan, il suffit simplement de considérer un allongement fictif  $\lambda'$ , facile à calculer, et qui remplacera au point de vue aérodynamique l'allongement géométrique d'une aile monoplane.

Ainsi que nous l'avons dit, la polaire d'une aile rapportée à la corde et à sa normale et définie par les variations de  $c_t$  en fonction de  $c_s$  est indépendante de l'allongement et ne contient que des coefficients de profil. La polaire ainsi définie est donc la même pour une aile isolée ou une cellule biplane. Seule varie la correspondance entre l'incidence et  $c_s$ , puisqu'elle dépend de l'allongement.

Après avoir ainsi déterminé la grandeur de la résultante des efforts aérodynamiques appliqués à une cellule biplane et la correspondance entre l'incidence et la poussée, nous passerons maintenant à l'étude du couple aérodynamique provoqué par ces efforts. L'expérience montre que, pour chacune des ailes considérée individuellement, le coefficient unitaire  $c_m$  du moment par rapport au bord d'attaque en fonction du coefficient de portance de cette aile a la même expression linéaire

$$c_m = c_{m0} + m c_s \quad (66)$$

que pour une aile monoplane isolée.

Pour voir immédiatement comment se pose le problème et à titre de première approximation, nous négligerons d'abord l'interaction entre les deux ailes en supposant que, pour chaque incidence, les coefficients unitaires  $c_t$  et  $c_s$  suivant la corde et la normale sont les mêmes pour les deux ailes de surfaces respectives  $S_1$  et  $S_2$ . A défaut de données permet-

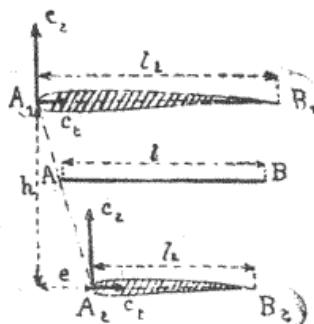


Fig. 12.

tant une plus grande précision, cette approximation sera généralement suffisante pour les entreplans usuels et les cellules sans interinclinaison.

Pour chacune des ailes, la réduction des forces aérodynamiques par rapport aux bords d'attaque  $A_1$  et  $A_2$  donnera le couple unitaire  $c_m$  et les efforts unitaires  $c_t$  et  $c_z$ .

Pour obtenir le moment résultant par rapport à un point quelconque du plan, il faut composer les couples de coefficient  $c_m$  et les moments des efforts  $c_t$  et  $c_z$  appliqués en  $A_1$  et  $A_2$  (fig. 12).

Les efforts globaux appliqués en  $A_1$  et  $A_2$  sont proportionnels aux surfaces respectives  $S_1$  et  $S_2$ , de sorte que si sur  $A_1 A_2$  nous choisissons un point A tel que :

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{S_2}{S_1}, \quad (67)$$

le moment des forces appliquées en  $A_1$  et  $A_2$  sera identiquement nul par rapport à ce point, quelle que soit l'incidence.

Si nous composons maintenant les couples, il apparaît que le moment résultant par rapport à A sera, en désignant par  $l_1$  et  $l_2$  les profondeurs des deux ailes et par  $S = S_1 + S_2$  la surface totale :

$$M_A = \frac{\alpha V^2}{2g} c_m (S_1 l_1 + S_2 l_2) = \frac{\alpha V^2}{2g} c_m S l, \quad (68)$$

avec :

$$l = \frac{S_1 l_1 + S_2 l_2}{S} = \frac{S_1 l_1 + S_2 l_2}{S_1 + S_2}. \quad (69)$$

Donc, en négligeant l'interaction des ailes, le coefficient de moment aérodynamique sera le même que pour une aile isolée pour le point A situé sur la droite joignant les bords d'attaque  $A_1$  et  $A_2$  tel que  $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{S_2}{S_1}$ , à condition de rapporter ce coefficient à la surface totale S et à la profondeur fictive  $l$  donnée par la formule (69).

Tout se passe donc, dans ce cas, comme pour une aile monoplane dont le profil aurait son bord d'attaque en A, sa corde parallèle aux cordes des deux ailes et une profondeur égale à la profondeur fictive  $l$ .

Les coefficients unitaires  $c_t$  et  $c_z$  de la résultante suivant la corde et sa normale seront les coefficients globaux du biplan calculés, comme il a été dit, en introduisant la notion d'envergure corrigée.

Le problème est ainsi ramené à un problème déjà traité.

On détermine généralement au laboratoire le moment unitaire par rapport au bord d'attaque  $A_1$  de l'aile supérieure et il est évident que ce coefficient varie en fonction de la portance du biplan suivant une loi qui n'est plus linéaire, mais bien parabolique.

Pour le montrer, nous négligerons encore l'interaction et nous supposerons, comme on doit le faire, le coefficient de moment évalué par rapport au produit  $S_l$  de la surface totale par la profondeur fictive calculée comme nous l'avons dit.

Le bord d'attaque  $A_2$  de l'aile inférieure a par rapport à  $A_1$ , suivant la corde et sa normale, les coordonnées  $e$  et  $h$ ,  $e$  étant le décalage et  $h$  l'entreplan;  $e$  sera, par hypothèse, positif quand l'aile inférieure est décalée vers l'arrière (fig. 12).

En prenant les moments par rapport au bord d'attaque  $A_1$ , on trouve immédiatement :

$$M_{A_1} = \frac{\rho V^2}{2g} \left[ c_m (S_1 l_1 + S_2 l_2) + S_2 (e c_x + h c_t) \right]. \quad (70)$$

En rapportant le coefficient de moment au produit  $S_l$  de la surface totale par la profondeur fictive :

$$l = \frac{S_1 l_1 + S_2 l_2}{S},$$

on trouve que le coefficient de moment par rapport au bord d'attaque  $A_1$  de l'aile supérieure aura pour valeur :

$$c_{m1} = c_m + \frac{S_2}{S} \left( \frac{e}{l} c_x + \frac{h}{l} c_t \right). \quad (71)$$

Dans cette formule,  $c_m = c_{m0} + 0,25 c_x$  qui est le coefficient de moment de chaque aile isolée et  $c_t$  qui, pour toute aile monoplane de même profil ou toute cellule biplane, a la même expression en fonction de  $c_x$ , est donné pour la formule (11) déjà démontrée :

$$c_t = c_{x0} + i_0 c_x - \frac{c_x^2}{B_0}. \quad (72)$$

Nous appliquerons ces formules à un biplan à ailes égales non décalées ( $e=0$ ,  $l_1=l_2=l$ ,  $S_1=S_2=2S$ ) pour lequel  $\frac{h}{l}=1$ . Le profil supposé est le 285 de Prandtl pour lequel ont été mesurés les deux moments unitaires  $c_m$  et  $c_{m1}$ . On a, pour ce profil,

$$c_{x0}=0,0128, i_0=0,087, c_{m0}=0,065.$$

En remplaçant  $B_0$  par 5, 3, on obtient :

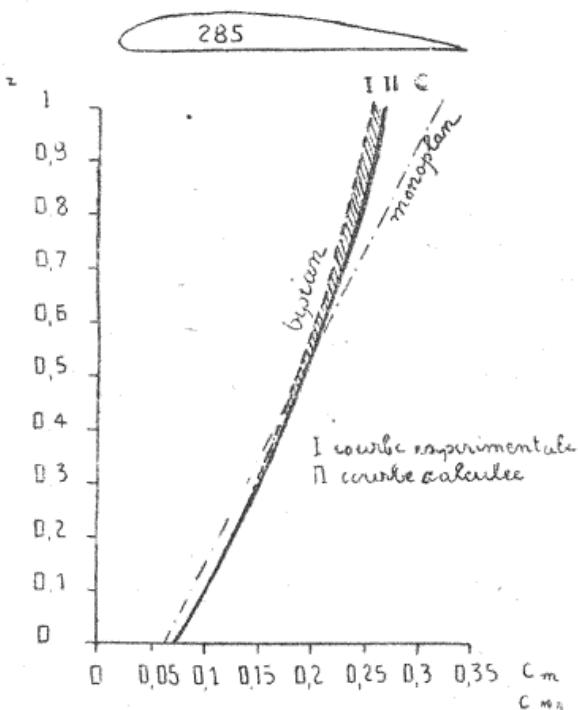
$$c_{m1} = 0,065 + 0,25 c_x + 0,5 \left( 0,0128 + 0,087 c_x - \frac{c_x^2}{5,3} \right),$$

c'est-à-dire :

$$c_{m1} = 0,071 + 0,293 c_x - 0,0945 c_x^2.$$

Nous avons représenté sur la figure 13 les courbes des coefficients  $c_{m1}$  calculés par cette formule et déterminés au laboratoire. L'accord paraît pratiquement suffisant, tout au moins en première approximation.

Il est plus rigoureux, quand on possède la courbe expérimentale des moments par rapport au bord d'attaque de l'aile supérieure, d'effectuer



$$\text{polaires d'un biplan} \quad \frac{h}{L_f} = 0,10$$

Fig. 13.

l'opération inverse qui consiste à chercher la position du point du plan pour lequel la courbe des moments se réduit à une droite  $c_{m0} + 0,25 c_z$ , de sorte qu'on se trouve encore ramenés au problème déjà traité. Nous admettons que la courbe expérimentale est une courbe parabolique :

$$c_{m1} = a_0 + a_1 c_z + a_2 c_z^2. \quad (73)$$

Soit alors  $x$  et  $y$  les coordonnées par rapport au bord d'attaque  $A_1$  du point cherché  $A$ , ces coordonnées étant comptées respectivement suivant la corde et la normale à la corde.

