

Conditions d'utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- [Le Conservatoire numérique](#) communément appelé [le Cnum](#) constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n° 78-753 du 17 juillet 1978 :

- la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue ([Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - https://cnum.cnam.fr](#))
- la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- les reproductions de documents protégés par le droit d'auteur, uniquement consultables dans l'enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

4- Pour obtenir la reproduction numérique d'un document du Cnum en haute définition, contacter [cnum\(at\)cnam.fr](mailto:cnum(at)cnam.fr)

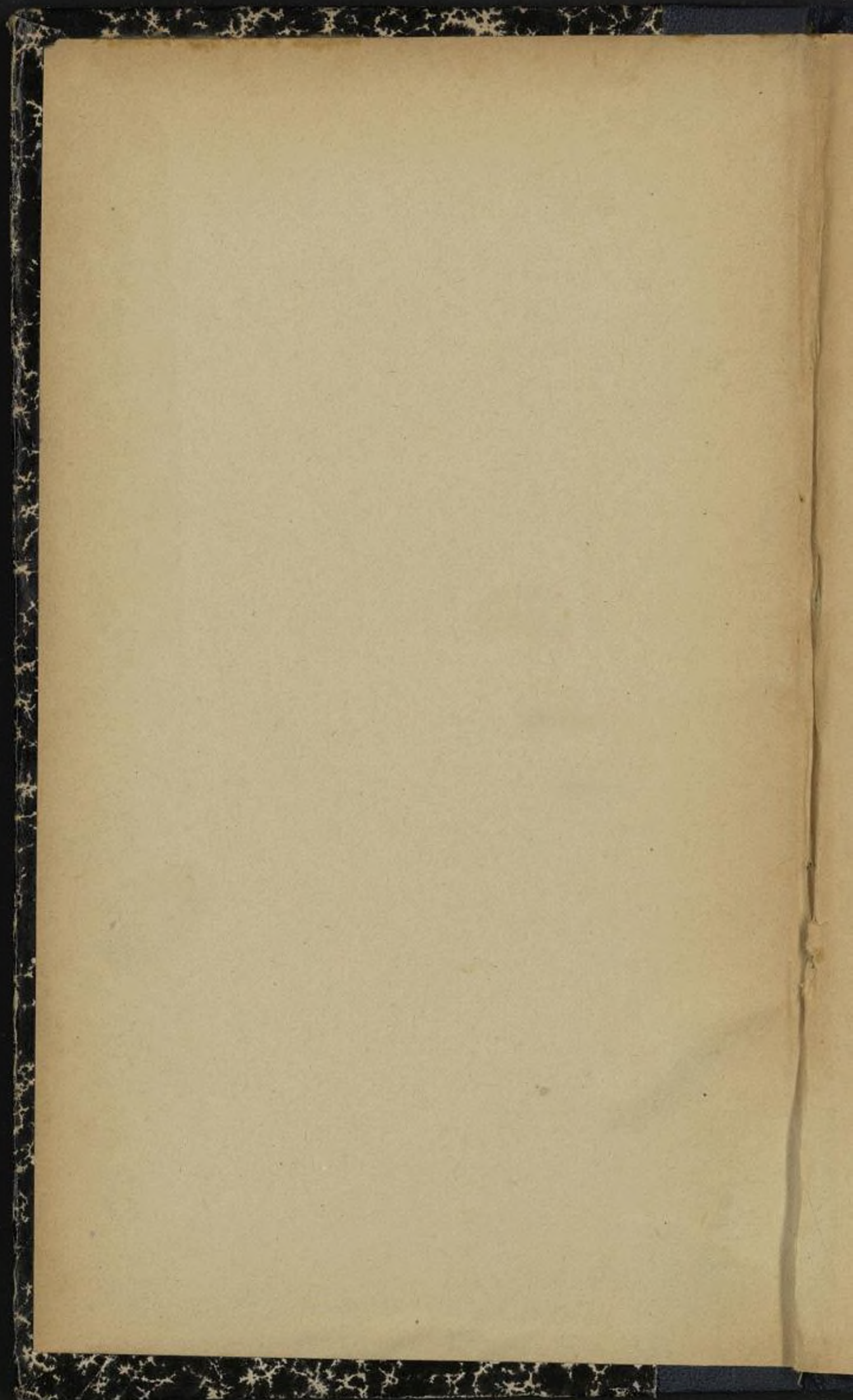
5- L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

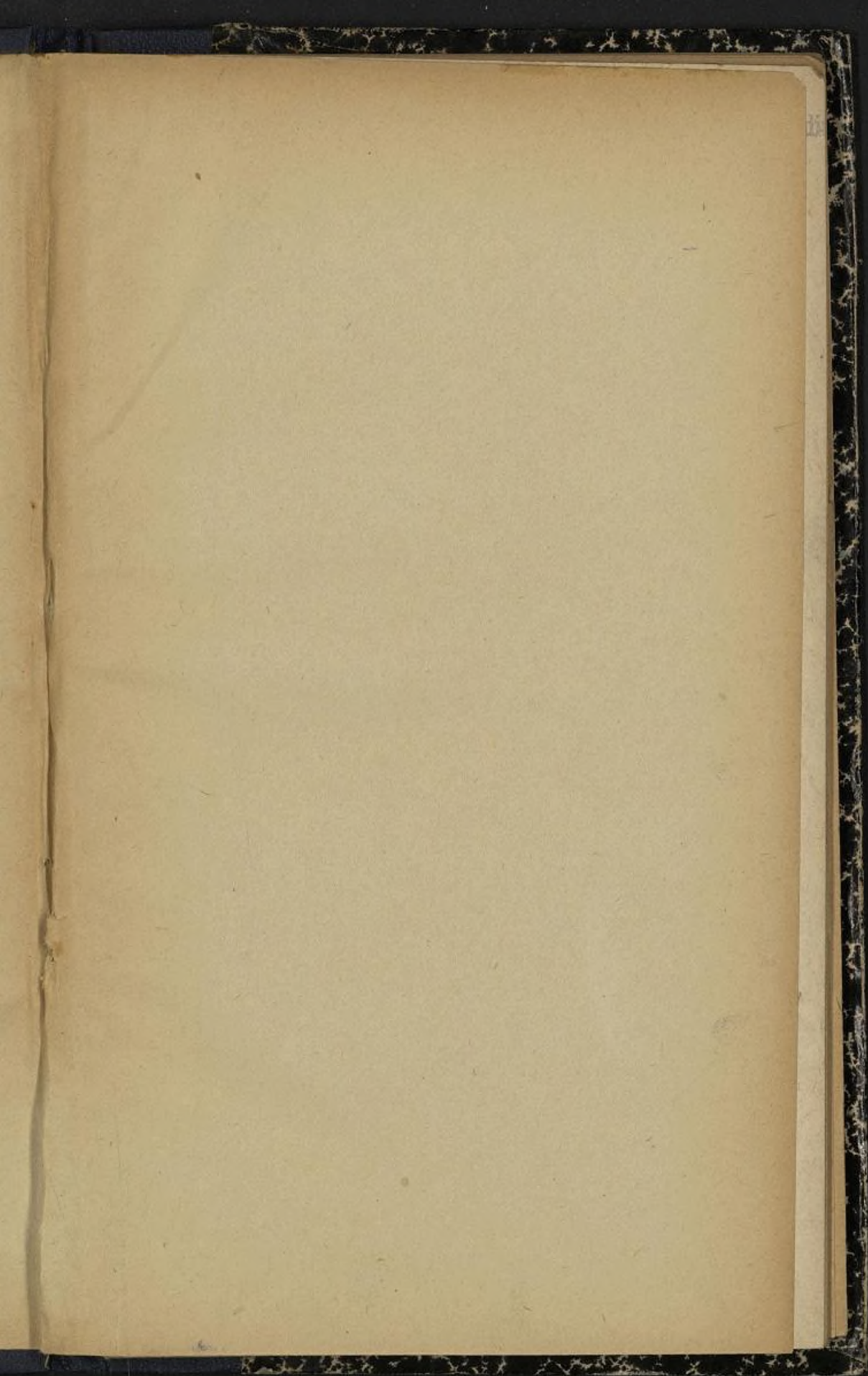
6- Les présentes conditions d'utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

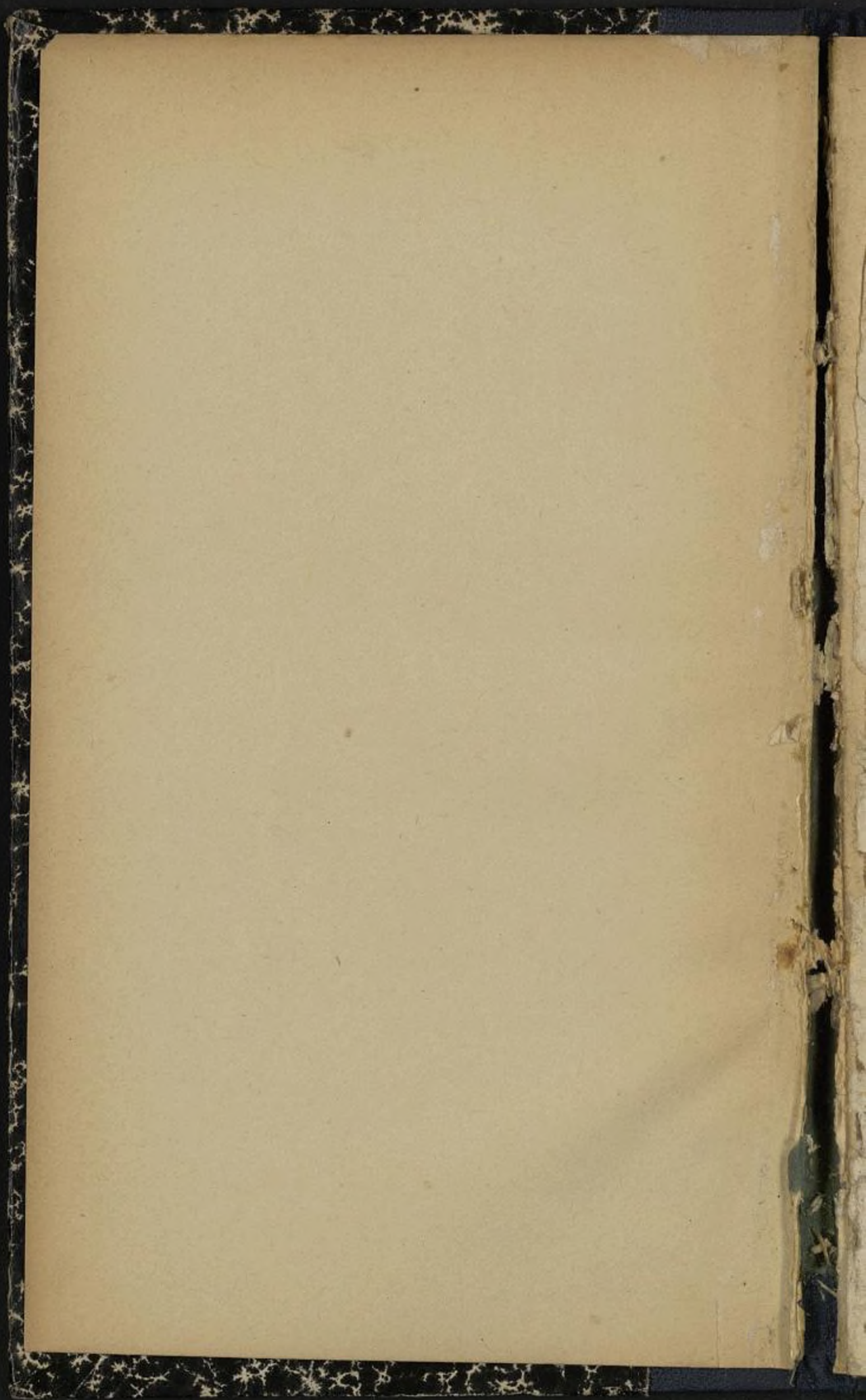
NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

NOTICE DE LA GRANDE MONOGRAPHIE	
Auteur(s) ou collectivité(s)	Boulanger, Auguste
Auteur(s)	Boulanger, Auguste (1866-1923)
Titre	Leçons choisies de mécanique
Nombre de volumes	3
Cote	CNAM -BIB 8 Da 23 à 25
Sujet(s)	Mécanique
Permalien	https://cnum.cnam.fr/redir?8DA23_24_25
LISTE DES VOLUMES	
	Leçons choisies de mécanique. [1]. Dynamique des solides tournants
	Leçons choisies de mécanique. [2]. Les principes de la mécanique des ressorts
VOLUME TÉLÉCHARGÉ	Leçons choisies de mécanique. [3]. Le choc des corps solides : théorie, expérimentation, utilisation

NOTICE DU VOLUME TÉLÉCHARGÉ	
Auteur(s) volume	Boulanger, Auguste (1866-1923)
Titre	Leçons choisies de mécanique
Volume	Leçons choisies de mécanique. [3]. Le choc des corps solides : théorie, expérimentation, utilisation
Adresse	Paris : Gauthier-Villars et Cie, éditeurs libraires du Bureau des longitudes, de l'École polytechnique, 1927
Collation	1 vol. (64 p.-II f. de pl.) : ill. ; 23 cm
Nombre de vues	82
Cote	CNAM-BIB 8 Da 25
Sujet(s)	Choc (mécanique) Mécanique Résistance des matériaux Solides -- Propriétés mécaniques
Thématique(s)	Machines & instrumentation scientifique
Typologie	Ouvrage
Langue	Français
Date de mise en ligne	20/05/2021
Date de génération du PDF	06/02/2026
Recherche plein texte	Disponible
Notice complète	https://www.sudoc.fr/05189386X
Permalien	https://cnum.cnam.fr/redir?8DA25







Hommage des Éd.

LE CHOC
DES CORPS SOLIDES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}

76976-27 Quai des Grands-Augustins, 55.

8° Da.25

LEÇONS CHOISIES DE MÉCANIQUE

LE CHOC DES CORPS SOLIDES

THÉORIE. EXPÉRIMENTATION
UTILISATION



PAR

A. BOULANGER

Directeur des Études à l'École Polytechnique
Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins

1927

22.509

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.



LE CHOC DES CORPS SOLIDES

THÉORIE. EXPÉRIMENTATION. UTILISATION.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

1. Historique. — 2. Mesure de la vitesse. — 3. Durée du choc. — 4. Notion d'impulsion ou percussion. — 5. Principe de l'égalité de l'action et de la réaction. — 6. Théorème de l'énergie. — 7. Analyse du choc. — 8. Propagation des compressions de choc. — 9. Étendue de la zone de répartition d'un choc.

1. **Historique.** — C'est à propos des lois rationnelles du choc que le médecin et philosophe *René Descartes* a écrit cette phrase célèbre : *Les démonstrations de tout ceci sont si certaines qu'encore que l'expérience nous semblerait faire voir le contraire, nous serions néanmoins obligés d'ajouter plus de foi à notre raison qu'à nos sens.* Jamais *Blaise Pascal*, ce type du savant complet, n'aurait songé à s'insurger ainsi contre les faits. Mais les faits ont eu raison contre la raison, et *Laplace* a pu, dans son *Exposition du Système du Monde*, porter ce jugement : « *Ce philosophe — Descartes — substituant à de vieilles erreurs, des erreurs plus séduisantes, détruisit l'empire d'Aristote, qu'une philosophie plus sage eût difficilement ébranlé. Mais, en posant en principe qu'il fallait commencer par douter de tout, il nous a lui-même avertis de soumettre ses opinions à un examen sévère auquel son système n'a pas résisté longtemps.* »

Le choc est le phénomène qui se produit quand un corps animé d'une grande vitesse vient à rencontrer un autre corps et agit sur lui par pression pour modifier son état de repos ou de mouvement. Son effet est de communiquer, dans un temps très bref, une vive impulsion, en modifiant la forme du corps choqué, momentanément s'il est élastique, et d'une manière permanente s'il est ductile.

Ce phénomène journalier aurait dû attirer de tout temps l'attention des savants. Il est cependant demeuré longtemps mystérieux, du fait de sa complexité; il fait intervenir des propriétés très cachées de la matière, et son étude exige une perfection d'expérimentation qu'on a à peine atteinte. Nous n'en pouvons rendre compte qu'en première et à peine en seconde approximation. Cependant le choc a fourni l'occasion d'éclaircir des principes importants de la dynamique pour offrir ensuite des exemples d'application de ces mêmes principes.

