

## Conditions d'utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- [Le Conservatoire numérique](#) communément appelé [le Cnum](#) constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre ([www.eclydre.fr](http://www.eclydre.fr)).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n° 78-753 du 17 juillet 1978 :

- la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue ([Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - https://cnum.cnam.fr](#))
- la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- les reproductions de documents protégés par le droit d'auteur, uniquement consultables dans l'enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

4- Pour obtenir la reproduction numérique d'un document du Cnum en haute définition, contacter [cnum\(at\)cnam.fr](mailto:cnum(at)cnam.fr)

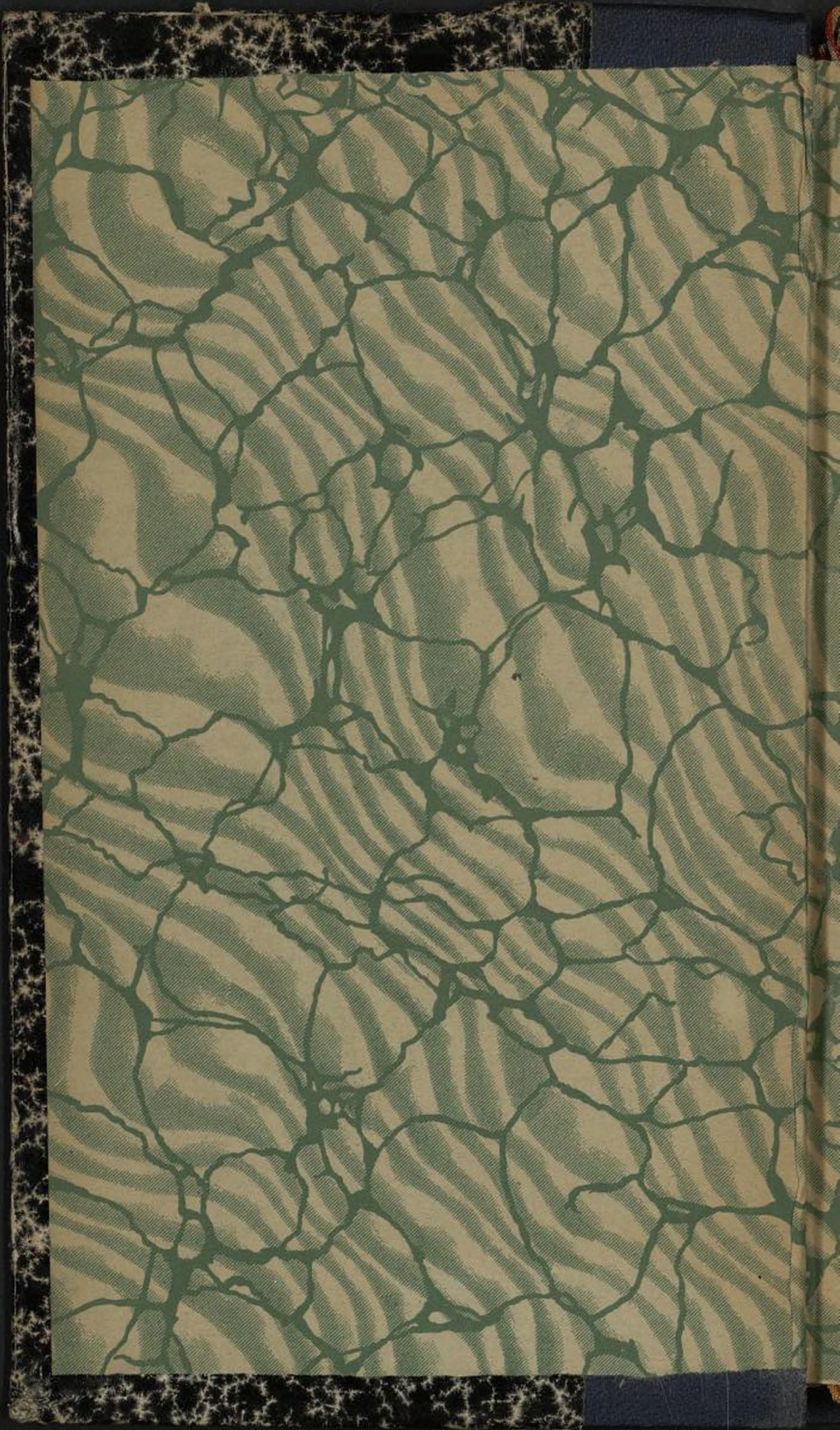
5- L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d'utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

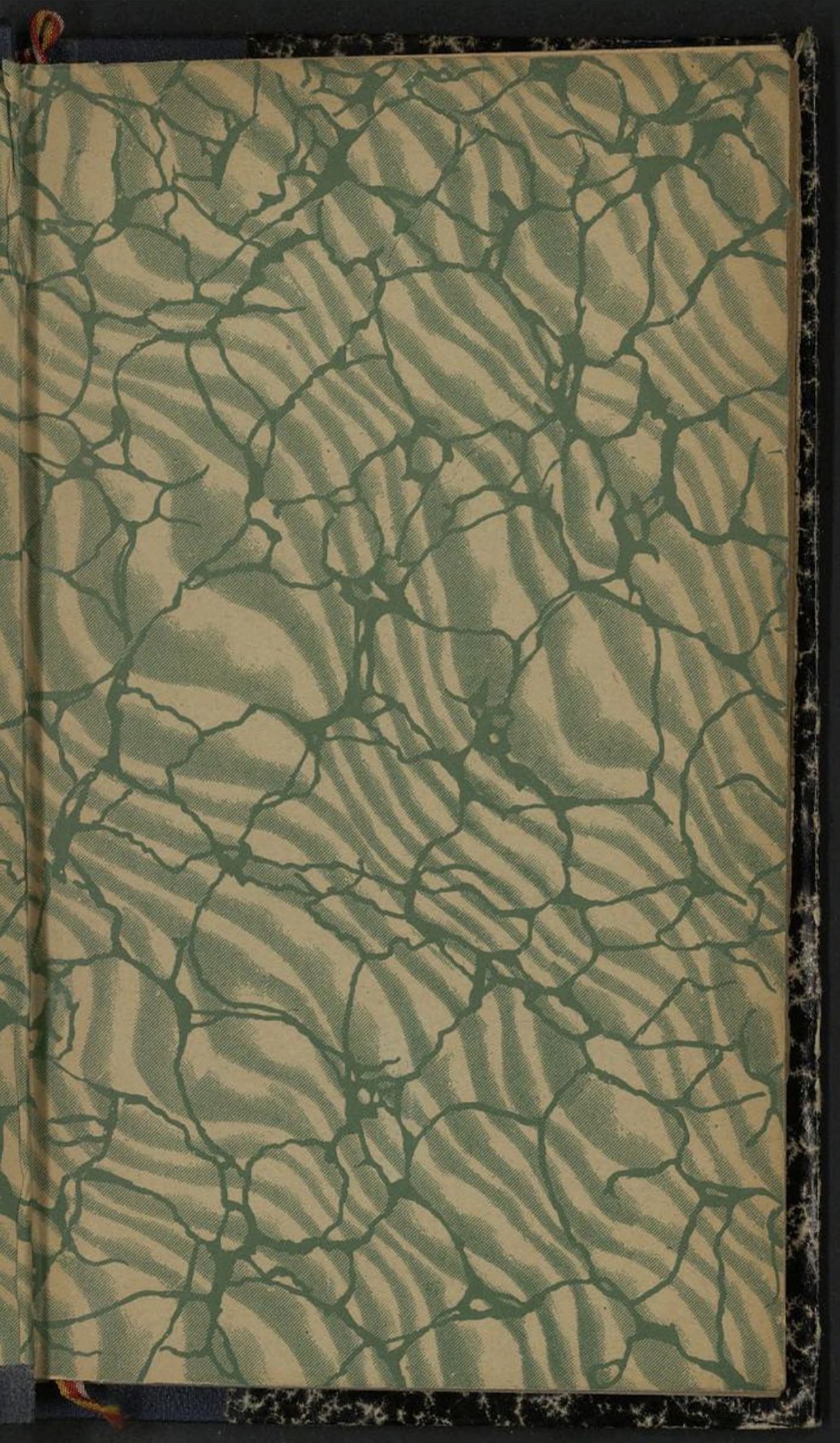
NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

NOTICE DE LA GRANDE MONOGRAPHIE	
Auteur(s) ou collectivité(s)	Boulanger, Auguste
Auteur(s)	Boulanger, Auguste (1866-1923)
Titre	Leçons choisies de mécanique
Nombre de volumes	3
Cote	CNAM -BIB 8 Da 23 à 25
Sujet(s)	Mécanique
Permalien	<a href="https://cnum.cnam.fr/redir?8DA23_24_25">https://cnum.cnam.fr/redir?8DA23_24_25</a>
LISTE DES VOLUMES	
	<a href="#">Leçons choisies de mécanique. [1]. Dynamique des solides tournants</a>
VOLUME TÉLÉCHARGÉ	<a href="#">Leçons choisies de mécanique. [2]. Les principes de la mécanique des ressorts</a>
	<a href="#">Leçons choisies de mécanique. [3]. Le choc des corps solides : théorie, expérimentation, utilisation</a>

NOTICE DU VOLUME TÉLÉCHARGÉ	
Auteur(s) volume	Boulanger, Auguste (1866-1923)
Titre	Leçons choisies de mécanique
Volume	<a href="#">Leçons choisies de mécanique. [2]. Les principes de la mécanique des ressorts</a>
Adresse	Paris : Gauthier-Villars et Cie, éditeurs libraires du Bureau des longitudes, de l'École polytechnique, 1927
Collation	1 vol. (86 p.) : ill. ; 23 cm
Nombre de vues	102
Cote	CNAM-BIB 8 Da 24
Sujet(s)	Amortissement (mécanique) Mécanique Ressorts -- Propriétés mécaniques
Thématique(s)	Machines & instrumentation scientifique
Typologie	Ouvrage
Langue	Français
Date de mise en ligne	20/05/2021
Date de génération du PDF	06/02/2026
Recherche plein texte	Disponible
Notice complète	<a href="https://www.sudoc.fr/051893738">https://www.sudoc.fr/051893738</a>
Permalien	<a href="https://cnum.cnam.fr/redir?8DA24">https://cnum.cnam.fr/redir?8DA24</a>

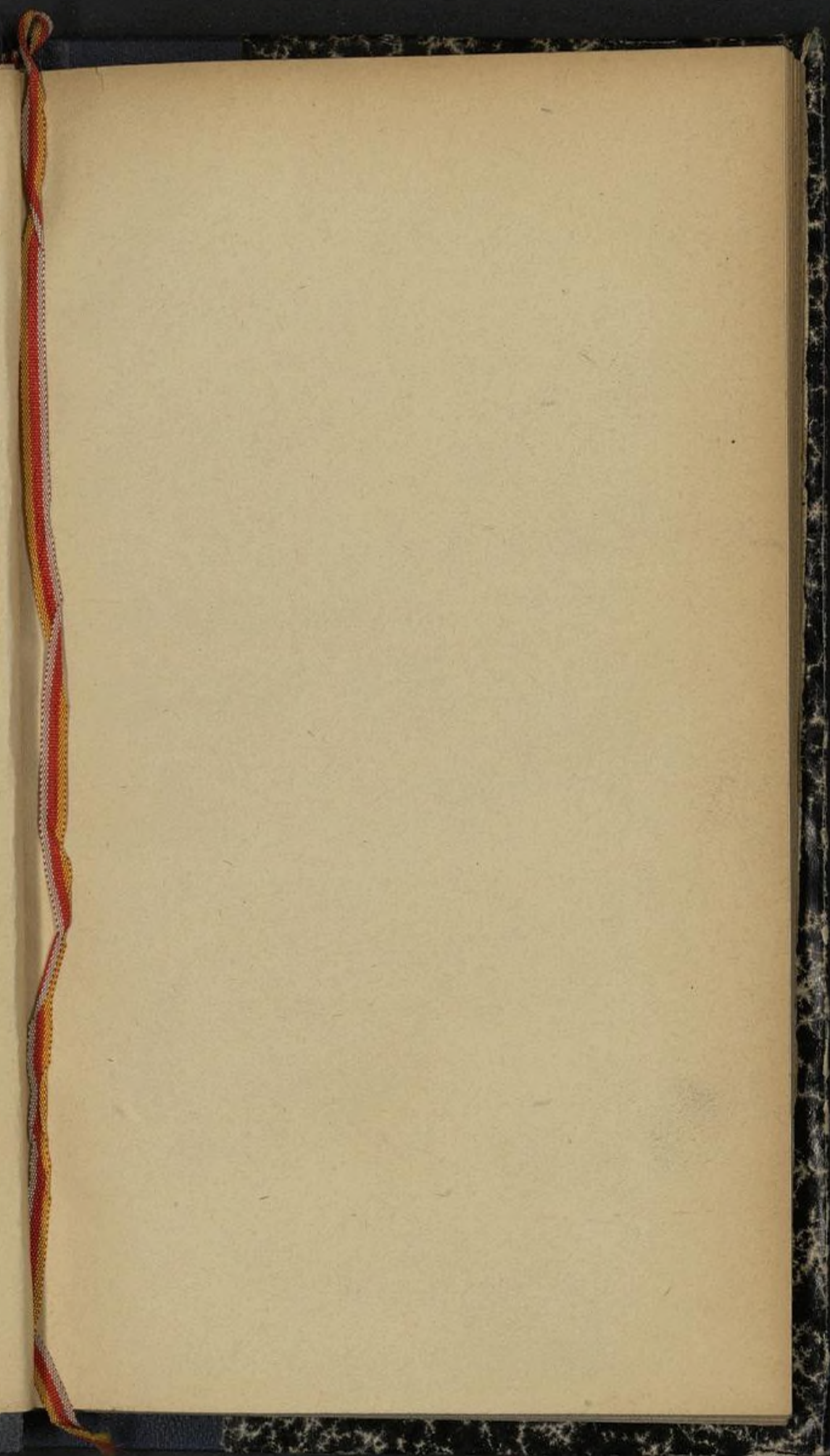




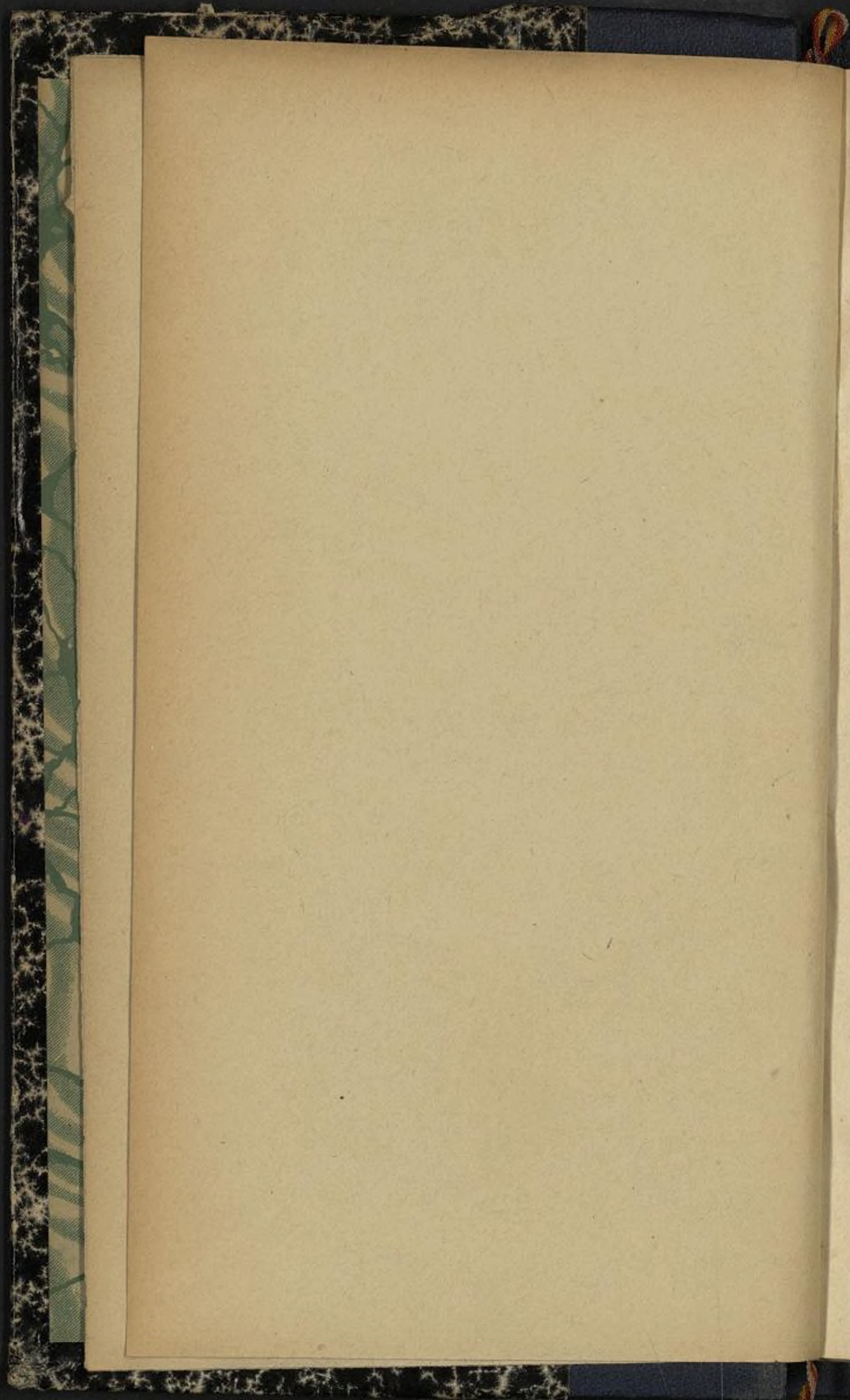












Hommage des Éditeurs

LES PRINCIPES

DE LA

MÉCANIQUE DES RESSORTS



---

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>o</sup>.

Quai des Grands-Augustins, 55.

76930-26

---





8<sup>e</sup> Da. 2H

LEÇONS CHOISIES DE MÉCANIQUE

★★

## LES PRINCIPES

DE LA

# MÉCANIQUE DES RESSORTS

PAR

A. BOULANGER

Directeur des Études à l'École Polytechnique  
Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>, ÉDITEURS

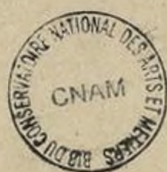
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
55, Quai des Grands-Augustins

1927



73.8

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation  
réservés pour tous pays.





## LES PRINCIPES

DE LA

# MÉCANIQUE DES RESSORTS

---

## CHAPITRE I.

### GÉNÉRALITÉS SUR LES RESSORTS. FORMES. FABRICATION.

1. Définition des ressorts. Formes principales. — 2. Ressorts à lames.  
— 3. Ressorts à boudin : *a*, de traction; *b*, de compression ou de choc; *c*, de torsion. — 4. Ressorts spiraux : *a*, plans; *b*, cylindriques; *c*, coniques. Indications sommaires sur la fabrication. — 5. Choix de la matière : résiliences élastiques de flexion et de torsion. — 6. Construction et trempe (lames, boudins, spiraux, flexibles).

1. **Définition du ressort.** — Étymologiquement, le mot *ressortir* veut dire rebondir, et le *ressort*, dans la terminologie de d'Alembert et de Laplace, est la propriété qui fait revenir un corps comprimé à son premier état. Le mot s'étend au corps qui possède cette propriété à un degré éminent. Laissant de côté les fluides, nous dirons que tout solide disposé de façon à éprouver des déformations importantes qui ne soient pas permanentes, qui disparaissent rapidement quand cesse l'action qui les a produites, est un ressort.

Un arc que l'on bande est un ressort : pour le bander, on dépense sans vitesse sensible une certaine quantité de travail ou, comme on dit, *d'énergie potentielle*; lorsque la flèche est libérée, l'arc lui communique une certaine vitesse



et par suite une certaine quantité d'énergie cinétique, à peu près égale à l'énergie potentielle emmagasinée par la flexion de l'arc et de sa corde. Le ressort moteur d'une pendule ou d'une montre est « remonté » ou « tendu » moyennant une dépense de travail, et en se détendant graduellement pendant sa huitaine ou sa journée de marche, il restitue cette énergie potentielle par la mise en mouvement des mécanismes successifs.