Nous avons montré que, sans approximation, le coefficient  $c_t$  du biplan est donné en fonction de sa portance  $c_z$  par la formule (72). Le système des forces aérodynamiques se réduit donc, en coefficients unitaires, à  $c_{m_1}$  et à  $c_t$  et  $c_z$  appliqués en  $A_1$ .

Le coefficient de moment par rapport au point A aura par suite sa valeur :

$$c'_m = a_0 + a_1 c_z + a_2 c_z^2 - \frac{x}{l} c_z - \frac{y}{l} c_t.$$

Cette expression est du second degré par rapport à  $c_z$ , comme on le voit, en remplaçant  $c_t$  par sa valeur. En annulant le coefficient de  $c_z^2$  et en écrivant que le coefficient de  $c_z$  est égal à 0,25, nous obtiendrons deux équations à deux inconnues  $x$  et  $y$ . Il sera donc toujours possible de déterminer exactement le point du plan pour lequel la courbe des moments est une droite de coefficient angulaire 0,25. Après avoir ainsi indiqué comment se pose le problème en première approximation, quand on ne possède aucune donnée expérimentale et comment, d'autre part, on peut utiliser la courbe parabolique des moments quand on la possède, nous analyserons maintenant l'effet de l'interaction en supposant, pour ne pas compliquer, que les cordes des deux ailes sont parallèles, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'inclinaison.

On sait que si une aile a un allongement  $\lambda$  et se trouve isolée dans le vent, sa polaire, dans la zone utile, a pour équation :

$$c_x = c_{x_0} + \frac{c_z^2}{\pi \lambda}, \quad (74)$$

avec  $c_z = B(i + i_0)$ , (75)

le coefficient  $B$  s'exprimant, en fonction de  $\lambda$ , par la formule déjà indiquée :

$$B = \frac{B_0}{1 + \frac{B_0}{\pi \lambda}}. \quad (76)$$

L'expérience révèle que, même pour les grands entreplans, les polaires individuelles des deux ailes, et particulièrement celle de l'aile inférieure, sont profondément modifiées. Pour chacune des ailes, en effet :

1° La traînée varie toujours linéairement en fonction du carré de la portance, mais la traînée de portance nulle n'est plus égale au coefficient de profil  $c_{x_0}$ ; elle est augmentée d'une quantité positive  $\epsilon_1$  pour l'aile supérieure et négative  $\epsilon_2$  pour l'aile inférieure.

2<sup>e</sup> La résistance induite  $\frac{c_x^2}{\pi \lambda}$  est augmentée, cette augmentation étant beaucoup plus marquée pour le plan inférieur que pour le plan supérieur.

3<sup>e</sup> En ce qui concerne les portances, les portances individuelles des deux ailes ne sont pas nulles lorsque la portance du biplan passe par la valeur zéro.

L'aile supérieure, d'envergure  $L_1$  et de surface  $S_1$ , a un allongement réel  $\lambda_1 = \frac{L_1^2}{S_1}$ , l'aile inférieure, d'envergure  $L_2$  et de surface  $S_2$ , a un allongement réel  $\lambda_2 = \frac{L_2^2}{S_2}$ , tandis que l'allongement du biplan de surface  $S = S_1 + S_2$  est défini, comme nous l'avons vu, par l'allongement apparent  $\lambda = \frac{L^2}{S}$ .

Pour une incidence donnée, le biplan a une portance  $c_x$  alors que les portances individuelles des ailes supérieure et inférieure sont respectivement  $c_{x1}$  et  $c_{x2}$ . On peut écrire les relations générales.

$$\left. \begin{array}{l} c_{x1} = c_{x0} + \varepsilon_1 + \frac{c_{z1}^2}{\pi k_1^2 \lambda_1}, \\ c_{x2} = c_{x0} + \varepsilon_2 + \frac{c_{z2}^2}{\pi k_2^2 \lambda_2}, \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (77) \\ (79) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} c_{z1} = a_1 + b_1 c_x, \\ c_{z2} = a_2 + b_2 c_x. \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (78) \\ (80) \end{array}$$

Dans ces formules,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  sont huit coefficients d'interaction qui ne sont pas indépendants, ainsi que nous le montrerons, et les relations (77) et (79) sont les équations des polaires respectives des deux ailes.

D'autre part, si l'on considère le biplan, on sait qu'il est assimilable à une aile monoplane d'allongement  $k^2 \lambda$ , le coefficient d'interaction  $k$  étant déterminé, comme il a été dit, par la méthode de Prandtl, le coefficient  $B$  s'en déduisant par la formule (76) dans laquelle l'allongement  $\lambda$  est remplacé par l'allongement corrigé  $k^2 \lambda$ . On a donc, pour le biplan :

$$c_x = c_{x0} + \frac{c_z^2}{\pi k^2 \lambda}, \quad , \quad (81) \quad c_z = B(i + i_0). \quad (82)$$

A ces formules, il convient évidemment d'adoindre les identités qui définissent l'addition des traînées et des poussées totales à toute incidence :

$$c_{x1} S_1 + c_{x2} S_2 = c_x S, \quad , \quad (83) \quad c_{z1} S_1 + c_{z2} S_2 = c_z S. \quad (84)$$

Ayant écrit ces relations générales, il est facile de voir que les paramètres d'interaction introduits ne sont pas indépendants, mais sont liés par certaines relations fondamentales que nous allons établir et qui limitent le nombre des coefficients à demander à l'expérience.

Il suffit, pour les obtenir, de remplacer dans les formules (83) et (84),  $c_{x1}$ ,  $c_{x2}$ ,  $c_{z1}$ ,  $c_{z2}$  par leurs expressions en fonction de la portance  $c_z$  du biplan. On obtient ainsi deux identités qui doivent être vérifiées quel que soit  $c_z$ . Donc, dans ces identités, les termes constants et les coefficients de  $c_z$  et  $c_{zz}$  doivent être séparément nuls, ce qui donne immédiatement :

$$\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2 + \frac{a_1^2 S_1}{\pi k_1^2 \lambda_1} + \frac{a_2^2 S_2}{\pi k_2^2 \lambda_2} = 0 , \quad (85)$$

$$\frac{a_1 b_1 S_1}{k_1^2 \lambda_1} + \frac{a_2 b_2 S_2}{k_2^2 \lambda_2} = 0 , \quad (86)$$

$$\frac{b_1^2 S_1}{k_1^2 \lambda_1} + \frac{b_2^2 S_2}{k_2^2 \lambda_2} = \frac{S}{k^2 \lambda} , \quad (87)$$

$$a_1 S_1 + a_2 S_2 = 0 , \quad (88)$$

$$b_1 S_1 + b_2 S_2 = S_1 + S_2 . \quad (89)$$

En remplaçant  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda$  par leurs valeurs et en désignant par  $\mu$  le rapport  $\frac{L_2}{L_1}$  des envergures, on tire de ces formules, par quelques transformations simples :

$$k_1^2 + \mu^2 k_2^2 = k^2 \quad (90)$$

$$\frac{b_1}{k_1^2 \lambda_1} = \frac{b_2}{k_2^2 \lambda_2} = \frac{1}{k^2 \lambda} \quad (91)$$

$$a_1 S_1 = -a_2 S_2 , \quad (92)$$

$$\frac{a_1}{1 - b_1} = \frac{a_2}{1 - b_2} = A , \quad (93)$$

$$\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2 + \frac{a_1^2 S_1}{\pi \lambda_2} \frac{k^2}{k_1^2 k_2^2} = 0 . \quad (94)$$

Remarquons maintenant que le coefficient  $A$  introduit dans la formule (93) n'est autre que la valeur particulière de la portance  $c_z$  pour laquelle les deux ailes et le biplan ont même coefficient de portance. Ecrivons, en effet, que  $c_{z1} = c_{z2} = c_z$ ; les formules (78) et (80) nous donnent :

$$c_z = \frac{a_1}{1 - b_1} = \frac{a_2}{1 - b_2} = A . \quad (95)$$

Le coefficient global  $k$  étant donné par la théorie de Prandtl, il suffit de connaître  $A$ ,  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$  et  $\epsilon_1$  ou  $\epsilon_2$ , c'est-à-dire en tout trois coefficients d'interaction.

Dans le cas particulier du biplan à ailes égales,  $\mu = 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\lambda$  et  $S_1 = S_2 = 0,5 S$ .

Dans le cas où il n'y a ni décalage, ni intérinclinaison des ailes, d'après les essais du laboratoire de Saint-Cyr on peut admettre pour  $A$ ,  $\alpha_2$  et  $\epsilon_1$ , les chiffres du tableau ci-après donnés en fonction de l'entreplan relatif  $\frac{h}{L_1}$ . La valeur admise pour  $k$  est celle de la théorie de Prandtl et les autres coefficients ont été calculés par les formules que nous venons d'établir en supposant, pour le calcul de  $\epsilon_2$ , un allongement  $\lambda_2 = \lambda_1 = 6$ .

$\frac{h}{L_1} =$	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,25
$A =$	0,70	0,52	0,37	0,25	0,19	0,14	0,11	0,07
$\alpha_2 = - \alpha_1 =$	0,30	0,20	0,13	0,08	0,054	0,036	0,025	0,014
$b_1 =$	1,430	1,385	1,350	1,315	1,285	1,260	1,230	1,200
$b_2 =$	0,570	0,615	0,650	0,685	0,715	0,740	0,770	0,800
$k =$	1,085	1,100	1,113	1,126	1,139	1,150	1,160	1,185
$k_1 =$	0,920	0,916	0,913	0,910	0,909	0,909	0,910	0,918
$k_2 =$	0,578	0,610	0,635	0,657	0,680	0,700	0,720	0,750
$\epsilon_1 =$	0,024	0,017	0,013	0,010	0,007	0,005	0,0035	0,001
$-\epsilon_2 =$	0,044	0,025	0,016	0,011	0,0075	0,0053	0,0037	0,001

Nous avons ainsi tracé sur la figure 14 les polaires individuelles et globale d'un biplan à ailes égales sans décalage ni intérinclinaison pour  $\frac{h}{L_1} = 0,10$ ,  $c_{x0} = 0,016$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\lambda = 6$ .

