

Conditions d'utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- Le Conservatoire numérique communément appelé le Cnum constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n° 78-753 du 17 juillet 1978 :

- la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue ([Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - https://cnum.cnam.fr](https://cnum.cnam.fr))
- la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- les reproductions de documents protégés par le droit d'auteur, uniquement consultables dans l'enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

4- Pour obtenir la reproduction numérique d'un document du Cnum en haute définition, contacter [cnum\(at\)cnam.fr](mailto:cnum(at)cnam.fr)

5- L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment possible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d'utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

Auteur(s)	Moors, B. P. (18..-19..)
Titre	Théorie, vérification et correction des bascules dont le principe repose sur une combinaison de leviers peu flexibles et de tiges peu extensibles agissant les uns sur les autres
Adresse	La Haye : [s.n.], 1906
Collation	1 vol. ([6] p.-[2 bl.]-160 p.-[2 bl.]) ; 28 cm
Nombre de vues	178
Cote	CNAM-BIB MET 773 Res
Sujet(s)	Poids et mesures Balances
Thématique(s)	Machines & instrumentation scientifique
Typologie	Manuscrit
Note	Don du bureau de la métrologie, ministère de l'Économie, de l'Industrie et de l'Emploi, 2010.
Langue	Français
Date de mise en ligne	13/07/2018
Date de génération du PDF	06/02/2026
Recherche plein texte	Disponible
Notice complète	https://calames.abes.fr/pub/cnam.aspx#details?id=Calames-20165101755514411
Permalien	https://cnum.cnam.fr/redir?MET773RES