Ainsi les ressorts sont des corps susceptibles de recevoir de grandes déformations temporaires dont le but est de leur faire *emmagasiner de l'énergie* sous forme potentielle, pour qu'ils la restituent sous une autre forme avec une dissipation plus ou moins grande. Il importe que les déformations ne soient pas permanentes pour que l'on puisse compter sur le même effet de restitution d'énergie en soumettant à nouveau le corps expérimenté à la même épreuve : l'archer comme l'horloger escomptent la régularité de fonctionnement de l'arc ou du ressort moteur.

*Formes des ressorts.* — Les ressorts offrent des formes très variées; les plus usuelles se classent pratiquement en trois catégories.

2. **Ressorts à lames.** — Formés de lames presque droites soumises à la flexion. Parfois il n'y a qu'une seule lame comme dans le cas des branches d'un diapason. Mais le plus souvent plusieurs lames superposées sont réunies en un même ressort et frottent l'une sur l'autre : tels les ressorts de choc employés dans la carrosserie pour la suspension des véhicules sur les essieux, et dont le rôle est d'amortir les impulsions subies par les véhicules (locomotives, wagons, tramways, automobiles, voitures) à la rencontre des dénivellations de la voie ou des obstacles de la route.

3. **Ressorts à boudin.** — Formés par un fil ou une tige



à section circulaire, carrée ou rectangulaire, enroulé en forme d'hélice, ils comprennent trois variétés :

a. Les ressorts de *tension* ou de *traction*, soumis à un allongement axial, employés dans les filatures, dans les attelages élastiques Marey interposés entre le cheval et le véhicule (et que les colonels Machart et Ferrus ont fait adopter pour les voitures militaires).

b. Les ressorts de *compression* ou de *choc*, soumis à un chargement axial, employés pour transmettre la charge des voitures de chemins de fer ou de tramways aux ressorts à lames, pour estimer des pressions et des poids à l'aide des indicateurs genre Watt et des pesons, pour équilibrer les soupapes de sûreté des chaudières. Les rondelles Grover ou Thackray qui s'opposent au desserrage des écrous ne sont que des ressorts à boudin réduits à une seule spire. Les rondelles Belleville, fort employées dans les matériels d'artillerie et formées de couronnes tronconiques superposées alternativement par grandes et petites bases, procèdent d'un principe différent, quoiqu'elles soient aussi des ressorts de compression.

c. Les ressorts de *torsion*, soumis à un couple autour de leur axe; tels les ressorts de fermeture de porte, les ressorts employés comme liaisons élastiques entre petits arbres, et surtout les *flexibles* de transmission.

La matière ne travaille pas de la même manière dans les diverses variétés de ressort à boudin : pour *a* et *b*, la déformation du fil est une torsion, et pour *c*, elle est une flexion.

4. **Ressorts spiraux.** — Formés d'une mince bande d'acier de grande longueur enroulée en forme de spirale, ils comprennent trois variétés :

a. *Spiraux plats.* — La ligne moyenne de la lame est



plane et a l'allure d'une spirale d'Archimède. Le spiral plat est employé comme ressort de barillet ou moteur des montres, et plus généralement comme ressort moteur d'un grand nombre d'appareils exigeant peu d'énergie et où cette énergie doit occuper un espace très restreint : il est accroché par une extrémité au tambour et par l'autre à la bonde qui fait corps avec l'arbre du barillet ; il est encore employé dans les sonnettes, serrures, sécateurs, etc., et notamment comme spiral réglant du balancier des montres. Ce ressort est soumis à un couple autour de l'axe du barillet et travaille à la flexion.

*b. Spiraux cylindriques ou hélicoïdaux.* — La lame, à section constante, est enroulée de manière que sa ligne moyenne forme une hélice située sur un cylindre de révolution, coupant les génératrices sous un angle constant. Le spiral cylindrique est employé comme régulateur dans les chronomètres de précision.

*c. Spiraux coniques ou biconiques.* — Formés par un fil ou une lame enroulée de manière que la ligne centrale soit située sur un cône ou un double cône de révolution et fasse un angle constant avec les génératrices. Ce sont des ressorts de compression longitudinale employés notamment dans les heurtoirs : ils peuvent devenir très courts sans que les spires se touchent.

#### INDICATIONS SOMMAIRES SUR LA FABRICATION.

5. Le choix de la matière à utiliser dépend de sa *résilience élastique* d'extension ou de cisaillement, c'est-à-dire de la plus grande quantité de travail de déformation non permanente que la substance peut supporter par unité de volume. Il importe de ne pas confondre cette résilience élastique avec



la résilience de rupture qu'on détermine avec le mouton pendule de Charpy ou avec le mouton rotatif de Guillery.

Soit (fig. 1) une tige prismatique de section  $S$  et de longueur  $l$ , de volume  $\mathcal{V} = Sl$ , soumise à un effort total de

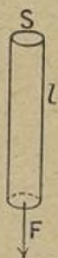


Fig. 1.

traction  $F$  ou à un effort unitaire  $f = \frac{F}{S}$ . Si  $\Delta l$  est l'allongement final qu'elle subit, l'expérience montre qu'il est lié à  $F$ ,  $S$  et  $l$  par la relation

$$E \frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{S},$$

$E$  étant un coefficient caractéristique de la substance et qu'on appelle le module d'élasticité d'Young.

Le travail de déformation ou de la force de traction, qui part de la valeur zéro pour arriver à la valeur  $F$ , c'est-à-dire qui a  $\frac{F}{2}$  pour valeur moyenne, est

$$\frac{F}{2} \Delta l \quad \text{ou} \quad \frac{F^2 l}{2ES} \quad \text{ou} \quad \frac{f^2 S l}{2E} \quad \text{ou enfin} \quad \frac{f^2 \mathcal{V}}{2E},$$

en sorte que le travail de déformation, rapporté à l'unité de volume, est  $\frac{f^2}{2E}$ . La résilience  $\rho_e$  correspond à la plus grande traction unitaire  $f_m$  que la substance peut supporter sans déformation permanente :

$$\rho_e = \frac{f_m^2}{2E}.$$



Le résultat vaut aussi pour la compression (sauf dans le cas de la fonte).

Soit maintenant (fig. 2) une pièce prismatique encastrée

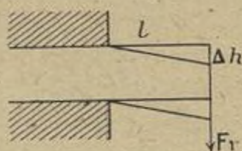


Fig. 2.

dont le tronçon  $l$  est soumis, à son extrémité, à un effort total de cisaillement  $F_1$  ou à un effort unitaire  $f_1 = \frac{F_1}{S}$ .

Si  $\Delta h$  est l'abaissement extrême que subit la branche terminale, on a la relation analogue à la précédente :

$$G \frac{\Delta h}{l} = \frac{F_1}{S},$$

$G$  étant un autre coefficient spécifique de la substance, qu'on appelle le module de rigidité ou de glissement, et dont la valeur numérique est surtout donnée par des phénomènes de torsion.

Le travail de déformation ou de la force cisailante, qui part de la valeur zéro pour arriver à la valeur  $F_1$  et dont la valeur est  $\frac{F_1}{2}$  en moyenne, est

$$\frac{F_1}{2} \Delta h \quad \text{ou} \quad \frac{F_1^2 l}{2GS} \quad \text{ou} \quad \frac{f_1^2 S l}{2G} \quad \text{ou enfin} \quad \frac{f_1^2 \mathcal{V}}{2G};$$

le travail rapporté à l'unité de volume est  $\frac{f_1^2}{2G}$ .

La résilience  $\rho_c$  correspond à la plus grande valeur de  $f_1$  que la substance peut supporter sans conserver de déformation permanente :

$$\rho_c = \frac{f_{1m}^2}{2G}.$$



On établit, dans la Résistance des Matériaux, que les déformations par flexion simple reviennent à des déformations par traction et compression, et que les déformations par torsion simple reviennent à des déformations par cisaillement.

Dès lors, les ressorts dont nous avons dit qu'ils travaillent à la flexion doivent être faits en une matière qui présente le plus grand  $\rho_e$  possible; tandis que ceux qui travaillent à la torsion doivent être fabriqués en une substance qui donne le plus grand  $\rho_e$  possible.

Voici les valeurs de  $\rho_e$  et de  $\rho_c$  pour les substances usuelles, quand on prend pour unités de force et de longueur le kilogramme et le centimètre :

	$\rho_e$	$\rho_c$
Fer forgé.....	0,72	1,40
Acier doux.....	1,41	2,33
Acier doux durci.....	5,95	9,28
Acier fondu non durci.....	7,80	13,60
Acier fondu durci.....	42,10	58,90
Cuivre.....	0,05	0,05
Laiton.....	0,19	0,29
Bronze phosphoreux.....	0,93	1,47

Le bronze silicieux, le nickel, le laiton maillechort donnent des résultats du même ordre que le bronze phosphoreux. Il ne s'agit d'ailleurs que de nombres moyens, susceptibles de fluctuations suivant les échantillons.

D'après ce tableau, on voit que l'acier fondu durci est la substance de choix pour la fabrication des ressorts; il est 40 fois meilleur que le fer forgé ou le bronze phosphoreux; il doit au durcissement d'être rendu 5 fois meilleur. Mais le durcissement et la trempe de l'acier réclament des tours de main spéciaux qui font toute la valeur de certaines maisons. Comme matière première, les aciers de Suède sont très réputés pour la fabrication des ressorts en bandes. Les ressorts en acier trempé se trouvent protégés par une couche



d'oxyde de fer contre les altérations atmosphériques; les ressorts en fer forgé peuvent recevoir une telle patine par le procédé Borff.

L'acier et le fer sont exclus des appareils électriques en raison de leurs propriétés magnétiques; on emploie alors le bronze phosphoreux qui offre l'avantage de ne pas présenter de déformations sous-permanentes après de petites charges, et dont la dureté peut être augmentée à froid par laminage et étirage.

6. **Construction et trempe.** — Les ressorts à lames (fig. 3) employés pour la suspension des véhicules, se com-

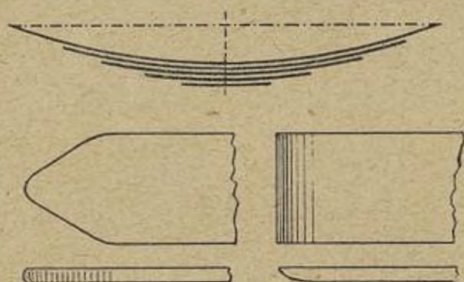


Fig. 3.

posent ordinairement d'un système de lames d'acier superposées, en général de même épaisseur, dont les fibres moyennes, à l'état naturel, sont circulaires et concentriques. Les profils des lames sont symétriques par rapport à la verticale du centre; les extrémités ont la forme de solides d'égale résistance, encastrés et fléchis en bout. Les lames sont forgées; portées au rouge, elles sont cintrées de manière à s'appliquer exactement sur un gabarit métallique. On conduit le travail de façon qu'il soit achevé quand la température est celle du rouge sombre.

La lame mise en forme est plongée dans l'eau : on y fait



pénétrer d'abord les deux extrémités, puis le milieu, pour obtenir une structure moléculaire symétrique. La lame est ensuite chauffée graduellement au fourneau à air et essayée au tison de bois : quand le tison frotté donne une fumée connue, la température du revenu est convenable; la pièce retirée est mise à refroidir sur un marbre.

Les lames superposées sont en retrait les unes sur les autres, à partir de la première appelée *maîtresse lame*. Pour obvier à leur déplacement latéral, chacune d'elles porte un téton qui pénètre dans un trou de la suivante, et souvent une brève ondulation longitudinale aux extrémités qui entre dans un creux approprié de l'autre. Ces lames sont maintenues par une bride placée dans la région moyenne et qui les réunit, les serre les unes contre les autres; ou bien par un boulon qui traverse des trous pratiqués au milieu de chacune et dont le serrage de l'écrou les presse mutuellement.

Le serrage ne doit pas être exagéré, car il est complété par la charge de la partie relativement fixe du véhicule qui se transmet aux extrémités de la maîtresse lame par des boulons ou ressorts verticaux ou légèrement obliques. Le ressort, qui tourne sa concavité vers le haut, s'appuie par son point le plus bas sur l'essieu ou sur une boîte à graisse intermédiaire.

Si les lames sont d'égale épaisseur, elles doivent avoir même courbure avant serrage; si elles sont d'inégale épaisseur, ce sont les plus courtes qui sont les plus minces et les plus courbées.

L'essai des ressorts de voiture consiste en un redressement complet à la presse hydraulique, trois fois répété, et qui ne doit laisser aucune déformation permanente.

Il ne faut pas perdre de vue que le frottement des lames les unes contre les autres dans leur déformation intervient, comme l'élasticité, dans l'amortissement des oscillations du véhicule.



Les ressorts à boudin se fabriquent au tour. Sur un tour à fileter, on monte un mandrin en fer poli au bout duquel on fixe le fil ou la tige à ouvrer, après avoir donné à son extrémité la forme voulue à l'aide d'outils appropriés (fig. 4).

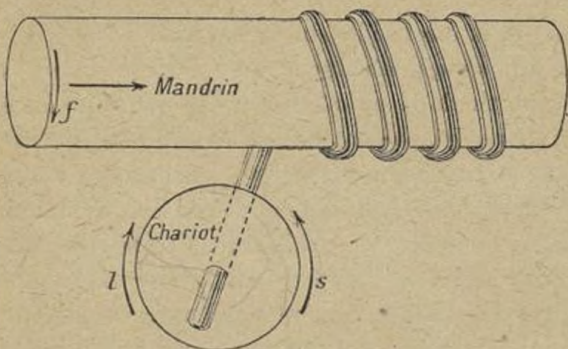


Fig. 4.

Le tour est mis en mouvement dans le sens naturel marqué par la flèche  $f$ , tandis que le fil est guidé par le chariot porte-outil mû de droite à gauche. Le fil entre sous le mandrin en formant une hélice à droite ou dextrorsum (qui s'enfonce pour qui parcourt du regard le cercle de base dans le sens des aiguilles d'une montre). Si le travail se fait à froid, le ressort achevé et abandonné à lui-même s'écarte du mandrin; l'espacement des spires se resserre si à l'entrée le fil est tordu suivant le sens  $s$ , se conservera si il n'y a pas de torsion, s'accroîtra si le fil reçoit une torsion d'entrée de sens  $l$ . En particulier, si l'enroulement a lieu de manière que les spires successives se touchent après avoir été tordues dans le sens  $s$ , on aura un ressort à spires appuyées les unes sur les autres et entre lesquelles on ne peut voir le jour qu'en soumettant le ressort à une traction notable. Il y a en tout cas augmentation du diamètre et diminution du nombre des spires, par suite de la part de déformation élastique qui accompagne la déformation principale qui est



permanente. Nous nous bornons à indiquer le procédé qui sera justifié ultérieurement.

Si le ressort doit être trempé, on fait une opération analogue avec du fil ou de la tige portée au rouge, puis on isole le ressort du mandrin, on le fait chauffer au rouge sombre dans un fourneau à air et on le plonge dans un bain d'huile chaude en maintenant son axe vertical et en lui imprimant un mouvement de rotation autour de cet axe. La température du bain est réglée de manière à obtenir la teinte *bleue* spéciale à l'acier à ressort.

Les *ressorts spiraux coniques* industriels se fabriquent de même, à part que l'enroulement est fait sur une moitié d'un mandrin ayant la forme d'un baril très bombé.

Pour les *ressorts spiraux de précision*, dont le peu d'épaisseur entraîne l'instantanéité du refroidissement, ils sont enfermés avec leur mandrin dans un creuset ou une boîte de platine, au milieu de charbon de bois pulvérulent tassé : le tout est porté et maintenu un moment au rouge, puis plongé dans l'eau. Ensuite la boîte est chauffée graduellement à la flamme sur un plateau de fer, en présence d'une pièce témoin décapée et polie : quand le témoin a pris la teinte bleue de l'acier à ressort, on admet que les pièces enfermées ont acquis la même température et on laisse refroidir.

Les *spiraux plats* conformés sur gabarit avant la trempe sont traités comme les précédents. Mais généralement ces spiraux sont fabriqués en longs rubans continus; dans ce cas, le ruban est promené lentement par un système de rouleaux entraîneurs à travers un fourneau à air où il séjourne assez longtemps pour atteindre le rouge; au sortir de là, il passe à travers un réservoir à circulation d'eau où il se trempe et durcit; il circule alors dans du coton huilé, puis dans une flamme qui combure l'huile; enfin il se refroidit à l'air libre et s'enroule sur un tambour.

Pour les *ressorts des chronomètres*, on emploie beaucoup



— depuis *Paul Perret* — les aciers en nickel et notamment l'*invar* de M. *Guillaume* qui est le métal de choix de l'horlogerie moderne.

Une classe spéciale de ressorts, peu aptes à emmagasiner de l'énergie, mais d'une grande souplesse sont les *flexibles* employés pour les transmissions de rotation dans les machines-outils portatives (perceuses, taraudeuses, etc.), les appareils de chirurgie et les commandes de compteurs, taximètres, etc. Ils comprennent d'une part une âme formée d'une série de ressorts superposés et enroulés en sens contraires, de façon à contrarier les efforts de torsion à transmettre, d'autre part une enveloppe protectrice qui peut être constituée par un tuyau métallique flexible ou par un ressort entouré d'une gaine en cuir. L'âme se termine par deux tiges cylindriques dont l'une recevra l'outil et dont l'autre est munie soit d'une poulie à gorge pour la commande par câble, soit d'un joint de cardan quand le départ à l'arbre moteur se fait sous un petit angle.

---



## CHAPITRE II.

### FONCTION DES RESSORTS. AMORTISSEMENT. RÉSONANCE.

7. Fonction des ressorts : amortissement des oscillations. — 8. Résonance avec ou sans amortissement. — 9. Application à la mesure d'une fréquence. — 10. Emploi des battements pour détruire la résonance. — 11. Amélioration de l'amortissement par frottement dans un liquide visqueux ou sur un solide. — 12. Application : rôle des ressorts dans la traction des véhicules; évaluation de l'augmentation de rendement.

7. **Fonction des ressorts.** — Nous allons, pour étudier la propriété fondamentale des ressorts, envisager un cas simple dont les conclusions s'étendent au cas général d'un ressort de forme quelconque.

Soit (*fig. 5*) une boule matérielle  $M$  fixée à l'extrémité

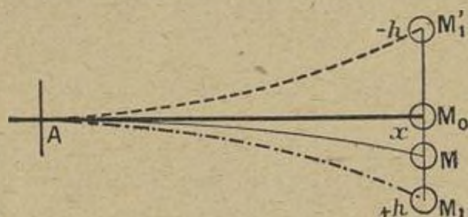


Fig. 5.

libre d'une longue verge élastique horizontale, encastrée par un bout <sup>(1)</sup>; si nous écartons cette boule horizontale-

<sup>(1)</sup> La section transversale de la tige a sa plus petite dimension horizontale, la plus grande verticale.



ment de sa position naturelle d'équilibre, nous constatons qu'elle exécute de part et d'autre de cette position une série d'oscillations dont la grandeur va en diminuant assez rapidement. C'est à cet *amortissement* de leurs oscillations que les ressorts doivent leur principale fonction, et c'est aussi cet amortissement qu'il s'agit d'expliquer.

La tige étant longue, on peut considérer M comme décrivant sensiblement une droite horizontale perpendiculaire à la position naturelle  $AM_0$ . La loi dite de Hooke, vérifiable expérimentalement, régit son déplacement  $M_0M = x$  : la force susceptible de produire ce déplacement est, à l'état statique, proportionnelle à ce déplacement  $x$  (*Ut tensio, sic vis*).

Inversement la tige ainsi déformée réagit sur la boule et exerce sur elle une force  $F$  dirigée vers  $M_0$  et proportionnelle à  $x$ , soit  $-Kx$ ;  $m$  étant la masse de la boule, on peut d'ailleurs remplacer le coefficient de proportionnalité  $K$  par  $mk^2$ . L'équation du mouvement M sera <sup>(1)</sup>

$$(1) \quad m \frac{dv}{dt} = F \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = -k^2 x \quad \text{ou enfin} \quad x'' + k^2 x = 0,$$

puisque l'on a

$$v = \frac{dx}{dt} = x'.$$

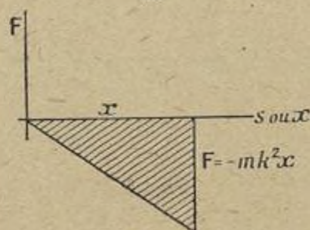


Fig. 6.