Certes, dès le xv^e siècle, *Léonard de Vinci* compare l'effet de marteaux différents sur une verge en plomb; au début du $xvii^e$ siècle, *Galilée* soupçonne qu'il y a là des lois à découvrir et essaye à plusieurs reprises de les élucider; il échoue dans sa tentative d'évaluation de la force du choc qu'il cherche à comparer à la pression d'un poids au repos et à mesurer par celle-ci (*Discorsi e dimostrazioni matematiche*, Leiden 1638). Son contemporain, *Marcus Marci*, de Crownland, qui enseignait à Prague, dans son livre *De proportionibus motus* (Prague, 1639), donne cet énoncé : un corps élastique heurtant un corps identique au repos perd son mouvement et le communique au second; il présente quelques autres propositions qui, précisées et dégagées d'erreurs, sont valables. Descartes et son correspondant le *Père Mersenne* (1639) ne font qu'embrouiller la question.

C'est à l'initiative de la Société Royale de Londres qu'est due la première étude systématique des lois du choc :

cette Compagnie venait d'être fondée quand, en 1668, elle institua un concours sur ce sujet. Trois savants éminents répondirent à son vœu en déposant des mémoires dans lesquels ils résolvaient le problème du choc indépendamment les uns des autres : *Wallis*, le 26 novembre 1668; *Wren*, le 17 décembre 1668; et *Christian Huyghens*, le 4 janvier 1669. *Wallis* s'est limité au cas des corps parfaitement mous, *Wren* et *Huyghens* ne se sont occupés que du cas des corps parfaitement élastiques; *Wren* a vérifié expérimentalement ses théorèmes. La théorie de *Wallis* a été détaillée dans son livre *Mechanica sive de motu* (London, 1669-1671). Les expériences de *Wren*, citées par *Newton*, sont décrites en détail par l'abbé *Mariotte* (1620-1684), qui les a développées et complétées dans son *Traité sur le choc des corps* (1679); elles deviennent classiques à partir du *Traité de Mécanique* publié en 1695 par *Philippe de Lahire*. Quant aux idées directrices d'*Huyghens*, elles apparaissent clairement dans son traité posthume *De motu corporum ex percussione* (1703).

2. *Mesure de la vitesse.* — On doit à l'abbé *Mariotte* une très remarquable et très longue série d'expériences dont la précision n'était pas habituelle à cette époque et dont le principe est excellent. La question était d'amener deux corps, soit deux sphères pour simplifier, à se rencontrer avec des vitesses dont le rapport ait une valeur donnée quelconque. *Mariotte* y réussit en utilisant les propriétés du pendule. Un corps pesant abandonné sans vitesse à une liaison sans frottement possède, à un niveau déterminé quelconque, une vitesse qui est indépendante du chemin qu'il a parcouru et qui ne dépend que de la hauteur de chute h (fig. 1); elle est de plus proportionnelle à \sqrt{h} . Soit alors une boule suspendue à un fil OB de longueur l (fig. 2). Écartons-le jusqu'en A et lâchons-le; lorsque la boule passera en B sur la verticale du point de suspension, elle possé-

dera une vitesse proportionnelle à \sqrt{h} ou à \sqrt{BC} . Or dans la circonférence décrite par le centre du mobile, on a

$$\overline{AB}^2 = 2l \cdot BC.$$

Donc \sqrt{BC} est proportionnel à AB . Par suite la vitesse en B est proportionnelle à la corde BA, et sensiblement à l'arc BA,

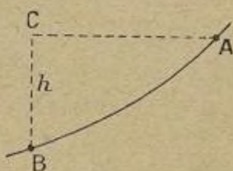


Fig. 1.

tant au moins que cet arc correspond à un angle au centre n'excédant pas 15° .

D'autre part, Galilée a reconnu expérimentalement qu'un pendule abandonné à lui-même d'une position où son fil

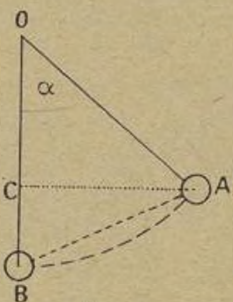


Fig. 2.

fait avec la verticale du point d'attache un angle *quelconque* mais petit, met toujours le même temps pour rejoindre cette verticale.

La vitesse à l'arrivée en B a pour expression

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2},$$

α étant l'angle AOB et g l'accélération de la pesanteur.

Cela étant, imaginons (*fig. 3*) que deux boules soient lâchées simultanément de deux points A et A' correspondant à des déviations inégales α et α' .

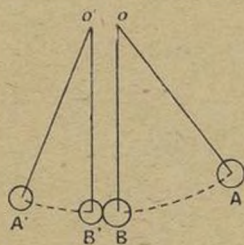


Fig. 3.

Leurs fils se placeront, s'ils sont égaux, en même temps suivant les verticales des points de suspension O et O'. Si l'écart OO' est la somme des rayons, les sphères se choqueront avec des vitesses proportionnelles aux arcs AB et A'B'.

L'abbé Nollet a perfectionné ce dispositif de manière à réaliser des vitesses plus grandes. Les sphères (*fig. 4*) sont

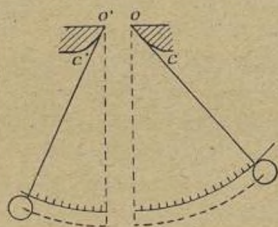


Fig. 4.

suspendues en O et O' par des cordons égaux qui s'enroulent sur deux portions de cycloïdes OC et O'C', et de la sorte leurs centres sont astreints à décrire d'autres cycloïdes

égales. Dans ces conditions, les deux pendules, s'ils partent en même temps, arriveront au même instant au point le plus bas, quel que soit leur point de départ, avec des vitesses proportionnelles aux espaces parcourus (fig. 5). C'est la

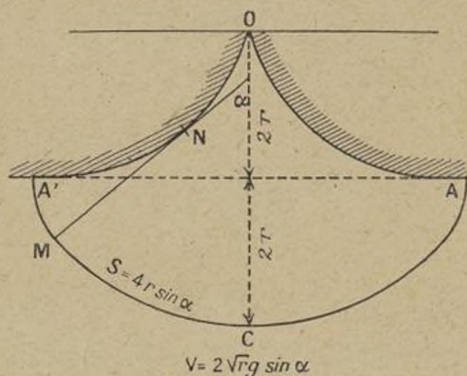


Fig. 5.

propriété connue sous le nom de *tautochronisme* de la cycloïde et découverte par C. Huyghens (1673). Après le choc, les deux billes, si elles sont en plomb ou en argile, monteront ensemble d'un côté ou de l'autre à une hauteur qui fera connaître la vitesse qu'elles ont reçue au moment du choc.

S'il s'agit de corps cylindriques, on doit modifier le dispositif de Mariotte et employer (fig. 6) celui dont s'est servi, vers 1868, *Hirn*, de Mulhouse — le chef de l'École Alsacienne des savants qui ont finement étudié le fonctionnement thermodynamique de la machine à vapeur — dans sa détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur au moyen de l'écrasement d'une masse de plomb comprise entre deux blocs formant pendule et servant l'un M de marteau (350^{kg}), l'autre E d'enclume (940^{kg}). Chaque cylindre ou prisme est maintenu au-dessous d'un madrier horizontal par deux paires de câbles de même longueur qui

le forcent à se mouvoir parallèlement à lui-même. La vitesse du choc se définit par la même expression que tout à l'heure. Ce dispositif a été encore employé récemment (1916) par le colonel *Hartmann* qui a repris, à un point de vue différent, les expériences de *Hirn*.

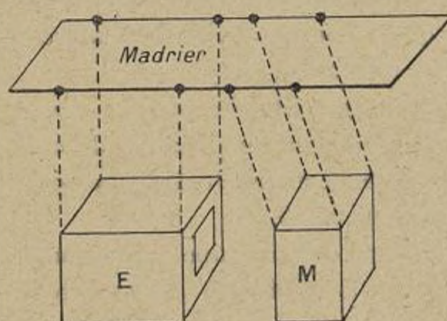


Fig. 6.

Ces dispositifs permettent de vérifier certains des résultats qui vont être établis théoriquement.

3. *Durée du choc.* — A l'époque de Mariotte, le choc des corps élastiques était considéré comme un phénomène instantané. La durée τ du choc, c'est-à-dire le temps qui s'écoule depuis l'instant du premier contact des surfaces des corps qui se heurtent jusqu'au moment de leur dernier contact, est en effet très courte pour des corps de dimensions ordinaires, et ne pouvait être déterminée avec les moyens expérimentaux dont on disposait alors. Mais l'opinion que la communication du mouvement entre deux corps était instantanée n'a pas peu contribué à donner crédit à des idées erronées.

En 1885, *Schneebeli* (*Archiv. sc. phys.*, Genève, t. 15, 1885) a déterminé τ ainsi. Il suspend deux sphères d'acier de 7^{cm} de diamètre à des fils métalliques que l'on relie à un

circuit contenant une pile et un galvanomètre. Quand les sphères arrivent au contact, le courant électrique traverse le galvanomètre et donne à son aiguille une impulsion qui cesse dès que les corps se séparent. On fait ensuite passer dans le même galvanomètre le même courant pendant un temps connu et mesurable (à l'aide d'un diapason), soit un dixième de seconde. Pour une vitesse relative de 80 cm/sec, on a trouvé $\tau = 0^{\text{sec}}, 0002$.

En 1886, *Hamburger* (*Wiedmann Annalen*, t. 28, p. 653) a étudié de même le choc longitudinal de cylindres d'acier dont la longueur était comprise entre 10 et 40^{cm}. Il a trouvé en moyenne $\tau = 0^{\text{sec}}, 0006$.

Ces résultats ont confirmé une prévision de *Hertz* qui, en 1882, a résolu le problème d'élasticité consistant à déterminer la pression entre deux corps en contact et en a déduit une théorie du choc permettant d'évaluer τ (*HERTZ, Werke*, t. 1, p. 155-174).

On reviendra plus loin sur la limitation théorique de τ . Mais il convient de signaler à titre de curiosité ce résultat de calcul de Hertz : si deux sphères d'acier de la grosseur de la terre se mouvaient avec une vitesse relative de 10 mm/sec, la durée du choc atteindrait 27 heures.

4. Notion d'impulsion ou percussion. — Avant de présenter les résultats obtenus par les savants du XVII^e siècle, il convient, pour se dégager d'un fatras de discussions inevitables lors de premiers essais, de préciser la notion d'*impulsion*.

Supposons qu'une force F sollicite un élément matériel en agissant dans la direction de son déplacement et lui imprime une accélération γ à l'instant t . C'est le propre de la force d'être productrice d'accélération et l'accélération est l'accroissement algébrique de vitesse dans l'unité de temps; si la vitesse v à l'instant t est devenue $v + dv$ à

l'instant $t + dt$, dt étant infiniment petit, on a

$$\gamma = \frac{dv}{dt}.$$

Dans le cas où la force agissante est le poids P de l'élément, cette accélération de pesanteur ou de gravité est constante et a pour mesure

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

En vertu du principe fondamental de la dynamique, sur un même élément matériel, les forces actives sont proportionnelles aux accélérations qu'elles lui impriment

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{P}{g} = m;$$

le rapport constant m est la *masse* de l'élément.

On a donc la relation

$$(1) \quad m\gamma = F \quad \text{ou} \quad m dv = F dt.$$

Usons alors d'une représentation graphique. Portons en abscisses horizontales les valeurs du temps t et en ordonnées verticales celles de la force F , à des échelles convenues;

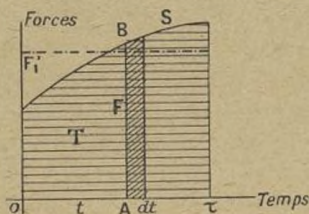


Fig. 7.

soient (fig. 7) $OA = t$ et $AB = F$. Quand le mobile décrit sa trajectoire, le point B dessine une courbe S . Or si nous

considérons les instants successifs t et $t + dt$, $F dt$ sera mesuré par l'aire infinitésimale dJ limitée par la courbe S , l'axe des temps et les ordonnées t et $t + dt$. Nous aurons donc

$$(2) \quad m dv = dJ.$$

Suivons le mobile depuis l'instant 0 où sa vitesse est V_0 , jusqu'à l'instant τ où sa vitesse est V . Décomposons l'intervalle de temps $(0, \tau)$ en éléments infinitésimaux pour chacun desquels nous écrirons l'équation (2). Ajoutons les égalités obtenues; nous obtiendrons au premier membre, au facteur m près, la variation totale $V - V_0$ de la vitesse, et au second membre l'aire totale J comprise entre l'axe des temps, la courbe S et les ordonnées $(0, \tau)$

$$m(V - V_0) = J.$$

Le produit mv s'appelle *quantité de mouvement* du point; le premier membre est ainsi la quantité de mouvement imprimée à l'élément matériel entre les instants 0 et τ .

Quant à J , si F était constant, l'on aurait $J = F\tau$; dans le cas contraire soit F_1 l'ordonnée moyenne du diagramme précédent, c'est-à-dire l'ordonnée d'une horizontale découpant un rectangle équivalent à l'aire J , en sorte que $J = F_1 \tau$. Nous aurons

$$m(V - V_0) = F_1 \tau.$$

F_1 , intensité moyenne de la force, relativement au temps, entre les instants 0 et τ , est une force constante dont l'effet définitif serait le même que celui de la force réelle, si elle agissait durant l'intervalle $(0, \tau)$. Ainsi la variation de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale au produit de la force moyenne par la durée de son action.

Nous n'avons rien supposé jusqu'ici sur la grandeur de τ , et ce résultat est tout à fait général. Admettons maintenant

que σ soit très court, de l'ordre des durées de choc. Le produit $J = F_1 \tau$ prend le nom d'*impulsion* ou de *percussion* quand elle a une valeur finie mesurée par la quantité de mouvement imprimée à la masse invariable de l'élément matériel.

La force vraie, variable avec le temps, est tantôt plus grande, tantôt plus petite que F_1 , en sorte que F_1 est une limite inférieure de la valeur maxima de la force vraie. Par suite pour une quantité de mouvement donnée à imprimer à un élément matériel donné, plus bref sera τ , plus considérables seront certaines des valeurs par lesquelles doit passer la force vraie F . Suivant un exemple classique, un obus de 75, tombant en chute libre sous la seule action de la pesanteur, acquerrait une vitesse de 530 m/sec au bout de $\frac{530}{9,81}$ ou 54 secondes; or il prend cette vitesse dans un canon en moins de $\frac{1}{100}$ de seconde; donc pendant une fraction de ce centième de seconde, la poussée des gaz de la combustion de la charge sur le culot de l'obus doit excéder 5400 fois le poids du projectile.

Ces résultats, qui paraissent évidents, ont été longs à découvrir et ont eu peine à supplanter la notion de force motrice à action instantanée. Il faut en venir au grand *Jean Bernoulli* et à son « Discours sur la communication du mouvement » — daté de 1724, qui a mérité l'éloge de l'Académie en 1726 alors que Mazière emportait le prix (voir à ce sujet l'éloge de Bernoulli par *d'Alembert* en 1748) — pour trouver des idées parfaitement exactes sur la nature du choc et par suite de l'impulsion. Nous lui emprunterons seulement cet aperçu fondamental : « Toute action se fait successivement et par éléments, quelque petite que paraisse la durée de l'action entière. Ainsi le choc de deux corps qui paraît commencer et finir dans le même instant, ne laisse pas d'être d'une durée qui, à proprement parler, a ses élé-

ments, je veux dire un nombre infini de parties infiniment petites. »

Le choc est ainsi ramené à l'action de forces grandes, mais finies, agissant pendant un temps court, mais fini.

5. Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

— Il convient de rappeler aussi la « Lex tertia » que Newton, dans ses « Principia mathematica Philosophiæ naturalis », a mise à la base de la Mécanique, tant céleste que physique.