773

THÉORIE, VÉRIFICATION ET CORRECTION

DES

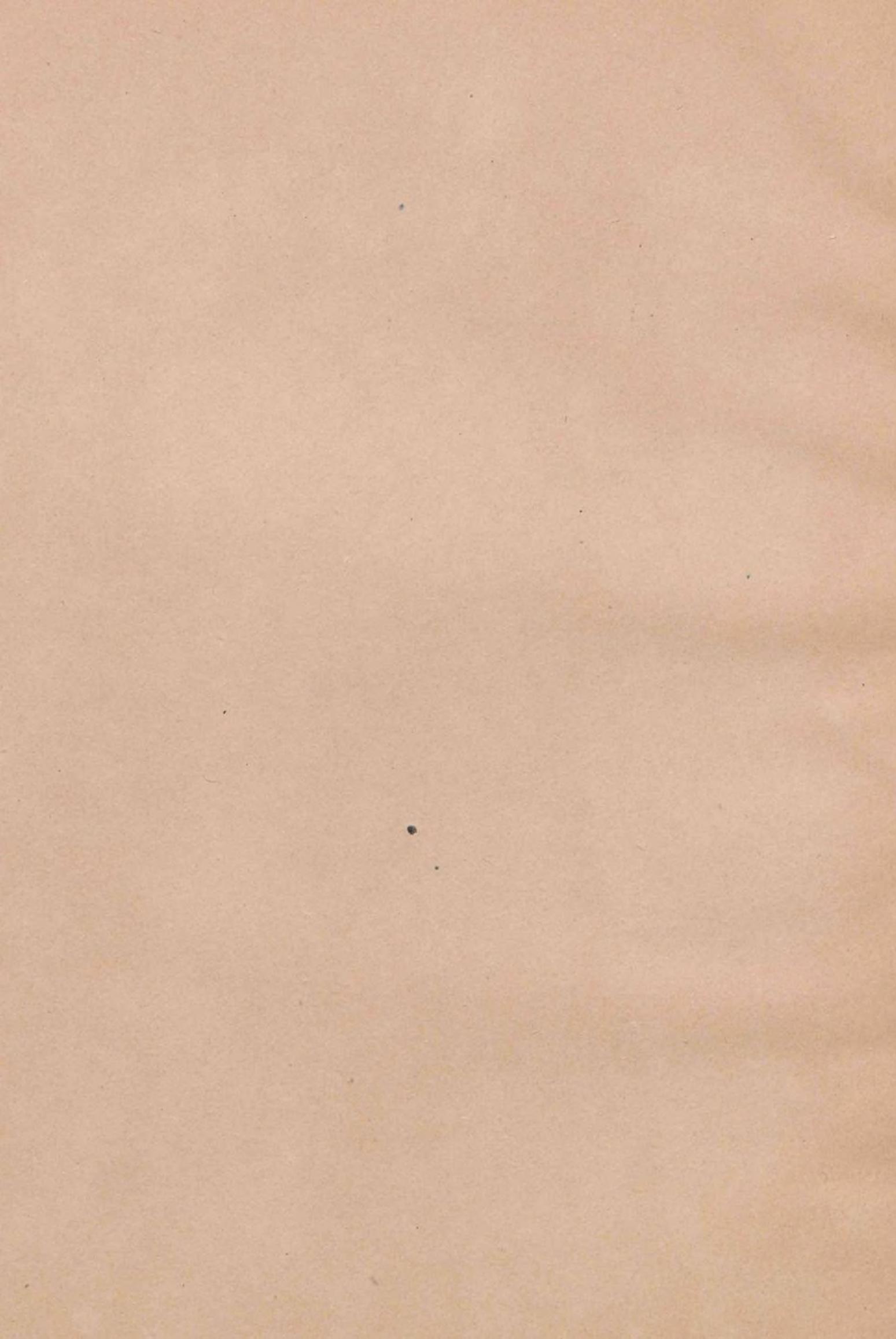
BASCULES

DONT LE PRINCIPE REPOSE SUR UNE COMBINAISON DE
LEVIERS PEU FLEXIBLES ET DE TIGES PEU EXTENSIBLES,
AGISSANT LES UNS SUR LES AUTRES,

PAR

B. P. MOORS,

Inspecteur du service des poids et mesures dans les Pays-Bas.



THÉORIE, VÉRIFICATION ET CORRECTION
DES
B A S C U L E S.

MET 773 (1) RES

THÉORIE, VÉRIFICATION ET CORRECTION

DES

BASCULES

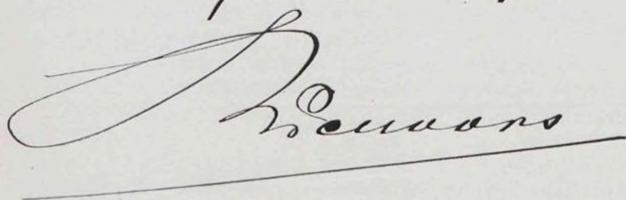
DONT LE PRINCIPE REPOSE SUR UNE COMBINAISON DE
LEVIERS PEU FLEXIBLES ET DE TIGES PEU EXTENSIBLES,
AGISSANT LES UNS SUR LES AUTRES,

PAR

B. P. MOORS,

Inspecteur du service des poids et mesures dans les Pays-Bas.

La Haye, Avril 1906.



BIB CNAME
RESERVE

IMPRIMERIE ci-devant E. J. BRILL — LEIDE.

TABLE DES MATIÈRES.

	Page.
<i>Description de la bascule de Quintenz.</i>	
<i>Exigences générales auxquelles la bascule doit répondre</i>	1.
<i>Le plan de mouvement de chaque point de la bascule doit être parallèle au plan de mouvement du fléau</i>	2.
<i>Pour que l'équilibre de la bascule, à chaque position du fléau, soit indépendant de la place de la charge sur le tablier, le tablier, pendant les oscillations du fléau, doit toujours se mouvoir parallèlement à sa position normale</i>	4.
<i>Recherches des conditions auxquelles doit satisfaire la bascule pour que le tablier, lorsque le fléau fait un angle d'inclinaison arbitraire, se déplace parallèlement à sa position normale, c'est-à-dire pour que a l'équilibre et b la sensibilité soient indépendants de la place qu'occupe la charge sur le tablier</i>	6.
<i>Construction de la coupe d'une bascule dont, pendant les oscillations du fléau, le tablier se déplace toujours parallèlement à sa position normale.</i>	14.
<i>Recherches des conditions auxquelles doit satisfaire la bascule pour que la sensibilité soit grande lorsque le fléau se trouve dans sa position normale</i>	18.
<i>Le Frottement.</i>	
<i>De préférence la charge doit être placée sur le tablier dans la proximité de l'axe du levier triangulaire supérieur</i>	23.
<i>Recherche concernant l'influence de petits défauts de construction de la bascule sur l'indépendance de l'équilibre et de la sensibilité de la place de la charge sur le tablier</i>	27.
<i>Formes de bascules dont la théorie équivaut à celle de la bascule de Quintenz.</i>	31.
<i>Vérification des bascules de Quintenz et de Roberval.</i>	
<i>a. Détermination, dans la bascule de Quintenz, de la grandeur des fautes dans la longueur des bras de levier, au moyen du pesage.</i>	38.
<i>b. Détermination, dans la bascule de Quintenz, de la grandeur des fautes dans la longueur des bras de levier, au moyen d'un niveau d'eau.</i>	41.
<i>c. Vérification de la bascule de Roberval</i>	43.
<i>d. Vérification de la bascule de comptoir de Roberval</i>	45.
<i>Notes</i>	49.
<i>Additionnées</i>	56.
<i>La Balance à bras égaux</i>	86.