Le diagramme (Chemin, Force) se réduit ici (fig. 6) à un

(1) En négligeant la masse de la lame élastique vis-à-vis de celle de la boule.



triangle, dont l'aire est, au signe près :  $\frac{1}{2}mk^2x^2$ . Le théorème de l'énergie donne donc

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + k^2x^2) = \text{const.}$$

Si  $h$  est l'élongation maximale initiale pour laquelle  $\dot{x} = 0$ , la constante vaut  $\frac{m}{2}k^2h^2$ , en sorte qu'on a

$$\dot{x}^2 = k^2(h^2 - x^2).$$

Il est aisé de trouver une fonction du temps  $t$  qui satisfasse à cette équation; il suffit de poser

$$(2) \quad x = h \sin kt,$$

car pour cette fonction, on a

$$\dot{x} = x' = kh \cos kt.$$

On dit que l'équation (2) représente un *mouvement oscillatoire simple*, dont on peut donner la représentation suivante (fig. 7).

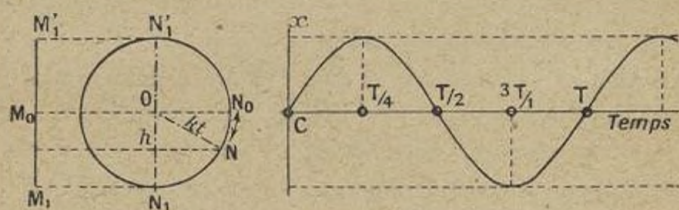


Fig. 7.

Sur  $M_1M_1'$ , décalé en  $N_1N_1'$ , comme diamètre, décrivons une circonférence qu'un mobile décrira uniformément avec la vitesse angulaire  $k$ . Si le rayon de ce mobile est initialement en  $ON_0$  perpendiculaire à  $N_1N_1'$ , on a

$$\widehat{NON_0} = kt,$$

et la projection du mobile  $N$  sur  $M_1M_1'$  coïncidera avec la position correspondante de la boule.



Le diagramme (Temps, Espace, ou  $t, x$ ) a la forme périodique ci-dessus. La *période* est le temps  $T$  au bout duquel  $x$  reprend sa valeur après que  $N$  a décrit un tour, c'est-à-dire la durée  $T$  définie par

$$kT = 2\pi, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{2\pi}{k}.$$

En fait, on sait bien que les choses ne se passent pas ainsi : les oscillations diminuent graduellement d'amplitude sans que leur durée paraisse sensiblement modifiée. Pour rendre compte de ce fait, on pourrait invoquer la résistance de l'air; malheureusement le phénomène se passe sensiblement de même dans le vide, en sorte qu'il faut chercher une autre explication.

D'après les vues de Gilbault, de de la Rive et autres, actuellement admises, la déformation de la tige élastique, ou plus généralement du ressort, est accompagnée d'un travail moléculaire qui l'échauffe, et l'énergie thermique ainsi développée se dissipe par rayonnement.

Dans l'ignorance où l'on est de la loi de cette dissipation, on fait sur elle l'hypothèse la plus simple. On admet que la dissipation est d'autant plus grande que la déformation est plus rapide, et comme la rapidité de la déformation n'a pour élément appréciable que l'énergie cinétique du système, on admet que la perte d'énergie totale par unité de temps est proportionnelle à l'énergie cinétique à l'instant envisagé.

Nous avons vu que l'énergie totale a pour expression

$$\frac{m}{2} (\dot{v}^2 + k^2 x^2);$$

sa variation est  $m(\dot{v} d\dot{v} + k^2 x dx)$  durant le temps  $dt$ , en sorte que sa *perte* par unité de temps est, puisque  $\frac{dx}{dt} = \dot{v}$ ,

$$-m\dot{v} \left( \frac{d\dot{v}}{dt} + k^2 x \right);$$



d'autre part, l'énergie cinétique est  $\frac{m}{2} v^2$ . Si donc nous appelons  $4a$  un coefficient de proportionnalité, d'ailleurs petit, nous aurons

$$-mv \left( \frac{dv}{dt} + k^2 x \right) = 4a \frac{m}{2} v^2$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 x - 2av.$$

Tout se passe comme si, à la tension de la tige se joignait une force de résistance  $-2mav$  proportionnelle à la vitesse, comme pourrait l'être la résistance de l'air aux faibles vitesses.

A l'équation (1) précédente se trouve substituée l'équation

$$(3) \quad x'' + 2ax' + k^2 x = 0$$

qui n'est plus vérifiée par la fonction (2). Mais si l'on pose

$$x = e^{-at} Z \quad \text{et} \quad k_1^2 = k^2 - a^2$$

(ce qui est possible parce que  $a$  est petit par rapport à  $k$ ), on a

$$x' = e^{-at} [Z' - aZ], \quad x'' = e^{-at} [Z'' - 2aZ' + a^2 Z],$$

en sorte que l'équation (3) se transforme en

$$Z'' + k_1^2 Z = 0;$$

on retrouve une équation de même forme que l'équation (1). Par suite, la solution analogue à (2) sera

$$x = H e^{-at} \sin k_1 t.$$

Les ordonnées de la courbe sinusoïdale précédente se trouvent (*fig. 8*) divisées par le facteur  $e^{at}$  qui est rapidement croissant, car  $e = 2,718$ . La courbe (Temps, Espace) forme ainsi des ondulations qui s'aplatissent rapidement sur l'axe des temps; elle est toujours comprise entre les



deux branches d'exponentielles  $X = H e^{-at}$  qu'elle va toucher successivement.

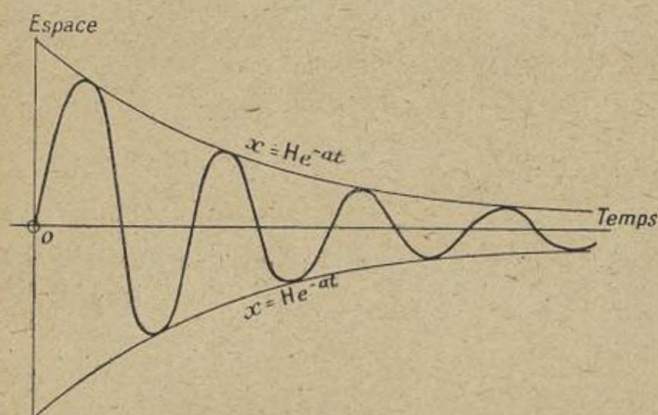


Fig. 8.

A deux instants, différant de  $T'$  tel que

$$k_1 T' = 2\pi \quad \text{ou} \quad T' = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \frac{a^2}{k^2}}}$$

(qui diffère peu de  $T$ ,  $a$  étant petit devant  $k$ ), le sinus reprend sa valeur, mais l'exponentielle se trouve multipliée par

$$q = e^{-aT'}.$$

Les élongations maxima positives successives se trouveront multipliées par les puissances croissantes de ce facteur indéfiniment décroissant et tendront vers zéro.

Si nous en considérons trois consécutives  $x_1, x_2, x_3$ , nous aurons

$$x_2 = q x_1, \quad x_3 = q x_2, \quad \text{d'où} \quad x_3 = q^2 x_1.$$

Une élongation maximum quelconque est moyenne proportionnelle entre les deux voisines, comme l'expérience permet de le contrôler.

Si  $h$  est la première élongation maximum, qui correspond



à la valeur 1 du sinus, ou  $\frac{\pi}{2}$  de  $k_1 t$ , on a

$$h = \dot{H} e^{-\frac{\pi a}{2k_1}},$$

pour déterminer  $H$  en fonction d'un élément mesurable.

Les élongations maxima formeront les termes successifs de la progression géométrique

$$h, hq, hq^2, hq^3, \dots$$

indéfiniment décroissante. C'est en cette propriété que consiste l'amortissement.

Les considérations précédentes sur l'amortissement des oscillations d'une tige encastrée s'appliquent sans changement au mouvement d'une masse suspendue à un ressort à boudin vertical, et au mouvement d'un levier horizontal suspendu en son centre de masse à un fil métallique ou à un ressort spiral que l'on tord. Dans ce dernier cas, si  $\varphi$  est l'angle de déviation angulaire du levier à partir de sa position naturelle, l'équation qui définit ce paramètre en fonction du temps est de la forme

$$I\ddot{\varphi} + 2l\dot{\varphi} + C\varphi = 0,$$

$I$  étant le moment d'inertie du levier par rapport à l'axe du ressort,  $l$  un coefficient de déperdition dépendant de la substance déformée et  $C\varphi$  étant le torque ou couple statique qui donnerait au levier la déviation  $\varphi$ . Cette équation se traitera comme l'équation en  $x$  à laquelle elle se ramène en posant

$$k^2 = \frac{C}{I} \quad \text{et} \quad a = \frac{l}{I}.$$

La durée d'une oscillation complète qui était  $\frac{2\pi}{k_1}$ , sera maintenant

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{C^2}}},$$



et les amplitudes seront successivement multipliées par

$$e^{-\frac{2\pi l}{\sqrt{Cl}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{f^2}{C^2}}}}$$

8. **Résonance.** — On va maintenant examiner une propriété qui est le contraire de l'amortissement et qu'on appelle la *résonance*. Elle résulte de l'action d'une force supplémentaire périodique ayant aussi pour période  $T$ , et elle consiste en l'entretien ou en l'exagération de l'amplitude des oscillations. Ce phénomène de la résonance a été étudié très profondément il y a plus de 50 ans par *Hermann von Helmholtz*.

Le mouvement de l'*escarpolette* donne un exemple simple de résonance. La personne qui se balance accroit de plus en plus l'amplitude des oscillations en imprimant périodiquement à bout de course une impulsion à l'appareil, par un jeu de forces intérieures que nous ne saurions analyser ici.

Un dispositif expérimental simple permet d'examiner à loisir un fait analogue. Une boule pesante (*fig. 9*) est sus-

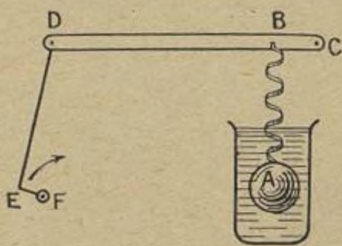


Fig. 9.

pendue à un ressort à boudin vertical AB, attaché lui-même à un levier CD dont C est le point fixe; l'extrémité D du levier reçoit un mouvement alternatif d'une bielle de connexion DE, commandée par une manivelle à volant EF.



Si cette manivelle reçoit à la main un mouvement de rotation régulier, le point D prend un mouvement oscillatoire périodique, et l'extrémité B du ressort prend le même déplacement seulement réduit dans le rapport des bras de levier. Le ressort reçoit ainsi par son extrémité B ce qu'on appelle une *oscillation forcée*, par opposition aux *oscillations libres* qu'il prendrait sous une impulsion verticale donnée à la boule. On peut ainsi étudier successivement :

1° L'oscillation naturelle du ressort, au début, avant que l'amortissement soit sensible;

2° L'oscillation amortie, dont on exagère l'amortissement en faisant plonger la boule dans un liquide;

3° L'oscillation forcée superposée à l'oscillation naturelle à l'air libre; pour une vitesse convenable de la manivelle (un tour pour une oscillation naturelle du ressort, avec concomitance des élongations maximales), on constate que le déplacement de la boule s'exagère énormément en amplitude et devient irrégulier;

4° L'oscillation forcée superposée à l'oscillation amortie (avec exagération par frottement d'un fluide) : dans les mêmes conditions que tout à l'heure, l'oscillation propre du ressort est bientôt amortie et il reste une oscillation régulière où domine le caractère de l'oscillation forcée.

Si la période du mouvement de la manivelle ou du point B,  $T_f$ , est un multiple notable de celle du mouvement naturel du ressort  $T_n$ , le mouvement de la boule reproduit sensiblement celui du point B : le ressort se comporte comme une liaison rigide. Si  $T_f$  est moindre que  $T_n$ , il se produit un décalage entre les mouvements de B et de A; A est en haut de sa course quand B est en bas, et inversement. Si  $T_f$  est beaucoup plus petit que  $T_n$ , le mouvement de la boule devient insensible.

Bien que toutes ces particularités soient explicables



théoriquement, nous insisterons surtout sur le cas de la *résonance*, c'est-à-dire du cas où un mouvement oscillatoire naturel est entretenu ou développé par une action de même période, et dont l'influence présente son maximum quand la vitesse du système est voisine de zéro. C'est qu'en effet l'exagération des déplacements peut créer un danger pour la résistance même du système. Ainsi : 1° un pont suspendu sur lequel une troupe marche au pas à la cadence des oscillations du tablier (tel le fameux pont d'Angers, sur la Maine), peut rompre ses amarres; 2° un navire peut prendre un roulis ou un tangage dangereux s'il navigue sur une houle de période apparente, de durée voisine de la période propre d'oscillation transversale ou longitudinale.

Notre étude signalera un rôle bienfaisant de cette résonance que d'ordinaire il faut mettre son ingéniosité à combattre; par exemple, dans la régulation des horloges et des montres, le balancier dans son oscillation reçoit à bout de course, afin de s'opposer à l'amortissement, un petit choc qui lui restitue l'énergie perdue à vaincre la résistance de l'air, à entraîner le rouage, et dissipée par la déformation du ressort régulateur; au contraire, l'amortissement se montre l'ennemi de la résonance dont il limite les oscillations.

1° *Résonance sans amortissement.* — Reprenons le calcul du paragraphe 7, en admettant que la boule terminant la tige élastique vibrante soit soumise à une force active supplémentaire, dirigée suivant le déplacement de la boule, et dont l'expression, rapportée à l'unité de masse, est

$$\mathcal{F} = A \sin kt.$$

Nous supposons que cette force périodique a même période  $\frac{2\pi}{k}$  que l'oscillation naturelle du ressort dans le cas où l'amortissement est négligeable ( $a = 0$ ). L'équation qui régit le mouvement est alors, eu égard au principe de l'indépendance



de l'action des forces,

$$x'' + k^2 x = A \sin kt.$$

Il est aisé de reconnaître que toute fonction satisfaisant à cette équation et s'annulant pour  $t = 0$ , est de la forme

$$x = H \sin kt - \frac{A}{2k} t \cos kt.$$

Ainsi la force supplémentaire introduit dans l'expression de  $x$  un second terme qui n'est plus périodique, mais qui est encore oscillatoire, et dont les élongations successives vont en croissant indéfiniment avec le temps.

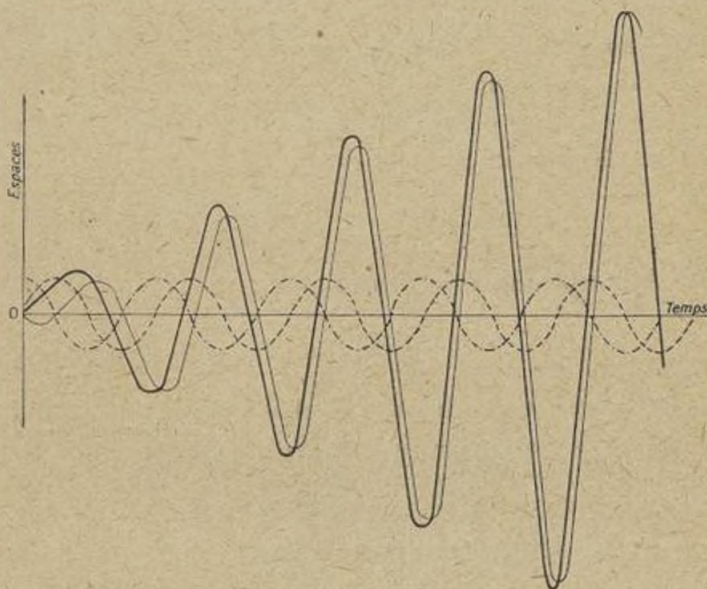


Fig. 10.

La figure ci-dessus (fig. 10) comprend :

- La courbe  $x = H \sin kt$  (trait pointillé);
- La courbe  $x_1 = H \cos kt$  (trait mixte);
- La courbe  $x_2 = x_1 \times \left(1 - \frac{A t}{2 k H}\right)$  (trait plein);



d. La courbe  $X = x + x_2$  (trait gras), qui représente le mouvement défini par l'équation obtenue plus haut.

Quand nous disons que  $x$  augmente indéfiniment, il faut entendre par là que l'amplitude sort des limites dans lesquelles l'équation du mouvement reste suffisamment approchée; il se produit une déformation permanente ou une rupture.

Le résultat que nous venons d'établir a été présenté d'une façon beaucoup plus générale en 1891 par M. *Vicaire*, et utilisé en 1896 par M. *Nadal* dans ses études relatives aux oscillations du bâti d'une locomotive sur ses ressorts.

2° *Résonance avec amortissement*. — Mais dans cette étude, nous avons négligé un élément essentiel : la déperdition d'énergie par déformation et autres causes. L'équation qui régit le phénomène réel est

$$x'' + 2ax' + k^2x = A \sin k_1 t,$$

$a$ ,  $k$  et  $k_1$  étant liés par la relation

$$a^2 + k_1^2 = k^2.$$

Toute fonction satisfaisant à cette équation et s'annulant pour  $t = 0$ , a une expression d'écriture un peu compliquée, savoir :

$$x = Ce^{-at} \sin k_1 t + \frac{A}{a(a^2 + k_1^2)} \{ a \sin k_1 t - 2k_1 \cos k_1 t (1 - e^{-at}) \}.$$

Il n'est pas bien difficile de démontrer que, si l'on fait tendre  $a$  vers zéro, cette expression a pour limite celle que nous avons envisagée tout à l'heure.

On peut donner à cette valeur de  $x$  une forme moins rébarbative en introduisant d'autres constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $H$  et  $l$  aisément exprimables en fonction des coefficients donnés.



Si l'on pose

$$\begin{aligned} \tan \beta &= -\frac{2k_1}{a}, & l &= \sqrt{a^2 + 4k_1^2}, \\ \tan \alpha &= \frac{2k_1 A}{al^2 C}, & H &= \sqrt{C^2 + \frac{4k_1^2 A^2}{a^2 l^2}}, \end{aligned}$$

on obtient

$$x = H e^{-at} \sin(k_1 t + \alpha) + \frac{A}{al} \sin(k_1 t + \beta).$$

On reconnaît que le mouvement résulte de la superposition d'une oscillation amortie et d'une oscillation sinusoïdale ordinaire, présentant l'une par rapport à l'autre un décalage  $\frac{\beta - \alpha}{k_1}$  suivant l'axe des temps. La seconde oscilla-

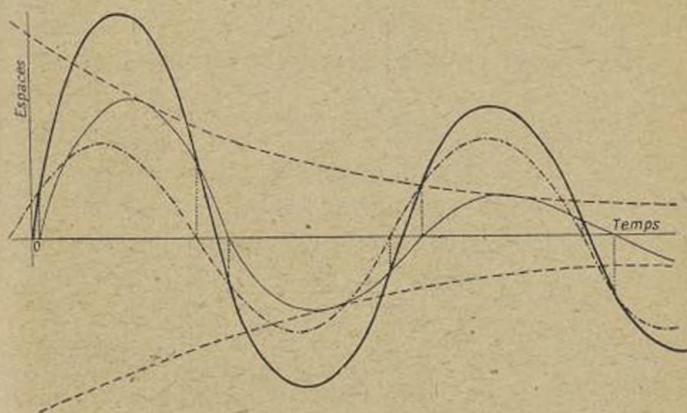


Fig. 11.

tion devient bientôt prédominante, d'autant plus vite que le coefficient de dissipation  $a$  est plus grand; d'ailleurs son amplitude  $\frac{2A}{al}$  sera d'autant moindre que  $l$  sera plus grand, ou, ce qui revient au même, que  $a$  est plus grand. Ainsi se manifeste le rôle avantageux de l'amortissement. Encore faut-il que la plus grande elongation, soit sensiblement au début  $\left| H + \frac{A}{al} \right|$ , ne dépasse pas la limite de rupture ou même de déformation permanente.