« L'action est toujours égale à la réaction, c'est-à-dire que les actions mutuelles de deux corps sont toujours égales, mais dirigées en sens inverse. »

Newton observe des faits usuels venant à l'appui de ce principe. Par exemple, dit-il, tout ce qui tire ou presse est en même temps tiré ou pressé : si l'on soutient un poids à l'aide d'un fil; la main tire le poids par l'intermédiaire du fil, et réciproquement le poids tire la main; même chose si un cheval traîne une pierre attachée par un câble : autant le câble empêche le mouvement de l'un, autant il accélère le mouvement de l'autre. Puis, par une généralisation géniale, il en induit cette loi, que deux éléments matériels quelconques, quel que soit leur état de repos ou de mouvement, exercent l'un sur l'autre deux forces, égales et contraires. A cet égard, il convient de distinguer :

1^o Les *actions de contact* : soit M un élément matériel en contact avec un système S; on admet qu'à la force exercée sur M par une partie M' de S touchant M et assez petite pour être assimilée à un point matériel, correspond une force égale à la précédente, exercée par M sur M', portée par la même droite, mais en sens inverse;

2^o Les *actions à distance* : plus généralement, quand on considère un système matériel S et deux parties très petites du système, assimilables à des points matériels M et M', on admet que l'action mutuelle des points M et M' se tra-

duit par deux forces placées sur la droite MM' , appliquées l'une en M , l'autre en M' , égales en intensité, mais de directions opposées.

Les forces traduisant l'action mutuelle de deux parties du système, contiguës ou éloignées, sont dites *intérieures au système*; les forces intérieures pour un système de points matériels donné, sont donc deux à deux égales, portées par la même droite et opposées. En Mécanique appliquée, ces forces intérieures se réduisent généralement aux actions de contact.

6. **Théorème de l'énergie.** — On a enfin à utiliser, dans l'étude du choc, le théorème de l'énergie dont voici un aperçu sommaire :

Reprenons l'équation qui régit le mouvement d'un point matériel

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

où F est la force active suivant le déplacement du point.

Si s est le chemin décrit par le mobile sur sa trajectoire

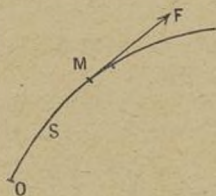


Fig. 8.

à partir d'un point fixe O (fig. 8), on a

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{ou} \quad v dt = ds,$$

ds étant le chemin élémentaire correspondant à l'accroissement infiniment petit dt du temps t . Multiplions membre à membre ces deux égalités; il vient

$$mv dv = F ds.$$

On appelle *énergie cinétique* (ou demi-force vive) du mobile à l'instant t l'expression

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2.$$

A l'instant $t + dt$, elle devient

$$\mathcal{E} + d\mathcal{E} = \frac{1}{2} m (v + dv)^2;$$

d'où

$$d\mathcal{E} = m v dv + \frac{1}{2} m \overline{dv}^2,$$

où le second terme est négligeable vis-à-vis du premier. Ainsi

$$d\mathcal{E} = F ds.$$

Nous allons employer une représentation graphique analogue à celle de tout à l'heure, à cela près que nous porterons en abscisses horizontales les *chemins parcourus* s . Le diagramme obtenu S' sera tout différent de S ; mais $F ds$ sera figuré par l'aire $d\mathfrak{E}$ de la bande limitée par la courbe S' , l'axe des chemins et les ordonnées s et $s + ds$.

En raisonnant comme plus haut, et en suivant le mobile depuis la position où $s = 0$, et où la vitesse est V_0 et l'énergie cinétique \mathcal{E}_0 , jusqu'à la position où $s = \sigma$, et où la vitesse est V et l'énergie cinétique \mathcal{E} (fig. 9), nous obtenons

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \mathfrak{E} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} m (V^2 - V_0^2) = \mathfrak{E}.$$

\mathfrak{E} , aire limitée par S' , l'axe des s et les ordonnées $(0, \sigma)$ s'appelle le *travail* de la force F sur le chemin σ .

Si F était constant, on aurait

$$\mathfrak{E} = F \cdot \sigma;$$

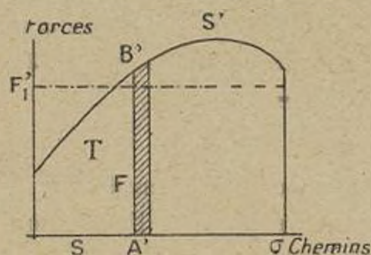


Fig. 9.

dans le cas contraire, on peut déterminer une ordonnée moyenne F'_1 , qui sera distincte de F_1 , telle que

$$\mathfrak{E} = F'_1 \cdot \sigma.$$

L'égalité précédente s'écrit

$$\frac{1}{2} m V^2 \text{ ou } \mathcal{E} - \mathfrak{E} = \frac{1}{2} m V_0^2 \text{ ou } \mathcal{E}_0,$$

et s'énonce ainsi : *Dans le déplacement d'un élément matériel, la différence entre son énergie cinétique et le travail accompli par la force qui le sollicite est constante : elle garde la même valeur pour toutes les positions de l'élément.*

Si l'on considère un ensemble de points matériels et qu'on en définisse l'énergie cinétique et le travail comme sommes des quantités correspondantes relatives aux éléments du système, on obtient l'extension du théorème de l'énergie à un système matériel quelconque.

Nous écrirons ce résultat sous la forme

$$\sum \mathcal{E} - \sum \mathfrak{E} = \text{const.};$$

c'est à une extension métaphysique de ce résultat que l'on donne le nom de *principe de la conservation de l'énergie*.

Si nous donnons à la quantité — Σ le nom d'énergie potentielle du système, l'égalité obtenue peut s'exprimer ainsi : *dans le déplacement d'un système matériel quelconque, la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle conserve une valeur constante.*

7. Analyse du choc. — Considérons deux corps en mouvement l'un par rapport à l'autre, qui viennent à se heurter. La durée très courte du choc qui se produit se partage en trois périodes distinctes. Dans la première, les corps se déforment, se compriment ou se refoulent. Dans la seconde, leur déformation atteint et garde son maximum, les deux corps ont alors acquis la même vitesse en leur point de contact. Dans la troisième période, les corps tendent plus ou moins à revenir à leur forme primitive, et de plus en plus ils tendent à se séparer.

Pendant la première période de collision, les intervalles des molécules de chaque corps diminuent de grandeur sous la pression de l'autre corps, tout couple de molécules rapprochées se comporte comme un ressort qui se bande. Pendant la troisième période, ces ressorts se détendent plus ou moins en repoussant le corps dont ils ne font pas partie, si toutefois l'intensité de la compression initiale n'a pas dépassé la limite de résistance de la matière et n'en a pas provoqué la désagrégation aux environs du point de choc (déformation permanente, glissement, écoulement de la matière, échauffement des parties intéressées).

En fait, cette analyse est un peu rudimentaire. Les efforts superficiels de compression se propagent à travers la matière, la pénètrent en quelque sorte en la déformant de proche en proche — telle une poussée à travers une foule — et se transmettent avec la vitesse de propagation du son dans la matière. Par suite l'instant où les éléments en présence au

point de choc ont la même vitesse ne limite pas nécessairement la période de compression : si les deux corps ne sont pas identiques, tels deux boules pareilles se heurtant directement, la période de compression continuera pour le plus gros alors que la période de détente sera commencée pour le plus petit.

Si les premiers physiciens qui ont abordé la théorie du choc avaient envisagé les choses en leur complexité réelle, ils n'auraient vraisemblablement abouti à rien. C'est un trait de génie d'avoir aperçu l'hypothèse simplificatrice qui pouvait donner une première approximation. La théorie du grand mécanicien hollandais Christian Huyghens — pensionné par Louis XIV — revient à supposer les surfaces en regard assez convexes, ou les couches contiguës des deux corps assez légères et flexibles, pour que les déformations notables produites par le choc restent localisées à deux fractions de ces corps très petites, c'est-à-dire de masses insignifiantes comparativement au reste; en sorte que ces déformations, de nature statique, ne fassent varier l'action totale des deux corps qu'avec le rapprochement de leurs centres de gravité. Elle est suffisante pour les *légers* chocs, où l'expérience confirme que les forces de ressort n'entrent guère en jeu que dans les parties des deux corps momentanément contiguës.

Il n'en va plus de même pour les *chocs à grande vitesse*, tels ceux des projectiles contre les plaques de blindage. Il est alors indispensable de faire intervenir la propagation des ébranlements à travers toute la masse des corps. *Barré de Saint-Venant*, puis MM. *Boussinesq* et *Flamanl*, plus récemment le comte de *Maupeou d'Ableiges* ont attaqué ce difficile problème; des obstacles analytiques énormes n'ont guère permis d'aboutir que dans le cas du choc longitudinal de deux prismes homogènes et de sections égales, à bases parfaitement équarries. Cette théorie a été heureu-

sement confrontée avec la réalité par des expériences soignées du directeur du Génie Maritime de Maupeou ⁽¹⁾.

8. Propagation des compressions de choc. — Les mécaniciens du XVII^e siècle s'étaient bien rendu compte à la fois de la grandeur des forces développées pendant le choc et de la localisation de leurs effets, sans s'être expliqué nettement cette dernière.

Voici un certain nombre d'observations empruntées à Descartes, au P. Mersenne, à de Lahire, etc., et qui concernent des cas où le choc produit la rupture ou désagrégation de l'un des corps au point d'impact, rupture qui empêche la transmission ultérieure des compressions moléculaires.

Premier exemple. — Tout d'abord citons un fait connu des bateleurs de tout temps. Si l'on fait reposer un bâton, un manche à balai sur deux appuis fragiles tels que les bords de deux verres, en frappant un très grand coup avec un marteau vers le milieu du bâton, on rompra celui-ci sans que les verres se cassent.

Deuxième exemple. — De même une tige de plante peut être coupée avec une baguette lancée transversalement avec rapidité.

Troisième exemple. — Pour rompre l'os d'une éclanche de mouton, un boucher le mettra seulement dans la main, ou un cuisinier sur une serviette, de manière à le soutenir par les extrémités; puis, avec le dos d'un couteau, il donnera un coup brusque assez fort sur le milieu de l'os, celui-ci se cassera sans faire aucune impression sur la main, plus aisément et plus nettement que s'il était sur une table ou un étal. Si le coup n'est que médiocre, ajoute le P. Mersenne, l'os ne se cassera pas et la main portera le coup.

⁽¹⁾ Voir l'Appendice.

Quatrième exemple. — Soit une pile de rondelles, de pièces de monnaie ou de pions d'un jeu de dames. On peut chasser une ou plusieurs de celles qui sont dans le bas, sans renverser les autres, en agissant brusquement dans le sens horizontal avec le bord d'une règle plate.

On observera que ces exemples prouvent simplement ceci : dans une tige choquée transversalement, la transmission de l'effort met moins de temps pour se propager dans le sens de la percussion, où la matière est peu épaisse, que dans la direction normale au coup, où la matière ne peut être atteinte que tardivement dans ses parties éloignées.

Dans les exemples suivants, on aura une plaque très mince choquée transversalement, la pression se transmettra dans ce sens en provoquant la rupture, avant que la transmission se soit faite latéralement vers les appuis.

Cinquième exemple. — Une balle de fusil fait dans une lame de verre un trou rond, non étoilé.

Sixième exemple. — La vitesse du corps choquant peut d'ailleurs en augmenter la rigidité. Ainsi une chandelle, un cylindre de suif, lancé de près avec une arme à feu, traversera une planche mince fixe de bois blanc sans que sa forme soit notablement altérée. Certes la pointe de la chandelle est un peu déformée; mais cette déformation n'a pas le temps de se propager dans le sens longitudinal de la chandelle qu'elle a achevé de le faire à travers la planchette et l'a localement désagrégée.

Septième exemple. — Une boule de verre suspendue à un fil peut être brisée d'un coup de marteau dirigé horizontalement sans que le fil participe à l'impulsion.

Huitième exemple. — Voici maintenant une expérience qui ne concerne pas le choc, mais au contraire une traction brusque, elle montre aussi l'influence du temps de communication des efforts. Prenons deux bouts de ficelle

dans une même pelote; accrochons-en un à un étau fixe, suspendons-lui une boule, et attachons l'autre bout à celle-ci. Si nous tirons d'un coup sec sur ce dernier bout, nous le casserons; si nous tirons lentement, peu à peu, ce sera le brin supérieur qui se brisera, il supporte en effet notre effort, qui lui est transmis par la boule, plus le poids de la boule.

Neuvième exemple. — Terminons par un exemple physiologique qui montre bien la propagation de la compression de choc à travers l'un ou l'autre corps. Si nous faisons un pas pour descendre un escalier et si soudainement nous plaçons le pied sur un sol horizontal, il se produit un choc, des compressions appréciables se manifestent dans toute notre charpente osseuse, et non pas seulement dans notre pied.

9. *Étendue de la zone de répartition d'un choc.* — On peut se rendre compte expérimentalement de l'étendue de la zone d'aplatissement ou de contact de deux corps qui se heurtent en un point géométrique. Laissons tomber une bille d'ivoire, d'acier ou autre, sur une plaque de métal, telle qu'un marbre à tracer en fonte, ou sur une pierre plate, que nous aurons très légèrement huilée. Nous constaterons qu'en rebondissant, la bille laisse une trace circulaire beaucoup plus large que celle qu'elle y marque par capillarité quand on ne fait que la poser légèrement, d'autant plus large que la bille est plus grosse et qu'elle tombe de plus haut. Rozé préférerait enfumer préalablement la plaque plutôt que de l'huiler. La connaissance de l'aire, aisément mesurable, de cette zone pourra servir à déterminer la pression unitaire de contact correspondant à l'effort moyen du choc. C'est une mesure de ce genre que l'on effectue dans l'essai de dureté des métaux à la bille de Brinell.

CHAPITRE II.

CHOC DIRECT.

1. Choc direct de deux solides. — 2. Cas des corps mous. — 3. Cas des corps parfaitement élastiques. — 4. Cas des corps naturels. — 5. Construction de Wren. — 6. Applications : 1^o Battage des pilots de fonction; 2^o Clou et marteau; 3^o Marteaux-pilons.

1. Choc direct de deux solides. — La théorie des chocs, considérée dans toute sa généralité, présente d'assez grandes difficultés; nous nous bornons ici à des cas particuliers assez simples pour être accessibles aux mathématiques élémentaires. Nous envisagerons d'abord le cas où le choc est *direct*, c'est-à-dire où les vitesses initiales des éléments matériels au point d'impact sont dirigées suivant la normale commune aux surfaces de contact et où cette normale passe par le centre de gravité de chacun des deux corps. C'est notamment le cas de deux corps de révolution homogènes animés chacun d'un mouvement de translation suivant son axe, les axes étant disposés suivant la même droite, ou plus généralement le cas de deux corps admettant la normale commune au point de choc comme axe de symétrie de masses. Il est clair qu'après le choc les deux corps posséderont encore un mouvement de translation rectiligne parallèle à celui qui existait auparavant. La question est encore simple lorsque les corps qui se heurtent, sont assujettis à des liaisons géométriques déterminées ne leur laissant qu'un degré de liberté comme cela a lieu dans les machines.

Lorsque le choc n'est pas direct, les corps fussent-ils polis, le problème se complique. Mais il y a plus s'ils ne le sont pas parfaitement, le glissement des deux corps à l'instant du choc engendre une percussion de frottement ou percussion tangentielle dont l'introduction est délicate tant au point de vue physique qu'au point de vue analytique. Ce n'est pas à dire qu'on ne puisse s'en tirer. Ainsi le frottement joue un rôle essentiel dans la *théorie des effets du jeu de billard*, mais dès 1835 *Coriolis* l'a élucidé dans un livre célèbre dont *Henry Résal* a donné, en 1883, un commentaire simplificatif.

Soient donc deux ovoïdes de masses m et m' , animés suivant leur axe commun de vitesses v et v' avant le choc, vitesses que nous supposerons de même sens pour fixer les idées; soit $v > v'$, en sorte que ce soit le premier ovoïde qui viendra choquer l'autre (fig. 10). La question est de

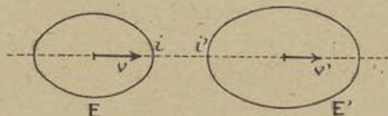


Fig. 10.

déterminer les valeurs u et u' que prennent les vitesses des deux corps après le choc, et, à cet effet, de déterminer deux relations algébriques entre ces quantités.