§ 1.

Description de la bascule de Quintenz (*). (1) Exigences générales auxquelles la bascule doit répondre.

La *balance ordinaire* se compose d'un levier du premier genre à bras égaux.

La *balance romaine* se compose également d'un levier du premier genre mais à bras inégaux.

Les instruments de pesage dans lesquels s'offrent deux ou plus de deux leviers s'appellent *bascules*.

Les bascules où il n'y a que des leviers et des tringles rigides et inextensibles reposent toutes sur le même principe; de sorte que, si l'on connaît les conditions auxquelles doit satisfaire un seul type, il est facile d'en déduire celles auxquelles n'importe quel autre doit répondre aussi.

Comme la bascule de Quintenz est fort en usage et généralement connue, nous la prendrons comme point de départ de nos considérations. Faisons précéder ici, avant la discussion mathématique, une courte description de cet instrument.

La fig. I est une figure schématique et la fig. II une coupe verticale de la bascule de Quintenz dans sa longueur.

La bascule consiste en un *fléau* A D reposant, au moyen d'un *couteau d'appui* B, sur un *coussinet* fixe, fig. I. A l'extrémité A, est fixé un couteau qui, au moyen d'un coussinet, porte un *plateau* (ou *bassin*) destiné à recevoir le *poids P*, qui doit faire équilibre à une *charge à peser C*. Aux points F et D du fléau sont également fixés des couteaux auxquels pendent, également au moyen de coussinets, les *tiges* ou *tringles* F E et D G, qui portent les *leviers triangulaires*

(*) Les notes sont placées à la suite de l'opusculo. Un petit chiffre intercalé dans le texte correspond au chiffre de la note.

$H_1 h_1 E h H$ et $K_1 G K$, aux points E et G . Dans ces leviers triangulaires sont fixés, aux points E et G , des couteaux qui reposent sur des coussinets adaptés aux mêmes points E et G des tiges dont nous avons déjà fait mention; tandis que le levier triangulaire $K_1 G K$ porte, aux points H_1 et H , des couteaux sur lesquels repose, au moyen de coussinets, le levier triangulaire $H_1 h_1 E h H$. Enfin, le levier triangulaire $K_1 G K$ s'appuie sur des coussinets fixes au moyen de couteaux dont il est muni aux points K_1 et K .

Au levier triangulaire $H_1 h_1 E h H$, est fixé à demeure le *tablier* destiné à porter la charge C soumise au pesage.

Or, si la charge C est placée sur le tablier, le poids se partagera sur les trois couteaux H_1 , E et H . Les tractions en H_1 et H tâcheront d'abaisser le couteau D du fléau et la traction en E tâchera d'abaisser le couteau F , à quoi s'opposera le poids P dans le plateau.

Donc trois forces agissent sur le fléau, qui s'équilibreront à cause de la résistance du coussinet B , notamment une force en A , une en F et une en D .

Lors de l'emploi de la bascule, c'est une condition essentielle, dans la position normale du fléau (2), que l'équilibre entre la charge C et le poids P soit indépendant de la place qu'occupe la charge sur le tablier.

Dans les paragraphes 2—5, nous rechercherons à quelles conditions doit répondre la bascule pour que cette indépendance ait lieu; provisoirement nous ne prendrons pas en considération les frottements, dont nous ne nous occuperons qu'au § 7.

§ 2.

**Le plan de mouvement de chaque point de
la bascule doit être parallèle au plan
de mouvement du fléau.**

La fig. III est une représentation partielle de la bascule, dans laquelle le tablier $H_1 h_1 E h H$ et la tige $F E$ de la fig. I sont expressément omis. De même que dans la fig. II, A D

représente, dans la fig. III, le fléau, D G la tige à laquelle est suspendu le levier triangulaire K, G K et G k₀ une verticale qui, du point G, est abaissée sur l'axe K₁ K.