### 9. Application de la résonance à la mesure d'une fréquence.

— Si les phénomènes de résonance sont en général nuisibles et à éviter, on a pu cependant en tirer parti pour décèler une durée de vibration ou une fréquence à l'aide d'un jeu de lames d'acier accordées pour vibrer normalement à un nombre de vibrations allant de 40 à 200 par seconde. C'est ainsi que l'on mesure la fréquence des courants alternatifs. Nous nous bornerons à signaler le *tachymètre* de *Frahm*, destiné à mesurer la vitesse de rotation d'un arbre.

L'appareil consiste (fig. 12) en un peigne dont les dents

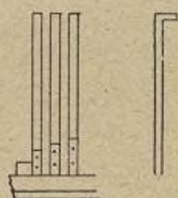


Fig. 12.

sont des lames d'acier de 50<sup>mm</sup> de longueur, 3<sup>mm</sup> de largeur et 0<sup>mm</sup>, 25 d'épaisseur. L'une des extrémités de chaque lame est solidement encastrée dans une pièce massive; l'autre extrémité est courbée à angle droit pour former un talon de 4<sup>mm</sup>, et dans l'angle de ce talon est coulée une goutte de soudure. Chaque lame est pincée dans une mâchoire double de longueur variable d'une lame à l'autre; on agit sur cette longueur en même temps que sur le poids de la soudure pour réaliser un nombre de vibrations par seconde échelonné entre 40 et 200. Les talons sont ripolinés en blanc pour que leur visibilité soit accentuée.

Ce jeu de lames vibrantes, étalonné, est appliqué sur le bâti de la machine dont on veut déterminer la vitesse de rotation; les secousses qu'il éprouve ont pour effet de faire vibrer, avec une intensité particulière, celle des lames dont



la période propre est sensiblement égale à celle des oscillations de la machine. La tête blanche de cette lame prend un déplacement vibratoire notable parmi ses voisines qui paraissent immobiles. Un tableau de correspondance fait connaître à vue, d'après le numéro de cette lame, le nombre de tours par minute auquel marche la machine. La mesure se fait avec une précision de 1 pour 100.

En électricité, on fait passer devant le jeu de lames un électro traversé par le courant alternatif dont on cherche la fréquence, et l'on détermine de même quelle lame prend l'amplitude maxima.

10. **Battements.** — Généralement il faut s'efforcer de faire obstacle aux phénomènes de résonance; à cet effet, on crée un battement en modifiant la période propre du système ou de la cause perturbatrice en faisant en sorte que cette cause ait son maximum d'effet aux phases les plus variées du mouvement; le décalage des impulsions diminue et détruit graduellement ce mouvement; la cause devient *amortissante*. Mais c'est un amortissement dangereux, instable, si les périodes ne sont pas éloignées l'une de l'autre, et si elles peuvent varier quelque peu; la résonance peut alors surgir à nouveau, elle est l'ennemi aux aguets. Pour éviter la résonance sous l'action d'une série de forces de même période, on ne changera pas de la même manière toutes les périodes; à une troupe passant sur un pont suspendu, on ne fera pas changer la cadence du pas, mais on fera rompre le pas.

11. **Amélioration de l'amortissement dans les ressorts.**  
— 1<sup>o</sup> *Par frottement dans un liquide visqueux.* — D'après ce que nous avons vu, l'amortissement des oscillations d'un ressort sera d'autant plus rapide que  $a$  sera grand, et  $a$  dépend uniquement du ressort. On peut cependant réaliser



un artifice qui équivaut à accroître  $a$  à son gré. Il suffit de faire agir sur le corps oscillant une force de résistance proportionnelle à la vitesse, soit  $-2bx'$ . L'équation du mouvement gardera la même forme, à cela près que  $a$  sera remplacé par  $a + b$ , c'est-à-dire par une quantité plus grande. Une telle résistance est opposée par un fluide épais à un solide qui s'y meut à vitesse modérée. Dès lors, on n'aura qu'à relier le ressort à un piston percé de trous et mobile dans un cylindre rempli d'huile, ou à un piston plein mobile dans un pareil cylindre et dont les deux côtés sont mis en communication par un conduit muni d'un robinet. Dans ce cas encore, les amplitudes s'amortissent en progression géométrique.

2<sup>o</sup> *Par frottement sur un solide.* — Mais dans la pratique il intervient aussi un autre mode d'amortissement résultant du frottement de solide sur solide, tel que celui qui se produit entre les lames d'un ressort de voiture et qui intervient chaque fois que le ressort change de forme, frottement probablement plus grand pour les mouvements lents que pour les mouvements rapides. Nous allons analyser ce nouveau mode dans un cas simple, et même un peu simplifié en ne tenant pas compte de la raideur du ressort : l'amplitude des oscillations, dans cette hypothèse d'un ressort parfait, diminue en progression arithmétique. En réalité cet amortissement se combinera avec celui qui résulte de la raideur.

Un solide glissant à sec sur un autre solide et exerçant sur lui une pression constante, éprouve une résistance également constante et qui est dirigée en sens inverse de son déplacement. Imaginons alors qu'on ait attaché à l'extrémité d'un ressort à boudin horizontal (par exemple) une masse astreinte à se déplacer suivant l'axe du ressort, en exerçant une pression constante sur son guide. Si  $N$



est cette pression, elle provoquera une force de frottement également constante  $fN$ ,  $f$  étant le coefficient de frottement des substances en présence. Cette force est toujours opposée au déplacement de la masse; elle change de signe avec la vitesse.

Soit  $m$  la masse du corps oscillant;  $k$  le coefficient élastique du ressort nous poserons

$$fN = mk^2c.$$

Si  $x$  est l'abscisse de ce corps, l'équation du mouvement est

$$x'' + 2ax' + k^2x = \pm k^2c,$$

le signe à prendre étant  $-$  ou  $+$  suivant que  $x$  croît ou décroît.

Une seule équation ne suffit plus pour définir l'ensemble du mouvement; d'où une difficulté dont on va donner une idée dans le cas où la force  $2ax'$  est négligeable devant  $k^2c$ , et où l'équation se réduit à

$$x'' + k^2x = \pm k^2c.$$

Supposons (*fig. 12 bis*) la masse abandonnée sans vitesse

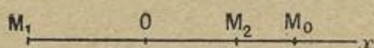


Fig. 12 bis.

à l'action du ressort et de la résistance en une position  $M_0$  d'abscisse  $x_0$ ; elle se dirige vers  $O$ , la direction de la résistance ayant le sens positif de  $Ox$ . L'équation du mouvement est

$$x'' + k^2x = k^2c.$$

Elle est vérifiée, avec une vitesse nulle à l'origine, pour

$$x = c + A \cos kt,$$



A étant une constante,  $x$  décroîtra de  $t=0$  à  $t=2\tau=\frac{\pi}{k}$ , allant de  $x_0$  à  $x_1$ , et l'on aura

$$x_0 = c + A, \quad x_1 = c - A.$$

A partir de l'instant  $2\tau$ ,  $x$  croîtra, et la résistance sera dirigée vers les  $x$  négatifs, en sorte que l'équation du mouvement deviendra

$$x'' + k^2 x = -k^2 c.$$

Si l'on compte maintenant le temps à partir de cet instant  $2\tau$ , nous satisferons à cette équation, avec une vitesse nulle au départ, par

$$x = -c + B \cos kt,$$

B étant une nouvelle constante,  $x$  croîtra de  $x_1$  à  $x_2$ , avec

$$x_1 = -c + B, \quad x_2 = -c - B.$$

Nous avons ainsi

$$x_0 + x_1 = 2c, \quad x_1 + x_2 = -2c;$$

d'où

$$x_2 = x_0 - 4c.$$

Le mobile est ainsi revenu à une elongation maximale vers la droite en  $M_2$ , égale à l'elongation initiale diminuée de  $4c$ .

En repartant de  $M_2$  comme de  $M_0$ , on arrive à ce résultat : Les oscillations conservent la même durée, mais leurs amplitudes diminuent suivant une progression arithmétique dont la raison est  $4c$ .

Voici la forme du diagramme  $(x, t)$  (fig. 13).

Quand le déplacement, à partir de la position d'équilibre, devient inférieur à  $c$ , le mouvement cesse; sinon, le corps, à partir d'une vitesse nulle, prendrait un déplacement de sens opposé à son accélération, c'est-à-dire à l'accroissement



de sa vitesse, ou encore à sa vitesse, ce qui serait contradictoire.

Si le corps était en plus soumis à l'action d'une force extérieure périodique de même période que le ressort, par exemple  $F \cos kt$ , on aurait

$$x_2 = x_0 - 4c + \frac{\pi F}{k^2} = x_0 - 4(c - c'),$$

en posant  $c' = \frac{\pi F}{4k^2}$ . Alors :

Pour  $c > c'$ , on aurait amortissement et finalement arrêt;

Pour  $c = c'$ , on aurait des oscillations à amplitude constante;

Pour  $c < c'$ , on aurait des oscillations à amplitude indéfiniment croissante, c'est-à-dire la résonance avec ses inconvénients.

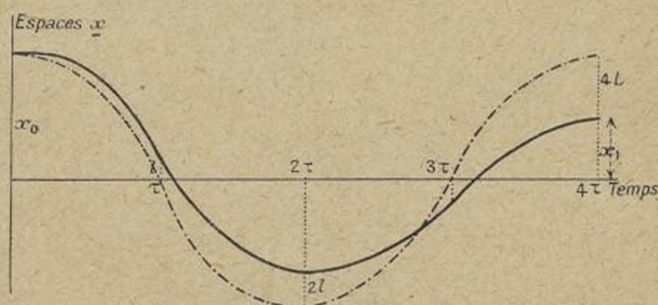


Fig. 13.

La lenteur de l'amortissement produit par un frottement constant a conduit à créer des dispositifs à frottement croissant avec la déformation du ressort : tel l'amortisseur du commandant Krebs, pour automobiles, et où l'intensité de l'amortissement augmente en raison de la grandeur des oscillations des ressorts de suspension de la voiture.

## 12. Rôle des ressorts dans la traction des véhicules. —



Les ressorts de suspension des véhicules servent surtout à atténuer les effets des réactions de percussion verticales qu'engendrent les chocs incessants des roues sur les obstacles offerts par le pavage ou l'empierrement des routes, ou les dénivellations périodiques des rails. L'énergie transmise par ces chocs est absorbée dans la déformation des ressorts et dissipée en leurs oscillations amorties. Les ressorts n'ont plus suffi à leur fonction avec l'allure rapide de la locomotion automobile, et il a fallu que les bandages pneumatiques, — qui, en un sens, sont aussi des ressorts — vinssent à leur aide.

Mais les véhicules subissent aussi des réactions de percussion horizontales, lesquelles se répercutent sur le tracteur. Le couple moteur fourni par celui-ci n'est d'ailleurs constant que dans les voitures électriques; de là, si le tracteur est distinct du véhicule, des efforts irréguliers dans les barres d'attelage et des secousses fâcheuses dans la matière, humaine ou non, transportée. On obvie à ces inconvénients par l'emploi d'*attelages élastiques*. Dans les chemins de fer, la barre d'attelage (fig. 14) transmet l'effort de traction à

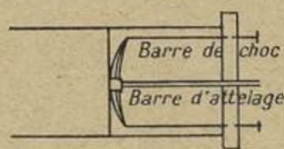


Fig. 14.

son wagon par l'intermédiaire d'un ressort à lames horizontal; d'ailleurs, des tampons élastiques amortissent les chocs des wagons les uns sur les autres et s'opposent, par leurs frottements mutuels, aux mouvements de lacets. Mais il a fallu longtemps pour qu'on s'avise de faire bénéficier de la même idée la traction animale ou humaine.

J. B. Marey a montré, dès 1874, que l'emploi d'un appa-



reil élastique de traction procurait une économie sensible de travail. Il employait à cet effet un homme attelé à une voiture à bras et lui faisait transporter la même charge, à la même vitesse, sur le même parcours, en employant tantôt une bricole ordinaire, tantôt un attelage élastique. Le travail utile produit étant ainsi constant, la variation du travail moteur, indiquée par un dynamomètre enregistreur, permettait de mesurer le gain résultant de l'utilisation d'appareils élastiques, gain qui était de 20 à 25 pour 100.

La traction élastique, du système *Siden*, venait d'être adoptée en Suède pour l'artillerie quand en 1897, à Vincennes, les capitaines *Machart et Ferrus*, de la 19<sup>e</sup> brigade d'artillerie, reprirent l'expérience avec des chevaux, mais par des procédés différents; l'emploi des attelages *Siden* leur permit d'augmenter le poids des voitures de 20 à 25 pour 100, pour un même parcours. La traction élastique a été alors adoptée successivement pour l'artillerie en France, en Danemark, en Allemagne et en Autriche.

Le démarrage d'une voiture pose un problème complexe où intervient la loi du frottement au départ et que nous ne pouvons étudier ici. Il faut dire cependant que l'attelage élastique épargne à ce moment à l'homme ou à l'animal, des compressions et des chocs souvent fort douloureux, et aussi la fatigue nerveuse. Dans un article sur « *l'Économie du travail et l'Élasticité* » publié en 1904 dans la *Revue des Idées*, Marey décrit une expérience qui met en évidence le principe utilisé. A une extrémité d'un levier (*fig. 15*), on suspend une sphère de grosse masse qu'on équilibre et dont on empêche la descente ultérieure par un taquet. A l'autre bout du levier, on attache une sphère de petite masse par un long fil; on élève cette boule au-dessus du levier, de toute la longueur du fil, et on la lâche. Il se produit une brusque tension du fil, et par suite une percussion qui se transmet par le levier au point d'attache de la grosse sphère. Si le



lien qui attache cette sphère est rigide, la sphère reste à peu près en place; le choc voit son énergie dissipée sans production d'un travail extérieur sensible. Si le lien de suspension est élastique, tel un fil de caoutchouc ou un

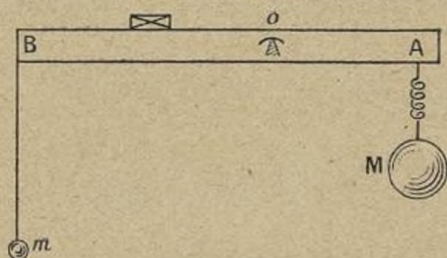


Fig. 15.

ressort à boudin, la boule s'élève au contraire d'une quantité notable; la percussion provoquée au point d'attache, agissant sur un corps à déformation facile, permet la production d'un travail.

*Évaluation de l'augmentation de rendement dans le démarrage.* — Supposons que tous les wagons d'un train (fig. 16)



Fig. 16.

aient le même poids  $W$  et soient munis de ressorts de même flexibilité  $K$ , et qu'ils nécessitent le même effort pour vaincre la résistance au roulement  $W\varphi = f'$  ( $\varphi$  coefficient de roulement). Appelons  $f = M\varphi$  la résistance au roulement de la machine. Soit  $l$  l'aplatissement du ressort de traction qui correspond à un effort  $f'$ . On a  $f' = Kl$ . C'est quand cet aplatissement sera obtenu pour le ressort d'un



wagon qu'il s'ébranlera. Le travail correspondant à cet aplatissement est

$$\int_0^l Kl \, dl = \frac{1}{2} K l^2 = \frac{1}{2} f' l.$$

A la mise en marche, quand l'effort tangentiel de la machine dépasse  $f$ , elle se met en marche en comprimant le ressort du premier wagon. Après un parcours  $l$ , elle entraîne ce premier wagon en comprimant le ressort du deuxième de  $l$  à  $2l$ . De  $2l$  à  $3l$ , la machine entraîne également le deuxième wagon en comprimant le ressort du troisième. De  $3l$  à  $4l$ , elle entraîne le troisième wagon et comprime le ressort du quatrième. Enfin à partir de  $4l$ , elle entraîne le quatrième et ainsi de suite.

On supposera que la marche de la machine est régulière et se fait avec un mouvement uniformément accéléré d'accélération  $\gamma$ , et que chaque wagon entraîné rattrape la vitesse de la machine après son premier parcours de  $l$  avec un mouvement uniformément accéléré d'accélération  $\gamma'$  pour le premier wagon,  $\gamma''$  pour le deuxième,  $\gamma'''$  pour le troisième et  $\gamma^{IV}$  pour le quatrième. Chaque wagon après son premier parcours de longueur  $l$  et d'accélération  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ , ..., est supposé continuer ensuite avec la vitesse de la machine. Il suffit, pour que cette hypothèse soit réalisée, de supposer que le mécanicien ouvre la vapeur progressivement d'une façon convenable.

Le travail développé s'établit ainsi pour les parcours successifs de 0 à  $l$ ,  $l$  à  $2l$ ,  $2l$  à  $3l$ , ...,  $4l$  à  $5l$ .

Parcours de 0 à  $l$  :

$$fl + \frac{M}{g} \gamma l + \frac{1}{2} f' l$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Travail de la résistance au roulement de la machine} \\ + \text{force vive acquise par la machine} \\ + \text{travail du ressort du premier wagon.} \end{array} \right)$$



Parcours de  $l$  à  $2l$  :

$$fl + \frac{M}{g} \gamma l + f'l + \frac{W}{g} \gamma' l + \frac{1}{2} f'l.$$

(Travail résistant de la machine + force vive acquise par la machine)  
 + travail résistant du premier wagon  
 + force vive acquise par le premier wagon  
 + travail du ressort du deuxième wagon.)

Parcours de  $2l$  à  $3l$  :

$$fl + \frac{M}{g} \gamma l + f'l + \frac{W}{g} \gamma l + f'l + \frac{W}{g} \gamma' l + \frac{1}{2} f'l$$

(le premier wagon a repris l'accélération  $\gamma$  de la machine;  
 le deuxième wagon est entraîné).

Parcours de  $3l$  à  $4l$  :

$$\begin{array}{cccc} \text{Machine.} & \text{1<sup>er</sup> wagon.} & \text{2<sup>e</sup> wagon.} & \text{3<sup>e</sup> wagon.} \\ fl + \frac{M}{g} \gamma l + f'l + \frac{W}{g} \gamma l + f'l + \frac{W}{g} \gamma l + f'l + \frac{W}{g} \gamma' l + \frac{1}{2} f'l. \end{array}$$

Parcours de  $4l$  à  $5l$  :

$$fl + \frac{M}{g} \gamma l + f'l + \frac{W}{g} \gamma l + f'l + \frac{W}{g} \gamma l + f'l + \frac{W}{g} \gamma l + f'l + \frac{W}{g} \gamma'' l.$$

En faisant la somme, on aura le travail  $\mathfrak{T}$  nécessaire pour amener tout le train, supposé formé de quatre wagons, à la vitesse  $v = \sqrt{2\gamma \cdot 5l}$  au bout du parcours  $5l$ .

Pour faire cette somme, il faut évaluer  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ , ....