L'une d'elles sera donnée immédiatement par le théorème de l'impulsion. Envisageons l'ensemble des molécules qui forment les deux corps pendant la durée τ du choc, et ajoutons les équations fournies pour chacune des molécules par ce théorème. Comme tous les éléments de chaque corps ont les mêmes vitesses, la somme des variations des quantités de mouvement sera

$$m(u - v) + m'(u' - v').$$

En réalité, après leur séparation, les corps ne reprennent pas immédiatement une forme rigide, les molécules vibrent encore autour de leurs positions relatives primitives; mais on néglige la quantité de mouvement correspondant à ces vitesses vibratoires, nulles en moyenne, insignifiantes en regard des vitesses visibles d'ensemble des solides.

Passons aux impulsions des forces actives. Celles des forces extérieures finies, telles que la pesanteur, sont négligeables, ces forces étant extrêmement petites vis-à-vis des forces moléculaires. La pesanteur serait d'ailleurs sensiblement neutralisée si les corps étaient suspendus en leur centre de masse à l'extrémité inférieure de longs fils suspendus à deux points fixes. Quant aux forces moléculaires de contact ou à distance, comme elles sont à tout instant par couples égales et directement opposées, les termes $F_1 \tau$ qu'elles fourniront se détruiront deux à deux dans la sommation. Ainsi nous aurons au total

$$\sum \tilde{v} = 0.$$

Nous obtenons donc la relation

$$(I) \quad mu + m'u' = mv + m'v'$$

sur laquelle il n'y a pas de contestation.

La nature des corps en présence n'est pas encore intervenue, et l'on sait d'expérience journalière qu'elle joue un rôle : une balle de caoutchouc lancée contre un mur rebondit et retombe dans notre main, tandis qu'une boulette d'argile ou de terre glaise s'aplatit et reste appliquée au mur ou bien tombe à son pied.

Les fondateurs de la théorie ont envisagé deux cas extrêmes, idéaux, celui des corps parfaitement mous et celui des corps à ressort parfait.

2. Cas des corps mous. — Deux corps sont dits parrai-

tement mous ou dénués d'élasticité quand ils gardent la vitesse commune qu'ils ont acquise à la fin de la première période du choc, à l'époque de leur plus grande déformation pour cheminer ensemble. Dans ce cas, la deuxième équation est

$$(II) \quad u = u' \quad \text{ou} \quad u - u' = 0.$$

Alors on a

$$u = u' = \frac{mv + m'v'}{m + m'} = v + \frac{m'}{m + m'}(v' - v) = v' + \frac{m}{m + m'}(v - v').$$

On voit d'après cela que la vitesse du corps choquant a diminué, tandis que celle du corps choqué a augmenté.

Au cas où l'un des corps, E' par exemple, est en repos avant le choc, on a pour leur vitesse commune après le choc

$$(II \text{ bis}) \quad u = \frac{mv}{m + m'}.$$

Si les solides E et E' allaient en sens contraire, il suffirait de changer dans nos formules le signe de la vitesse du corps choqué.

La diminution éprouvée pendant le choc par l'énergie cinétique totale des deux corps a pour expression

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ mv^2 + m'v'^2 - mu^2 - m'u'^2 \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ mv^2 + m'v'^2 - \frac{(mv + m'v')^2}{m + m'} \right\} = \frac{1}{2} \frac{mm'}{m + m'} (v - v')^2. \end{aligned}$$

Cette variation est égale à la somme des travaux des forces moléculaires qui ont produit : 1° une déformation permanente des deux corps, tant par altération de forme que par changement de constitution; 2° une élévation de température par transformation de travail en chaleur. Hirn s'est même servi de ce fait, en se plaçant dans le cas

où la première partie était insignifiante, pour déterminer l'équivalent mécanique de la chaleur.

On doit à *Lazare Carnot* (*Essai sur les machines en général*, 1782, p. 48) une expression remarquable de cette perte d'énergie cinétique du système. Comme on a

$$v - u = \frac{m'}{m + m'}(v - v'), \quad v' - u = \frac{m}{m + m'}(v' - v),$$

on constate immédiatement que l'on a aussi

$$\frac{1}{2} [m(v - u)^2 + m'(v' - u)^2] = \frac{1}{2} \frac{mm'}{m + m'}(v - v')^2.$$

Donc : *La perte d'énergie cinétique dans le choc de deux corps mous est égale à l'énergie cinétique qu'aurait le système si chaque corps possédait la vitesse que le choc lui a fait perdre.* Ce théorème a d'ailleurs une plus grande généralité.

Si les deux corps se mouvaient en sens contraire, la perte d'énergie cinétique serait

$$\frac{1}{2} \frac{mm'}{m + m'}(v + v')^2;$$

elle serait supérieure à la précédente; par suite on se rend compte — par la considération de ce cas limite — qu'il convient, dans la construction des machines, d'éviter que les corps se choquent inutilement avec des vitesses contraires.

Si le corps E' est au repos avant le choc, la même perte s'écrit

$$\frac{m'}{m + m'} \times \frac{1}{2} mv^2;$$

elle est égale à la fraction de l'énergie cinétique initiale représentée par le quotient de la masse choquée et de la somme des deux masses. Elle est petite si la masse du corps choqué est petite vis-à-vis de celle du corps choquant, et éventuellement négligeable; elle approche de l'unité si la masse du

corps choquant est petite vis-à-vis de celle du corps en repos.

3. Cas des corps parfaitement élastiques. — Pour Huyghens et Newton, les corps à ressort parfait sont ceux dont les déformations ne persistent pas et où les molécules reviennent après le choc à leurs positions relatives premières. En fait, pour peu que le choc soit sensible, les déformations produites ne s'effacent pas complètement; la collision laisse une trace indélébile, dont on pourrait dire avec le poète : « La mer y passerait sans laver la souillure. » Admettons cependant comme cas idéal extrême que les deux corps déformés reviennent chacun graduellement pendant la troisième période du choc à leur forme primitive. Les forces moléculaires mises en jeu par la compression pendant la première période effectuent un travail qui sera égal et de signe contraire à celui des forces qui agissent pendant la période de détente, les forces repassent par les mêmes valeurs et les déplacements des points d'application se reproduisent en sens inverse, avec les mêmes valeurs.

Nous aurons donc

$$S^{\mathcal{E}} = S^{\mathcal{E}_0},$$

ou

$$mu^2 + m'u'^2 = mv^2 + m'v'^2,$$

ou encore

$$m(v^2 - u^2) = m'(u'^2 - v'^2).$$

Comme nous avons d'autre part, d'après (I),

$$m(v - u) = m'(u' - v'),$$

il vient, en divisant membre à membre,

$$v + u = u' + v'$$

ou

$$(III) \quad u - u' = -(v - v').$$

En langage ordinaire, cette relation revient à dire que la vitesse relative des deux corps est échangée de sens par le choc, mais non de valeur absolue.

Les équations (I) et (III) donnent

$$u = \frac{(m - m')v + 2m'v'}{m + m'} = v + \frac{2m'(v' - v)}{m + m'},$$

$$u' = \frac{(m' - m)v' + 2mv}{m + m'} = v' + \frac{2m(v - v')}{m + m'}.$$

Nous insisterons sur deux cas particuliers :

1^o Les deux corps ont même masse : $m = m'$.

Il vient alors

$$u = v' \quad \text{et} \quad u' = v.$$

Il y a échange des vitesses : le corps E, qui vient choquer le corps E' d'égale masse, prend sa vitesse et lui communique la sienne propre tout entière. C'est ce qu'on vérifie expérimentalement à l'aide du double pendule de Mariotte à boules d'ivoire (fig. 11), dont l'une des boules E' est au

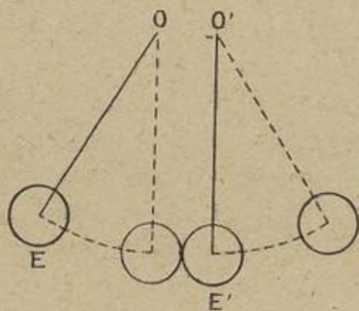


Fig. 11.

repos et dont l'autre E est écartée et abandonnée à la pesanteur. Au choc, E devient immobile, E' oscille en sens opposé, revient sur son chemin, choque E, et ainsi de suite. On a ainsi une série de mouvements oscillatoires des deux pen-

dules, chacun effectuant deux demi-oscillations, l'une montante, l'autre descendante, de chaque côté de la verticale moyenne de l'appareil.

2° *L'un des corps E' est immobile et a une masse m' très grande par rapport à la masse m de l'autre.*

On a d'abord, puisque $v' = 0$,

$$u = \frac{m - m'}{m + m'} v, \quad |u' = \frac{2m}{m + m'} v,$$

et ensuite, puisque m' est extrêmement grand par rapport à m , sensiblement

$$u = -v, \quad u' = 0.$$

Ainsi, dans le cas où un corps élastique vient choquer un autre corps élastique fixe de masse infiniment grande, le corps choqué ne prend point de vitesse, il reste immobile, et la vitesse du corps choquant change simplement de signe en conservant sa valeur, ce qu'on exprime en disant qu'il y a *réflexion* du corps choquant sur le corps choqué.

4. **Cas des corps naturels.** — Les corps naturels ne sont ni mous ni à ressort parfait; la perte d'énergie cinétique par le choc ne saurait être nulle, et elle est inférieure à l'expression de Carnot qui en est une limite haute.

Les molécules ne reprennent pas complètement leurs positions initiales, et elles n'atteignent leurs nouvelles positions d'équilibre relatif qu'après des vibrations qui ont pour manifestation sensible la production de sons et de bruits et l'échauffement des deux corps. C'est d'ailleurs d'Alembert qui a le premier insisté sur le fait que les corps se quittent avant d'être complètement revenus à leur première forme. Dans le dernier cas envisagé d'un corps parfaitement élastique frappant normalement un obstacle fixe, on n'a qu'à laisser tomber verticalement une bille d'ivoire sur un plan

horizontal de marbre, la bille ne remonte pas en rebondissant jusqu'à son point de départ, comme l'indique la théorie précédente.

Dans ces conditions, Newton a admis que la vitesse réfléchie n'était pas égale à la vitesse incidente changée de signe, mais seulement à une fraction e de celle-ci. Il a posé

$$(IV) \quad u - u' = -e(v - v'),$$

et il a demandé à l'expérience des indications sur ce coefficient e , qu'il a qualifié de *coefficient de restitution*, il a trouvé que ce coefficient e dépendait uniquement de la nature physique des deux corps en présence, c'est-à-dire des substances dont ils sont faits, et non des masses et des vitesses relatives. Le cas des corps mous correspond à $e = 0$, et celui des corps à ressort parfait à $e = 1$.

La résolution des relations (I) et (IV) donne

$$u = \frac{(m - em')v + m'(1 + e)v'}{m + m'} = v + \frac{m'(1 + e)(v' - v)}{m + m'},$$

$$u' = \frac{(m' - em)v' + m(1 + e)v}{m + m'} = v' + \frac{m(1 + e)(v - v')}{m + m'}.$$

La perte d'énergie cinétique par le choc a pour expression

$$\frac{1}{2} \{ m(v^2 - u^2) + m'(v'^2 - u'^2) \}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(1 + e)mm'(v - v')}{m + m'} \{ v + u - v' - u' \},$$

ou, en observant que

$$v - v' + u - u' = 2(v - v') - \frac{(m + m')(v - v')(1 + e)}{m + m'}$$

$$= (v - v')(1 - e) :$$

$$(1 - e^2) \frac{1}{2} \frac{mm'}{m + m'} (v - v')^2.$$

Nous obtenons la valeur trouvée pour le corps mou, multipliée par le facteur $(1 - e^2)$.

Hodgkinson a fait une série d'expériences dont les résultats concordent en général avec ceux de *Newton* (*Report of British Association*, 1834); il a donné les valeurs suivantes de e :

Balles de fonte.....	0,66
» d'ivoire.....	0,81
» de plomb.....	0,20
Bronze et ivoire.....	0,77
Fonte et verre.....	0,91
Pierre et bois.....	0,62

Il a toutefois observé que si la vitesse relative initiale $|\nu' - \nu|$ est très grande, le coefficient de restitution est moindre que si cette vitesse est modérée.

Vincent, dans les *Cambridge Philosophical Society Proceedings*, vol. X, p. 332, a indiqué que e est de la forme

$$e = e_0 - a(\nu' - \nu),$$

e_0 et a étant des constantes qu'il a déterminées.

Un procédé simple de mesure consiste à abandonner sans vitesse initiale une bille à une hauteur h au-dessus d'un plan horizontal limitant une enclume indéfinie. On a

$$\nu' = \sqrt{2gh}, \quad u' = -e\sqrt{2gh} = -\sqrt{2ge^2h}.$$

La sphère rebondit à la hauteur $e^2 h$. Si on la laisse retomber une seconde fois, elle remontera à la hauteur $e^4 h$, etc. Ainsi les hauteurs successives d'ascension décroissent en progression géométrique de raison e^2 , conformément d'ailleurs à une observation de *Léonard de Vinci*.

Pour une bille de billard en ivoire, tombant sur une plaque horizontale de marbre, le relèvement est les $\frac{2}{3}$ de la hauteur de chute

$$e^2 = \frac{2}{3}, \quad e = 0,81.$$

Une bille d'acier trempé, tombant sur une enclume du même métal, rebondit aux $\frac{9}{10}$

$$e^2 = \frac{9}{10}, \quad e = 0,95.$$

Pour une bille et une bande de billard, on aurait d'après Rozé, ancien conservateur des collections de Mécanique à l'École Polytechnique,

$$e = 0,27 \text{ à } 0,29.$$

On doit à cet habile expérimentateur une observation intéressante pour le cas des petites vitesses; en faisant tomber une bille d'ivoire d'une hauteur de 0^m, 10 sur une plaque d'état superficiel variable, il a trouvé les résultats suivants :

Plaque de marbre polie nature	0,85
» » et enfumée.....	0,80
» recouverte de papier enfumé...	0,65
Madrier recouvert de papier enfumé	0,63

Le rapprochement de ces chiffres semble indiquer que le retournement de la vitesse normale au plan fixe est principalement dû, dans le cas des petites vitesses, à une zone mince d'une certaine nature qui recouvre un massif d'une autre nature indifférente.

5. Construction de Wren. — Wren a représenté les résultats du choc direct des corps naturels par une construction très simple et très élégante.

Figurons, par rapport à deux axes rectangulaires (*fig. 12*), deux points P et Q de coordonnées respectives (v, v') et (u, u'). La relation (I) ou

$$mu + m'u' = mv + m'v',$$

soit

$$\frac{u' - v'}{u - v} = - \frac{m}{m'},$$

montre que la pente de la droite PQ est connue. Cette droite PQ peut être construite quand on connaît l'état initial des vitesses du système, c'est-à-dire le point P, et le rapport des masses des deux corps.

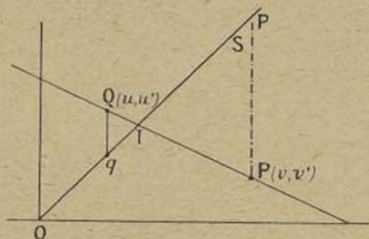


Fig. 12.

Soient OS la bissectrice des axes de coordonnées, I, p, q ses points de rencontre respectifs avec la droite PQ, avec les ordonnées des points P et Q. On a

$$pP = v - v', \quad qQ = u' - u.$$

La seconde relation (IV) donne

$$qQ = epP \quad \text{et, par suite,} \quad \overline{IQ} = e\overline{PI}.$$

Donc on déduira le point Q du point P en portant

$$\overline{IQ} = e\overline{PI}.$$

Ainsi connaissant le point P représentant l'état des vitesses avant le choc, on sait construire le point Q représentant leur état après le choc.

Exemple. — Deux corps de poids 1^{kg} et 3^{kg} se heurtent avec des vitesses opposées de 0^m, 50 et 0^m, 25 par seconde. Leur coefficient de restitution est $\frac{3}{4}$. Trouver leur vitesse après le choc.