Nous avons aussi tracé les droites des portances respectives  $C_{z1}$  et  $C_{z2}$  en fonction de  $c_z$ .

A mesure que l'entreplan augmente, le point H pour lequel les trois portances sont égales se rapproche de l'origine,  $\frac{C_{z1}}{c_z}$  tendant à devenir

constant pour toutes les portances usuelles, ainsi que nous l'avons indiqué précédemment.

En ce qui concerne les chiffres indiqués au tableau précédent, nous ferons quelques observations au sujet des variations des coefficients

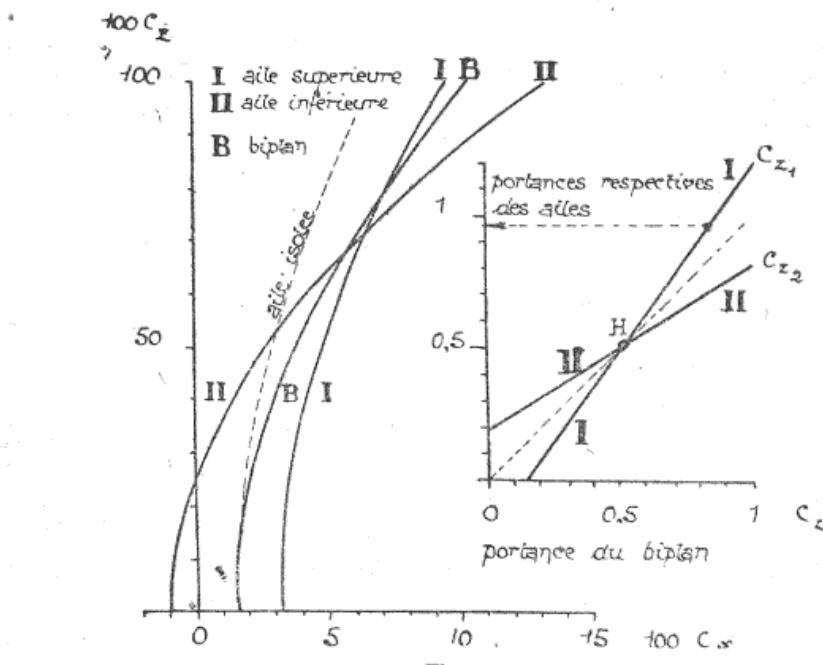


Fig. 14.

qui y sont mentionnés, ces observations s'appliquant aux biplans à ailes égales ou inégales.

Lorsque l'entreplan croît de zéro à l'infini :

1° Le coefficient global  $k$  de Prandtl croît de 1 à  $\sqrt{1 + \mu^2}$ , c'est-à-dire de 1 à  $\sqrt{2}$  dans le cas des envergures égales.

2° Le coefficient  $k_1$  du plan supérieur est toujours inférieur à l'unité, il est égal à 1 pour un entreplan nul et, à un entreplan infini, l'aile se comportant dans ce dernier cas comme une aile isolée. Il passe donc par un minimum pour une certaine valeur de l'entreplan. Dans le cas des surfaces alaires égales, ce minimum est 0,908, atteint pour un entreplan relatif de 0,17.

3° Le coefficient  $k_2$  du plan inférieur croît toujours avec l'entreplan, il est nul pour un entreplan nul, et tend vers l'unité pour un entreplan infini, l'aile se comportant alors comme une aile isolée.

4° Le coefficient  $b$  décroît de  $\frac{S}{S_1}$  à  $\frac{S}{S(1 + \mu^2)}$  lorsque l'entreplan croît

de zéro à l'infini. Dans le cas du biplan à ailes égales, il décroît donc de 2 à 1.

5° Le coefficient  $b_2$  croît de zéro à  $\frac{S\mu^2}{S_2(1+\mu^2)}$  lorsque l'entreplan croît de zéro à l'infini. Dans le cas du biplan à ailes égales, il croît de 0 à 1.

Nous ne démontrerons pas ces propriétés qui s'établissent sans difficulté en utilisant les formules (90) à (94).

Nous ferons une dernière remarque concernant les coefficients angulaires  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B$  des droites représentant les portances  $c_z$ ,  $c_{z1}$  et  $c_{z2}$  en fonction de l'incidence du biplan qui sera, par exemple, celle de l'aile supérieure. On a évidemment :

$$b_1 = \frac{B_1}{B} , \quad b_2 = \frac{B_2}{B} ,$$

de sorte que la suite d'égalités (91) s'écrit :

$$\frac{B_1}{k_1^2 \lambda_1} = \frac{B_2}{k_2^2 \lambda_2} = \frac{B}{k^2 \lambda} . \quad (96)$$

*Il en résulte que les coefficients angulaires des droites de portance des deux ailes d'un biplan en fonction de l'incidence du biplan sont proportionnels aux paramètres  $k^2 \lambda_1$  et  $k^2 \lambda_2$  des paraboles induites.*

Cette remarque est digne d'être faite, car on serait tenté à priori de calculer  $B_1$  et  $B_2$  en fonction de  $k_1^2 \lambda_1$  et  $k_2^2 \lambda_2$  par la même formule hyperbolique qui lie  $B$  à  $k^2 \lambda$  pour le biplan.

Après ces considérations indispensables, nous arriverons maintenant au but de cette analyse qui est la détermination des polaires respectives des deux ailes rapportées, comme nous l'avons fait précédemment, à la corde de l'aile et à sa normale.

Pour simplifier, nous supposerons qu'il n'y a pas d'intérinclinaison des ailes ; l'introduction d'un angle d'intérinclinaison conduirait d'ailleurs à une discussion toute semblable mais sans grand intérêt. Considérons d'abord l'aile supérieure. Avec le degré d'approximation suffisant admis jusqu'ici, le coefficient unitaire normal à la corde est  $c_{z1}$  et le coefficient suivant la corde :

$$c_{z1} = c_{z1} - i c_{z1} = c_{z0} + \epsilon_1 + \frac{c_{z1}^2}{k_1^2 \pi \lambda_1} - i c_{z1} . \quad (97)$$

L'incidence  $i$  est celle du biplan liée à sa portance par la formule :

$$c_z = B(i + i_0) , \quad (98) \quad \text{avec} \quad \frac{i}{B} - \frac{i_0}{B_0} = \frac{1}{k^2 \pi \lambda} . \quad (99)$$

En remplaçant  $c_z$  par sa valeur en fonction de  $c_{z1}$  on trouve immédiatement :

$$i = \frac{c_{z1} - a_1}{b_1 B} - i_0 \quad (100)$$

Pour le biplan,  $c_z$  s'annule lorsque l'incidence  $i$  est égale à  $-i_0$ , tandis que pour l'aile supérieure, la portance  $c_{z1}$  s'annule pour l'incidence :

$$i = -i_0 - \frac{a_1}{b_1 B} = -(i_0 + j_1) \quad (101)$$

Il est commode d'introduire ici dans les calculs cet angle  $j_1$  facile à calculer par la formule qui le définit :

$$j_1 = \frac{a_1}{b_1 B}, \quad (102)$$

de sorte que :

$$i = \frac{c_{z1}}{b_1 B} - i_0 - j_1 \quad (103)$$

En remplaçant  $i$  par sa valeur dans la formule (97), il vient

$$c_{t1} = c_{x0} + e_1 + (i_0 + j_1) c_{z1} - \frac{c_{z1}^2}{b_1} \left( \frac{1}{B} - \frac{b_1}{k_1^2 \pi \lambda_1} \right).$$

Mais, d'après les relations (91) et (99) :

$$\frac{b_1}{k_1^2 \pi \lambda_1} = \frac{1}{k^2 \pi \lambda} = \frac{1}{B} - \frac{1}{B_0},$$

d'où finalement :

$$c_{t1} = c_{x0} + e_1 + (i_0 + j_1) c_{z1} - \frac{c_{z1}^2}{b_1 B_0}.$$

En posant, de même,  $j_2 = \frac{a_2}{b_2 B}$  on a, pour l'aile inférieure,

$$c_{t2} = c_{x0} + e_2 + (i_0 + j_2) c_{z2} - \frac{|c_{z2}|^2}{b_2 B_0}. \quad (105)$$

Pour l'ensemble du biplan, ainsi que nous l'avons dit, la polaire rapportée à ce système d'axes est la même que pour une aile isolée et a pour équation :

$$c_t = c_{x0} + i_0 c_z - \frac{c_z^2}{B_0}. \quad (106)$$

Nous avons tracé sur la figure 15 les trois polaires précédentes pour un biplan à ailes égales d'allongement individuel 6 en supposant:

$$\frac{h}{L_1} = 0,10, \quad i_0 = 0,10, \quad c_{m0} = 0,016,$$

le coefficient  $B_0$  étant remplacé par sa valeur 5,3.