Au bout du parcours  $2l$ , le carré de la vitesse acquise par la machine est  $2\gamma \cdot 2l = 4\gamma l$ . Or, le premier wagon est entraîné de  $l$  à  $2l$ , sur un parcours  $l$  avec une accélération  $\gamma'$ ; sa vitesse acquise est  $\sqrt{2\gamma' l}$ , et comme elle doit être la même que celle de la machine, on a  $2\gamma' l = 4\gamma l$ , d'où  $\gamma' = 2\gamma$ . Après un parcours de  $3l$ , la machine a la vitesse

$$v_1 = \sqrt{2\gamma \times 3l} = \sqrt{6\gamma l}.$$



Or, le deuxième wagon la suit sur un parcours  $l$ . de  $2l$  à  $3l$ , avec l'accélération  $\gamma''$ . On doit donc avoir aussi

$$2\gamma''l = 6\gamma l, \quad \text{d'où} \quad \gamma'' = 3\gamma.$$

De même on aurait

$$\gamma''' = 4\gamma \quad \text{et} \quad \gamma^{iv} = 5\gamma.$$

Tenant compte de ces valeurs, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= 5fl + 5 \frac{M}{g} \gamma l + f'l(4 + 3 + 2 + 1) \\ &\quad + 4 \frac{f'l}{2} + \frac{W}{g} \gamma l(5 + 5 + 5 + 5) \end{aligned}$$

ou

$$\mathfrak{E} = 5fl + 5 \frac{M}{g} \gamma l + 12f'l + 20 \frac{W}{g} \gamma l.$$

Supposons maintenant qu'il n'y ait pas de ressorts et que le train précédent tout entier, formé de 4 wagons, soit enlevé d'un bloc par la machine avec la même accélération  $\gamma$ . Au bout du parcours  $5l$ , la vitesse du train sera la même que précédemment et le travail  $\mathfrak{E}'$  dépensé sera

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}' &= 5fl + 5 \frac{M}{g} \gamma l + 4 \times 5f'l + 4 \times 5 \frac{W}{g} \gamma l \\ &= 5fl + 5 \frac{M}{g} \gamma l + 20f'l + 20 \frac{W}{g} \gamma l. \end{aligned}$$

Il dépasse le travail précédent de

$$\mathfrak{E}' - \mathfrak{E} = 8f'l.$$

L'accroissement proportionnel du travail est

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{E}' - \mathfrak{E}}{\mathfrak{E}} &= \frac{8f'l}{5fl + 5 \frac{M}{g} \gamma l + 12f'l + 20 \frac{W}{g} \gamma l} \\ &= \frac{1}{\frac{5}{8} \frac{f}{f'} + \frac{5}{8} \frac{M}{\gamma} \frac{\gamma}{g} + \frac{12}{8} + \frac{20}{8} \frac{W}{\gamma} \frac{\gamma}{g}}, \end{aligned}$$



ou, en remplaçant  $f$  par  $M\varphi$  et  $f'$  par  $W\varphi$  :

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} &= \frac{1}{\frac{5}{8} \frac{M}{W} + \frac{5}{8} \frac{M}{W} \frac{\gamma}{g\varphi} + \frac{12}{8} + \frac{20}{8} \frac{\gamma}{g\varphi}} \\ &= \frac{1}{\frac{5}{8} \frac{M}{W} + \frac{\gamma}{g\varphi} \left( \frac{5}{8} \frac{M}{W} + \frac{20}{8} \right) + \frac{12}{8}}.\end{aligned}$$

Supposons  $M = 90^T$ ,  $W = 30^T$ ,  $\frac{M}{W} = 3$ ;  $\gamma = 0,20$ ;  $\varphi = 0,1$

$$\frac{\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{\frac{15}{8} + \frac{2}{10} \left( \frac{15}{8} + \frac{20}{8} \right) + \frac{12}{8}} = \frac{1}{4} \text{ environ.}$$

On accroît donc le travail dépensé de 25 pour 100.

Il est facile de généraliser. Soit  $n$  le nombre des wagons : on a évidemment

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} &= (n+1)fl + (n+1)\frac{M}{g}\gamma l + \frac{n(n+1)}{2}f'l \\ &\quad + n\frac{f'l}{2} + n(n+1)\frac{W}{g}\gamma l\end{aligned}$$

et

$$\mathfrak{C}' = (n+1)fl + (n+1)\frac{M}{g}\gamma l + n(n+1)f'l + n(n+1)\frac{W}{g}\gamma l,$$

d'où

$$\mathfrak{C}' - \mathfrak{C} = \frac{n(n+1)}{2}f'l - n\frac{f'l}{2} = \frac{n^2}{2}f'l.$$

et

$$\frac{\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} = \frac{\frac{n^2}{2}f'l}{(n+1)fl + \frac{n(n+2)}{2}f'l + (n+1)\frac{\gamma l}{g}(M+nW)},$$

ou, en remplaçant  $f$  par  $M\varphi$  et  $f'$  par  $W\varphi$

$$\frac{\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n} + 2\frac{n+1}{n^2} \left\{ n\frac{\gamma}{g\varphi} + \frac{M}{W}\frac{\gamma}{g\varphi} + \frac{M}{W} \right\}},$$



ou enfin

$$\frac{\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n} + 2 \frac{n+1}{n} \frac{\gamma}{g\varphi} + \frac{2(n+1)}{n^2} \frac{M}{W} \left( \frac{\gamma}{g\varphi} + 1 \right)}.$$

Formule qui, pour  $n = 4$ ,  $\frac{M}{W} = 3$  donnerait le même résultat que ci-dessus.

Supposons  $n$  grand; exemple :  $n = 45$  wagons de 15 tonnes; machine et tender 120 tonnes. On a

$$\frac{M}{W} = \frac{120}{15} = 8, \quad n = 45.$$

$$\frac{\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{2} \text{ sensiblement, } \text{ soit 50 pour 100.}$$

Approximativement : cette formule donne, en remplaçant  $\frac{n+2}{n}$  et  $\frac{n+1}{n}$  par 1 et  $\frac{\gamma}{g\varphi}$  par  $\frac{1}{5}$  (sensiblement),

$$\frac{\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{5} + \frac{2}{n} \frac{M}{W} \frac{6}{5}} = \frac{5}{7 + 12 \frac{M}{nW}}.$$



## CHAPITRE III.

### CALCUL DES RESSORTS.

13. Rappel de formules relatives à la flexion et à la torsion. — 14. Ressorts de suspension ou à lames superposées. — 15. Ressorts d'amortissement ou à boudin. — 16. Ressorts d'horlogerie : 1° ressort moteur; 2° spiral réglant.

13. Rappel de formules relatives à la flexion et à la torsion. — Pour pouvoir aborder le calcul des dimensions des ressorts, il est nécessaire de rappeler rapidement quelques notions de résistance des matériaux.

*Formules relatives à la flexion.* — 1° Soit A un point d'une courbe plane S (fig. 17); la normale en A est coupée



Fig. 17.

par la normale au point B infiniment voisin de A, en un point O; quand  $AB = ds$  décroît indéfiniment, le point O et la longueur  $AO = r$  deviennent le centre et le rayon de courbure de S en A.

Si  $d\alpha$  est l'angle des normales en A et B, on a

$$r = \frac{ds}{d\alpha}.$$



Le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  est celui qui se rapproche le plus de la courbe en  $A$ .

2° Soit une aire fermée, telle une plaque mince homogène

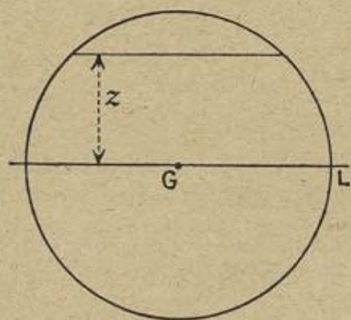


Fig. 18.

(fig. 18), et  $L$  un axe passant par son centre de masse  $G$ . Soit  $\sigma$  un élément de cette aire, et  $z$  sa distance à  $L$ . La somme

$$I = \sum \sigma z^2,$$

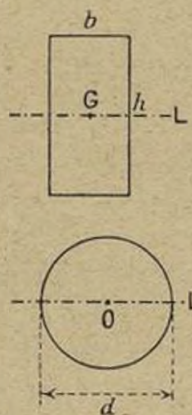


Fig. 19.

étendue à tous les éléments de l'<sup>aire</sup>aire, est le *moment d'inertie axial* de l'aire relativement à  $L$ .

Si l'aire est (fig. 19) un rectangle de dimensions  $(b, h)$



et si  $L$  est parallèle aux côtés  $b$ , on a

$$I = \frac{bh^3}{12}.$$

Si l'aire est (fig. 19) un cercle de diamètre  $d$  et si  $L$  en est un diamètre, on a

$$I = \frac{\pi d^4}{64}.$$

3° Considérons une pièce courbe homogène dont la surface limitée est engendrée par un contour plan  $C$ , présentant un axe de symétrie  $A$  sur lequel son centre de gravité est en  $G$ ;  $G$  décrit une courbe  $S$  située sur le tableau et  $A$  reste normal à  $S$  (fig. 20). On suppose que les dimensions de  $C$ ,

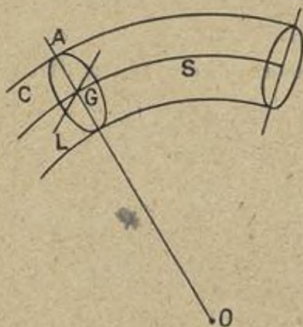


Fig. 20.

qui peuvent varier lentement dans la génération, soient petites vis-à-vis du rayon de courbure de  $S$ .

Ce solide est soumis à des forces appliquées à ses extrémités, dans le plan de symétrie; il subit une déformation appelée *flexion* qui conserve la symétrie.

Considérons une section profil  $C$ ; d'après la loi de Duleau et Dupin, cette section, après la déformation, reste plane et normale à la courbe  $S$  dite fibre moyenne déformée. Soient  $r$  et  $r_0$  les rayons de courbure de la fibre moyenne en  $G$  après et avant la déformation;  $M$  le moment total



par rapport à G des forces appliquées au tronçon à droite de C; I le moment d'inertie axial de C par rapport à la perpendiculaire L au tableau en G; E le coefficient d'élasticité de la substance. On a la relation

$$EI \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = -M,$$

qui permet d'étudier la déformation de la pièce.

4° Soient  $n$  la distance à L du point de l'aire C qui en est le plus éloigné; N la projection sur la tangente à S en G, de la résultante des forces appliquées à l'extrémité du tronçon envisagé;  $\Omega$  l'aire C. L'expression

$$\mathcal{R} = \left| \frac{N}{\Omega} \right| + \left| \frac{Mn}{I} \right|$$

représente la fatigue maximale dans la section C, c'est-à-dire la plus grande traction ou compression unitaire subie par les fibres de la pièce. Cette quantité ne doit pas excéder, — pour qu'il n'y ait pas de déformation permanente, — une certaine limite R dite résistance de sécurité, et qui est de 12 kg par millimètre carré pour l'acier.

Nous nous placerons dans des cas où N est négligeable ou nul. Si de plus la section C est un rectangle dont les côtés  $b$  sont perpendiculaires au tableau, on a

$$n = \frac{h}{2}, \quad I = \frac{bh^3}{12},$$

et par suite

$$\mathcal{R} = \frac{6M}{bh^2}.$$

*Formules relatives à la torsion.* — 1° Soit encore (fig. 21) une aire fermée de centre de gravité G. Soient  $\sigma$  un élément de cette aire et  $\rho$  sa distance à G. La somme

$$J = \Sigma \sigma \rho^2,$$



étendue à tous les éléments de l'aire, est le *moment d'inertie polaire central* de l'aire.



Fig. 21.

Si l'aire est un cercle de diamètre  $d$ , on a

$$J = \frac{\pi d^4}{32}.$$

2° Considérons un cylindre droit à base sensiblement circulaire (fig. 22), encastré à une base, soumis à l'autre à

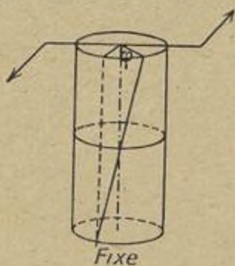


Fig. 22.

un torque agissant dans le plan de cette seconde base et de moment  $M_1$ . Les tranches ou sections droites successives glissent les unes sur les autres et la déformation obtenue s'appelle *torsion*.

Soient  $L$  la longueur du tronçon de cylindre,  $J$  le moment d'inertie polaire central de la section droite,  $\varphi$  l'angle dont a tourné la base supérieure par rapport à la base inférieure (évalué en fonction du rayon; sa mesure en degrés serait  $\frac{\varphi}{2\pi} \cdot 360^\circ$ ),  $G$  le coefficient d'élasticité transversale



de la matière. On a la relation

$$GJ \frac{\varphi}{L} = M_1,$$

qui permet de calculer la valeur de l'angle de torsion.

3° Soit  $n_1$  la distance, au centre de gravité de la section, du point qui en est le plus éloigné. L'expression

$$\mathcal{R}_1 = \frac{M_1 n_1}{J}$$

représente la fatigue maximale dans la section supérieure, c'est-à-dire la plus grande force unitaire de cisaillement subie par les fibres de la pièce. Pour qu'il n'y ait pas de déformation permanente,  $\mathcal{R}_1$  ne doit pas dépasser une limite  $R_1$  qui, pour l'acier doux, est de 6<sup>kg</sup> par millimètre carré.

Si la section est circulaire, on a

$$n_1 = \frac{d}{2},$$

et par suite

$$\mathcal{R}_1 = \frac{16 M_1}{\pi d^3}.$$

**14. Ressorts de suspension ou à lames, planes ou courbes, superposées.** — Considérons un ressort de suspension formé de plusieurs lames superposées, légèrement courbes, encastées dans un même support, mais susceptibles de glisser librement les unes sur les autres. La longueur d'un tel ressort varie de 0<sup>m</sup>, 80 (wagons de marchandises) à 2<sup>m</sup>, 50 (voitures de luxe). L'encastrement est formé par des étriers boulonnés sur la boîte à graisse de l'essieu.

N'envisageons qu'une des moitiés du ressort. Elle est sollicitée par une force  $F$  appliquée à l'extrémité de la lame la plus longue; cette force provient de la charge du wagon



transmise, pour partie, des longerons du châssis à l'extrémité du ressort par une *menotte*, sorte de petite bielle formée de 2 flasques articulées d'une part avec le ressort et d'autre part avec une pièce métallique ou main, fixée au longeron. La menotte est un peu oblique sur la verticale, et sensiblement normale au ressort en son extrémité.

Chaque lame a une section transversale rectangulaire, de même épaisseur constante  $h$ . Nous supposons que l'épaisseur totale la plus grande soit assez faible relativement aux rayons de courbure des fibres moyennes des lames successives pour que ceux-ci puissent être considérés comme étant tous sensiblement égaux dans une section transversale quelconque.

Avant la déformation, les lames sont cintrées suivant des arcs de cercle de même rayon  $r_0$ . De plus on cherche à en constituer l'ensemble de manière que durant la déformation, les lames restent circulaires, c'est-à-dire que le rayon de courbure  $r$  soit le même pour toutes en tous leurs points; ces lames restent ainsi en contact en tous leurs points. Enfin on s'impose la condition que la fatigue limite de sécurité soit atteinte au moment où, sous l'influence d'une force  $F$  convenablement choisie, les lames deviennent planes, c'est-à-dire que le rayon de courbure  $r$  devienne infini.

Soit (fig. 23)  $C$  une section quelconque du ressort, dis-



Fig. 23.

tante de  $s$  de la force  $F$ ,  $s$  étant compté suivant la lame supérieure. Soient  $I, I', I'', \dots$ , les moments d'inertie axiaux des sections des lames successives;  $m, m', m'', \dots$ , les moments



totaux, relativement aux centres de gravité de ces sections, des forces qui sollicitent les divers tronçons de lames, et qui proviennent, en dehors de F, des réactions mutuelles des lames en contact. On a

$$EI \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = -m,$$

$$EI' \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = -m',$$

.....

D'où par addition, en remarquant que, dans  $m + m' + m'' + \dots$ , les forces intérieures de contact disparaissent, et en notant que le moment de F est sensiblement Fs pour tous les centres :

$$E(I + I' + I'' + \dots) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = -Fs.$$

Soient  $b, b', b'', \dots$ , les largeurs respectives des diverses lames dans la section C; l'épaisseur  $h$  des lames étant constante, on a

$$I + I' + I'' + \dots = \frac{h^3}{12} (b + b' + b'' + \dots).$$

La conservation de la forme circulaire des lames sera assurée si  $b + b' + b'' + \dots$ , somme des largeurs des pièces superposées, est proportionnelle à  $s$ .

Nous verrons tout à l'heure à réaliser cette condition. Si L est la demi-longueur de la maîtresse lame, comme, à l'encastrement, toutes les lames, au nombre de  $p$ , ont la même largeur  $b$ , le coefficient de proportionnalité est  $\frac{pb}{L}$ , et la relation précédente s'écrit

$$E \frac{pbh^3}{12} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = -FL.$$

Elle donne le rayon des lames après la déformation

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - \frac{12FL}{pEbh^3}.$$



Soit  $F'$  la valeur de la charge  $F$  qui fait atteindre à la matière, en quelque point, la limite de sécurité  $R$ ; pour elle, on a  $r = \infty$ , soit

$$12r_0LF' = pEbh^3.$$

Le moment  $m$  pour la première lame a pour expression

$$m = \frac{12FLI}{pbh^3},$$

et la plus grande fatigue correspondante est

$$R = \frac{m:n}{l} = \frac{6FL}{pbh^2}.$$

La dite fatigue maximale sera la même pour toutes les lames. Elle atteindra sa limite  $R$  pour la charge limite  $F'$ . Ainsi :

$$6LF' = pbh^2R.$$

Ainsi nous aurons pour rayon commun initial des lames

$$(1) \quad r_0 = \frac{Eh}{2R},$$

où  $\frac{E}{2R}$  est environ 1000 et pour charge limite du ressort

$$(2) \quad F' = \frac{pbh^2R}{6L}.$$

Si  $f$  est la flèche avant la mise en charge, on a sensiblement

$$L^2 = 2r_0f;$$

d'où

$$(3) \quad f = \frac{RL^2}{Eh}.$$

Le travail emmagasiné dans le ressort est aisé à calculer; le déplacement du point d'application de la force est  $f$ , et cette force part de zéro pour atteindre  $F'$ , avec  $\frac{F'}{2}$  comme



moyenne; d'ailleurs la flèche à tout instant est  $\frac{L^2}{2r}$  et varie proportionnellement à F. Le travail en question est

$$\mathfrak{E} = \frac{F'f}{2} = \frac{R^2}{6E} \frac{pbhL}{2}.$$

Le volume  $\mathfrak{V}$  du ressort est approximativement celui d'un prisme triangulaire de base  $(phL)$  et de hauteur  $b$ ; donc enfin

$$(4) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{V} \frac{R^2}{6E}.$$

Les formules (1—4) donnent tous les renseignements nécessaires pour le calcul d'un ressort à lames. Elles sont dues à Ed. Phillips [*Mémoire sur les ressorts en acier employés dans les matériels des chemins de fer* (*Annales des Mines*, 5<sup>e</sup> série, t. I, 1852, p. 195-336)].

Exemple :

$$\begin{aligned} L &= 1^m, 25, & h &= 0^m, 015, & b &= 0^m, 21, & p &= 8, \\ [E &= 27000,000,000; R = 13500,000; \text{unités : m et kg} \\ & \quad (\text{acier fondu durci})]. \end{aligned}$$

On trouve

$$r_0 = 15^m, \quad F' = 680^{\text{kg}}, \quad f = 0^m, 050, \quad \mathfrak{E} = 17^{\text{kgm}}.$$

Les lames frottent mutuellement avec un coefficient de frottement de 0,40.

Il reste à voir comment peut se réaliser la condition

$$\frac{b + b' + b'' + \dots}{pb} = \frac{s}{L}.$$

Construisons (*fig. 24*) un triangle isocèle de base  $UV = pb$ , et de hauteur  $HA = L$ , demi-longueur développée de la maîtresse lame; la parallèle à  $UV$  menée à la distance  $AX = s$  du sommet donne  $b + b' + b'' + \dots$ . Si donc on divise  $UV$  en  $2p$  parties, égales à  $\frac{b}{2}$ , et qu'on mène par les points de



division des parallèles à HA, on découpe des aires trapézoïdales ou triangulaires; en faisant glisser ces aires pour amener leur grande base sur HA, on obtient les patrons qu'on doit adopter pour les lames cintrées successives.

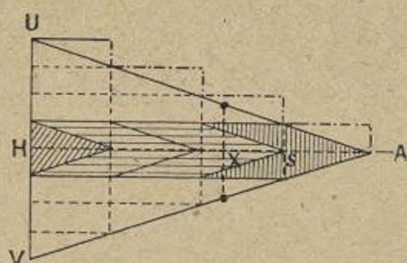


Fig. 24.

Pratiquement, on remplace le contour triangulaire par un contour à redans, et par compensation on amincit l'extrémité de chaque lame; les formules restent applicables comme approximation.

On notera que les étagements sont égaux entre eux; leur valeur  $c$  est  $\frac{L}{p}$ .

La flexibilité du ressort est  $\frac{f}{L}$  ou  $\frac{RL}{Eh}$  <sup>(1)</sup>.

15. **Ressorts d'amortissement ou à boudin.** — Nous allons considérer un ressort à boudin (fig. 25) formé par une tige, que nous supposons à section circulaire, enroulée à l'état naturel en forme d'hélice. Ses extrémités sont ramenées vers l'axe, et l'une d'entre elles est fixée à un plan rigide perpendiculaire à l'axe du cylindre de l'hélice, supposé vertical sur la figure.