Unité : m/sec,

$$v = \frac{1}{2}, \quad v' = -\frac{1}{4}, \quad \frac{m}{m'} = \frac{1}{3}, \quad e = \frac{3}{4}.$$

On construit (fig. 13) : 1° P; 2° la droite issue de P et

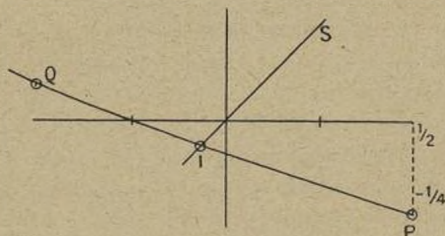


Fig. 13.

de pente $-\frac{1}{3}$; 3° la bissectrice des axes et le point I; 4° on porte

$$IQ = \frac{3}{4}PI, \quad \text{d'où} \quad Q.$$

Un calcul direct par application des formules donne

$$u = -\frac{31}{32}, \quad u' = \frac{5}{64}.$$

6. Applications. — 1° *Battage des pilots de fondation.*

— Quand, pour exécuter un travail mécanique, la pression ou l'effort direct que l'on peut exercer est inférieur à la résistance à vaincre, on a recours au choc.

C'est ainsi que l'on enfonce dans le sol les pilots ou pieux destinés à servir de support aux fondations des constructions que l'on doit établir sur un sol peu résistant.

Un *pieu de fondation* comporte un corps cylindrique en bois, terminé inférieurement par un sabot pointu en fer et consolidé à la tête par un collier en fer, de manière que la violence du choc ne déforme pas rapidement la zone d'impact.

Le pieu, placé verticalement, reçoit sur sa tête le choc d'une masse de fonte appelée béliet ou *mouton*. Le mouton est actionné par une machinerie dite *sonnette*, portée par un appareil de charpente analogue à une chèvre, et dont la force motrice est fournie par un treuil à bras, à vapeur ou électrique. A la rigueur, pour commencer le battage ou pour enfoncer des pieux dans un terrain peu résistant, on peut employer une simple tiraude qui permet de donner en peu de temps un grand nombre de coups, mais de faible hauteur de chute. Pour obtenir une puissance plus grande, on soulève au treuil le mouton, et dès que celui-ci est parvenu à la hauteur voulue, il est détaché de la corde qui l'a soulevé au moyen d'un *déclat* à main ou automatique.

On arrive ainsi à faire tomber un poids P d'une hauteur H sur la tête d'un pilot de poids P' déjà engagé dans le sol. Il s'agit d'analyser l'effet qui va résulter de ce choc.

L'observation montre que, si le pieu est assez long et si la résistance du sol n'est pas excessive, le mouton ne quitte pas le pieu immédiatement après le choc; il l'accompagne un instant dans son cheminement, en sorte qu'on peut se considérer dans le cas des corps mous.

Comme ici nous avons

$$v = \sqrt{2gH}, \quad v' = 0,$$

la vitesse commune u du mouton et du pieu est définie par la relation

$$\frac{P + P'}{g} u = \frac{P}{g} \sqrt{2gH};$$

d'où

$$u = \frac{P}{P + P'} \sqrt{2gH}.$$

Soient R la résistance *effective* moyenne du sol pendant l'enfoncement, c'est-à-dire sa résistance totale moyenne moins les poids du pieu et du mouton; et h le chemin que

parcourt le pilot par coup. Le théorème de l'énergie donne, le système étant à vitesse nulle après le choc,

$$\frac{1}{2} \frac{P + P'}{g} u^2 = R h$$

ou

$$R h = \frac{P^2 H}{P + P'}.$$

Cette relation fera connaître R ou h suivant qu'on a mesuré h ou que l'on connaît R par des expériences antérieures. On bat en général les pieux jusqu'à ce que R atteigne de 1^{kg}, 4 à 2^{kg}, 1 par millimètre carré de l'aire de la surface s de la tête.

En fait, il y a un travail de compression du pieu dont *Rankine* estime ainsi une valeur approchée. Soit F la pression qui s'exerce à un instant quelconque entre le pieu et le mouton; F , d'abord nulle, augmente à mesure que le pieu se comprime pour devenir finalement égale à R ; à ce moment la compression du pieu cesse de croître, il commence à pénétrer dans le sol et continue jusqu'à l'enfoncement h . La valeur moyenne de F est $\frac{R}{2}$. Le déplacement de son point d'application est le raccourcissement du pieu dû à sa valeur maximum, c'est-à-dire $\frac{R L}{E S}$, E étant le module d'élasticité du pieu et L la longueur d'un poteau qui, s'il était uniformément comprimé sur toute sa longueur, se raccourcirait autant que le pieu. Le pieu étant retenu en grande partie par le frottement qui s'exerce sur ses parois, *Rankine* prend pour L la moitié de la longueur l de ce pieu. Le travail absorbé par la compression du pieu serait donc $\frac{R^2 l}{4 E s}$.

La valeur de R serait donc donnée, pour h mesuré, par l'équation du deuxième degré

$$R h + \frac{R^2 l}{4 E s} = \frac{P^2 H}{P + P'}.$$

On appelle *rendement* r le rapport du travail utile, c'est-à-dire du travail de pénétration dans le sol Rh , au travail dépensé, c'est-à-dire au travail employé pour élever le mouton de la hauteur de chute H , soit PH . Ainsi

$$r = \frac{Rh}{PH}.$$

Si l'on s'en tient à la première approximation, il vient

$$r = \frac{P}{P + P'} = \frac{1}{1 + \frac{P'}{P}}.$$

Cette fraction est d'autant plus grande que $\frac{P'}{P}$ sera petit, c'est-à-dire que P sera grand par rapport à P' , il y a donc intérêt, pour un même travail moteur, à prendre un mouton aussi lourd que possible, quitte à réduire, la hauteur de chute.

Dans la réalité, le mouton se sépare du pieu, retombe sur lui, rebondit à nouveau, et donne lieu à une série de chocs rapidement amortis. Toutefois le premier choc est seul assez intense pour vaincre la résistance du sol.

Dans ces conditions, les formules qui donnent les vitesses aussitôt le choc produit sont

$$u = v - \frac{P'(1+e)v}{P+P'}, \quad u' = \frac{P(1+e)v}{P+P'}.$$

On aurait alors, le pieu descendant seul,

$$Rh = \frac{1}{2} \frac{P'}{g} u'^2 = (1+e)^2 \frac{P^2 P' H}{(P+P')^2}.$$

L'expression du rendement deviendrait

$$r = (1+e)^2 \frac{PP'}{(P+P')^2}.$$

Cette expression est d'autant plus grande que $\frac{P}{P'} + \frac{P'}{P}$ est plus petit; comme le produit des deux termes positifs

est constant, le minimum a lieu pour leur égalité, c'est-à-dire pour $P = P'$.

Le maximum du rendement serait $\frac{(1+e)^2}{4}$, et, pour bois et fonte ($e = 0,6$), serait 0,64 environ.

2° *Clou et marteau.* — Les considérations précédentes peuvent s'appliquer au choc d'un marteau sur un objet quelconque.

Si l'on veut enfoncer un clou dans du bois, sans le courber, on est en présence du même problème : il faut frapper le clou à petits coups d'un gros marteau, comme l'indique l'expérience.

Mais si le but à atteindre est une déformation ou une rupture du corps choqué, comme dans le rivetage à main ou dans le cassage des pierres pour l'entretien des routes, il en va autrement. Le travail de déplacement (ébranlement de l'établi où est monté l'étau ou l'enclume, projection des débris des pierres cassées) est cette fois le travail perdu. Le travail utilisé est le travail moléculaire, soit

$$(1-e^2) \frac{mm'}{m+m'} v^2 \quad \text{ou} \quad 2(1-e^2) \frac{PP'H}{P+P'},$$

et le rendement a pour expression

$$r_1 = 2(1-e^2) \frac{P'}{P+P'}.$$

Ce rendement est d'autant plus grand que $\frac{P}{P'}$ sera plus petit; on prendra donc un marteau relativement léger auquel on imprimera une grande vitesse en le montant au bout d'un manche de bois élastique assez long.

3° *Marteaux-pilons.* — L'industrie métallurgique a longtemps employé des marteaux mobiles autour d'un axe horizontal A, actionnés par des cames montées sur un arbre horizontal B, lesquelles produisent un soulèvement graduel.

Des exemplaires de ces marteaux se trouvent dans les collections du Conservatoire des Arts et Métiers :

1^o le marteau frontal, où A et B sont parallèles, qui est soulevé en avant du marteau proprement dit, il allait à 5 tonnes, et battait de 50 à 100 coups à la minute;

2^o le marteau à soulèvement ou à l'allemande, où A et B sont rectangulaires, qui est soulevé entre l'axe A et la tête; il allait à 400^{kg} et faisait jusqu'à 200 coups à la minute;

3^o le martinet franc-comtois ou marteau à bascule, attaqué à la queue, au delà de l'axe A; il allait à 400 coups par minute et pesait environ 80^{kg}.

Chaque coup de marteau comprend trois périodes : 1^o le *choc de came*, de courte durée, commençant quand une came animée d'une grande vitesse rencontre le manche et finissant quand les éléments en contact ont pris la même vitesse; 2^o la *levée*, durant tant que came et manche sont en prise; 3^o la *chute* du marteau sur le corps posé sur l'enclume, accompagnée d'un temps perdu réglable.

Poncelet a calculé les pertes d'énergie relatives à ces trois périodes, suivant une exposition qui a été répétée pendant 60 ans et qui n'a plus qu'un intérêt théorique.

On a substitué à ces dispositifs les marteaux-pilons dont le principe est aussi ancien. Un pilon n'est autre chose qu'une tige verticale terminée inférieurement par une masse pesante et guidée par deux couples de taquets ou par deux glissières. Un mentonnet est fixé à la tige entre les guides. Sur lui agissent des comes portées par un arbre de rotation horizontal, lesquelles soulèvent successivement le pilon et le laissent choir. Tels sont les bocards et les foulons d'autrefois. Aujourd'hui le mouvement du pilon est produit par l'action d'un fluide (vapeur, eau sous pression, air comprimé), ce qui diminue les pertes d'énergie et donne une régularité plus grande. On arrive à des poids allant à 50 tonnes et plus.

CHAPITRE III.

PERCUSSIONS SUR SOLIDES NON LIBRES. CHOC INDIRECT.

1. Percussion sur un corps tournant. — 2. Pendule balistique. — 3. Canon ou fusil-pendule. Note sur la mesure actuelle des vitesses des projectiles. — 4. Choc indirect.

1. **Percussion sur un corps tournant.** — Dans un grand nombre d'appareils, on rencontre un corps solide mobile autour d'un axe fixe et destiné à être soumis à des chocs, il importe que cet axe ne puisse, par réaction, éprouver une pression capable ou de détruire l'organe qui le réalise, ou de le fausser, ou même d'engendrer des résistances passives susceptibles de modifier les résultats que l'on veut atteindre.

Nous allons nous proposer de déterminer les conditions pour que l'axe de rotation d'un tel solide ne reçoive aucune réaction de choc, en nous plaçant dans le cas usuel où : 1^o le solide présente un plan de symétrie de masse perpendiculaire à l'axe de rotation A et passant par le centre de masse G; 2^o la direction de l'impulsion du corps choquant est située dans ce plan de symétrie; 3^o la masse du corps choquant est assez petite par rapport à celle du corps choqué pour qu'on puisse la négliger pendant le choc.

La symétrie supposée permet, par composition des éléments symétriques, de regarder le système comme une plaque mobile sur le tableau autour du point A (*fig. 14*), et dont la position sera déterminée par l'angle φ de la direction AG avec une direction fixe AΔ.

Un élément matériel M de la plaque, de masse m , sera

caractérisé par la distance $AM = r$ et par l'angle $\widehat{GAM} = \alpha$. Le point M décrira un arc de cercle de centre A et de rayon r ,

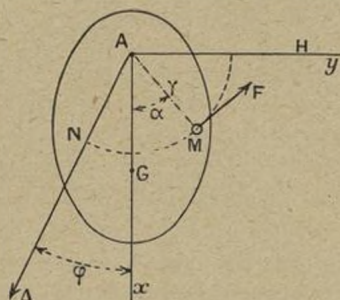


Fig. 14.

dont l'arc $s = \widehat{NM}$, compté à partir de $A\Delta$, a pour mesure

$$s = r(\alpha + \varphi),$$

les angles étant exprimés en radians. Ce point M a pour vitesse, α pour lui restant constant,

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega.$$

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, qui est le même pour tous les points du corps, est la *vitesse angulaire* du solide. Si F est la force totale appliquée à l'élément M suivant la direction de son déplacement, on a

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad \text{ou} \quad mr \frac{d\omega}{dt} = F.$$

Appelons F_x et F_y les projections de F sur les axes rectangulaires AG et AH, x et y les coordonnées de M par rapport aux mêmes axes. Multiplions successivement l'équation précédente par $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ et r ; ajoutons les résultats pour tous les points du corps en observant que $\frac{d\omega}{dt}$ est le même

pour tous; nous obtenons

$$\frac{d\omega}{dt} \sum mx = \sum F_y,$$

$$\frac{d\omega}{dt} \sum my = - \sum F_x,$$

$$\frac{d\omega}{dt} \sum mr^2 = \sum Fr.$$

On sait que : 1^o la quantité $I = \sum mr^2$ s'appelle le *moment d'inertie* du corps par rapport à l'axe A; 2^o que si a et b sont les coordonnées du *centre de masse* et M la *masse totale* du corps, on a

$$Ma = \sum mx, \quad Mb = \sum my.$$

Ici $b = 0$. Il vient donc

$$Ma \frac{d\omega}{dt} = \sum F_y, \quad 0 = \sum F_x, \quad I \frac{d\omega}{dt} = \sum Fr.$$

Les forces intérieures ou intermoléculaires disparaissent des seconds membres en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

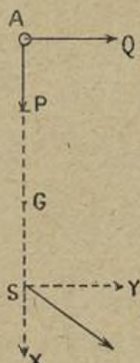


Fig. 15.

Soit τ la durée d'un choc produit dans une direction passant par un point S de AG (fig. 15), tel que $AS = h$,

sous la forme d'une force très grande, de projections X et Y suivant AG et AH. Soient P et Q les projections, sur les mêmes axes, de la réaction totale de l'axe A sur le solide.

Nous marquerons des mêmes lettres affectées d'un indice 1 les *impulsions* dues à ces forces pendant le temps τ .

En traitant chacune des équations précédentes comme nous avons traité l'équation $\frac{dv}{dt} = F$, on obtient

$$Ma(\omega - \omega_0) = Y_1 + Q_1,$$

$$0 = X_1 + P_1,$$

$$I(\omega - \omega_0) = Y_1 h,$$

ω_0 et ω représentent la vitesse angulaire avant et après le choc; l'impulsion de la pesanteur a été négligée devant les impulsions de choc; enfin P_1 et Q_1 ne représentent que les impulsions des réactions de choc, les impulsions des réactions de régime étant négligeables devant celles-là.

Nous voulons, si possible, faire en sorte que l'axe A n'éprouve pas d'impulsion de choc, c'est-à-dire que l'on ait

$$P_1 = 0, \quad Q_1 = 0.$$

Ces conditions entraînent les suivantes, qui sont à la fois nécessaires et suffisantes :

1°

$$X_1 = 0,$$

2°

$$\frac{Ma}{I} = \frac{1}{h} \quad \text{ou} \quad ah = \frac{I}{M} = k^2,$$

k désignant le *rayon de gyration* du solide autour de l'axe A.

Ainsi : 1° l'impulsion imprimée doit être perpendiculaire au plan de l'axe de rotation et du centre de masse; 2° elle doit rencontrer ce plan en un point S tel que

$$AS \times AG = k^2.$$

Le point S ainsi déterminé est dit le *centre de percussion* du corps.

L'axe parallèle à l'axe de *suspension* et passant par S est dit *axe d'oscillation*.

Ces deux axes possèdent une remarquable propriété de *réversibilité* que nous allons vérifier sur un exemple simple.

Supposons que le corps envisagé soit un panneau rectangulaire homogène mobile autour d'une de ses arêtes (fig. 16).

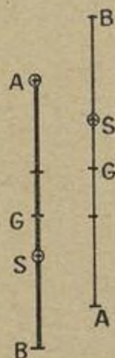


Fig. 16.

Soit l la longueur des arêtes perpendiculaires à l'axe. On a évidemment $AG = \frac{l}{2}$. D'autre part on a

$$I = \int_0^l \frac{M}{l} dr \cdot r^2 = \frac{M l^3}{3l} = \frac{M l^2}{3},$$

soit

$$k^2 = \frac{l^2}{3};$$

ainsi

$$AS \frac{l}{2} = \frac{l^2}{3} \quad \text{ou} \quad AS = \frac{2l}{3}.$$

Un coup appliqué normalement au panneau au tiers de son bord libre ne sera pas ressenti par les gonds.