Nous supposons qu'il y ait équilibre entre la charge sur le tablier et le poids dans le plateau.

La charge sur le tablier fait que le couteau G est abaissé comme si, sur ce couteau, agissait une force verticale que nous représenterons par J (3).

Décomposons cette force J dans les deux forces I et I₁, dont I agit dans la direction du prolongement de D G, et I₁, dans une direction tombant verticalement sur D G.

Suivons d'abord la composante I. Il est évident que celle-ci, quelle que soit l'oscillation du fléau, doit toujours demeurer dans le plan de mouvement du fléau (4), sinon il en résulterait une torsion qui diminuerait la sensibilité et la stabilité de l'instrument. En outre la composante I, dans l'état d'équilibre de la bascule doit, autant que possible, tomber verticalement sur l'axe longitudinal du fléau, puisque, sans cela, la force transmise par elle aurait pour effet de presser les couteaux contre les coussinets, chose qui doit nuire aussi bien à la stabilité de l'instrument qu'à la conservation des couteaux et des coussinets.

Nous acceptons donc que la tige D G se trouve dans le plan de mouvement du fléau. Si l'axe K₁ K ne tombe pas verticalement sur ce plan, alors la seconde composante de J, c'est-à-dire I₁, ne tombe pas verticalement sur K₁ K. Il en résulte que les couteaux K₁ et K ont une tendance à glisser au delà des coussinets, d'abord dans la direction K₁ K et secondement dans une direction latérale. Ces deux actions disparaissent lorsque l'axe K₁ K tombe verticalement sur le plan de mouvement du fléau ; et c'est donc là la position la plus avantageuse pour l'axe K₁ K. En outre la composante I₁ doit être aussi petite que possible, puisqu'elle tend à faire glisser le levier triangulaire au delà des coussinets K₁ et K dans la direction de k₀ G ; par conséquent, dans l'état d'équilibre normal, la tige D G doit être verticale, et le fléau A D doit être horizontal.

Pour la même raison, il est évident qu'également la tige F E, fig. I et II, doit se trouver dans le plan de mouvement du fléau et doit être dans une direction verticale lorsque la bascule se trouve dans un état d'équilibre normal; et l'axe H₁ H et les couteaux de la bascule doivent être perpendiculaires à ce plan.

Nous acceptons donc dans la suite que la bascule répond à ces conditions essentielles, que les tiges F E et D G se trouvent dans le plan de mouvement du fléau et que les couteaux et les axes H₁ H et K₁ K sont perpendiculaires à ce plan.

§ 3.

Pour que l'équilibre de la bascule, à chaque position du fléau, soit indépendant de la place de la charge sur le tablier, le tablier, pendant les oscillations du fléau, doit toujours se mouvoir parallèlement à sa position normale.

La distance entre les couteaux A et F, fig. I, et la ligne B D ou son prolongement, la distance entre l'axe H₁ H et le plan K₁ G K, les directions et les longueurs des tiges F E et D G, ainsi que les angles que forment les lignes A B, B F, B D et les plans K₁ G K et H₁ E H avec le plan horizontal, restent entièrement indéterminés.

Nous admettons que la bascule est dans l'état de repos, c'est-à-dire que toutes les forces en action se font équilibre. Nous fixons la distance entre la verticale qui passe en E et la ligne H₁ H égale à b , la distance entre la verticale qui passe par le centre de gravité de la charge et la ligne H₁ H égale à x , la distance entre cette même verticale et le plan de mouvement du fléau A D E h₀ k₀ égale à y , et enfin H₁ h₀ = h₁ et H h₀ = h.

La charge C (5) se partage entre les points H₁, E et H, comme si, sur ces points, agissaient des forces verticales;

nous nommerons ces forces »pression en H_1 », »pression en E » et »pression en H .»

Afin de déterminer l'équation d'équilibre entre ces pressions et le poids P , c'est-à-dire les conditions d'équilibre entre C et P , nous donnons au fléau un angle d'inclinaison infiniment petit, grâce à quoi les points H_1 , E , H et A parcourront des chemins infiniment petits.