(1) La *souplesse* du ressort, au sens de M. Thuloup, Ingénieur en chef du Génie Maritime, est le quotient du déplacement par la force, ici :  $f : F'$ .



L'autre extrémité, terminant un bras de levier horizontal, est soumise à l'action d'une force  $F$  dirigée suivant l'axe, et qui allonge ou raccourcit le ressort, soit, pour fixer les

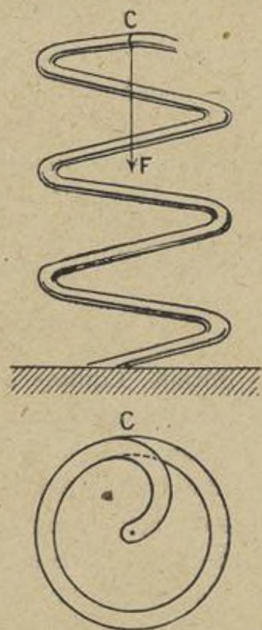


Fig. 25.

idées, qui le raccourcit. Nous devons, comme tout à l'heure, déterminer la limite  $F'$  que ne doit pas dépasser la force  $F$  pour que la résistance pratique de sécurité ne soit nulle part excédée, l'affaissement du ressort et le travail emmagasiné par la déformation. On admet que le bras de levier de la force de compression  $F$  est assez rigide et assez court pour ne pas subir de flexion sensible; on pourrait d'ailleurs la concevoir sous la forme d'une tige rectiligne terminée par une bague sertie et soudée sur la section terminale  $C$  du ressort. On admet enfin que les spires du ressort sont très plates et que le poids de toute partie du ressort est négligeable



en regard de la force  $F$ . Dans ces conditions, si  $p$  est le nombre des spires et  $r$  le rayon du cylindre qui porte l'hélice, on a sensiblement, pour la longueur  $L$  du ressort,

$$L = 2p\pi r.$$

Je dis que le fil est partout tordu également, comme si c'était un fil rectiligne encastré à un bout et soumis, à l'autre, à un torque  $M_1 = Fr$ .

Quoique ce fait soit fondé logiquement, nous nous bornerons à montrer qu'il est d'accord avec deux observations expérimentales.

Soit  $d\theta$  l'angle dont est tordu un élément du ressort, de longueur  $ds$  estimée suivant l'axe hélicoïdal. Imaginons que cet élément soit seul déformé, tout le reste du ressort conservant sa forme initiale. Comme cet élément est sensiblement perpendiculaire à l'axe, la partie supérieure du ressort tournera de  $d$  et son axe se penchera d'autant sur la verticale. Mais l'élément de même longueur, diamétralement opposé à celui envisagé, donne à la partie supérieure du ressort une obliquité égale et de sens inverse, qui compense la précédente. Par suite, la déformation totale du ressort n'entraîne pas l'axe hors de sa position primitive, ce qui est conforme à l'observation.

Au contraire, les composantes des déplacements linéaires suivant la direction de l'axe s'additionnent, et leur somme donne l'aplatissement ou l'allongement total du ressort. Soit (fig. 26)  $S$  le centre du premier élément  $ds$  considéré, et  $T$  un point quelconque de l'axe de la partie supérieure du ressort. Calculons l'abaissement qu'il subit du fait d'être entraîné dans la rotation de l'élément, laquelle, vu la petitesse du pas de l'hélice, se fait sensiblement autour de la perpendiculaire en  $S$  au plan de  $S$  et de l'axe, amenant  $T$  en  $T'$ , tel que  $\widehat{TST'} = d\theta$ . Si  $T''$  est la projection de  $T'$  sur l'axe, il s'agit d'évaluer  $TT''$ ; or deux triangles sem-



blables donnent

$$\frac{TT''}{TT' \text{ ou } ST d\theta} = \frac{r}{ST};$$

donc

$$TT' = r d\theta.$$

La variation totale de longueur du ressort,  $h$ , est la somme de

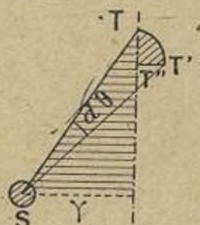


Fig. 26.

tous les termes semblables, étendue à toute la longueur de l'axe. Donc on a,  $\theta$  étant la torsion totale,

$$h = r\theta.$$

D'ailleurs, pour la tige rectiligne, on a

$$GJ \frac{\theta}{L} = M_1 = Fr, \quad J = \frac{\pi d^4}{32}, \quad L = 2p\pi r.$$

Donc

$$(1) \quad h = F \frac{64 p r^3}{G d^4},$$

$h$  et  $F$  croissant proportionnellement l'un à l'autre, on obtient pour expression du travail de déformation le demi-produit de  $F$  par le déplacement de son point d'application  $\frac{1}{2} F h$ , ou

$$\mathfrak{E} = \frac{32 p}{G} \frac{F^2 r^3}{d^4}.$$

Enfin la fatigue de torsion, dans toute tranche, est

$$\mathcal{R}_1 = \frac{M_1 n_1}{J} = \frac{16 F r}{\pi d^3}.$$



La limite de la force  $F$  est donc

$$(2) \quad F_1 = \frac{\pi d^3 R_1}{16 r};$$

celle de  $\mathfrak{S}$  est, en introduisant le volume  $\mathfrak{V} = 2 p \pi r \frac{\pi d^2}{4}$ ,

$$(3) \quad \mathfrak{S}_1 = \frac{32 p}{G} \frac{r^3}{d^4} \frac{\pi^2 d^6 R_1^2}{16^2 r^2} = \frac{R_1^2}{4 G} \mathfrak{V};$$

celle enfin de  $h$  est

$$(4) \quad h_1 = \frac{\pi d^2 R_1}{16 r} \frac{64 p r^3}{G d^4} = 2 L \frac{r}{d} \frac{R_1}{G}.$$

Une expérience élégante permet de contrôler ces résultats. On prend dans un fil à ressort deux morceaux d'égale longueur, dont l'un  $P$  est conservé rectiligne et dont l'autre  $Q$  est enroulé en ressort à boudin (*fig. 27*). La moitié  $P$  est

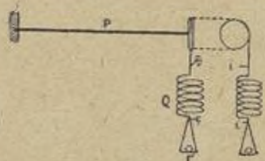


Fig. 27.

encastrée à un bout dans un étau fixe, à l'autre sur l'axe d'une petite poulie de rayon égal à celui du ressort et montée sur paliers à billes. Sur la jante de la poulie est attachée une petite corde portant le ressort et, sous celui-ci, une nouvelle corde porte un poids  $F$ . A chaque corde est fixé un petit index  $i$ , mobile devant une échelle graduée. Le déplacement de l'index inférieur, au moment de la mise en charge, est double de celui de l'index supérieur. Celui-ci se déplace en effet de  $r\theta$ ,  $\theta$  étant l'angle de rotation du fil rectiligne tordu sous l'action du torque  $Fr$ , tandis que l'autre se déplace de  $r\theta + h$ ,  $h$  étant l'allongement du ressort, et nous avons trouvé  $h = r\theta$ . La vérification se fait



remarquablement, même avec une installation de fortune.

*Remarque.* — Accessoirement et incidemment, on signalera qu'une flexion d'un tour d'une corde de longueur  $L$ , la disposant en anneau, suivie d'un déplacement relatif des extrémités, de grandeur  $2L$ , transversalement au plan de l'anneau, équivaut à une torsion d'un tour ou de  $2\pi$ .



Fig. 28.

Cela se vérifie quotidiennement sur les bandes molle-  
tières; les merciers en tiennent compte dans le déroulement  
de leurs pièces de ganse par exemple, et c'est parce qu'ils  
estiment leurs clients moins expérimentés qu'ils enroulent  
en 8 la coupe vendue; le déroulement peut se faire d'un  
coup, les torsions se compensent. Le télégraphiste qui pose  
une ligne, laisse s'échapper latéralement le fil d'un rouleau  
qu'il porte au bras; cela produit une torsion qu'il compense  
en changeant le sens de cette torsion par le passage du rou-  
leau d'un bras à l'autre tous les dix tours.

16. **Ressorts d'horlogerie.** — Les spiraux employés pour  
le moteur et pour le régulateur travaillent exclusivement  
à la flexion.

1° Le *ressort moteur* ou *grand ressort* est un spiral plat,  
qui emmagasine sous forme de travail de déformation une  
certaine quantité d'énergie fixée par les conditions de fonc-  
tionnement de la montre ou de la pendule, et qui la restitue  
par sa détente sous forme de puissance motrice.

Une extrémité du spiral est encastrée dans un noyau





cylindrique central (la *bonde*), dont la rotation provoque l'enroulement du ressort (fig. 29). L'autre extrémité est

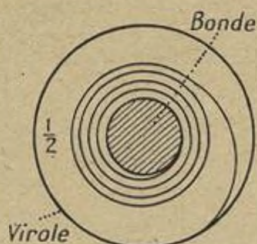


Fig. 29.

fixée à la surface intérieure d'une enveloppe également cylindrique, de même axe que le noyau et de diamètre triple. La boîte cylindrique où est monté l'ensemble est le *barillet*, et l'enveloppe extérieure en est la *virole*. Si l'on fixe le barillet et qu'on imprime à la bonde une rotation de sens contraire à celui dans lequel les rayons vecteurs du spiral vont en croissant, on arrive à enrouler le ressort sur la bonde en spires jointives reliées au barillet par une petite portion de lame peu courbe. Imaginons maintenant qu'on fixe la bonde et qu'on rende la liberté au barillet; le ressort se détendra, les spires intérieures se séparant successivement les unes des autres en s'éloignant de l'axe, et il mettra en



Fig. 30.

mouvement le barillet et la transmission du chronomètre (fig. 30). Les extrémités du ressort sont un peu détrem-



pées pour diminuer les chances de rupture en ces points de grande fatigue.

Exemple de dimensions : pour un plateau de 18 lignes (disque auquel est fixé le cadran), on a : diamètre intérieur du barillet 16<sup>mm</sup>; longueur du ressort 580<sup>mm</sup>; largeur 1<sup>mm</sup>,82; épaisseur 0<sup>mm</sup>,15.

Des conditions de bon enroulement amènent à faire dans les pièces extrêmement soignées l'épaisseur un peu plus forte à la bonde qu'aux bords.

Nous allons évaluer le travail employé à bander le ressort, ou le travail de déformation emmagasiné. L'angle dont on a fait tourner la bonde est évidemment égal à la somme des variations angulaires élastiques qu'éprouvent les angles formés avec une direction fixe, par les diverses sections transversales du spiral. Calculons cet angle. Soit (fig. 31)  $ds$



Fig. 31.

un élément du spiral et C son centre; si l'on envisage le tronçon du ressort allant du barillet à cet élément, pour lui la seule force extérieure active est la traction F qu'il subit en son point d'attache sur le barillet immobilisé et tangente à ce barillet; si  $u$  désigne la distance de C à F, on a pour valeur de M dans la formule

$$EI \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = -M,$$



$M = -Fu$  (eu égard au signe des torques). D'autre part, si  $\alpha$  et  $\alpha_0$  sont les angles que fait, avant et après l'application du torque, la tangente en un point du spiral avec une direction fixe, comme la longueur d'un élément de fibre moyenne est invariable, on peut écrire

$$EI \frac{d(\alpha - \alpha_0)}{ds} = Fu$$

ou

$$d(\alpha - \alpha_0) = \frac{F}{EI} u ds.$$

On aura l'angle de rotation total  $A$  en sommant ces variations pour toute la longueur du spiral; en supposant la section constante, il vient

$$A = \frac{F}{EI} \int u ds.$$

Or, d'après ce qu'on sait sur le centre de gravité,  $L$  étant la longueur du ressort et  $k$  la distance du centre de gravité du ressort à  $F$ , on a  $\int u ds = Lk$ . D'ailleurs, le centre de gravité coïncide sensiblement avec le centre de la bonde, en sorte que  $k$  serait le rayon du barillet. Ainsi

$$A = \frac{FLk}{EI}.$$

Pour remonter le ressort uniformément, on applique à la bonde un torque égal et opposé à celui qu'exerce le barillet,

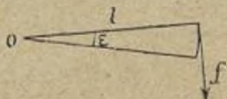


Fig. 32.

c'est-à-dire à  $Fk$ . Or le travail produit par un torque pendant un temps infinitésimal, est (fig. 32) égal au torque



multiplié par l'angle dont le corps a tourné. Ici le torque croît insensiblement à mesure que le ressort se tend de zéro à une certaine valeur maximale  $Fk$ , et sa valeur moyenne est  $\frac{Fk}{2}$ . Donc

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2} FkA = \frac{(Fk)^2 L}{2EI}.$$

La fatigue maximale du ressort est atteinte au point où  $u$  a sa plus grande valeur, c'est-à-dire au point diamétralement opposé au point d'attache du ressort, c'est-à-dire là où  $u = 2k$ :

$$\mathcal{R} = \frac{2Fkn}{I} = \frac{Fkh}{I},$$

$h$  désignant l'épaisseur radiale du ressort (fig. 33).



Fig. 33.

Le maximum que la force de traction puisse atteindre est donc

$$F' = \frac{RI}{hk};$$

ceux de  $A$  et de  $\mathfrak{C}$  sont alors respectivement

$$A' = \frac{RL}{Eh},$$

$$\mathfrak{C}' = \frac{R^2}{2E} \frac{IL}{h^2} = \frac{R^2}{24E} \mathfrak{V},$$

$\mathfrak{V}$  étant le volume du ressort, car

$$\frac{IL}{h^2} = \frac{bh^3L}{12h^2} = \frac{\mathfrak{V}}{12}.$$

On notera que  $R$  est très grand en raison de la qualité de l'acier employé.



On peut vérifier expérimentalement (fig. 34) la proportionnalité de l'angle de rotation de la bonde au torque

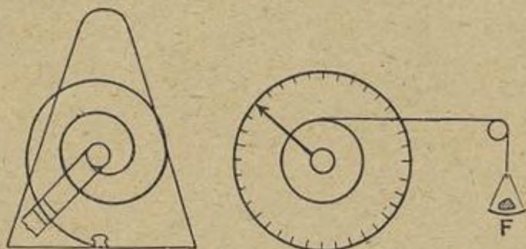


Fig. 34.

moteur, à l'aide d'un appareil de laboratoire; on peut d'ailleurs vérifier aussi la proportionnalité aux autres éléments de la formule en variant la longueur du ressort, ses dimensions, sa nature. Il est aisé de faire varier  $L$  en pinçant le ressort en un point variable sur un bras mobile autour de l'arbre et fixable en une direction arbitraire (analogue à la raquette du spiral réglant des montres).

La vérification se fait également avec un ressort spiral hélicoïdal du genre de ceux employés en chronométrie et pour lequel vaut encore la théorie donnée plus haut.

*2° Spiral réglant.* — La régulation des horloges est assurée par un pendule à faibles écarts, dont les oscillations sont isochrones. Dans les chronomètres portatifs, pouvant occuper diverses positions par rapport à la verticale, elle est assurée, depuis Christian Huyghens, par un volant ou balancier obéissant à l'action d'un ressort, dit *spiral réglant*.

Ce balancier, dans les montres communes, est un anneau de laiton rattaché par des rais de ce métal à un axe perpendiculaire à son plan; dans les montres de précision et chronomètres, l'anneau est formé d'acier à l'intérieur et de laiton à l'extérieur; il est coupé en deux points diamétralement opposés, et chaque moitié est portée par une barrette



pesante qui fixe le balancier sur son axe d'acier. Des masses *régulatrices*, vissables aux extrémités de la barrette, permettent, au moment du réglage, de modifier le moment d'inertie du système, et des masses compensatrices, portées par les demi-anneaux, assurent ultérieurement, par leur déplacement automatique sous l'influence des variations de température et en raison de l'inégale dilatabilité de l'acier et du cuivre, la constance du moment d'inertie de l'ensemble. Les fins pivots de l'axe du balancier tournent dans des crapaudines de rubis, montées l'une dans le bâti de la montre, l'autre dans un pont ou *coq* fixé au bâti; ce coq porte un *piton* où s'encastre l'un des bouts du spiral, dont l'autre bout est attaché au balancier ou à sa barrette par une *virole*.

Le ressort est, dans les montres communes, un spiral plat dont le plan moyen est perpendiculaire à l'axe du balancier, et parallèle à la platine de la montre; dans les chronomètres, il est à spires hélicoïdales, au nombre de 8 à 12, de pas très faible, et son axe coïncide avec celui du balancier.

Si l'on écarte le balancier de son point mort, le spiral se bande, et le balancier abandonné se met à osciller, faisant avancer d'une dent à chaque oscillation la roue d'échappement qui commande la minuterie, et de laquelle il reçoit par un imperceptible choc l'énergie de compensation qui s'oppose à l'amortissement des oscillations. L'essentiel est que ces oscillations soient d'égale durée. On parvient à réaliser cette propriété soit en déglutinant convenablement la longueur du ressort comme l'indiqua *Pierre Le Roy*, soit en donnant à ses extrémités, qu'on appelle les *courbes terminales*, une forme appropriée, comme l'a proposé aussi, dès le XVIII<sup>e</sup> siècle, l'anglais *Arnold*. Dans le cas d'un spiral plat, le système de spires se raccorde (*fig. 35*) avec une courbe qui ramène, à un niveau supérieur à celui du spiral, l'encastrement à se faire au balancier dans la région dia-



métralement opposée à celle du pîton. Dans le cas d'un spiral cylindrique, la lame hélicoïdale s'achève (*fig. 36*) par deux

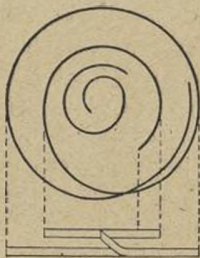


Fig. 35.

courbes symétriques, ramenant les points d'attache à la même distance de l'axe du ressort. C'est Édouard Phillips qui, dans son *Mémoire Sur le spiral réglant des chronomètres*



Fig. 36.

*et des montres* (1861), a déterminé théoriquement les conditions à imposer à ces courbes terminales pour assurer l'isochronisme des oscillations du balancier.

Considérons (*fig. 37*) le ressort spiral encastré en B à la virole du balancier et en P au pîton; reprenons à son égard la théorie indiquée plus haut, et que nous n'avons utilisée que pour évaluer le travail total emmagasinable dans le



ressort. Il nous faut maintenant entrer dans le détail des forces mises en jeu dans le rapide mouvement du balancier. Ce balancier est soumis, à un instant donné, à un torque  $G$  et à une réaction des crapaudines sur son axe, réaction que

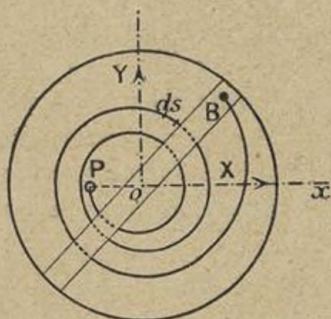


Fig. 37.

nous décomposerons suivant deux axes rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$ , dont l'un passe au piton, en deux composantes  $X$ ,  $Y$ . On se rend compte de l'existence de cette réaction produite par le ressort en mouvement sur l'axe dont il est solidaire, au moyen d'une expérience simple : on monte (fig. 38)

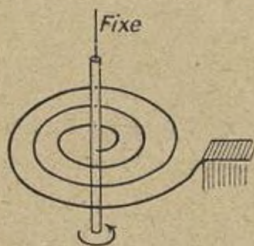


Fig. 38.

un ressort spiral sur un arbre perpendiculaire à son plan, arbre qu'on dispose verticalement en fixant seulement son extrémité supérieure; le bout libre du ressort est attaché à un objet immobile; si l'on donne à l'arbre un mouvement



de torsion, le ressort se déforme et entraîne l'arbre dans un système d'oscillations tournantes, mais en même temps il fait fléchir l'arbre latéralement.