Articulons le panneau autour de l'axe S, et déterminons le nouveau centre d'oscillation S_1 . Nous avons

$$SG = \frac{l}{6}, \quad I_1 = \frac{2M}{3} \frac{1}{3} \frac{4l^2}{9} + \frac{M}{3} \frac{1}{3} \frac{l^2}{9} = \frac{M l^2}{9},$$

soit

$$k_1^2 = \frac{l^2}{9};$$

ainsi

$$SS_1 \frac{l}{6} = \frac{l^2}{9} \quad \text{ou} \quad SS_1 = \frac{2l}{3}.$$

Ainsi S_1 coïncide avec A. Dès lors si un panneau mobile autour d'une arête S doit recevoir un choc auprès de son arête A, il conviendra de lui donner de l'autre côté de S un balourd égal à sa moitié pour épargner les gonds.

Il y a un cas où instinctivement on cherche à épargner les gonds, c'est lorsqu'ils font partie de notre corps; dans le fonctionnement du marteau, l'axe de rotation n'est autre que l'articulation du poignet qui tient l'instrument. En formant le marteau d'un long manche de bois à faible masse, terminé par une lourde masse métallique, on fait sensiblement coïncider le centre de gravité de l'ensemble avec celui de la masse, on a à peu près dans les mêmes conditions

$$I = M \cdot \overline{AG}^2$$

et par suite $AS = AG$. En frappant vers le milieu du plat (fig. 16 bis), le poignet ne subira pas de contre-coup.

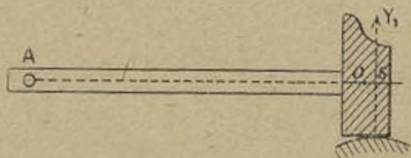


Fig. 16 bis.

La propriété de réversibilité est générale, quelle que soit la forme du corps tournant. Elle entraîne une autre propriété intéressante, également générale, et qui peut permettre de déterminer expérimentalement l'axe d'oscillation (*Kater*).

Si l'on fait osciller le corps, sous la seule action de la pesanteur, autour de son axe de suspension A ou autour de son axe d'oscillation S, on obtient la même durée pour les petites oscillations.

En effet, la durée de ces petites oscillations est

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{Pa}},$$

pour l'axe A; or

$$\frac{I}{Pa} = \frac{Mk^2}{Mga} = \frac{h}{g};$$

donc

$$T = \pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

ne dépend que de la distance des deux axes, dont la réversibilité entraîne l'égalité des durées d'oscillation.

C'est sur cette propriété qu'est basé le *pendule réversible* de Kater, employé en géodésie pour l'étude des variations d'intensité de la pesanteur ou de g .

Dans tous les cas, la variation de vitesse angulaire du solide tournant produite par la percussion Y_1 est déterminée par la relation

$$I(\omega - \omega_0) = Y_1 h.$$

2. *Pendule balistique.* — On doit à l'anglais *Benjamin Robins* un dispositif dont on s'est longtemps servi pour déterminer la vitesse des projectiles d'artillerie quand on ne leur donnait pas les vitesses et les masses énormes qui sont maintenant usuelles. Il l'a décrit dans son *Traité New Principles of Gunnery* (1742), sous le nom de *pendule balistique*. L'étude de cet appareil, qui peut encore servir à la mesure des vitesses des balles de fusil, est très instructive.

Le pendule balistique (fig. 17) est essentiellement cons-

titué par une carlingue mobile autour d'un axe horizontal A et qui supporte un récipient tronconique en fonte R. Ce réservoir, terminé suivant sa petite base par une calotte sphéroïdale, est rempli de sable tassé maintenu par une

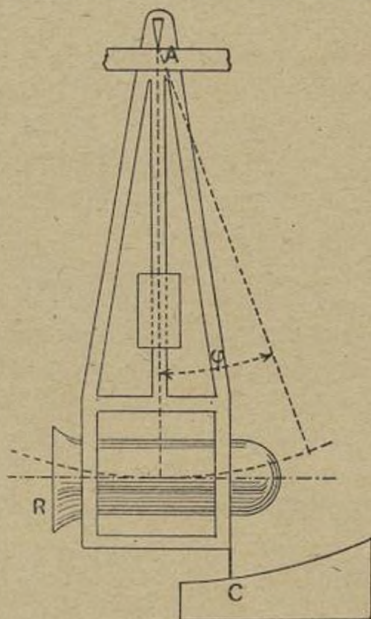


Fig. 17.

mince feuille de plomb formant obturateur de la grande base. La carlingue, formée de fers cornières de manière à obtenir une grande rigidité, porte deux couteaux formant l'axe de suspension, perpendiculaire à l'axe de R, et disposé horizontalement lors du repos. Un projectile, sortant d'un canon placé à une dizaine de mètres du pendule, pénètre dans la masse de sable suivant l'axe du récipient et fait osciller le système d'un certain angle qu'il suffit de connaître pour déterminer la vitesse initiale. Cet angle est mesuré au moyen d'un curseur glissant à frottement doux sur un

cercle gradué, et qui est poussé par une aiguille fixée à la partie inférieure du pendule jusqu'au moment où l'écart maximum est obtenu. Un écran de bois percé d'un trou est disposé près du réservoir pour arrêter le vent des gaz de la poudre et en préserver l'appareil.

Soit à déterminer la vitesse V du projectile en fonction de l'angle maximum d'écart φ . On assimile le projectile à un élément matériel de masse m_1 dont la vitesse est distante de h de l'axe A .

Si \mathcal{J} est l'impulsion totale que reçoit le projectile pendant le choc qui amène le pendule à la vitesse angulaire ω_1 , on a

$$m_1(V - h\omega) = \mathcal{J}_e.$$

En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, le pendule reçoit en sens inverse l'impulsion \mathcal{J} ; si I est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe A , on a

$$I\omega_1 = \mathcal{J}h.$$

L'élimination de \mathcal{J} entre ces deux relations donne

$$m_1 V h = (I + m_1 h^2) \omega_1 = I_1 \omega_1,$$

en appelant I_1 le moment d'inertie, par rapport à A_1 du pendule et du projectile, après sa pénétration.

Le système s'incline sur la verticale jusqu'à une élongation maxima φ pour laquelle sa vitesse angulaire est nulle. Son énergie cinétique $\frac{1}{2} \Sigma m v^2$ ou $\frac{1}{2} \Sigma m r^2 \omega^2$ ou encore $\frac{1}{2} I_1 \omega^2$ part de $\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$ pour arriver à zéro. Les forces produisant du travail se réduisent à la pesanteur dont les actions équivalent à une force unique égale au poids total Mg appliqué au centre de masse ou de gravité G de l'ensemble. Si $c = AG$, le travail total sera $-Mgc(1 - \cos \varphi)$ ou $-2 Mgc \sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

Le théorème de l'énergie donne alors

$$2Mgc \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2 I_1} m_1^2 V^2 h^2.$$

Par suite la vitesse cherchée a pour expression

$$V = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\sqrt{Mgc I_1}}{m_1 h}.$$

Pour éviter les chocs sur l'axe, on s'arrange de manière que l'axe du réservoir contienne le centre S de percussion du pendule. A cet effet, on suspend à côté du pendule balistique un pendule simple de longueur h , et l'on déplace une masse de réglage le long d'une tige du pendule balistique jusqu'à obtenir même durée d'oscillation pour les deux pendules. Alors on aura

$$h = \frac{I}{\mu a},$$

en appelant a la distance à A du centre de gravité du pendule sans le projectile et μ la masse du pendule. Par suite

$$I_1 = \mu ah + m_1 h^2 = h(\mu a + m_1 h) = hMc,$$

d'où

$$V = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \frac{Mc}{m_1} \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Soient L le rayon du cercle gradué sur lequel se déplace le curseur, C la corde du déplacement de ce curseur, T la durée d'oscillation. On a

$$C = 2L \sin \frac{\varphi}{2}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

D'où la formule simple finale

$$V = \frac{2\pi C}{LT} \left(h + \frac{\mu a}{m_1} \right),$$

où $\frac{I}{m_1}$ est égal au rapport des poids du pendule et du projectile.

Ce procédé peut être, sous une forme sommaire, employé pour mesurer la vitesse, à diverses distances, d'une balle de carabine (6^{mm}). On remplace le réservoir R par un rondin de charme de 15^{cm} de diamètre et de 10^{cm} d'épaisseur, qu'on fixe au bout d'une latte tournant, sur couteaux, autour d'un axe horizontal et portant une masse de réglage. L'arme est montée sur un trépied de tir pour assurer la visée sur le centre du rondin. Le rondin porte un index à pinceau se déplaçant sur une bande de papier munie d'une graduation circulaire.

Si l'axe du rondin ne passe pas par le centre de percussion, la balle fait glisser les couteaux sur leurs appuis, dans le sens du tir ou en sens inverse selon que le point d'impact est au-dessus ou au-dessous du centre de percussion.

3. Canon ou fusil-pendule. — La force expansive des gaz dégagés par l'inflammation de la poudre agit en sens inverse sur le projectile et sur l'arme qui, par cela même, éprouve un mouvement rétrograde appelé *recul*. L'estimation de ce recul peut servir à déterminer la vitesse de départ du projectile.

On suspend l'arme (canon ou fusil) à un arbre horizontal autour duquel elle peut tourner à la façon d'un pendule composé. Le système est disposé de manière qu'à l'état d'équilibre, l'axe de l'arme chargée soit horizontal. La charge enflammée, le projectile part; le recul de l'arme se traduit par une déviation du pendule de laquelle on note le maximum. Il s'agit de déduire de là la vitesse du projectile à la sortie de l'arme.

Pour ne pas donner d'impulsion initiale au système, on emploie une mise de feu électrique. Dans le cas d'une cara-

bine (fig. 18), on l'attachera par deux cordes parallèles à un haut plafond; on fixera à la gâchette un appendice dont l'extrémité libre sera reliée à l'avant et à l'arrière de l'arme par des caoutchoucs tendus avant d'armer, et dont celui

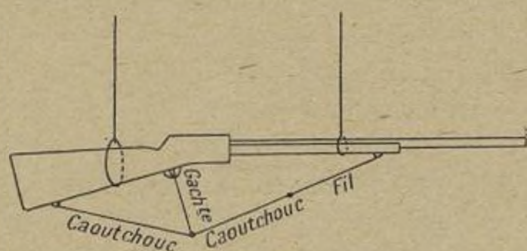


Fig. 18.

d'avant se termine par un fil; on arme, puis on brûle le fil; l'autre caoutchouc tire sur la gâchette et fait partir le coup.

Soient : V la vitesse du projectile; m_1 sa masse; u la vitesse et M la masse d'un élément matériel gazeux provenant de la combustion de la charge. Comme on peut, sans erreur appréciable, considérer l'inflammation et la combustion de la poudre, ou sa transformation en gaz comme n'ayant que la durée d'un choc, on aura pour l'impulsion reçue par le système charge-projectile

$$\mathcal{J} = m_1 V + \sum m u.$$

L'arme recevant une impulsion égale et opposée, la vitesse angulaire ω_1 prise par le système de moment d'inertie I sera donnée par

$$I \omega_1 = \mathcal{J} h.$$

On ne connaît pas comment varie la vitesse u qui est égale à V au contact du projectile et à $-\omega_1 h$ à la culasse; mais $-\omega_1 h$ est bien plus faible que V et $m' = \sum m$ n'est

guère que le dixième de m_1 , on prend approximativement u égal à la moyenne $\frac{V - \omega_1 h}{2}$. Il vient donc

$$I \omega_1 = h \left\{ m_1 V + m' \frac{V - \omega_1 h}{2} \right\}$$

ou

$$\left(1 + \frac{1}{2} m' h^2 \right) \omega_1 = \left(m_1 + \frac{m'}{2} \right) V h.$$

Cette équation est analogue à celle obtenue pour le pendule balistique; dès lors le calcul se poursuit de la même manière.

Une formule équivalente donne une approximation un peu grossière de la vitesse de recul d'un canon lorsqu'on néglige les frottements et l'inertie des roues. Cette formule servait pour déterminer les effets du tir sur les affûts, avant l'usage des freins hydrauliques. La vitesse de recul se détermine à l'aide du *vélocimètre* Sébert.

Mesure actuelle des vitesses des projectiles. — Il est intéressant de mettre en regard de ces anciens procédés les procédés actuels de mesure des vitesses des projectiles; elle s'effectue en mesurant le temps T que met l'obus à parcourir une distance déterminée E ; on admet que $\frac{E}{T}$ est la vitesse du projectile au milieu de la distance considérée,

ce qui revient à supposer que dans l'intervalle la vitesse est celle d'un mouvement rectiligne et uniforme. Cette hypothèse sera d'autant plus exacte que l'intervalle sera court, mais ceci exige une mesure très précise du temps. On emploie comme matériel deux cadres-cibles et un chronographe.

Un cadre-cible est constitué par un cadre garni de fils de cuivre parallèles et distants entre eux de moins d'un calibre de projectile ($\frac{1}{5}$ de calibre pour les projectiles ogivaux). Les fils de chaque cadre font partie d'un même circuit électrique aboutissant au chronographe. Les cadres-cibles sont placés sur le parcours du projectile qui rompt les fils au passage et actionne ainsi un signal dont le chronographe enregistre la production. La différence de temps entre les deux inscriptions donne le temps T demandé.

Le chronographe employé universellement a été imaginé par le

capitaine belge Le Boulengé et modifié par le capitaine Bréger, de l'artillerie de la Marine. Il consiste essentiellement (voir la planche I) en deux électro-aimants A et B disposés le long d'une colonne verticale K. Ces électros (fig. 19) sont intercalés dans deux circuits séparés

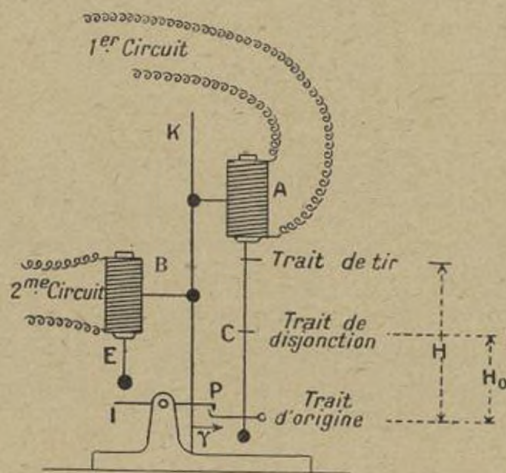
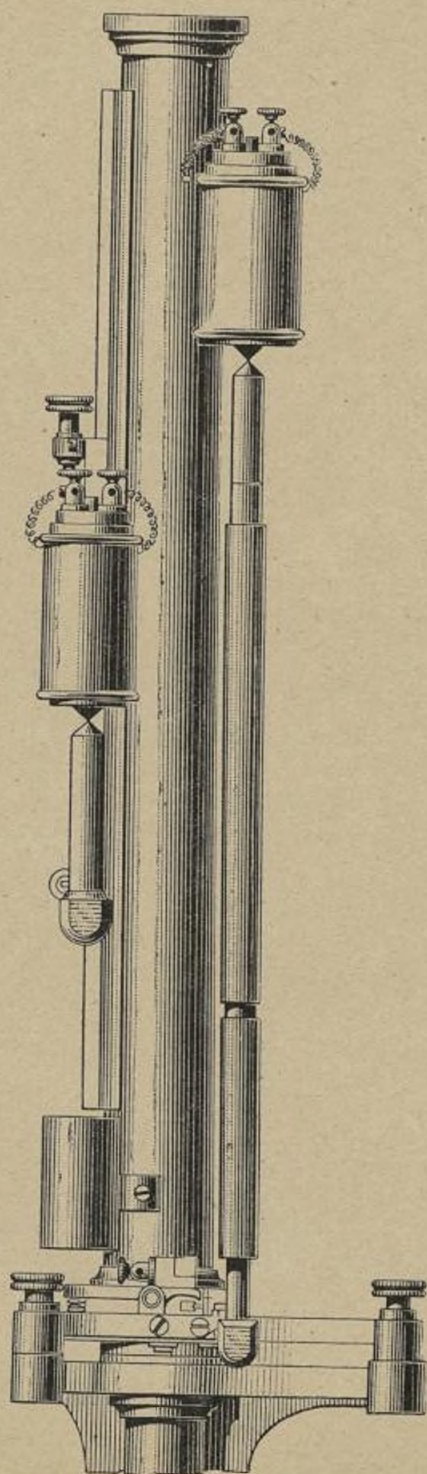