Les ailes étant identiques, les trois points simultanément utilisés

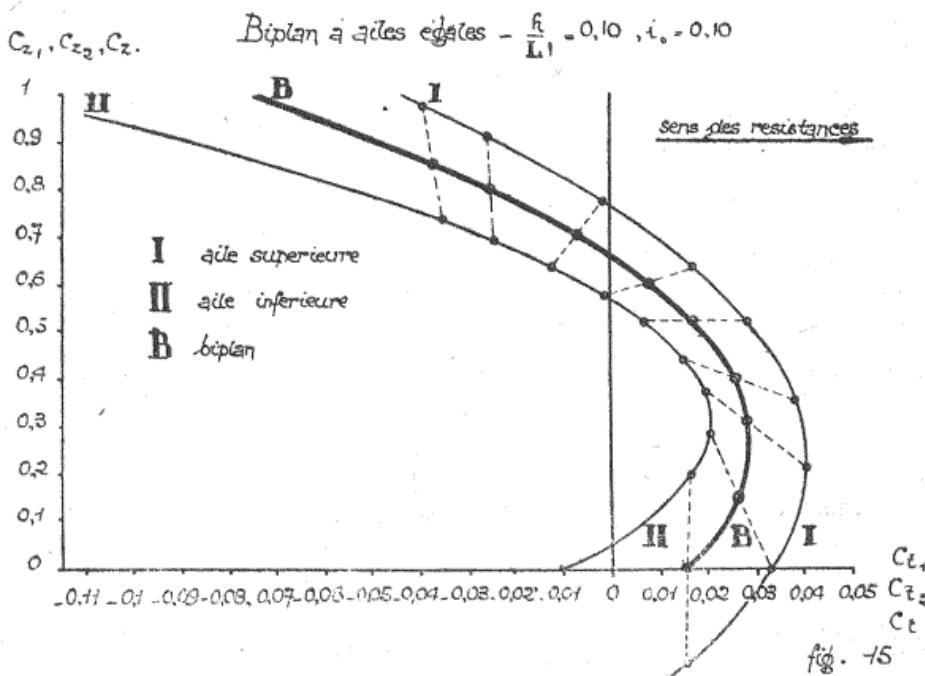


Fig. 15.

sur les trois polaires sont en ligne droite, ils ont été tracés pour un certain nombre de valeurs de  $c_z$ .

**Application.** — Les considérations qui précèdent permettent d'analyser l'influence de l'interaction des deux ailes sur le moment aérodynamique résultant par rapport à un point quelconque. Pour la chiffrer, nous déterminerons la correction à apporter au résultat obtenu et déjà analysé et discuté en faisant l'hypothèse simple de l'égalité des coefficients unitaires des deux ailes.

Nous supposerons que, pour chaque aile, le coefficient de moment par rapport au bord d'attaque a la même expression en fonction de sa portance que si elle était isolée, c'est-à-dire  $c_{m1} = c_{m0} + mc_{z1}$ , pour

l'aile supérieure, et  $c_{m2} = c_{m0} + mc_{z2}$ , pour l'aile inférieure. Ainsi que nous l'avons dit, si  $l_1$  et  $l_2$  sont les profondeurs respectives des deux ailes, le coefficient de moment global doit être rapporté au produit  $S_l$  de la surface totale  $S = S_1 + S_2$  par la profondeur moyenne :

$$l = \frac{S_1 l_1 + S_2 l_2}{S_1 + S_2}.$$

Ceci posé, la correction d'interaction, dont nous recherchons la valeur, se traduit, comme nous allons le montrer, et quel que soit le centre des moments, *par l'introduction d'un certain nombre de couples* dont nous allons donner l'expression.

Nous rappellerons que le moment aérodynamique résultant par rapport à un point s'obtient en ajoutant les couples  $c_m$  et en prenant par rapport à ce point les moments des efforts aérodynamiques individuels respectivement appliqués aux deux bords d'attaque.

1° En ce qui concerne les moments  $c_{m1}$  et  $c_{m2}$ , on peut écrire, pour l'aile supérieure :

$$c_{m1} = c_{m0} + mc_{z1} = c_{m0} + mc_z + m(c_{z1} - c_z).$$

De même, pour l'aile inférieure :

$$c_{m2} = c_{m0} + mc_{z2} = c_{m0} + mc_z + m(c_{z2} - c_z).$$

Mais les moments individuels  $c_{m1}$  et  $c_{m2}$  sont rapportés aux produits  $S_1 l_1$  et  $S_2 l_2$ , tandis que le moment résultant est rapporté à la somme  $S_1 l_1 + S_2 l_2$ .

Il en résulte que l'addition ainsi faite de  $c_{m1}$  et  $c_{m2}$ , au lieu de fournir le coefficient résultant  $c_m = c_{m0} + mc_z$  qui correspond à l'égale répartition des portances, donnera un coefficient corrigé  $c_m + \Delta c_m$ , avec :

$$\Delta c_m = m \frac{S_1 l_1 (c_{z1} - c_z) + S_2 l_2 (c_{z2} - c_z)}{S_1 l_1 + S_2 l_2}. \quad (107)$$

Mais :

$$S_1 c_{z1} - S_1 c_z = -(S_2 c_{z2} - S_2 c_z),$$

d'où finalement :

$$\Delta c_m = m(c_{z1} - c_z) \frac{S_1 (l_1 - l_2)}{S_1 l_1 + S_2 l_2}. \quad (108)$$

Le couple d'interaction  $\Delta c_m$  est proportionnel à la différence des profondeurs des deux ailes, *il est positif, c'est-à-dire piqueur, quand l'aile supérieure est plus profonde et porte plus que l'aile inférieure.*

2<sup>e</sup> En ce qui concerne maintenant les efforts aérodynamiques considérés comme appliqués aux bords d'attaque, la correction d'intéraction consiste évidemment à ajouter suivant chacune des cordes des ailes et leur normale les efforts de coefficients unitaires  $c_{h1} - c_t$ ,  $c_{z1} - c_z$  pour l'aile supérieure, et  $c_{h2} - c_t$ ,  $c_{z2} - c_z$  pour l'aile inférieure.

En faisant abstraction du coefficient commun  $\frac{qV^2}{2g}$ , il faut prendre les moments des efforts :

$$\begin{aligned} S_1 c_{h1} - S_1 c_t & , \quad S_2 c_{h2} - S_2 c_t & , \quad I \\ S_1 c_{z1} - S_1 c_z & , \quad S_2 c_{z2} - S_2 c_z & , \quad II \end{aligned}$$

Mais les identités connues :

$$S_1 c_{h1} + S_2 c_{h2} = (S_1 + S_2) c_t \quad , \quad S_1 c_{z1} + S_2 c_{z2} = (S_1 + S_2) c_z$$

donnent immédiatement :

$$S_1 c_{h1} - S_1 c_t = -(S_2 c_{h2} - S_2 c_t), \quad S_1 c_{z1} - S_1 c_z = -(S_2 c_{z2} - S_2 c_z).$$

Il en résulte, comme nous l'avions annoncé, que *les efforts I et II forment deux couples, donc que leur moment est le même par rapport à tous les points du plan*.

Considérons d'abord les efforts I suivant les cordes. Si  $h$  est l'entreplan, ils constituent un couple dont le bras de levier est  $h$  et le moment

$$h S_2 (c_{h2} - c_t).$$

Ce moment correspond à une majoration du coefficient unitaire ayant pour valeur :

$$\Delta' c_m = (c_{h2} - c_t) \frac{h S_2}{S_1 l_1 + S_2 l_2} . \quad (109)$$

Les efforts II, de leur côté, forment un couple dont le bras de levier est le décalage  $e$  des deux ailes; ce couple est nul pour les ailes sans décalage. Le décalage  $e$  étant positif quand l'aile supérieure est en avant de l'aile inférieure, on voit finalement que, du fait de ce dernier couple, le coefficient unitaire de moment sera majoré de :

$$\Delta'' c_m = (c_{z2} - c_z) \frac{e S_2}{S_1 l_1 + S_2 l_2} . \quad (110)$$

Dans le cas particulier du biplan à ailes égales non décalées  $\Delta c_m = \Delta'' c_m = 0$  et

$$\Delta' c_m = \frac{0,5 h}{l_1} (c_{h2} - c_t).$$

Supposons des ailes d'allongement 6 et rapportons l'entreplan à l'envergure  $L_1$ , comme il a été fait jusqu'ici, il vient :

$$\Delta' c_m = \frac{3h}{L_t} (c_{t2} - c_t). \quad (111)$$

Il est facile de calculer les variations de ces divers couples en fonction de  $c_x$  et d'en tenir compte à titre de termes correctifs faibles.

Il est cependant une valeur particulière de  $\Delta' c_m$  commode à calculer et à discuter, c'est celle qui est atteinte à l'incidence d'égale portance des deux ailes.

Pour cette incidence, en effet,  $c_x = c_{x2} = c_x = A$ , et d'après les formules (105) et (106)

$$c_{t2} - c_t = \varepsilon_2 + j_2 A + \frac{A^2}{B_0} \left( 1 - \frac{1}{b_2} \right).$$

Mais

$$j_2 = \frac{a_2}{b_2 B}, \quad a_2 = A (1 - b_2)$$

d'où

$$c_{t2} - c_t = \varepsilon_2 + A^2 \frac{1 - b_2}{b_2} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{B_0} \right),$$

c'est-à-dire

$$c_{t2} - c_t = \varepsilon_2 + \frac{A^2 (1 - b_2)}{k^2 b_2 \pi \lambda}. \quad (112)$$

Pour un biplan à ailes égales d'allongement 6, avec les chiffres indiqués précédemment, cette valeur particulière de  $c_{t2} - c_t$  est immédiatement calculable ainsi que  $\Delta' c_m$ . On trouve :

$\frac{h}{L_t}$	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,25
$c_{t2} - c_t =$	-0,0106	-0,0103	-0,0097	-0,0087	-0,0063	-0,0047	-0,0034	-0,001
$\Delta' c_m =$	-0,0025	-0,0031	-0,0035	-0,0037	-0,003	-0,0025	-0,002	-0,0007

Aux portances usuelles,  $\Delta' c_m$ , toujours négatif, donc constituant un couple cabreur, varie peu et garde longtemps la valeur indiquée dans le tableau précédent.

Il apparaît bien, ainsi que nous l'avions indiqué, que cette correction d'interaction est faible et peut être généralement négligée.