Si nous nommons les projections sur la ligne verticale des chemins parcourus par les points H_1 , E , H et A , respectivement »élévation H_1 », »élévation E », etc., alors, d'après le principe des vitesses virtuelles, l'équation d'équilibre se traduit par

$$(\text{pression en } H_1) \cdot (\text{élévation } H_1) + (\text{pression en } E) \cdot (\text{élévation } E) + \\ + (\text{pression en } H) \cdot (\text{élévation } H) + P \cdot \text{élévation } A = 0;$$

a (pag. 56) d'où l'on obtient

$$\frac{x}{b} \cdot C \cdot \text{élévation } E + \frac{C(h_1 \cdot \text{élévation } H + h \cdot \text{élévation } H_1)}{h + h_1} \cdot \left\{ 1 - \frac{x}{b} \right\} - \\ - C \frac{(\text{élévation } H - \text{élévation } H_1)}{h + h_1} \cdot y \left\{ 1 - \frac{x}{b} \right\} + P \cdot \text{élévation } A = 0$$

L'équation doit tout d'abord être indépendante de y , parce que l'équilibre doit être indépendant de tout déplacement de la charge dans la direction perpendiculaire au plan du fléau, donc avant tout il faut que »élévation H_1 » = »élévation H », grâce à quoi l'équation d'équilibre, indépendante de y , devient:

$$\frac{x}{b} \cdot C (\text{élévation } E - \text{élévation } H) + C \cdot \text{élévation } H + P \cdot \text{élévation } A = 0$$

L'équation doit être aussi indépendante de x , parce que l'équilibre ne peut pas dépendre d'un déplacement de la charge sur le tablier dans une direction parallèle au plan du fléau, donc il faut aussi que »élévation E » = »élévation H », grâce à quoi l'équation d'équilibre, indépendante de x et de y , devient:

$$C \cdot \text{élévation } H + P \cdot \text{élévation } A = 0.$$

C'est pourquoi il faut, en vue de l'indépendance dont nous nous occupons, que »élévation H_1 » = »élévation H » = »élévation E », c'est-à-dire que le tablier, pendant que le fléau

fait l'angle d'inclinaison infiniment petit, doit se déplacer parallèlement à sa position normale. Maintenant, pour que l'équilibre de la bascule, *dans quelque position que ce soit parmi les positions infiniment nombreuses dans lesquelles peut se placer le fléau en mettant quelque poids additionnel dans le plateau*, soit indépendant de x et de y , il faut que l'équilibre, quelle que soit la position du fléau, satisfasse à la dernière équation. D'où il résulte, que, pendant que le fléau parcourt un angle d'inclinaison arbitraire, le tablier doit se mouvoir parallèlement à sa position normale, et c'est ce qu'il fallait démontrer.

Inversement, dans toute bascule dont le tablier pendant les oscillations du fléau se déplace parallèlement à sa position normale, il sera satisfait à la dernière équation; c'est pourquoi aussi la sensibilité de cette bascule, de même que son équilibre dans la position normale, seront indépendants de la place qu'occupent les marchandises sur le tablier.

§ 4.

Recherches des conditions auxquelles doit satisfaire la bascule pour que le tablier, lorsque le fléau fait un angle d'inclinaison arbitraire, se déplace parallèlement à sa position normale, c'est-à-dire pour que a l'équilibre et b la sensibilité soient indépendants de la place qu'occupe la charge sur le tablier.

Si, fig. I, pendant les oscillations du fléau, le tablier $h_1 E h$ se déplace parallèlement à sa position normale, alors évidemment la ligne $h_0 E$, de la coupe de la bascule avec le plan de mouvement du fléau, se déplacera toujours parallèlement à sa position normale.

L'inverse est également vrai. Car le mouvement du point h_0 est tout à fait indépendant de la longueur de la ligne $K_1 K$; et, en outre, il est évident que tous les points de l'horizontale $H_1 h_0 H$ auront toujours des mouvements égaux

et parallèles dont les projections sur un plan vertical seront toujours réciproquement égales.

Si donc, pendant les oscillations du fléau, la ligne $h_0 E$ demeure parallèle à sa direction normale, alors aussi le tablier $H_1 E H$ doit demeurer parallèle à sa position normale.