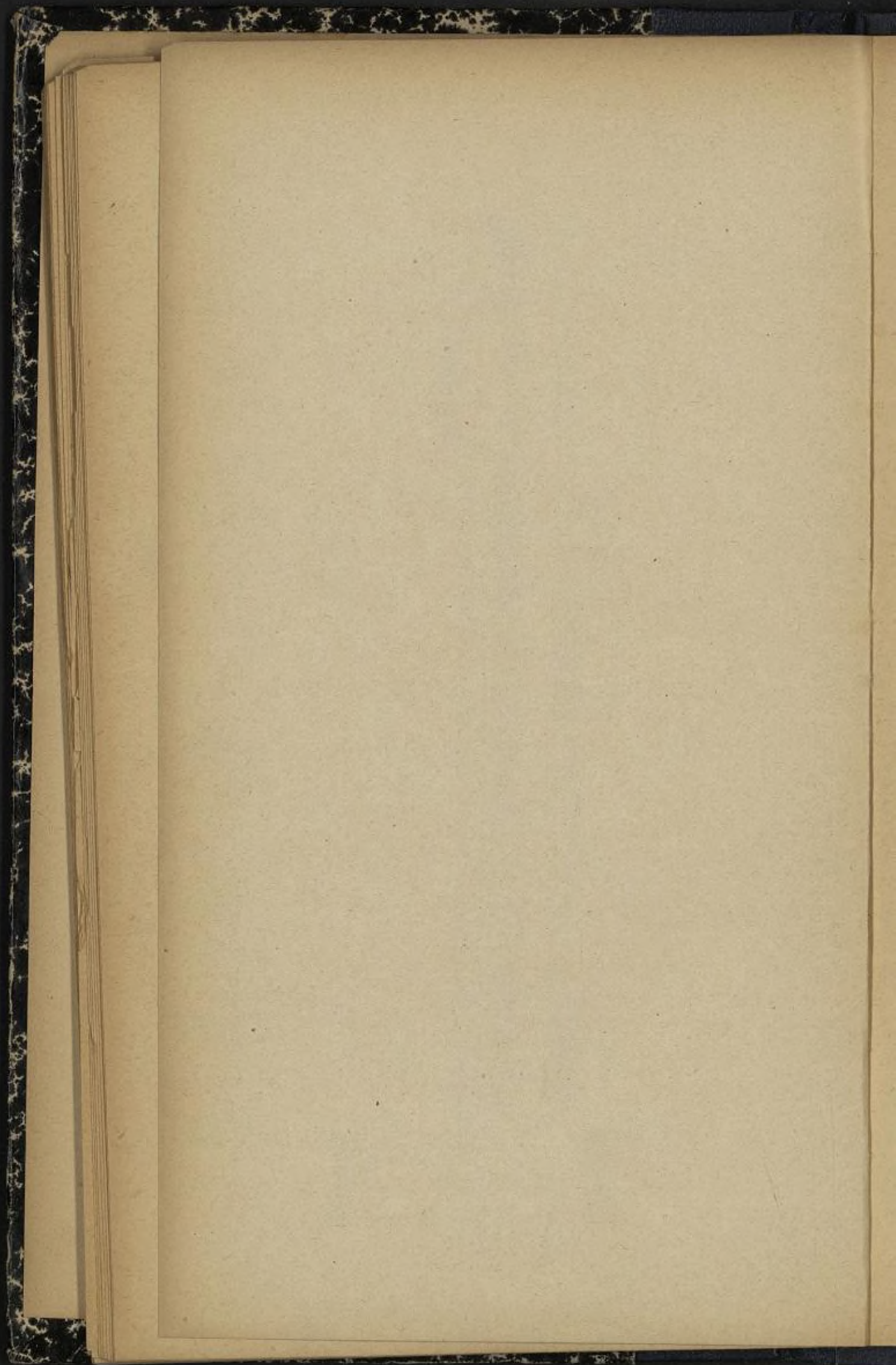
Fig. 19.

comprenant chacun une pile ou un accumulateur, circuits dont la rupture marque pour l'un le commencement, pour l'autre la fin de la durée à mesurer. Au premier électro A (c'est-à-dire celui dont la rupture du circuit détermine l'origine de la durée) est suspendu un poids cylindrique C d'assez grande longueur, appelé *chronomètre*; au second électro B est suspendu de même, quand le courant passe, un poids cylindrique E, nommé *enregistreur*, plus court que le chronomètre, mais de même poids. Lorsque les courants sont rompus, le chronomètre et l'enregistreur sont libérés et tombent ensuite librement en suivant la loi de la chute des graves.

Dans sa course, l'enregistreur E bute contre un plateau L et libère ainsi un ressort portant un couteau qui frappe le chronomètre en y inscrivant sa trace. On connaît d'ailleurs le point du chronomètre qui se trouvait primitivement en face du couteau. Soit H la distance de ce point à la trace ci-dessus. Le temps nécessaire à cette chute relative comprend :

1° Le temps T écoulé entre l'origine de la chute du chronomètre et celle de l'enregistreur;





2° Le temps mis par l'enregistreur pour rencontrer le plateau;

3° Le temps compris entre le choc sur le plateau et l'instant où le couteau frappe l'enregistreur, soit θ la somme de ces deux derniers temps :

$$H = \frac{1}{2} g (T + \theta)^2 \quad \text{ou} \quad T + \theta = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

La somme θ est une constante qu'on détermine en rompant simultanément les circuits de l'enregistreur et du chronomètre à l'aide d'un dispositif dit *disjoncteur*. Si H_0 est la hauteur du trait de disjonction au-dessus du trait d'origine, on a

$$H_0 = \frac{1}{2} g \theta^2 \quad \text{ou} \quad \theta = \sqrt{\frac{2H_0}{g}}.$$

Ainsi

$$T = \frac{\sqrt{2H} - \sqrt{2H_0}}{\sqrt{g}}.$$

Des dispositifs spéciaux permettent d'égaliser les retards de désaimantation des deux électros.

Des tables préparées à l'avance permettent d'obtenir, les cadres étant placés à des distances fixes, les vitesses des projectiles d'après les hauteurs de chute obtenues. En ce qui concerne l'emplacement et la disposition des cadres, on doit les soustraire à l'action du vent du canon et placer par suite le premier d'autant plus loin que le calibre est plus fort. Quant à l'écartement, on le prend voisin du dixième de la vitesse prévue, en l'arrondissant en dizaines de mètres.

Cette méthode s'emploie exclusivement dans les commissions d'expériences de l'artillerie (Calais, Bourges, Gâvres, Versailles). Pour utiliser les tirs de réception et les tirs d'exercices au contrôle de la vitesse initiale des projectiles tirés (notamment en vue d'étudier l'influence de l'usure du canon sur la vitesse du projectile), on peut passer par la mesure de la vitesse de propagation de l'onde de choc ou sillage aérien du projectile, vitesse qu'on estime à l'aide du matériel des sections de repérage des canons par le son.

4. **Choc indirect.** — Le choc de deux corps est indirect quand la normale commune au point d'impact ne passe pas par le centre de masse des deux corps. Dans ce cas, on décompose la vitesse des éléments matériels en présence suivant

la normale commune et suivant le plan tangent. S'il n'y a pas frottement, les composantes tangentiellles ne sont pas modifiées par le choc, car si elles existaient seules, elles ne pourraient que faire glisser les deux corps l'un sur l'autre. Mais les composantes normales des vitesses suivent les lois trouvées dans le cas du choc direct.

Ces considérations s'appliqueraient sans peine au carambolage de deux billes de billard dont l'ivoire est poli.

Envisageons (fig. 20) le choc oblique d'une bille contre

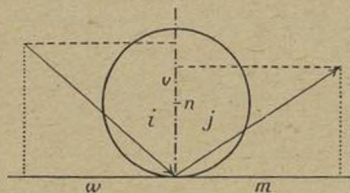


Fig. 20.

une bande, qu'on peut assimiler à une sphère immobile de masse infinie. Soient v et w , u et m les vitesses normale et tangentielle du point d'impact avant et après le choc; i , j les angles d'incidence et de réflexion ou angles que fait avec la normale la vitesse totale avant et après le choc.

On a

$$u = -ev, \quad m = w,$$

$$\text{tang } i = \frac{w}{-v}, \quad \text{tang } j = \frac{m}{u},$$

en appelant e le coefficient de restitution des substances formant la bille et la bande. On en déduit

$$\text{tang } j = \frac{1}{e} \text{ tang } i.$$

On a environ $e = 0,6$; pour $i = 45^\circ$, on a

$$\text{tang } j = 1,6, \quad \dots \quad \text{et} \quad j = 59^\circ.$$

Ainsi convient-il *au billard* de s'abstenir de parler de la loi d'égalité des angles d'incidence et de réflexion.

On trouve dans les collections du Conservatoire des Arts et Métiers un appareil pour vérifier cette loi ou pour déterminer e .

Un plateau semi-circulaire horizontal (*fig. 21*) à contour

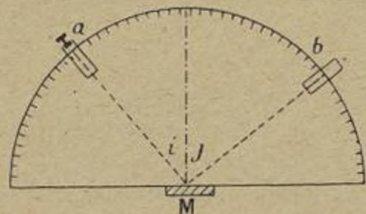


Fig. 21.

gradué porte deux curseurs qui peuvent se fixer en diverses positions par vis de pression. Ces curseurs sont solidaires de tubes a et b dont les axes sont dirigés suivant le rayon du plateau. Le tube a contient un ressort à boudin que l'on tend en tirant sur un bouton extérieur. Quand on lâche le bouton, une bille d'ivoire placée dans le tube est chassée par la détente du ressort et vient frapper un plan vertical en marbre M placé au centre suivant le diamètre terminal du plateau. La bille rebondit sur ce plan et vient se loger dans le tube b placé dans la position prévue ou dans une position qu'on détermine par tâtonnements.

Les choses sont beaucoup plus compliquées quand les corps qui se choquent indirectement sont susceptibles de développer un frottement de glissement. Or, déjà pour une bille d'ivoire et un drap de billard un peu usé, on a un coefficient de frottement sensible : $f = \frac{1}{4}$. Nous ne pouvons que renvoyer aux travaux de G. Coriolis et H. Résal déjà cités.



APPENDICE.

CHOC DES CORPS ALLONGÉS

(d'après Barré de Saint-Venant, M. Boussinesq et de Maupeou).

Nous avons bien fait remarquer au début toutes les hypothèses qu'implique la théorie du choc. Elles reviennent à admettre qu'après un choc, un solide se meut en conservant les propriétés d'un solide. Ce fut une grande ingéniosité de la part de Newton de parer à l'insuffisance de ces hypothèses en englobant dans le coefficient de restitution la part que les vibrations moléculaires, qui se superposent aux vitesses visibles, prennent dans la déperdition d'énergie.

Cependant si l'on envisage des corps très longs et d'inégale longueur, la propagation de la compression de choc peut être terminée pour l'un dont la détente commence alors que la compression se continue pour l'autre. Il convient d'examiner de plus près le mécanisme du phénomène, les efforts en jeu, leur mode de transmission et le temps pendant lequel chacune des masses est influencée. C'est ce qu'a fait *Barré de Saint-Venant* pour le choc longitudinal de deux barres élastiques libres prismatiques de même section (*J. de Liouville*, t. 12, 1867. — *C. R. Acad. Sc.*, t. 95, 1882, p. 359 et 423), puis *M. Boussinesq* pour le cas plus difficile où l'une des barres est fixée à un bout et heurtée à l'autre (*C. R. Acad. Sc.*, t. 97, 1883, p. 154). Plus récemment, de 1901 à 1908, le comte *de Maupeou d'Ableiges* a repris la question sous une forme plus accessible et a accompagné son analyse de vérifications expérimentales.

Pour étudier la transmission des efforts, considérons un cylindre droit homogène élastique soumis à une extrémité à l'action normale de forces constantes uniformément réparties sur la base S. Nous admettrons que la pression apparaît subitement avec toute son intensité et disparaît de même. Décomposons par la pensée le solide en tranches minces (*fig. 22*). Dès que la pression $F = f S$ se fait sentir

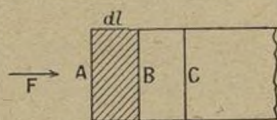


Fig. 22.

en A, la première tranche dl soumise à son action se comprime et subit un accourcissement unitaire

$$i = \frac{f}{E} = \frac{F}{ES},$$

en appelant E le coefficient d'élasticité ou module d'Young de la matière. La matière résiste par inertie et la réaction sur la face B devient sous le jeu des forces intermoléculaires, égale à F au bout d'un temps dt , limitant l'instant où la deuxième tranche subit la pression F . Comme cette pression se sera transmise à la distance dl dans le temps dt , la *vélocité* ou vitesse de propagation de la compression envisagée sera

$$V = \frac{dl}{dt}.$$

Pendant ce même temps, la tranche s'est raccourcie de $i dl$, quantité qui représente le déplacement de la face arrière, la face avant étant encore immobile. Donc la vitesse de la section A est

$$w = i \frac{dl}{dt} = iV.$$

Sa vitesse étant initialement nulle, iV représente aussi l'accroissement de vitesse dans le temps dt .

A la fin de l'instant dt , la première tranche, entièrement comprimée jusqu'en B, commence à pousser la seconde tranche qui réagit sur elle. Elle transmet intégralement la pression F à la seconde tranche qui va se trouver dans les conditions de la première.

La transmission se fait ainsi de proche en proche, avec la vitesse constante V .

La matière se trouve mise en mouvement d'une manière progressive, et chaque tranche prend successivement, en se comprimant, la vitesse iV sous l'action de la force F subie directement ou par l'intermédiaire des parties déjà comprimées.

Envisageons la première tranche, de masse $m = \rho S dl$, en appelant ρ la densité ou masse spécifique de la barre. Elle supporte sur la face arrière la pression F et sur la face avant une réaction qui varie de 0 à F ; la moyenne est $\frac{F}{2}$.

Son centre de masse subit le déplacement $\frac{1}{2} i dl$ ou encore prend la vitesse $\frac{1}{2} iV$. Nous aurons donc

$$m \frac{1}{2} iV = \frac{F}{2} dt,$$

ou

$$\rho S dl \frac{F}{ES} V = F dt,$$

ou enfin

$$V^2 = \frac{E}{\rho}.$$

Cette valeur de V n'est autre que celle de la vitesse du son dans le solide.

Pour le fer et l'acier, on a sensiblement

$$V = 5000 \text{ m/s.}$$

Considérons maintenant deux cylindres de même section, l'un de longueur l formant marteau, l'autre de lon-

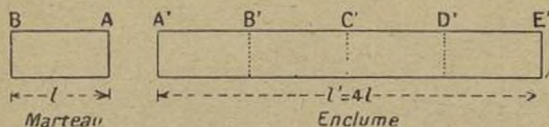


Fig. 23.

gueur $l' = 4l$ formant enclume. Divisons le temps en périodes $\Delta t = \frac{l}{V}$ égales au temps que la compression et les autres effets du choc mettent à parcourir la longueur du marteau. La compression de choc mettra $4\Delta t$ à parcourir la longueur de l'enclume. Nous allons examiner ce qui se passe pendant chacune des périodes Δt .

Première période. — Le marteau, animé de la vitesse V_0 , vient cogner l'enclume, dont le premier tronçon $A'B'$ passe pendant le temps Δt par des phases de transmission symétriques de celles du marteau AB . Deux couches en contact dm et dm' de $A'B'$ et AB prennent dans le temps

$$dt = \frac{dl}{V}$$

une même vitesse u sans que la quantité de mouvement de l'ensemble soit modifiée (l'ensemble n'étant soumis qu'à des forces intérieures); donc

$$dm \cdot V_0 = (dm + dm')u \quad \text{ou} \quad u = \frac{V_0}{2};$$

en même temps se produit une surpression unitaire f telle que

$$fS dt = fS \frac{dl}{V} = dm(V_0 - u);$$

d'où

$$f = \frac{dm V_0 V}{2S dt} = \frac{1}{2} V_0 \sqrt{\rho E}.$$

La compression, la vitesse et la déformation se transportent de part et d'autre de l'impact avec la célérité V et atteignent respectivement B et B' .