Nous bornerons à cette analyse les considérations sur les cellules biplanes pour terminer l'étude de la stabilité statique en abordant la question du couple provoqué par les plans de queue.

5<sup>e</sup> Action des empennages horizontaux. — Nous supposerons, ce qui est le cas général, que l'empennage horizontal possède un profil bi-convexe symétrique et que sa forme en plan est celle d'un rectangle, d'un trapèze, d'une ellipse ou d'un losange tronqué, c'est-à-dire ne s'éloigne pas beaucoup de la forme rectangulaire. L'empennage horizontal comprend, en principe, une partie fixe et une partie mobile au

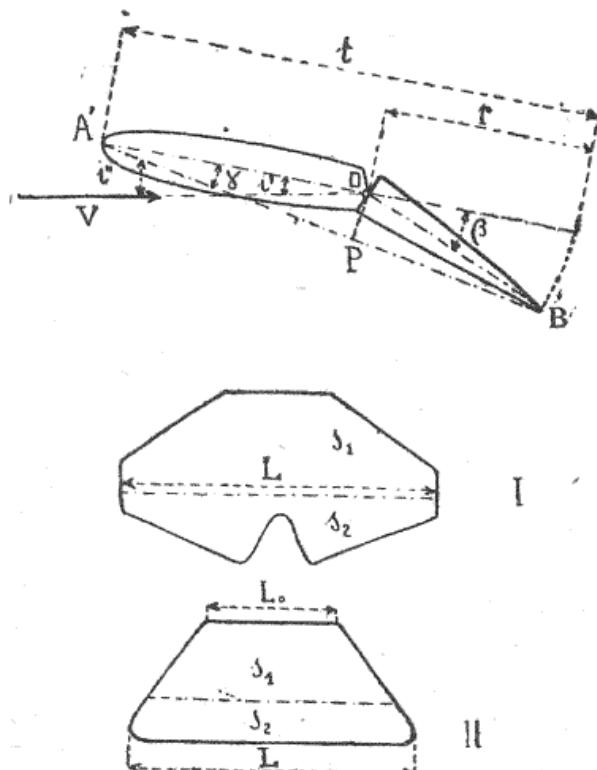


Fig. 16.

gré du pilote. La partie fixe sert à la stabilité et à l'amortissement des rotations de tangage ; elle est placée de façon à travailler normalement à une incidence faible, généralement négative. La manœuvre de la partie mobile permet, par un braquage approprié, de voler à différents angles d'attaque de la cellule, de façon à obtenir toujours en régime permanent l'équilibre des moments par rapport au centre de gravité.

Assez exceptionnellement, l'empennage horizontal est entièrement mobile ; ce cas ne mérite pas un examen spécial, car il rentre dans le cadre de l'étude générale du plan possédant une partie fixe et une partie mobile.

La position du volet mobile sera définie par son braquage  $\beta$  par rapport à la corde de la partie mobile,  $\beta$  étant positif pour un braquage vers le bas.

L'incidence aérodynamique  $i'$  de l'empennage sera, par définition, celle de sa partie fixe, comptée par rapport à la corde de l'empennage sans braquage.

Le problème qui se pose ici est de connaître les variations du coefficient de portance  $c'_z$  de l'empennage complet en fonction de l'incidence aérodynamique  $i'$  de la partie fixe et du braquage  $\beta$  du volet mobile.

Il semble bien évident à priori que, dans la zone où les portances d'une aile sont une fonction linéaire de l'incidence,  $c'_z$  sera également une fonction du premier degré des deux variables indépendantes  $i'$  et  $\beta$ .

On serait, de plus, tenté de croire que, pour une valeur donnée de  $\beta$  et de la surface totale de l'empennage, la participation du volet mobile dans la portance totale est proportionnelle à sa surface. Cette hypothèse simple, souvent admise, est grossièrement erronée et n'est en rien conforme aux résultats mesurés au laboratoire. On peut, d'une façon simple et suffisamment précise, mettre en formule la poussée totale d'un empennage en fonction de  $i'$  et de  $\beta$  en considérant cet empennage comme une aile unique à courbure variable. Pour la commodité du raisonnement, considérons d'abord un empennage rectangulaire (fig. 16); il sera facile de généraliser ensuite la formule obtenue.

Considérons donc l'empennage possédant un braquage  $\beta$ , la partie fixe ayant une incidence  $i'$  mesurée par rapport à sa corde et soit  $t$  la profondeur de l'empennage,  $r$  celle du volet mobile.

Cet empennage peut être considéré comme une aile à courbure variable de flèche OP et de corde A'B'.

Pour appliquer les formules courantes, l'incidence de cette aile doit être comptée, non pas par rapport à la corde A'O de la partie fixe, mais par rapport à la corde A'B' de l'ensemble de l'aile.

Le braquage fait ainsi passer l'incidence à considérer dans ce mode de calcul de  $i'$  à  $i'' = i' + \gamma$ ,  $\gamma$  étant l'angle de A'B' avec A'O.

On peut alors appliquer la formule bien connue donnant la portance d'une aile :

$$c'_z = B'(i'' + i_0) = B'(i' + \gamma + i_0), \quad (113)$$

le coefficient de profil  $i_0$  étant proportionnel à la flèche relative du

profil et B' se calculant en fonction de l'allongement  $\lambda$ , comme il a été démontré, par la relation :

$$B' = \frac{B_0}{1 + \frac{B_0}{\pi \lambda}}. \quad (114)$$

Il reste donc à évaluer  $\gamma$  et  $i_0$  en fonction de  $\beta$ .

La longueur de la corde A'B' peut être assimilée à la profondeur totale  $t$  et les angles  $\gamma$  et  $\beta$  confondus avec leurs sinus, de sorte que le triangle A'B'O donne la relation :

$$\frac{A'B'}{\beta} = \frac{OB'}{\gamma}, \quad \text{d'où} \quad \gamma = \frac{OB'}{A'B'} \beta = \frac{r}{t} \beta. \quad (115)$$

La connaissance de  $\gamma$  permet l'évaluation de la flèche OP :

$$OP = f = OA' \times \gamma = (t - r) \frac{r}{t} \beta. \quad (116)$$

Si l'on admet la proportionnalité de  $i_0$  à la flèche relative, on en déduit :

$$i_0 = e \frac{f}{t} = e \frac{r}{t} \left(1 - \frac{r}{t}\right) \beta, \quad (117)$$

$e$  étant un terme constant.

En remplaçant  $i_0$  et  $\gamma$  par leurs valeurs, la formule initiale (113) devient finalement :

$$c' = B'(i' + n \beta), \quad (118)$$

$$n = \left(1 + e\right) \frac{r}{t} - e \left(\frac{r}{t}\right)^2. \quad (119)$$

Cette formule représente d'une façon satisfaisante les résultats observés au laboratoire pour les valeurs usuelles de  $\frac{r}{t}$  qui sont de l'ordre de 0,3 à 0,5 pour lesquelles on peut prendre  $e = 1$ .

En réalité, et comme il fallait s'y attendre, le coefficient de proportionnalité  $e$  de  $i_0$  à la flèche dépend de la position de cette flèche suivant la profondeur  $t$ , donc varie avec  $\frac{r}{t}$ . On constate, en effet, que  $e$  décroît quand  $\frac{r}{t}$  augmente, d'environ 1,5 à 0,8, lorsque  $\frac{r}{t}$  croît de 0,2 à 0,6.

On pourra admettre, dans les calculs, les coefficients du tableau ci-après :

$\frac{r}{t} =$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$e =$	1,5	1,2	1	0,9	0,8	0,75
$n =$	0,44	0,55	0,64	0,72	0,79	0,86

Lorsque l'empennage a une forme quelconque voisine de la forme rectangulaire, ces formules sont encore applicables, mais  $r$  et  $t$  représenteront les profondeurs moyennes dont le rapport est égal au rapport  $\sigma = \frac{s_x}{s}$  des surfaces.

Il convient aussi, dans le calcul de l'allongement, d'effectuer la correction de la forme en plan en introduisant, non pas l'allongement géométrique  $\frac{L^2}{s}$ , mais l'allongement corrigé

$$\lambda = \frac{k^2 L^2}{s} \quad (120)$$

Les formes en plan les plus favorables sont les formes rectangulaires ou elliptiques pour lesquelles  $k = 1$ . On se rapprochera de la forme elliptique et on pourra conserver  $k = 1$  en adoptant comme contour celui d'un losange tronqué. Dans le cas d'une forme trapézoïdale ou d'une forme approchée, la largeur du bord de sortie doit être plus grande que celle du bord d'entrée, ainsi qu'il est logique au point de vue des pertes marginales. La disposition inverse serait complètement défavorable.

Supposons alors que la forme en plan soit sensiblement trapézoïdale,  $L$  étant la grande base qui est l'envergure et  $L_0$  la plus petite base, située à l'avant. La théorie de Prandtl assigne alors à  $k$  la valeur:

$$k = \frac{2L + L_0}{3L} \quad (121)$$

En particulier, si la forme en plan est triangulaire,  $k = \frac{2}{3}$ , la correction de forme en plan devient alors très importante.

Si l'empennage est une cellule biplane à ailes rectangulaires égales, la valeur de  $k$  sera celle du biplan à ailes égales,  $s$  représentant alors la surface totale des deux ailes.

En général, l'allongement  $\lambda$  est compris entre 3 et 4, plus fréquemment voisin de 3.

Ces formules sont valables pour des braquages du gouvernail allant de  $-15^\circ$  à  $+15^\circ$ ; au delà de  $20^\circ$ , le gouvernail devient inefficace.

Notons maintenant que si l'on admet, ainsi que le vérifie l'expérience, que la portance maximum d'une aile est une fonction linéaire de la flèche relative  $\frac{f}{t}$  de son profil, il est facile de calculer la portance maximum que pourra fournir l'empennage.