Soient  $MM'$  un élément du ressort,  $ds$  sa longueur,  $(x, y)$  les coordonnées de son milieu; on a en ce milieu

$$EI d(z - \bar{\alpha}_0) = -M ds,$$

où  $M$  est la somme des moments des forces extérieures qui sollicitent l'un des tronçons du ressort limités en ce point. Or, le système allant de ce point à  $O$  n'est soumis qu'aux actions qui sollicitent le balancier, c'est-à-dire à  $C, X, Y$ . Nous avons donc

$$M = C - yX + xY,$$

où  $C, X, Y$  sont des quantités indépendantes de  $x$  et de  $y$ . Sommons les équations fournies par les éléments successifs de toute la longueur  $L$  du ressort, et nous aurons pour l'angle total  $A$  de rotation du ressort, à partir du point mort,

$$EIA = -CL + X \int y ds - Y \int x ds;$$

ou, en appelant  $x_1, y_1$  les coordonnées du centre de gravité du ressort

$$C = -EI \frac{A}{L} + x_1 Y - y_1 X.$$

Si  $J$  est le moment d'inertie du balancier, l'équation du mouvement de ce dernier s'écrira

$$JA'' = -\frac{EI}{L} A + \varepsilon,$$

en posant  $\varepsilon = x_1 Y - y_1 X$ . Dans le cas où l'on aurait  $\varepsilon = 0$ , l'équation serait d'un type déjà étudié, correspondant à un mouvement oscillatoire isochrone de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{JL}{EI}}.$$



Pour annuler  $\varepsilon$ , on peut ou faire en sorte que le centre de gravité du ressort demeure constamment sur l'axe du balancier, ou annuler constamment les pressions latérales X, Y.

Ed. Phillips s'est proposé de réaliser cette dernière condition dans le cas d'un spiral hélicoïdal, en s'imposant de plus que les parties primitivement hélicoïdales de la fibre moyenne restent sur un cylindre ayant pour axe celui du balancier. Nous ne pouvons donner ici que les conclusions de ses recherches.

Les courbes de raccordement, situées dans des plans parallèles à la platine du chronomètre, sont symétriques, par rapport à la perpendiculaire, au milieu de l'axe du ressort équidistant des points de raccordement et possèdent, à l'état non déformées, les deux propriétés suivantes :

1<sup>o</sup> Le centre de gravité  $g, g'$  (fig. 39) de chaque courbe se trouve sur la perpendiculaire à la droite menée du centre des spires au point de raccordement de la courbe avec les spires;

2<sup>o</sup> La distance de ce centre de gravité au centre des spires est une troisième proportionnelle à la longueur  $l$  de la courbe et au rayon  $r_0$  des spires

$$\overline{og} = \frac{r_0^2}{l}.$$

Des courbes satisfaisant à ces conditions réalisent à la fois l'annulation des pressions latérales, le développement concentrique et l'invariabilité du centre de gravité du spiral, et par suite l'isochronisme. Elles gardent leurs propriétés pendant la déformation.

Le tracé des courbes terminales, d'ailleurs en nombre infini, peut se faire expérimentalement. On prend un disque circulaire plan reposant sur une fine pointe centrale et



formant balance dans tous les azimuts. On y dispose un fil de plomb fusible à 1<sup>mm</sup>, 5 de diamètre, de longueur  $l$  et de poids  $p$ , entre les points donnés A et P, en cherchant à lui

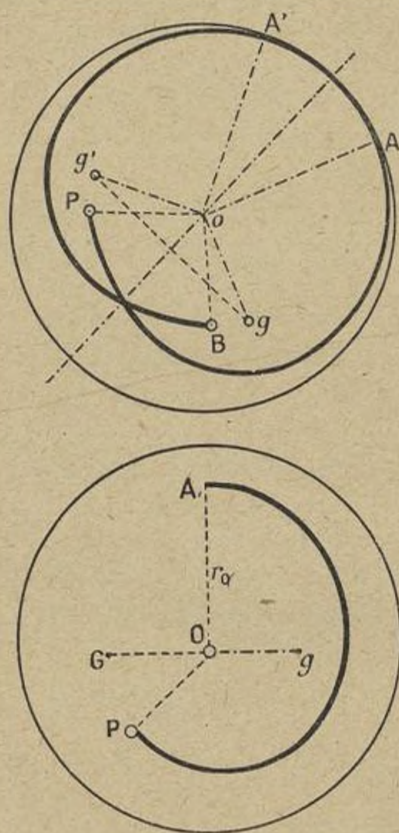


Fig. 39.

donner une forme telle que son centre de gravité soit en  $g$  sur le rayon perpendiculaire à  $OA$ , avec  $Og = \frac{r_0^2}{l}$  (fig. 39).

A cet effet, on place en  $G$  un poids  $P$  tel que

$$P \cdot OG = p \cdot Og = \frac{pr_0^2}{l},$$



et l'on déforme le fil jusqu'à ce que le disque soit en équilibre sous l'action du poids et du plomb. On réduit enfin photographiquement la courbe obtenue.

Une expérience d'un demi-siècle a confirmé l'exactitude de cette théorie.

Il y a plus, on l'applique — notamment les *Antoine*, de Besançon — au cas du spiral plat des montres de poche, cas pour lequel la théorie n'est pas établie, et les résultats sont des plus satisfaisants.

---



## APPENDICE.

### LE RESSORT DU PROFESSEUR WILBERFORCE.

17. Indications sur une expérience de Wilberforce. — 18. Le ressort spiral cylindrique de Wilberforce : description et expériences. — 19. Lesressorts synchrones. — 20. Calculs de Wilberforce sur les oscillations d'un ressort spiral cylindrique chargé : détermination du rapport des modules d'élasticité de traction et de glissement et du coefficient de Poisson.

17. Indications sur une expérience de Wilberforce. (1894).  
— Un ressort hélicoïdal peut recevoir des oscillations suivant son axe, durant lesquelles le fil est tordu, et dont la durée fait intervenir le module  $G$  de torsion, et aussi des oscillations autour de cet axe, durant lesquelles le fil est fléchi, et dont la durée fait intervenir le module  $E$  de traction ou module d'Young.

Le rapport  $\frac{E}{G}$  peut se déduire de l'observation des périodes des oscillations verticales et tournantes qu'exécute, quand on la déplace, une masse suspendue au ressort. C'est ce qu'a fait R. L. Wilberforce, professeur à l'Université de Liverpool.

Son appareil offre d'ailleurs une curieuse propriété de transfert d'énergie d'un système d'oscillations à un autre système. Les oscillations verticales s'accompagnent graduellement d'oscillations tournantes dont l'amplitude croît tandis que celle des premières décroît; puis ces oscillations tournantes s'amortissent, en même temps que les oscillations verticales se rétablissent à leur amplitude initiale.



Puis le même cycle de transformations se reproduit. On obtient un résultat analogue en partant d'oscillations purement tournantes.

Ces résultats, très intéressants en eux-mêmes, peuvent être complètement justifiés par la théorie, en conformité avec les principes que nous avons établis et dont ils sont, comme on va le voir dans les notes ci-après, une illustration fort jolie sinon très utile.

18. Le ressort spiral cylindrique du professeur L. R. Wilberforce. Description et expériences <sup>(1)</sup>. — Dans ce dispositif expérimental, un ressort spiral cylindrique ordinaire est monté verticalement, son extrémité supérieure étant solidement fixée de manière à ne pouvoir ni branler ni pivoter. Un moyen convenable pour réaliser cette condition consiste à fixer sur une traverse horizontale rigide une plaque de métal sur les arêtes opposées de laquelle on a limé deux petites encoches triangulaires, et à ployer l'extrémité supérieure du ressort en forme de boucle à travers laquelle passe la plaque, en sorte que les côtés de la boucle reposent dans les encoches.

A la partie inférieure du ressort est solidement attachée une lourde masselotte cylindrique de métal munie de quatre bras horizontaux qui en saillissent symétriquement. Ces bras portent des filets de vis, et sur chacun, un poids formant écrou peut être déplacé dans les deux sens. Ces poids sont égaux et doivent être disposés de manière à être équidistants de l'axe de la masselotte.

Si l'on exerce sur la masselotte une petite traction verticale sans la faire tourner et qu'on l'abandonne à elle-même, elle commence naturellement par exécuter une série de

---

<sup>(1)</sup> Traduction d'un extrait de *Harmonic vibrations and vibrations figures* by Professor L. R. WILBERFORCE (chez Newton and Co, London).



vibrations de bas en haut. On trouvera toutefois que ces vibrations ne conservent pas longtemps leur caractère initial, et qu'une oscillation de rotation s'y superposant prend naissance, croît graduellement jusqu'à un maximum et s'amortit ensuite complètement, après quoi les mêmes changements se reproduisent périodiquement. En vissant ou dévissant les poids, on allonge ou on raccourcit l'intervalle de temps entre les extinctions successives de l'oscillation de torsion. En déplaçant ces poids petit à petit, on peut faire en sorte que cet intervalle soit 20 ou 30 fois plus grand que la durée d'une oscillation verticale de la masselotte, et l'on observera aussi que la croissance de l'oscillation rotationnelle est accompagnée d'une décroissance marquée de l'amplitude de l'oscillation verticale. Si le réglage des poids est soigneusement poursuivi jusqu'à ce que l'intervalle, entre deux extinctions consécutives de l'oscillation de rotation, soit le plus grand possible, on trouvera que quand la vibration de rotation est à son maximum, la vibration verticale a pour un instant complètement disparu. La croissance successive et l'amortissement complet des oscillations verticales et rotationnelles forme ainsi un cycle d'opérations qu'il est très intéressant d'examiner.

Si d'autre part nous dérangeons la masselotte en lui donnant une rotation sans aucun déplacement vertical, elle se comportera d'une manière analogue à celle qui vient d'être décrite. Si les poids sont décalés de leur position de réglage, la masselotte commencera par exécuter de simples oscillations de rotation; puis une oscillation verticale apparaîtra, croîtra jusqu'à un maximum, puis s'amortira complètement, et ce cycle se répétera continuellement. On notera que la croissance de l'oscillation verticale est accompagnée d'une diminution de l'oscillation de rotation, laquelle, cependant, dans ce cas, ne disparaîtra pas complètement, mais décroîtra seulement jusqu'à une certaine



valeur minimum. Toutefois, si les poids sont réglés comme on l'a décrit précédemment, les oscillations de rotation s'éteindront encore tout à fait.

On peut donner une explication générale de cette attitude apparemment anormale d'un corps oscillant, en signalant que, quand un ressort spiral est allongé ou raccourci, comme dans les oscillations verticales qu'on y a initialement provoquées, de petites forces tendant respectivement à tordre et détordre le ressort prennent naissance. L'effet accumulé de ces forces sur la masselotte suspendue est d'établir une oscillation graduellement croissante, et, conformément à la théorie de la conservation de l'énergie, l'amplitude des oscillations verticales doit décroître tandis que celle des vibrations rotationnelles augmente.

Que les oscillations de torsion de la masselotte sont produites par l'action des petites forces qu'on vient de définir, on peut aisément l'établir comme il suit.

Dégageons l'extrémité supérieure du ressort de son attache rigide, et suspendons-là à un court morceau de ligne à pêcher en soie tressée, de manière que cette extrémité du ressort soit maintenant libre de tourner. Si la masselotte est maintenant tirée vers le bas et lâchée, elle exécutera simplement des oscillations verticales qui persisteront sans changement; en même temps, si l'on observe l'extrémité supérieure du ressort, on verra qu'elle subit une petite torsion alternative cadencée avec ces vibrations.

Si l'on désire une explication plus complète, embrassant tous les faits observés, on ne peut l'obtenir qu'en recourant à des considérations analytiques (*voir plus loin le calcul détaillé*, § 20); mais les résultats de la théorie peuvent être résumés de la manière suivante :

Un corps attaché à un ressort de la façon qui a été décrite, admet deux modes de vibrations qui lui sont accessibles, dans chacun desquels les vibrations persisteront inaltérées



une fois mises en train, et dans chacun desquels la durée d'une vibration complète, ou la « période », pour employer le terme technique, est bien déterminée.

Maintenant on peut démontrer que, quand les deux périodes diffèrent considérablement, un des modes de vibrations est une simple oscillation rotationnelle du corps et l'autre une simple oscillation verticale; par suite, si l'un de ces deux mouvements vibratoires est imprimé au corps, il persistera inaltéré.

Toutefois, si la forme du corps suspendu est telle que les deux périodes ne diffèrent pas notablement, comme c'est le cas de l'appareil que nous sommes en train d'étudier, le mode de vibration correspondant à chaque période est un mouvement de rotation combiné avec un mouvement vertical, le mouvement résultant étant un mouvement hélicoïdal dextrorsum de pas déterminé pour une période, et un mouvement hélicoïdal sinistrorsum, aussi de pas déterminé, pour l'autre période.

Que, si l'un de ces mouvements vibratoires hélicoïdaux est imprimé au corps, la vibration persistera inaltérée, on peut facilement le montrer par expérience. Chacun de ces deux mouvements peut à son tour être engendré en tenant légèrement le ressort entre le pouce et l'index près de l'extrémité supérieure du support et en lui donnant de très petits mouvements hélicoïdaux concomittants avec les vibrations qui sont établies en même temps. En tâtonnant on trouve bientôt le pas convenable à donner, et alors une vibration ample peut s'établir, dans laquelle ni le mouvement vertical ni le mouvement de rotation ne présentent aucune altération d'amplitude.

Si d'ailleurs le mouvement initial donné à la masselotte est purement vertical, nous sommes maintenant à même de comprendre pourquoi il ne persistera pas inaltéré. Cette forme de mouvement n'est pas naturelle au corps, vu qu'elle



n'est ni le mouvement hélicoïdal dextrorsum, ni le sinistrorsum, qui seuls possèdent ce caractère. Elle peut cependant être considérée comme constituée par deux tels mouvements hélicoïdaux vibratoires de grandeur appropriée, existant simultanément. Ces mouvements doivent, naturellement, avoir leurs rotations égales et opposées, de manière à ce qu'elles se neutralisent mutuellement, et ainsi, comme l'un est sinistrorsum et l'autre dextrorsum, les déplacements verticaux (qui sont inégaux, si les pas des mouvements hélicoïdaux sont inégaux, comme c'est le cas en général) auront la même direction. Comme les périodes sont inégales, l'une de ces vibrations gagnera sur l'autre, les rotations ne s'équilibreront plus, et une oscillation rotationnelle résultante sera constatée. Quand une vibration a gagné une demi-période sur l'autre, les rotations prennent la même direction, et la rotation devient maximum tandis que les déplacements inégaux sont de sens opposés et que l'oscillation verticale est minimum. Quand l'une des vibrations a gagné une période complète sur l'autre, l'état de choses initial est reproduit.

L'attitude de la masselotte, quand elle part avec un simple mouvement de rotation, s'explique de la même manière. Les deux mouvements hélicoïdaux vibratoires auront maintenant des déplacements verticaux égaux, lesquels sont tout d'abord opposés en direction, et comme l'un des mouvements gagne sur l'autre, les effets déjà décrits se produiront.

En fin de compte, on peut démontrer que, si les deux périodes, qui sont toujours différentes, sont rendues aussi sensiblement égales que possible, les deux mouvements hélicoïdaux deviennent de même pas, et conséquemment si, à un certain instant, les rotations se neutralisent, un instant viendra où les déplacements verticaux se neutraliseront mutuellement, et *vice versa*.



Le transport complet d'énergie des oscillations verticales aux oscillations de rotation et inversement, dans ce cas, est très frappant à observer. Une autre manière assez intéressante de le présenter consiste à avoir une masselotte cylindrique dépourvue de bras et des poids déplaçables, mais réglés pour être exactement de telles dimensions que les deux périodes soient aussi égalisées que possible. Dans ce cas, les mouvements de rotation de la masselotte ne sont pas aisément perçus par un observateur qui en est quelque peu éloigné, et alors, si l'on donne à la masse un mouvement vertical, ce mouvement s'éteindra graduellement, laissant la masse apparemment en repos, et puis le mouvement recommencera, croîtra, puis décroîtra de nouveau, d'une manière qui paraît très mystérieuse, jusqu'à ce qu'on en possède une explication.

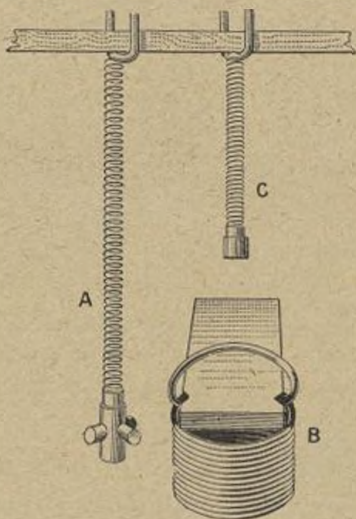


Fig. 40.

Dans la figure ci-après (*fig. 40*), A donne une vue générale du ressort et de la masselotte; B montre la manière dont



l'extrémité supérieure du ressort est maintenue par la plaque entaillée, et C représente un ressort avec une masselotte cylindrique appropriée permettant de réaliser l'expérience décrite dans le dernier paragraphe.

19. **Les ressorts synchrones.** — L'explication du transfert d'énergie donnée précédemment s'applique également à tout ce qu'on appelle ressorts ou pendules synchrones.

Une forme simple, mais très frappante, des ressorts synchrones, consiste en une latte élastique de bois supportée par les dossiers de deux chaises, ou de toute autre manière plus convenable, latte à laquelle sont suspendus deux ressorts spirales à la partie inférieure de chacun desquels est fixée une lourde masselotte (*fig. 41*).

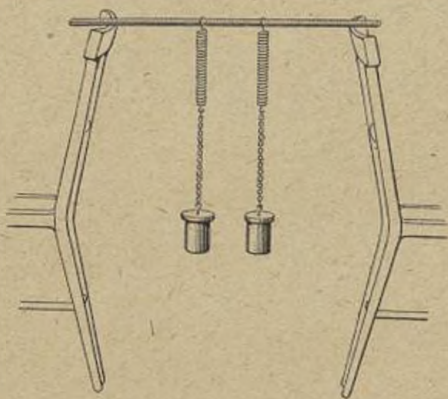


Fig. 41.

Si les poids des masses sont correctement adaptés à la force des ressorts, et si tous les deux sont convenablement appropriés à l'élasticité de la latte — disposition qui exige quelque soin et habileté à réaliser, — le transfert de l'énergie de l'une des masses à l'autre est très frappant. L'appareil est mis en mouvement par une légère traction de l'une des masses, de manière à allonger le ressort auquel elle est appliquée, et par son soudain abandon. Naturelle-



ment le ressort, une fois lâché, oscille verticalement, mais l'autre masse aussi se met immédiatement à osciller de la même manière, très légèrement au début, mais l'amplitude de ses vibrations croît rapidement, tandis que celle de la première masse diminue; cela, jusqu'à ce que la seconde masse se meuve presque avec autant d'énergie que la première au départ, et que celle-ci se trouve immobile.

Aussitôt que l'énergie a été ainsi absorbée par la seconde masse, le phénomène se renverse et toute l'énergie est de nouveau transférée à la première masse. C'est là une expérience des plus curieuses et des plus étonnantes, et qui excite toujours beaucoup d'intérêt.

Un semblable résultat peut être obtenu d'une manière très simple avec deux pendules. Deux poids sont suspendus par des cordes à deux clous distants l'un de l'autre d'environ 30<sup>cm</sup>. Si alors les cordes sont bouclées autour des extrémités d'une barre de bois et si l'on fait osciller l'un des poids en le tirant jusqu'à 8 ou 10<sup>cm</sup> de l'autre et en l'abandonnant, l'énergie de ce poids sera graduellement absorbée par le second poids tandis que le premier viendra au repos. La rapidité avec laquelle s'effectue le transfert d'énergie dépend de la position de la barre de bois; plus elle est voisine des poids, plus vite se fait le changement, et inversement. Il est possible de régler la barre assez près des poids pour que l'énergie soit entièrement transférée après une oscillation, en sorte que chaque poids à tour de rôle oscille une fois, puis reste en repos.

20. Sur les vibrations d'un ressort spiral cylindrique chargé <sup>(1)</sup>. — Les professeurs Ayrton et Perry ont signalé (*Proc. Roy. Soc.*, vol. 36, p. 311) que, par la

---

<sup>(1)</sup> Traduction d'un Mémoire de L.-R. WILBERFORCE, M. A., démonstrateur de Physique au Laboratoire Cavendish, Cambridge (*Philosophical Magazine*, (5), vol. 38, july-december 1894; p. 386-392).



comparaison de l'élongation axiale et de la torsion, produites dans un ressort spiral cylindrique d'inclinaison finie sous l'action d'une force axiale, on pouvait obtenir le rapport des rigidités de torsion et de flexion du fil ou du ruban dont le ressort est fait, et par suite obtenir le rapport de la rigidité ou module d'Young de ce matériau.