Deuxième période. — Dès que la compression atteint l'extrémité libre B' du marteau, la dernière couche se détend et revient à l'état primitif, puis les couches voisines font successivement de même. La masse revient de proche en proche à son état normal; la détente diminue la vitesse de chaque tranche autant que la compression l'augmentait pendant la première période (les impulsions étant égales). Le marteau, à la fin, ayant perdu deux fois $\frac{1}{2} V_0$, n'a plus ni vitesse ni compression, il a seulement subi le petit déplacement $u = \frac{2l}{V}$ ou $\frac{V_0 l}{V}$.

L'enclume subissant en A' la poussée $F = fS$ du marteau, cette compression continue à se propager avec la vélocité V , et la matière prend de proche en proche la vitesse $\frac{1}{2} V_0$ sur une nouvelle longueur l . A la fin, une longueur $2l$ de l'enclume est comprimée et en mouvement dans les conditions

$$f = \frac{1}{2} V_0 \sqrt{\rho E}, \quad u = \frac{V_0}{2}.$$

Troisième et quatrième périodes. — A la fin de la deuxième période, le marteau, complètement détendu et ayant perdu sa vitesse, reste au repos; l'enclume qui a ressenti l'influence du choc sur une longueur $2l$, n'étant plus poussée à gauche par le marteau, se détend progressivement de ce côté, perd sa vitesse, et la matière revient de proche en proche à son état primitif en ayant subi, comme le marteau, un déplacement $u = \frac{2l}{V}$ ou $\frac{V_0 l}{V}$ par suite de la pression F subie pendant le temps $2 \Delta t$.

En se détendant vers la gauche, chaque tranche de $A' C'$

réagit vers la droite en sorte que les tronçons $C' E'$ se trouvant dans les conditions précédentes sont parcourus avec la vitesse V par la compression f et la vitesse $u = \frac{V_0}{2}$.

Cinquième période. — A la fin de la quatrième période, la compression a atteint l'extrémité E' de l'enclume et la matière n'étant plus appuyée sur la droite se détend de ce côté en même temps que du côté opposé; mais tandis que la détente annule la vitesse du côté gauche, elle la double du côté droit; ainsi à la fin de la période, l'enclume n'est plus comprimée, mais la partie $D' E'$ a une vitesse $2u = V_0$ égale à celle du marteau avant le choc.

Sixième période. — Au début, la masse $D' E'$ a une vitesse V_0 , tandis que le reste de l'enclume et le marteau se touchent au repos. Si $D' E'$ n'était qu'en contact avec $A' D'$, il se détacherait du reste avec la vitesse initiale du marteau. La cohésion le fait exercer une traction en D' sur le reste de l'enclume. Cette sixième période est analogue à la première, il se produit entre $D' E'$ et le reste de l'enclume un choc par traction.

Septième et huitième périodes. — Les effets du nouveau choc de traction se transmettent de droite à gauche avec la vitesse V , la tension unitaire et la vitesse de translation qui se propagent étant respectivement $-f$ et $+\frac{V_0}{2}$.

Neuvième période. La traction s'étant propagée jusqu'en A' et ne trouvant plus de matière à tirer vers la droite puisque le marteau n'est pas relié à l'enclume, la dernière tranche se détend en se rapprochant de la précédente, ce qui double sa vitesse. En même temps l'onde continue à se propager par l'autre extrémité, si bien qu'à la fin de la période, la masse $A' B'$ se ressent seule de l'effet du choc; elle a perdu sa tension et a une vitesse V_0 égale à la vitesse initiale du

marteau dont elle va jouer le rôle. Alors l'extrémité gauche de l'enclume se sépare du marteau, jusque-là A et A' étaient restés en contact.

Dixième période. — La masse A'B', ayant la vitesse initiale du marteau tandis que le reste de l'enclume est au repos, il se produit un troisième choc de compression qui va cheminer comme le premier en arrivant en E', et ainsi de suite indéfiniment.

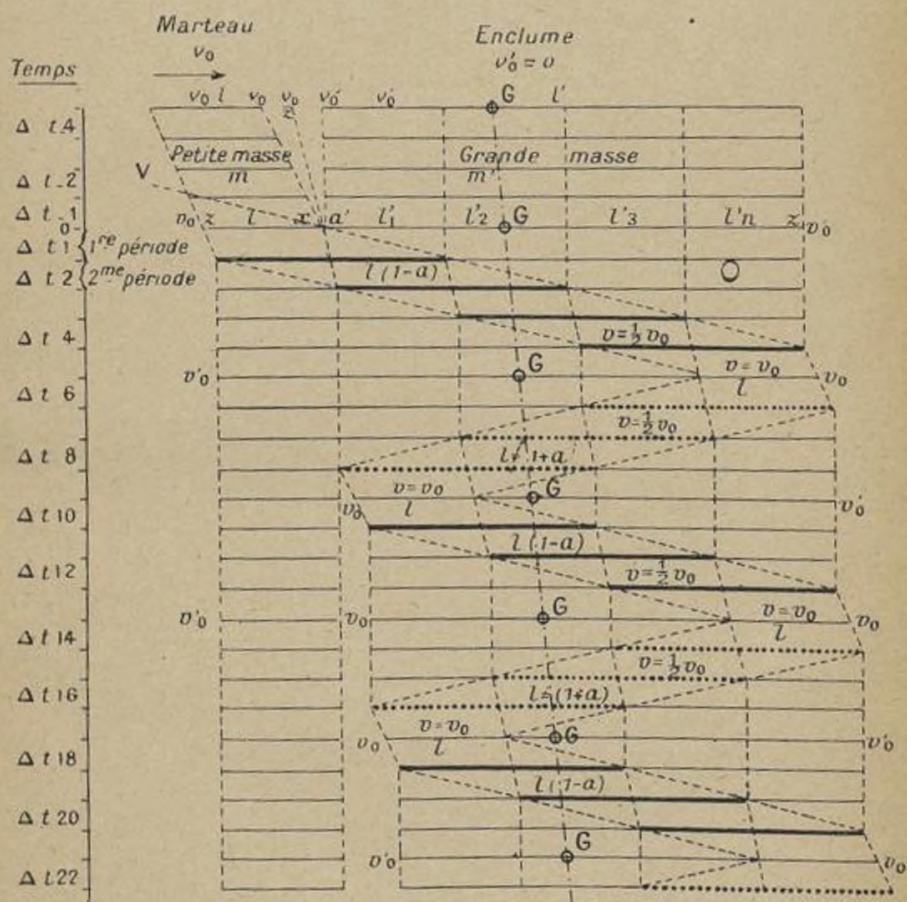
L'enclume, soumise alternativement à des efforts de compression et de traction, prend un mouvement vibratoire longitudinal et chemine de gauche à droite par une sorte de mouvement vermiculaire, tandis que le marteau reste au repos après avoir cédé à l'enclume toute sa quantité de mouvement et son énergie cinétique pendant les deux premières périodes du choc.

Le croquis ci-après (planche II) imité de Barré de Saint-Venant, schématise le mouvement du marteau et de l'enclume, avant, pendant et après le choc, en supposant les cylindres réduits à leurs axes.

M. de Maupeou a, en 1906, contrôlé l'exactitude de ce diagramme par des expériences soignées où l'on avait

$$V_0 = 4,40 \text{ m/s}, \quad V = 5240 \text{ m/s}, \quad f = 8,9 \text{ kg/mm}^2,$$

$$S = \pi \times 24^2 \text{ mm}^2.$$



GG. Ligne droite représentant le mouvement du centre de gravité des deux barres.

- Trait fin, la matière est à son état naturel.
- Trait gros, la matière est comprimée.
- Trait pointillé, la matière est dilatée.

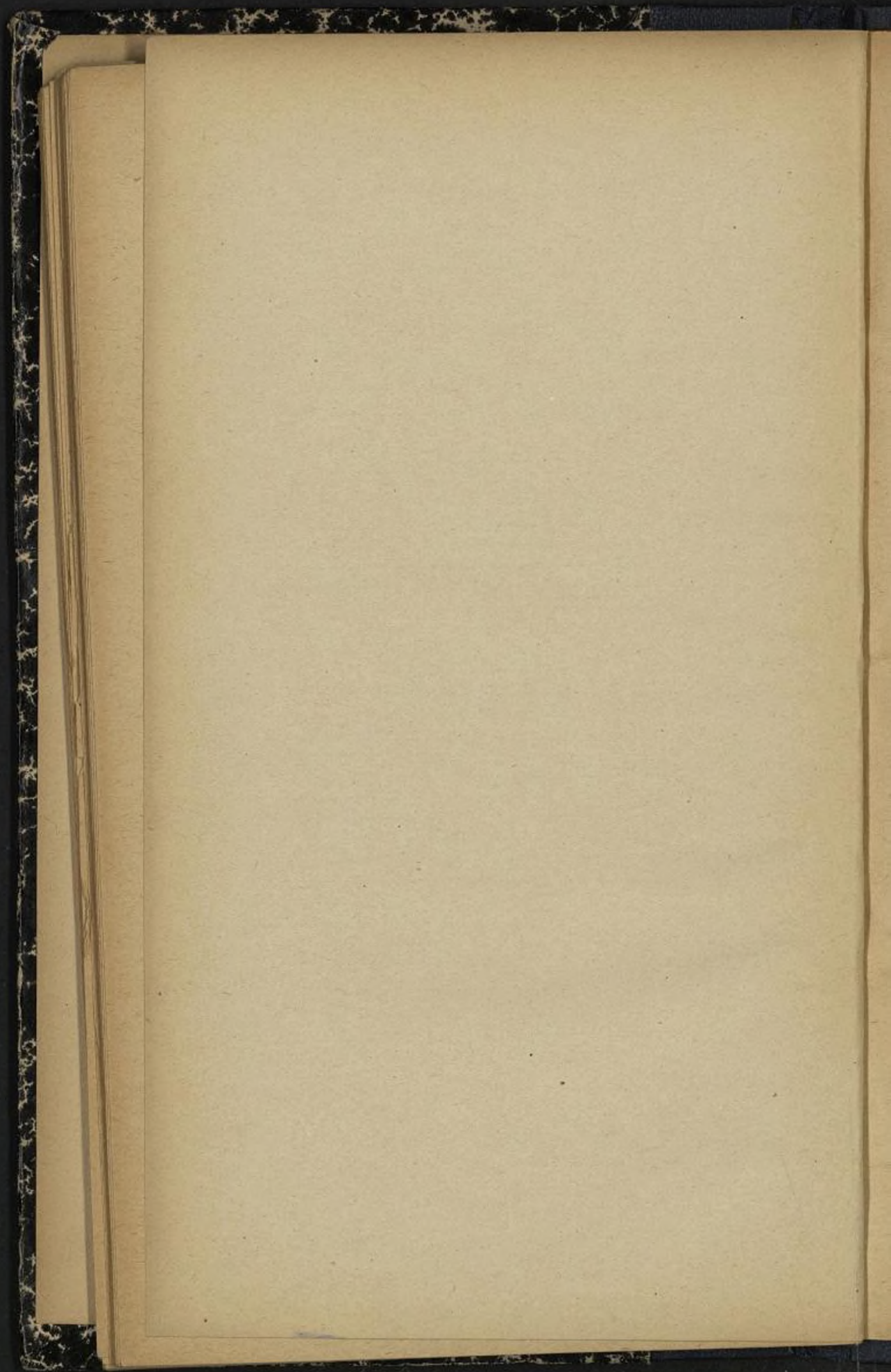


TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Généralités.

	Pages.
1. Historique.....	1
2. Mesure de la vitesse.....	3
3. Durée du choc.....	7
4. Notion d'impulsion ou percussion.....	8
5. Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.....	12
6. Théorème de l'énergie.....	13
7. Analyse du choc.....	16
8. Propagation des compressions de choc.....	18
9. Étendue de la zone de répartition d'un choc.....	20

CHAPITRE II.

Choc direct.

1. Choc direct de deux solides.....	21
2. Cas des corps mous.....	23
3. Cas des corps parfaitement élastiques.....	26
4. Cas des corps naturels.....	28
5. Construction de Wren.....	31
6. Applications :	
1° Battage des pilots de fondation.....	33
2° Clou et marteau.....	37
3° Marteaux-pilons.....	37

CHAPITRE III.

Percussions sur solides non libres. Choc indirect.

	Pages.
1. Percussion sur un corps tournant.....	39
2. Pendule balistique.....	45
3. Canon ou fusil-pendule. Note sur la mesure actuelle des vitesses des projectiles.....	49
4. Choc indirect.....	53

APPENDICE.

Choc des corps allongés d'après Barré de Saint-Venant, M. Bousinesq et de Maupeou.....	56
--	----

PLANCHE I. — Chronographe Le Boulengé.

PLANCHE II. — Schéma de la propagation des déformations dans le choc de corps prismatiques.

TABLE DES MATIÈRES.....	63
-------------------------	----





GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}

Imprimeurs-Éditeurs

55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6^e)

Tél. : FLEURUS 50-14 et 50-15.

R. C. Seine 22520

Envoi dans toute la France et l'Union Postale, contre chèque ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus. (Chèques-postaux : Paris 29.323).

Majoration 40 ⁰/₀ en sus

Leçons

de

Cinématique

PAR

Raoul BRICARD

Ingenieur des Manufactures de l'Etat
Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers
et à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures

TOME I

Cinématique théorique

Un volume in-8 de 336 pages, avec 117 figures 45 fr.

(Port en sus)

TOME II

Cinématique appliquée

Un volume in-8 de vi-352 pages, avec 300 figures.. . . . 45 fr.

BOULANGER. — III.



GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}

Imprimeurs-Éditeurs

55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6^e)

Tél. : FLEURUS 50-14 et 50-15.

R. C. Seine 22520

Envoi dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus (Chèques postaux : Paris 29323).

Majoration 40 % en sus.

Cours de Mécanique

PAR

Louis ROY

Professeur à la Faculté des Sciences

TOME I

Cours de Mécanique rationnelle

à l'usage des Élèves de l'Institut Électrotechnique et de Mécanique appliquée
et des Candidats au Certificat de Mathématiques générales

Un volume in-8 (25 × 16) de 6-260 p., avec 103 figures; 1921... 25 fr.

TOME II

Cours de Mécanique appliquée

à l'usage des Élèves de l'Institut Technique et de Mécanique appliquée
et des Candidats au Certificat de Mécanique appliquée

Statique graphique

et

Résistance des Matériaux

Un volume in-8 (25 × 16) de 4-216 pages, avec 86 figures; 1921... 30 fr.

(Port en sus)



GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}

Imprimeurs-Éditeurs

55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6^e)

Tél. : FLEURUS 50-14 et 50-15.

R. C. Seine 22520

Envoi dans toute la France et l'Union Postale, contre chèque ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus. (Chèques-postaux : Paris 29.323).

Majoration 40 % en sus

Mathématiques et Mécanique

*Ouvrage conforme aux derniers programmes des examens
de la Marine marchande (1924)*

PAR

C. CORNET

Professeur d'Hydrographie

Directeur du Navire-École « Jacques-Cartier »

Leçons de Mathématiques

(Algèbre, Géométrie, Trigonométrie)

Programme d'Élève-Officier de la Marine marchande

Un volume (22 × 14) de 285 pages avec 119 figures; 1925... 30 fr.

Leçons de Mécanique

(faisant suite aux *Leçons de Mathématiques*)

Programme d'Élève-Officier et de Lieutenant au long cours

Un volume (22 × 14) de 179 pages avec 87 figures; 1925... 20 fr.

(Port en sus)

Tous les Travaux de Typographie
scientifique et commerciale

CATALOGUES INDUSTRIELS

✠ ÉDITIONS D'ART ✠

Gauthier-Villars et Cie^{rs}

55, Quai des Grands-Augustins — PARIS (6^e)

Tél. : Fleurus 50-14 et 50-15

R. C. Seine 22520

IMPRIMEURS-ÉDITEURS

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DU BUREAU DES LONGITUDES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

Tous les Travaux de Photogravure
trait, simili, couleur

REPRODUCTION D'OUVRAGES ANCIENS
✠ PAR PROCÉDÉ SPÉCIAL ✠