Nous admettrons que la plus grande portance d'un profil symétrique est 0,8 et que l'augmentation de la portance maximum due à la flèche est  $6\frac{f}{t}$ . En remplaçant  $\frac{r}{t}$  par le rapport  $\sigma = \frac{s_z}{s}$  des surfaces on a, d'après la formule (116) :

$$\frac{f}{t} = \sigma(1 - \sigma)\beta ,$$

d'où

$$(c'_z)_M = 0,8 + 6\sigma(1 - \sigma)\beta . \quad (120)$$

Si on donne à  $\sigma$  la valeur normale 0,4, il vient :

$$(c'_z)_M = 0,8 + 1,44\beta .$$

En donnant à  $\beta$  sa plus grande valeur admissible  $15^\circ$ , soit en radians 0,26, on voit que la plus grande portance que l'on puisse espérer obtenir sera 1,175.

Remarquons que, pour une valeur donnée de  $\beta$ , la flèche, donc aussi  $(c'_z)_M$ , seront maximum en même temps que  $\sigma - \sigma^2$  qui prend sa plus grande valeur 0,25 pour  $\sigma = 0,5$ . Il en résulte que le maximum possible de  $(c'_z)_M$  sera  $0,8 + 1,5\beta$ , soit sensiblement 1,2 pour  $\beta = 0,26$ .

Revenons maintenant à l'examen des formules (118) et (119) pour en tirer quelques conclusions relatives à l'efficacité du gouvernail.

Pour évaluer cette efficacité, supposons que le braquage  $\beta$  augmente d'un radian; la portance de l'empennage augmentera alors de  $nB'$ . Mais cette variation de portance est évaluée par unité de surface de l'empennage total de surface  $s$ ; en la rapportant au contraire à l'unité de surface du gouvernail mobile de surface  $s_2$ , elle deviendra A telle que :

$$As_2 = B'n s_2 , \quad A = B' \frac{n}{\sigma} .$$

En remplaçant, dans la formule (119),  $\frac{r}{t}$  par  $\sigma$ , on trouve finalement:

$$A = B'(1 + e - e\sigma) \quad . \quad (122)$$

On peut dire que A mesure l'efficacité du gouvernail; il en est donc la caractéristique essentielle et il convient que sa valeur soit aussi élevée que possible.

Ainsi qu'il a été dit, B' ne dépend que de la forme en plan de l'empennage. Pour que B' soit grand, l'empennage doit avoir une grande envergure et une forme en plan se rapprochant de la forme rectangulaire ou elliptique.

Quant au second coefficient, il est facile de l'évaluer en assignant à  $e$  la valeur déjà indiquée. On trouve :

$\sigma = \frac{r}{t} = \frac{s_2}{s}$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$e =$	1,5	1,2	1	0,9	0,8	0,75
$1 + e - e\sigma$	2,2	1,84	1,6	1,45	1,32	1,22

L'efficacité du gouvernail, c'est-à-dire pour un braquage donné, la variation de poussée de l'empennage par unité de surface du gouvernail mobile, décroît quand la profondeur de l'équilibre augmente.

Il est donc très avantageux d'avoir un empennage de grand allongement, muni d'une partie mobile dont la profondeur relative soit faible.

Remarquons que si l'empennage est entièrement mobile,  $\sigma = 1$ , l'efficacité n'est plus que B', deux fois plus faible environ que celle que peut fournir un empennage avec partie mobile peu profonde.

Achevons maintenant de déterminer les caractéristiques aérodynamiques de l'empennage.

Tout d'abord, son coefficient de traînée  $c'_x$  se calcule immédiatement en admettant que le coefficient de profil  $c_{x0}$  est une fonction linéaire de la flèche relative  $\frac{f}{t}$  déjà calculée. Désignons alors par  $c_{x0}$  le coefficient de profil de l'empennage pour un braquage nul, ce coefficient étant connu comme un élément caractéristique du profil symétrique adopté. La résistance induite sera  $\frac{c'^2}{\pi\lambda}$ ,  $\lambda$  étant l'allongement corrigé de l'empennage calculé comme il a été dit.

L'expression de la flèche relative étant  $\sigma(1-\sigma)\beta$ , nous avons déterminé le coefficient dont il faut l'affecter d'après de nombreux essais d'empennages effectués à Gottingen, de sorte que nous adopterons la formule :

$$c'_x = c_{x_0} + \frac{c'_z^2}{\pi\lambda} + 0,7\sigma(1-\sigma)\beta. \quad (123)$$

Il est bien évident que, dans le terme où intervient la flèche, l'angle  $\beta$ , exprimé en radians, ne devra intervenir que par sa valeur absolue, car la résistance correspondante est toujours de même sens. La valeur de  $\sigma$  égale à 0,5 rendant maximum et égal à 0,25 le produit  $\sigma(1-\sigma)$  sera celle du maximum de résistance. Il apparaît ainsi qu'au point de la résistance à l'avancement d'un empennage, les valeurs les plus faibles de  $\sigma$  seront les plus avantageuses, ainsi, naturellement, qu'un allongement aussi élevé que possible. Considérons à titre d'exemple un empennage d'allongement 3 pour lequel  $\sigma=0,25$  et  $c_{x_0}=0,015$ . On aura  $B'=3,4$  et  $n=0,49$  d'où :

$$\begin{cases} c'_z = 3,4(i' + 0,49\beta), \\ c'_x = 0,015 + 0,106 c'_z^2 + 0,13\beta, \end{cases} \quad (124) \quad (125)$$

$\beta$  désignant, pour éviter toute confusion, la valeur absolue de  $\beta$ .

Si  $i'=5^\circ$  soit 0,0875 et  $\beta=10^\circ$  soit 0,175, on trouve  $c'_z=0,59$  et  $c'_x=0,075$ .

La connaissance de  $c'_x$  n'a d'intérêt que lorsqu'on veut évaluer l'augmentation de la résistance de l'avion due au braquage du gouvernail, car  $c'_x$  est négligeable quand on prend par rapport au centre de gravité le moment des efforts appliqués à l'empennage.

Un autre élément dont le calcul est nécessaire est le moment aérodynamique du gouvernail mobile par rapport à son articulation, en supposant qu'il n'a pas de compensation.  $s_2$  étant toujours la surface de ce gouvernail,  $r$  sa profondeur moyenne, nous définissons ce moment  $M_r$  à l'aide d'un coefficient de moment sans dimension  $c_r$  tel que :

$$M_r = \frac{\alpha V^2}{2g} c_r s_2 r. \quad (126)$$

$c_r$  pourra se calculer par la formule simple ci-après dont nous ne donnerons pas la démonstration, un peu longue :

$$c_r = 0,25 n c'_z + 0,25 (B' - 1) (1 - \sigma) \beta. \quad (127)$$

Dans cette formule,  $c'_z$  est le coefficient de portance de l'empennage total,  $n$  le coefficient de  $\beta$  dans l'expression de cette portance (formule 119),  $B'$  le coefficient angulaire des droites de portance connu, par la formule (114),  $s$  le rapport  $\frac{s_2}{s} = \frac{r}{t}$  et  $\beta$  le braquage du gouvernail en radians.

La convention de signe relative à  $c_r$  est la même que pour l'aile, le coefficient de moment  $c_r$  et le moment  $M_r$  étant *positifs lorsqu'ils tendent à relever le gouvernail mobile*.

C'est ainsi que si :

$$s = 0,25, \quad B' = 3,4 \quad n = 0,49,$$

on trouve :

$$c_r = 0,122 c'_z + 0,45 \beta.$$

Il existe certains régimes pour lesquels le moment unitaire  $c_r$  s'anule, le pilote n'ayant alors aucun effort à exercer sur les commandes. On doit déterminer le calage du plan fixe de façon à ce que cette condition soit obtenue à un coefficient de portance d'utilisation normale de l'avion. Il apparaît que lorsque  $c_r$  est nul,  $c'_z$  et  $\beta$  ne peuvent être que nuls ou de signes contraires; en règle générale  $c'_z$  est alors négatif et  $\beta$  positif, l'incidence  $i'$  étant alors négative.

Il est également indispensable de vérifier, à l'aide de la formule (127) que lorsque l'avion est en piqué à portance sensiblement nulle, la grandeur du moment de charnière  $M_r$  n'excède pas les possibilités du pilote. Nous verrons plus loin comment l'équation générale des moments par rapport au centre de gravité permet cette détermination.

Les considérations que nous venons de développer permettent en définitive d'évaluer complètement les caractéristiques aérodynamiques de l'empennage.

Leur utilisation dans l'évaluation du moment des forces aérodynamiques exercées sur l'empennage par rapport au centre de gravité nécessite l'introduction de certains facteurs correctifs que nous envisagerons successivement pour évaluer leur ordre de grandeur et ne retenir que ceux que l'on ne peut négliger.

**1<sup>o</sup> Angle de déflexion dû aux ailes.** — Soit  $c_z$  le coefficient de portance des ailes, qu'il s'agisse d'un monoplan ou d'un biplan,  $L$  l'envergure qui est celle de l'aile supérieure dans le cas du biplan,  $S$  la surface alaire totale,  $\lambda = \frac{L^2}{\pi S}$  l'allongement,  $k$  le coefficient de

correction de l'allongement dans le cas du biplan, et dont la valeur a été précédemment déterminée. L'application du théorème des quantités de mouvement montre qu'immédiatement à l'arrière de l'aile, l'air est dévié vers le bas d'un certain angle théorique  $\epsilon_0$  dont la valeur en radians est donnée par la formule :

$$\epsilon_0 = \frac{c_z}{\pi h^2 \lambda}. \quad (128)$$

L'expérience montre qu'à l'arrière d'une aile, l'angle de déflection est bien proportionnel à  $c_z$  et en raison inverse de  $h^2 \lambda$ , mais il est supérieur à l'angle théorique qui est une notion de calcul.