Cette méthode est très intéressante et instructive; mais comme il n'est pas facile de fabriquer des ressorts d'inclinaison convenable et réellement assez constante, ni de déterminer avec précision une petite élongation axiale, il m'a semblé qu'il pouvait valoir la peine de la modifier en fixant une masse au ressort et en observant les périodes des vibrations qu'elle exécute quand on la déplace. Dans ce cas, on trouvera convenable d'employer un ressort d'inclinaison assez petite pour qu'on en puisse négliger le carré.

En dehors de leur utilisation pour comparer les modules d'élasticité, les oscillations d'un tel système présentent quelques particularités intéressantes déjà signalées et dont l'examen détaillé ne sera peut-être pas déplacé.

Si nous avons un ressort spiral construit avec une longueur  $l$  de fil, enroulée sur un cylindre de rayon  $r$ , en sorte que la distance entre les extrémités du ressort soit  $x$ ; si  $\varphi$  est l'angle entre les plans passant par l'axe du spiral et les deux extrémités du fil, la force et le couple nécessaires pour déformer le système à partir de l'état d'équilibre  $(x_0, \varphi_0)$  pour l'amener à l'état  $(x, \varphi)$ , sont respectivement donnés par (THOMSON et TAIT, *Natural Philosophy*, vol. I, part. II, p. 141) :

$$F_{x,\varphi} = -\frac{B}{l^3} \left[ \sqrt{l^2 - x^2} \varphi - \sqrt{l^2 - x_0^2} \varphi_0 \right] \frac{x\varphi}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{A}{l^3} (x\varphi - x_0\varphi_0)\varphi,$$

$$C_{x,\varphi} = \frac{B}{l^3} \left[ \sqrt{l^2 - x^2} \varphi - \sqrt{l^2 - x_0^2} \varphi_0 \right] \sqrt{l^2 - x^2} + \frac{A}{l^3} (x\varphi - x_0\varphi_0)x,$$

où  $A$  désigne la rigidité torsionnelle et  $B$  la rigidité flexionnelle du fil.



Si le ressort est pendu verticalement, son extrémité supérieure étant solidement fixée, si une masse  $M$  est attachée à son extrémité inférieure de manière à être symétrique par rapport à l'axe du ressort, alors, en négligeant la masse du ressort, on a

$$F_{x,\varphi} = Mg, \quad C_{x,\varphi} = 0.$$

Supposons maintenant que le ressort soit amené à la configuration  $(x + \delta x, \varphi + \delta \varphi)$  et abandonné à lui-même; alors les équations du mouvement sont :

$$M \frac{d^2}{dt^2} \delta x = Mg - F_{x+\delta x, \varphi+\delta \varphi},$$

$$MK^2 \frac{d^2}{dt^2} \delta \varphi = -C_{x+\delta x, \varphi+\delta \varphi},$$

$MK^2$  désignant le moment d'inertie de  $M$  par rapport à l'axe du ressort. Ceci s'écrit

$$-M \frac{d^2}{dt^2} \delta x = \delta x \frac{\partial}{\partial x} F_{x,\varphi} + \delta \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} F_{x,\varphi},$$

$$-MK^2 \frac{d^2}{dt^2} \delta \varphi = \delta x \frac{\partial}{\partial x} C_{x,\varphi} + \delta \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} C_{x,\varphi};$$

ou

$$\begin{aligned} -M \frac{d^2}{dt^2} \delta x = \delta x \left[ -\frac{B}{l^3} \varphi^2 + \frac{B}{l^3} \varphi \varphi_0 \sqrt{l^2 - x_0^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{x^2}{(l^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} + \frac{A}{l^3} \varphi^2 \right] \\ + \delta \varphi \left[ -\frac{B}{l^3} \left\{ 2\sqrt{l^2 - x^2} \varphi - \sqrt{l^2 - x_0^2} \varphi_0 \right\} \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{A}{l^3} (2x\varphi - x_0\varphi_0) \right]; \\ -MK^2 \frac{d^2}{dt^2} \delta \varphi = \delta x \left[ \frac{B}{l^3} \left\{ -2x\varphi + x \frac{\sqrt{l^2 - x_0^2}}{\sqrt{l^2 - x^2}} \varphi_0 \right\} + \frac{A}{l^3} (2x\varphi - x_0\varphi_0) \right] \\ + \delta \varphi \left[ \frac{B}{l^3} (l^2 - x^2) + \frac{A}{l^3} x^2 \right]. \end{aligned}$$

Si les angles du ressort non tendu et tendu sont tous deux assez petits pour que nous puissions négliger  $\frac{x^2}{l^2}$ , il résulte de l'équation  $C_{x,\varphi} = 0$  que nous pouvons négliger  $\frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi}$ ,



et alors les équations précédentes se réduisent à

$$\begin{aligned} -M \frac{d^2}{dt^2} \delta x &= \delta x \frac{A \varphi^2}{l^3} + \delta \varphi \left[ \frac{(2A - B)x \varphi}{l^3} - \frac{A x_0 \varphi}{l^3} \right], \\ -MK^2 \frac{d^2}{dt^2} \delta \varphi &= \delta x \left[ \frac{(2A - B)x \varphi}{l^3} - \frac{A x_0 \varphi}{l^3} \right] + \delta \varphi \frac{B}{l}; \end{aligned}$$

nous pouvons les écrire

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dt^2} \delta x &= a \delta x + b \delta K \varphi, \\ -\frac{d^2}{dt^2} \delta K \varphi &= b \delta x + c \delta K \varphi, \end{aligned}$$

où  $a$  et  $c$  sont nécessairement positifs et où  $b$  est petit.

La solution la plus générale de ce système est

$$\begin{aligned} \delta x &= A_1 \sin pt + A_2 \cos pt + B_1 \sin qt + B_2 \cos qt, \\ \delta K \varphi &= \frac{p^2 - a}{b} (A_1 \sin pt + A_2 \cos pt) + \frac{q^2 - a}{b} (B_1 \sin qt + B_2 \cos qt), \end{aligned}$$

où  $p^2$  et  $q^2$  sont les racines de l'équation du deuxième degré

$$(x - a)(x - c) = b^2.$$

Nous supposons que  $p^2$  soit la plus grande.

Cette solution peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{p^2 - a}{b} \delta x - \delta K \varphi &= L_1 \sin(qt + \varepsilon_1), \\ \frac{q^2 - a}{b} \delta x - \delta K \varphi &= L_2 \sin(pt + \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Ainsi le mouvement résulte de deux vibrations harmoniques de périodes  $\frac{2\pi}{p}$  et  $\frac{2\pi}{q}$ ; dans le premier mouvement, pendant tout le mouvement,

$$\frac{p^2 - a}{b} \delta x = \delta K \varphi,$$

et dans le second

$$\frac{q^2 - a}{b} \delta x = \delta K \varphi.$$



Il est aisé de voir que  $p^2 - a$  est positif et  $q^2 - a$  négatif; par conséquent nous concluons que, si  $b$  est une quantité positive, la plus courte période de vibration correspond à un mouvement de vis de même sens que celui du ressort, et la plus longue à un mouvement de vis de sens opposé à celui du ressort, tandis que si  $b$  est négative, les résultats sont inversés.

Il est aussi évident que si  $(c - a)$  est grand comparativement à  $b$  et est  $\begin{cases} \text{positive} \\ \text{négative} \end{cases}$ ,  $\frac{p^2 - a}{b}$  est  $\begin{cases} \text{grand} \\ \text{petit} \end{cases}$ , et  $\frac{q^2 - a}{b}$  est  $\begin{cases} \text{petit} \\ \text{grand} \end{cases}$ ; ainsi dans le  $\begin{cases} \text{premier} \\ \text{second} \end{cases}$  cas, les vibrations de plus  $\begin{cases} \text{courte} \\ \text{longue} \end{cases}$  période correspondent à  $\delta x = 0$ , et celles de plus  $\begin{cases} \text{longue} \\ \text{courte} \end{cases}$  période, à  $\delta \varphi = 0$ , approximativement.

Si, cependant,  $\frac{c - a}{b}$  est fini et égal à  $2\lambda$ , nous avons, quand le système vibre dans un de ses modes normaux :

$$\text{soit } (\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}) \delta x = \delta K \varphi, \quad \text{soit } (\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}) \delta x = \delta K \varphi$$

durant tout le mouvement, les périodes correspondant à ces modes étant sensiblement égales. Dans ce cas, si le système reçoit un déplacement non représenté par l'une ou l'autre de ces équations, le mouvement subséquent sera composé de deux vibrations, dont l'une gagne lentement sur l'autre, et présentera ainsi des phénomènes d'intermittence.

Par exemple, si l'on donne le déplacement ( $\delta x = X$ ,  $\delta \varphi = 0$ ) ce mouvement peut être décomposé en

$$\delta_1 x = X \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1} - \lambda}{2\sqrt{\lambda^2 + 1}}, \quad \delta_1 K \varphi = X \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 + 1}},$$

et

$$\delta_2 x = X \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1} + \lambda}{2\sqrt{\lambda^2 + 1}}, \quad \delta_2 K \varphi = -X \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 + 1}};$$

par suite, quand les vibrations d'un mode normal ont gagné



une demi-période sur celles de l'autre, la demi-amplitude de la vibration  $x$  aura décréu de  $X$  à  $X \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$  et une vibration  $K\varphi$  de demi-amplitude  $X \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$  aura apparu, tandis que, lorsqu'une autre demi-période aura été gagnée, les conditions initiales seront à nouveau vérifiées. Ainsi, tandis que tout d'abord le système se meut simplement avec une vibration  $x$ , cette vibration diminue graduellement jusqu'à une valeur minimum, et en même temps, une vibration  $\varphi$  s'établit graduellement et croît jusqu'à une valeur maximum; la dernière vibration décroît ensuite pour finir par s'évanouir, tandis que la première croît jusqu'à ce qu'elle reprenne sa valeur initiale; puis le phénomène se reproduit.

Il est aisé de voir qu'une semblable intermittence se présentera si le système est mis en mouvement avec une vibration  $\varphi$  seulement.

Les résultats précédents peuvent être vérifiés facilement par l'expérience, en employant comme masse  $M$  un corps de moment d'inertie réglable. Le cas le plus intéressant est celui où  $K$  est disposé de manière à rendre  $\lambda$  très petit; alors on voit l'énergie se transférer d'une manière presque intégrale des vibrations  $x$  aux vibrations  $\varphi$ , et inversement.

La condition d'évanouissement de  $\lambda$  est

$$\frac{A\varphi^2}{l^3} = \frac{B}{lK^2},$$

ou, puisque, à notre ordre d'approximation,  $l = r\varphi$

$$K^2 = \frac{B}{A} r^2.$$

Il est aussi intéressant de produire, au moyen d'une série de petites impulsions convenablement espacées, les modes normaux de vibration d'un tel système et de démontrer la permanence de chacun d'eux.



Si toutefois l'on a en vue la détermination des constantes élastiques, il convient de faire en sorte que  $(c - a)$  soit grand comparativement à  $b$ . Dans ce cas, comme nous l'avons vu, les vibrations  $x$  pures et les vibrations  $\varphi$  pures sont pratiquement les deux modes normaux, et les durées des périodes des premières et des dernières sont données par

$$t_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{a}} = 2\pi \sqrt{\frac{Mlr^2}{A}}, \quad t_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{M/K^2}{B}}.$$

Si la masse  $m$  du ressort lui-même ne peut être négligée, nous pouvons en tenir compte, si elle est petite comparée à  $M$ , en prenant  $M + \frac{1}{3}m$  pour la masse vibrante et

$$MK^2 + \frac{1}{3}mr^2$$

pour son moment d'inertie (Lord RAYLEIGH, *Theory of Sound*, § 156).

Considérons le cas d'un ressort formé d'un fil à section circulaire de rayon  $\rho$ . Si nous pouvons supposer la matière homogène et isotrope, hypothèse qui sans aucun doute est un point faible de toutes les méthodes de détermination des constantes élastiques d'un matériau en expérimentant sur des fils, nous avons

$$A = \frac{\pi}{2} n \rho^4, \quad B = \frac{\pi}{4} E \rho^4,$$

où  $E$  et  $n$  sont respectivement le module d'Young et la rigidité du matériau <sup>(1)</sup>. De ce qui précède, nous déduisons

$$\frac{E}{n} = 2 \frac{B}{A} = 2 \times \frac{MK^2 + \frac{1}{3}mr^2}{Mr^2 + \frac{1}{3}mr^2} \frac{t_1^2}{t_2^2},$$

---

<sup>(1)</sup> Ou le coefficient d'élasticité de glissement, généralement désigné par  $G$ .



équation qui ne renferme que des quantités dont la mesure est facile.

Par suite, le coefficient de Poisson  $\eta$ , qui est égal à  $\frac{1}{2} \left( \frac{E}{n} - 2 \right)$ , est déterminé. De plus, si les valeurs de  $l$  et  $\rho^4$  sont connues,  $E$  et  $n$  peuvent être calculés séparément.

Diverses observations ont été faites sur différentes longueurs de ressorts en acier de Salter ( $r = 1^{\text{cm}}, 494$ ), en prenant un corps vibrant dont le moment d'inertie pût être modifié de quantités connues à partir d'une valeur arbitraire  $K$  en déplaçant deux masses égales le long d'une barre.

Voici un exemple des nombres obtenus, en unités C.G.S.:  
*Exemple :*

$$\varphi = 300\pi, \quad l = 1408, \quad x = 78, \quad m = 130,5, \quad M = 267.$$

Moment d'inertie.		$t_1$ .	$t_2$ .
$K + \frac{1}{3}mr^2 +$	586.....	1,473	1,888
"	+ 1790.....	1,477	2,505
"	+ 3400.....	1,474	3,228
"	+ 5680.....	1,475	3,986

Par suite

$$\frac{B}{4\pi^2 l} = 413, 410, 416; \quad \text{moyenne : } 413,$$

$$\frac{A}{4\pi^2 l} = 319, 318, 318, 318; \quad \text{moyenne : } 318.$$

Comme vérification, nous pouvons en déduire

$$K + \frac{1}{3}mr^2 = 886, 892, 903, 884; \quad \text{moyenne : } 891,$$

ce qui donne pour  $K$  la valeur 794.



Les résultats des expériences sont résumés dans le tableau suivant :

$\varphi$ .	$l$ .	$M$ .	$m$ .	$A$ .	$B$ .	$K$ .
$300\pi$	1408	267	130,5	$1,77 \cdot 10^7$	$2,30 \cdot 10^7$	794
200	939	267	87	1,78 »	2,29 »	785
100	469	267	43,5	1,77 »	2,28 »	791
300	1408	533	130,5	1,79 »	2,28 »	

La dernière expérience de cette série a été faite en attachant une masse additionnelle au corps oscillant, en sorte que  $x$  a été porté à 125, et naturellement  $K$  a été changé.

Ainsi nous voyons que la méthode fournit des résultats concordants, et nous en déduisons pour cet échantillon d'acier

$$\frac{E}{n} = \frac{2B}{A} = 2,57, \quad \text{d'où} \quad \eta = 0,285.$$

De plus, comme pour notre fil  $\rho$  est d'environ  $0\text{cm}, 0617$ , nous obtenons les valeurs approchées

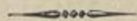
$$E = 2,00 \cdot 10^{12}, \quad n = 7,79 \cdot 10^{11}.$$

En expérimentant avec un ressort de fil de cuivre étiré durci, on a obtenu

$$\frac{E}{n} = 2,76, \quad \text{d'où} \quad \eta = 0,38$$

avec les valeurs approchées

$$E = 1,13 \cdot 10^{12}, \quad n = 4,10 \cdot 10^{11}.$$





---

## TABLE DES MATIÈRES.

---

### CHAPITRE I.

#### *Généralités sur les ressorts. Formes. Fabrication.*

	Pages.
1. Définition des ressorts. Formes principales.....	1
2. Ressorts à lames.....	2
3. Ressorts à boudin.....	2
<i>a.</i> De traction.....	3
<i>b.</i> De compression ou de choc.....	3
<i>c.</i> De torsion.....	3
4. Ressorts spiraux.....	3
<i>a.</i> Plats.....	3
<i>b.</i> Cylindriques.....	4
<i>c.</i> Coniques. Indications sommaires sur la fabrication....	4
5. Choix de la matière : résiliences classiques de flexion et de torsion.....	4
6. Construction et trempe (lames, boudins, spiraux, flexibles) ..	8

### CHAPITRE II.

#### *Fonction des ressorts. Amortissement. Résonance.*

7. Fonction des ressorts : amortissement des oscillations.....	13
8. Résonance avec ou sans amortissement.....	20
9. Application à la mesure d'une fréquence.....	26
10. Emploi des battements pour détruire la résonance.....	27
11. Amélioration de l'amortissement par frottement dans un liquide visqueux ou sur un solide.....	28
12. Application : rôle des ressorts dans la traction des véhicules; évaluation de l'augmentation de rendement.....	31



## CHAPITRE III.

*Calcul des ressorts.*

	Pages
13. Rappel de formules relatives à la flexion et à la torsion.....	39
14. Ressorts de suspension ou à lames superposées.....	45
15. Ressorts d'amortissement ou à boudin.....	50
16. Ressorts d'horlogerie.....	55
1° Ressort moteur.....	55
2° Spiral réglant.....	60

## APPENDICE.

*Le ressort du professeur Wilberforce.*

17. Indications sur une expérience de Wilberforce.....	68
18. Le ressort spiral cylindrique de Wilberforce : description et expériences.....	69
19. Les ressorts synchrones.....	75
20. Calculs de Wilberforce sur les oscillations d'un ressort spiral cylindrique chargé : détermination du rapport des modules d'élasticité de réaction et de glissement et du coefficient de Poisson.....	76
TABLE DES MATIÈRES.....	85







GAUTHIER-VILLARS & C<sup>ie</sup>

Imprimeurs-Éditeurs

55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6<sup>e</sup>)

Tél. : FLEURUS 50-14 et 50-15.

R. C. Seine 22520

---

Envoi dans toute la France et l'Union Postale, contre chèque ou valeur sur Paris.  
Frais de port en sus. (Chèques-postaux : Paris 29.323).

---

Majoration 40 % en sus

*Leçons*  
*de*  
*Cinématique*

---

PAR

**Raoul BRICARD**

Ingénieur des Manufactures de l'État  
Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers  
et à l'École Centrale des Arts et Manufactures

TOME I

*Cinématique théorique*

*Un volume in-8 de 336 pages, avec 117 figures . . . . . 45 fr.*

(Port en sus)

---

TOME II

*Cinématique appliquée*

*Un volume in-8 de vi-352 pages, avec 300 figures.. . . . 45 fr.*

(Sous presse)

BOULANGER. — II.





GAUTHIER-VILLARS & C<sup>ie</sup>

Imprimeurs-Éditeurs

55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6<sup>e</sup>)

Tél. : FLEURUS 50-14 et 50-15.

R. C. Seine 22520

---

Envoi dans toute la France et l'Union Postale, contre chèque ou valeur sur Paris.  
Frais de port en sus. (Chèques-postaux : Paris 29.323).

---

Majoration 40 % en sus

# *Mathématiques et Mécanique*

*Ouvrage conforme aux derniers programmes des examens  
de la Marine marchande (1924)*

PAR

C. CORNET

Professeur d'Hydrographie  
Directeur du Navire-École « Jacques-Cartier »

## *Leçons de Mathématiques*

(Algèbre, Géométrie, Trigonométrie)

Programme d'Élève-Officier de la Marine marchande

Un volume (22 × 14) de 285 pages avec 119 figures; 1925... .. 30 fr.

....

## *Leçons de Mécanique*

(faisant suite aux *Leçons de Mathématiques*)

Programme d'Élève-Officier et de Lieutenant au long cours

Un volume (22 × 14) de pages avec 87 figures; 1925... .. 20 fr  
(Port en sus)