On peut poser, pour calculer cet angle en un point déterminé :

$$\epsilon = h \frac{c_z}{h^2 \lambda}, \quad (129)$$

$h$  étant un coefficient demandé à l'expérience. Soit  $l$  la longueur de la corde de l'aile, qui sera celle de l'aile supérieure dans le cas du biplan,  $x$  la distance horizontale du bord d'attaque de l'empennage en arrière du bord de sortie de l'aile,  $y$  sa distance verticale en dessous de ce bord. Dans le cas du biplan, l'aile de référence sera l'aile supérieure. De nombreux essais effectués aux laboratoires de Gottingen et de Saint-Cyr permettent de déterminer  $h$  en fonction de  $\frac{x}{l}$  et de  $\frac{y}{l}$ . On pourra adopter les chiffres du tableau ci-après qui sont en bon accord avec l'expérience :

Valeurs de  $\frac{x}{l}$ .

	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
0	0,721	0,692	0,662	0,634	0,604	0,575	0,546
0,2	0,699	0,670	0,642	0,612	0,582	0,553	0,524
0,4	0,676	0,647	0,671	0,589	0,559	0,530	0,501
0,6	0,654	0,625	0,595	0,567	0,537	0,508	0,479
0,8	0,631	0,602	0,572	0,544	0,514	0,485	0,456
1	0,609	0,580	0,550	0,522	0,492	0,463	0,434

Les valeurs usuelles de  $\frac{x}{l}$  étant de 2 à 2,5, et celles de  $\frac{y}{l}$  de 0,3 à 0,5, on voit que le coefficient  $h$  sera généralement voisin de 0,57. Par exemple, pour un biplan d'allongement corrigé  $k^2\lambda = 4,4$ , on aura :

$$\epsilon = 0,13 c_x.$$

C'est ainsi que pour  $c_x = 0,8$ , l'angle de déflexion à l'empennage atteindra 0,104, soit près de 6 degrés.

La correction de déviation des filets d'air arrivant sur l'empennage ne saurait donc en aucun cas être négligée. Il sera facile d'évaluer le coefficient de proportionnalité de  $\epsilon$  à  $c_x$  et d'introduire  $\epsilon$  dans les calculs, ainsi que nous le verrons plus loin.

**2° Angle de déflexion dû aux hélices.** — Supposons l'axe [de l'hélice de diamètre D parallèle à la corde de l'aile. Le débit d'air à travers l'hélice est

$$M = \frac{\alpha \pi D^2}{g} V .$$

Mais si  $v_1$  est la vitesse moyenne de recul de l'air à l'arrière de l'hélice, le théorème des quantités de mouvement indique que l'effort de traction a pour valeur  $Mv_1$ . En vol horizontal, comme nous le supposons, cet effort de traction équilibre la traînée totale  $\frac{\alpha}{2g} c_x S V^2$  de l'avion, ce qui donne :

$$\frac{v_1}{V} = \frac{2S}{\pi D^2} c_x . \quad (130)$$

Lorsque l'incidence aérodynamique de l'aile est  $i$ , la composante descendante de  $v_1$  est  $v_1 i$ , de sorte que l'angle de déviation  $\epsilon'$  provoqué par l'hélice sur les filets d'air sera connu par la formule :

$$\boxed{\epsilon' = \frac{v_1 i}{V} = \frac{2S}{\pi D^2} c_x i.} \quad (131)$$

Si l'axe de l'hélice faisait avec la corde de l'aile un angle  $\psi$  positif au-dessus de cette corde, il suffirait, pour en tenir compte, de remplacer dans la formule précédente  $i$  par  $i + \psi$ .

Cette correction est faible et, pour en tenir compte dans une discussion analytique, on pourra remplacer  $c_x$  par une valeur moyenne, 0,04 par exemple, de sorte que si  $\frac{2S}{\pi D^2} = 3$ , il vient

$$\varepsilon' = 0,12 i. \quad (132)$$

**3<sup>e</sup> Influence du souffle des hélices.** — La correction due au souffle des hélices lorsque l'empennage s'y trouve complètement soumis conduit à multiplier, en vol horizontal, les coefficients aérodynamiques unitaires  $c'_x$  et  $c'_z$  de l'empennage par le facteur :

$$\rho_1 = \left( 1 + \frac{\nu_1}{V} \right)^2 = \left( 1 + \frac{2S}{\pi D^2} c_x \right)^2, \quad (133)$$

c'est-à-dire en négligeant les quantités en  $c_x^2$  :

$$\boxed{\rho_1 = 1 + \frac{4S}{\pi D^2} c_x.} \quad (134)$$

Cette valeur théorique de  $\rho$  peut être considérée comme un maximum, car l'expérience a révélé que, suivant la disposition des hélices, le terme  $\frac{4S}{\pi D^2} c_x$  peut se trouver multiplier par un coefficient variant de 0,5 à 1. A défaut de donnée expérimentale précise, on peut utiliser la formule (134). Si  $c_x = 0,04$ ,  $\frac{4S}{\pi D^2} = 6$ , on voit que  $\rho = 1,24$ . Cette correction n'est donc pas en général négligeable.

**4<sup>e</sup> Influence du sillage des ailes.** — Une certaine masse d'air est entraînée dans le sillage des ailes et possède encore une vitesse d'entraînement  $\nu_2$  au droit de l'empennage. Le coefficient de correction plus petit que l'unité dû à cet effet a pour valeur, par définition,

$$\rho_2 = \left( 1 - \frac{\nu_2}{V} \right)^2. \quad (135)$$

D'après les essais de M. Toussaint, pour une aile monoplane,  $\rho_2$  serait *minimum*, donc l'effet de sillage maximum pour tous les points d'une droite du plan médian de l'aile partant de son bord de sortie est

inclinée vers le bas de 5,6% sur l'horizontale. Si le bord d'attaque de l'empennage est à la distance horizontale relative  $\frac{x}{l}$  du bord de fuite de l'aile, les valeurs du minimum de  $\rho_2$  seraient les suivantes :

$\frac{x}{l} =$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$(\rho_2)_{\min} =$	0,71	0,74	0,76	0,79	0,81	0,82	0,83

Si le bord d'attaque de l'empennage est en dehors de cette zone de trouble maximum,  $\rho_2$  sera compris entre l'unité et les chiffres de ce tableau.

Enfin, entre les deux ailes d'une cellule biplane, d'après les mêmes essais,  $\rho_2$  au niveau de l'empennage serait sensiblement égal à 0,9.

A défaut d'autres indications, c'est ce chiffre de 0,9 qu'on pourra prendre dans tous les cas.

**Application.** — Soit alors  $\delta$  l'angle de calage de la partie fixe de l'empennage par rapport à la corde de l'aile,  $\delta$  étant positif lorsqu'il augmente l'incidence du plan fixe. L'incidence aérodynamique  $i$  de l'empennage, tenu compte des corrections de déflexion, est liée à l'incidence  $i$  de l'aile par la formule :

$$i' = i - \epsilon - \epsilon' + \delta. \quad (136)$$

Mais  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  sont proportionnels l'un à la portance  $c_z$ , et l'autre à l'incidence  $i$  de l'aile. Supposons calculés comme il a été dit les deux coefficients de proportionnalité et remplaçons-les par des chiffres pour ne pas introduire de nouveaux coefficients dans les calculs.

En prenant  $\epsilon = 0,13 c_z$  et  $\epsilon' = 0,12 i$ , il vient :

$$i' = 0,88 i - 0,13 c_z + \delta. \quad (137)$$

Pour tenir compte du souffle de l'hélice et du sillage des ailes, il suffira, dans l'expression (118) du coefficient de portance de l'empennage en fonction de  $i'$  et du braquage  $\beta$ , de corriger le coefficient  $B'$  en le remplaçant par le nouveau coefficient

$$B'' = \rho \rho_2 B', \quad (138)$$

de sorte que le coefficient de portance corrigé de l'empennage sera :

$$c''_z = B''(i' + n\beta), \quad (139)$$

tandis que le coefficient de portance des ailes sustentatrices a l'expression déjà démontrée :

$$c_z = B(i + i_s). \quad (140)$$

Finalement, en tirant  $i$  et  $i'$  des deux formules précédentes et en portant leurs valeurs dans la relation (137), nous obtenons la correspondance entre  $c''_z$  et  $c_z$  :

$$c''_z = E c_z + B''(n\beta + \delta - 0,88 i_s), \quad (141)$$

avec

$$E = 0,88 \frac{B''}{B} - 0,13 B''. \quad (142)$$

Pour un biplan d'allongement corrigé 4,4, le coefficient B de la cellule est 3,83. Si l'empennage possède un allongement 3, son coefficient  $B'$  est 3,4. En prenant  $\rho_1 = 1,24$ ,  $\rho_2 = 0,9$ , la valeur corrigée de  $B'$  est  $B'' = 3,8$ , ce qui donne  $E = 0,38$ . Ce coefficient E, qui doit être prédéterminé avec autant de soin que possible, est fondamental au point de vue de l'efficacité de l'empennage. Il serait sensiblement égal à l'unité, en négligeant la déviation de l'air à l'arrière de l'aile; en réalité, il est généralement voisin de 0,3 à 0,4. Cette différence considérable montre l'influence essentielle de la déviation de l'air sur l'efficacité des empennages.

Supposons, par exemple, pour fixer les idées, que la déflexion due à l'aile soit un peu supérieure à celle envisagée, soit  $\epsilon = 0,15 c_z$  et que le  $c_x$  de l'avion étant plus élevé,  $\epsilon' = 0,18 i$ . Avec les mêmes valeurs de  $B''$  et de B, on trouve dans ce cas  $E = 0,24$ . Pour de faibles augmentations des angles de déflexion, le coefficient caractéristique E s'est abaissé à une valeur presque moitié de sa valeur primitive.

L'emplacement de l'empennage par rapport au souffle de l'hélice et au sillage descendant de l'aile présente donc une très grande importance, un déplacement minime de cet empennage pouvant parfois modifier profondément ses qualités. C'est là un fait qui doit toujours être présent à l'esprit de l'ingénieur.

Si le coefficient  $c_z$  est influencé d'une façon considérable par les déflexions  $\epsilon$  et  $\epsilon'$ , par contre, le terme dépendant du braquage  $\beta$  n'est

que peu modifié par le souffle de l'hélice et le sillage de l'aile,  $B''$  ne différant guère de plus de 10 % du coefficient non corrigé  $B'$ .

**Moment aérodynamique central dû à l'empennage.** — Comme pour l'aile, le coefficient de portance  $c''_z$  de l'empennage peut être confondu avec le coefficient unitaire suivant la normale à la corde. En négligeant

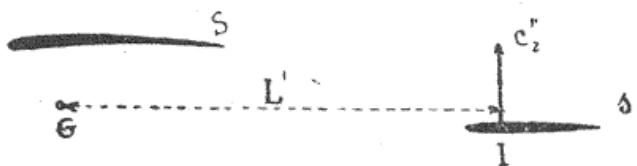


Fig. 17.

les variations du centre de poussée dues au braquage  $\beta$ , l'effort correspondant à  $c''_z$  peut être considéré comme appliqué au quart avant de la profondeur de l'empennage. Soit alors  $L'$  la distance à cette force du centre de gravité  $G$  de l'avion (fig. 17), la distance  $L'$  étant, par conséquent, comptée parallèlement à la corde de l'empennage.

Le couple aérodynamique central dû à l'empennage aura pour expression

$$M' = \frac{\alpha}{2g} c''_z s L' V^2 = \frac{\alpha}{2g} s L' V^2 [E c_z + B'' (n \beta + \delta - 0,88 i_0)]. \quad (143)$$

Le couple provoqué par la traînée  $c'_x$  de l'empennage peut, sans erreur sensible, être négligé dans ce calcul.

Le moment  $M'$  doit être rapporté à la surface  $S$  de l'aile et à sa profondeur  $l$ , de même façon que le moment aérodynamique  $M$  de cette aile. En posant, comme nous l'avons fait pour l'aile :

$$M' = \frac{\alpha}{2g} c'_{mg} S V^2 l, \quad (144)$$

il apparaît que le coefficient de moment  $c'_{mg}$  de l'empennage sera connu par la formule :

$c'_{mg} = \frac{s L'}{S l} [E c_z + B'' (n \beta + \delta - 0,88 i_0)].$

(145)

Le coefficient fort important  $E$  se calculera avec précision comme il a été dit, ainsi que  $B''$ . Le coefficient 0,88 de  $i_0$  pourra, suivant le cas,

être déterminé exactement, mais sa détermination précise a beaucoup moins d'importance.

**6<sup>e</sup> Moment aérodynamique central de l'avion complet.** — Le coefficient de moment de la cellule est donné par la formule (38). Nous avons vu, d'une part, l'influence sur les différentes constantes de ce moment des résistances nuisibles de l'avion et, d'autre part, dans le cas du biplan, l'emplacement de la corde de référence à partir de laquelle on doit compter les coordonnées  $x$  et  $y$  du centre de gravité. On peut toujours, comme nous l'avons vu, placer cette corde de façon que le coefficient  $m$  de la courbe des moments soit égale à 0,25, ce que nous supposerons.

$c_{mg}$  étant le coefficient de la cellule, donné par la formule (38),  $c'_{mg}$  celui de l'empennage que nous venons de calculer,  $S$  la surface alaire,  $l$  la profondeur de l'aile, le moment central résultant sera :

$$M_G = \frac{\alpha}{2g} S V^2 l (c_{mg} + c'_{mg}), \quad (146)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{mg} = c_{m0} - c_{x0} \frac{y}{l} + \left( m - \frac{x}{l} - i_0 \frac{y}{l} \right) c_x + \frac{y c_x^2}{l B_0}, \end{array} \right. \quad (147)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c'_{mg} = \frac{s L'}{Sl} [E c_x + B'' (n \beta + \delta - 088 i_0)]. \end{array} \right. \quad (148)$$

L'équilibre des moments en régime permanent, en supposant que l'axe de l'hélice passe par le centre de gravité, se traduit par la condition

$$c_{mg} + c'_{mg} = 0$$

qui permet de calculer le braquage  $\beta$  du gouvernail en fonction du coefficient de portance  $c_x$  des ailes.

Ce calcul ne présente aucune difficulté et nous ne ferons pas, pour ne pas allonger le texte, d'application numérique à son sujet.

La critère de la stabilité propre de l'avion au voisinage de cette position d'équilibre est, ainsi que nous l'avons dit précédemment, le coefficient de stabilité :

$$\mu_1 = \frac{dc_{mg}}{dc_x} + \frac{dc'_{mg}}{dc_x}, \quad (149)$$

qui doit être positif, l'avion étant d'autant plus stable que la valeur de ce coefficient est plus élevée.

Il est bien évident que lorsqu'on calcule cette dérivée, le braquage  $\beta$  doit être considéré comme une constante.

Le coefficient de stabilité total est donc la somme du coefficient de stabilité de l'aile et du même coefficient relatif à l'empennage. Le premier ayant été longuement discuté, nous ne reprendrons pas cette discussion.

En ce qui concerne le coefficient de stabilité de l'empennage, son expression est connue immédiatement par la formule :

$$\frac{dc'_{mg}}{dc_z} = E \frac{sL'}{St}. \quad (150)$$

L'apport de l'empennage dans le coefficient de stabilité global est ainsi proportionnel au coefficient  $E$  déjà calculé et au moment  $sL'$  de la surface de l'empennage par rapport au centre de gravité.

Notons que, pour un empennage particulièrement mal placé par rapport au souffle de l'hélice et au sillage de l'aile, le coefficient  $E$  pourrait être très voisin de zéro.

L'apport de l'empennage dans la stabilité totale serait nul, mais il ne faudrait pas en conclure à l'instabilité de l'avion.

Si le centre de gravité est, en effet, bien placé par rapport au bord d'attaque de l'aile, celle-ci peut apporter une stabilité suffisante.

En général,  $\frac{sL'}{St}$  a comme valeur 0,30 à 0,35. Le coefficient  $E$  peut varier d'environ 0,3 à 0,5, la valeur 0,4 étant une bonne valeur moyenne, ce qui fait que le coefficient de stabilité de l'empennage peut être de l'ordre de grandeur de 0,09 à 0,17, le chiffre 0,12 à 0,13 étant une bonne valeur moyenne.

Sans reprendre la discussion déjà faite à propos de la stabilité de l'aile, supposons que le centre de gravité soit suffisamment près de la corde pour que  $\frac{y}{l}$  soit négligeable. En remplaçant  $m$  par 0,25 il vient :

$$\frac{dc_{mg}}{dc_z} = m - \frac{x}{l} = 0,25 - \frac{x}{l}.$$

Si le coefficient de stabilité de l'empennage est 0,13, l'avion n'aurait plus de stabilité statique propre si le centre de gravité était distant du bord d'attaque de  $(0,13 + 0,25) l = 0,38 l$ . Si on le place à la distance  $0,28 l$ , par exemple, ce qui constitue un centrage courant, le coef-

ficient global de stabilité statique sera 0,10 à toute incidence, chiffre constituant une valeur normale.

Nous utiliserons constamment, par la suite, le coefficient de stabilité défini par rapport à l'incidence :

$$\mu = \frac{dc_{mg}}{di} + \frac{dc'_{mg}}{di} = \frac{dc_x}{di} \left( \frac{dc_{mg}}{dc_x} + \frac{dc'_{mg}}{dc_x} \right),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mu = B \mu.} \quad (151)$$

$B$  étant le coefficient angulaire des droites de portance.

On peut dire que si l'incidence aérodynamique varie de  $di$ , l'avion est rappelé à sa position d'équilibre par le couple :

$$dM_g = \frac{a}{2g} S V^2 l \mu d.i. \quad (161)$$

Nous utiliserons l'expression du coefficient de stabilité pris par rapport à l'incidence dans l'étude de la maniabilité et de la stabilité dynamique en vol. Ces deux études fourniront les éléments nécessaires à l'appréciation du coefficient de stabilité statique que doit posséder un avion suivant sa destination.



## TABLE DES MATIÈRES

---

Introduction . . . . .	305
Considérations générales . . . . .	307
La stabilité statique . . . . .	310
Aile monoplane isolée . . . . .	311
Influence de la flèche et du gauchissement combinés . . . . .	322
Influence du V avec ou sans gauchissement . . . . .	327
Moment aérodynamique d'une aile par rapport à un point quelconque.	
Courbe métacentrique d'une aile . . . . .	330
Influence d'un fuselage . . . . .	341
Influence des résistances nuisibles . . . . .	347
Cas d'une cellule biplane . . . . .	349
Action des empennages horizontaux . . . . .	370
Angle de déflexion dû aux ailes . . . . .	377
Angle de déflexion dû aux hélices . . . . .	379
Influence du souffle des hélices . . . . .	380
Influence du sillage des ailes . . . . .	380
Moment aérodynamique central dû à l'empennage . . . . .	383
Moment aérodynamique central de l'avion complet . . . . .	384

---

P. MERSCH, L. SEITZ & Cie, Imp. 17, Ville d'Alésia, PARIS-14<sup>e</sup>