Il nous suffira donc de rechercher quelles sont les conditions auxquelles doit satisfaire la coupe de la bascule avec le plan de mouvement du fléau, pour que la ligne $h_0 E$, en même temps que le fléau fait un angle d'inclinaison, se déplace parallèlement à sa direction normale.

Soit fig. IV cette coupe.

Ici, voyez fig. II, les points A et F sont en dehors de la ligne BD, le point H en dehors de la ligne GK, et les directions et les dimensions des lignes FE et DG sont prises assez arbitrairement.

Les lettres identiques dans les figures II et IV ont la même signification; de sorte que B et K représentent des points fixes et que la ligne AB et le point F sont reliés à la ligne BD, de même que le point H est relié à la ligne GK; c'est pourquoi les distances des points A, B, F et D entre eux, de même que celles des points K, H et G, sont constantes. Les lignes BD, DG et GK, nous les considérons comme unies par des charnières en D et G, de même que le sont les lignes BF, FE, EH et HK en F, E et H; tandis que la ligne brisée ABFD repose sur une charnière fixe au point fixe B, et la ligne brisée GHK au point fixe K; de sorte que lorsque le point A se déplace, les lignes brisées BDGK et BFEHK changent en même temps de forme. Le tablier est fixé à la ligne EH, et la charge C agit sur le point M de la ligne EH et nous établissons $HM = x$. Les bras de fléau DB et AB forment un angle de $(180^\circ - \alpha)$, les bras de fléau DB et FB un angle de α_1 , et les bras de levier HK et GK un angle de α_2 , tandis qu'en cas d'équilibre entre la charge C et le poids P suspendu en A, le bras BF forme l'angle ϕ avec l'horizontale. Les autres angles, que les lignes susdites forment avec l'horizontale, sont donnés dans la figure. Les dimensions des lignes $AB = a$, $BD = e$, $DG = s$, $GK = r$, $BF = e_1$, $FE = s_1$, $EH = b$, $HK = r_1$ et $BK = n$ sont

constantes, de même que les angles α , α_1 , α_2 et Σ ; tandis que provisoirement tous les autres angles, notamment ϕ , δ , γ , δ_1 et β sont considérés comme variables. Soit, à l'avenir, l'angle ϕ considéré comme le variable indépendant.

Soit encore P_0 le poids du plateau suspendu en A, Z le poids et Z le centre de gravité du fléau, $BZ = z$ et l'angle que BZ fait avec l'horizontale égal à τ ; ensuite Z_1 le poids et Z_1 le centre de gravité du levier triangulaire GKH; $KZ_1 = z_1$ et τ_1 l'angle que la ligne KZ_1 fait avec l'horizontale; représentons enfin le poids des tiges DG et FE par S et S_1 et celui du tablier par B , agissant en D_1 , F_1 et E_1 , soit $GD_1 = t$, $EF_1 = t_1$ et $HE_1 = c$.

a. L'Equilibre.

D'après le principe des vitesses virtuelles, la condition d'équilibre est représentée par l'équation

$$\begin{aligned} & Z_1 \cdot d\{\varepsilon_1 \sin \tau_1\} + S \cdot d\{t \sin \delta + r \sin \gamma\} + \\ & + B \cdot d\{c \sin \beta + r_1 \sin(\gamma + \alpha_2)\} + C \cdot d\{x \sin \beta + r_1 \sin(\gamma + \alpha_2)\} + \\ & + S_1 \cdot d\{t_1 \sin \delta_1 + b \sin \beta + r_1 \sin(\gamma + \alpha_2)\} + Z \cdot d\{z \sin \tau\} - \\ & - (P + P_0) \cdot d\{a \sin(\alpha + \alpha_1 + \phi)\} = 0; \end{aligned}$$

ainsi, puisque $d\tau = d\phi$ et $d\tau_1 = d\gamma$,

$$\begin{aligned} & Z_1 z_1 \cos \tau_1 \cdot \frac{d\gamma}{d\phi} + S \{t \cos \delta \cdot \frac{d\delta}{d\phi} + r \cos \gamma \cdot \frac{d\gamma}{d\phi}\} + \\ & + B \left\{ c \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\phi} + r_1 \cos(\gamma + \alpha_2) \frac{d\gamma}{d\phi} \right\} + \\ & + C \left\{ x \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\phi} + r_1 \cos(\gamma + \alpha_2) \frac{d\gamma}{d\phi} \right\} + \\ & + S_1 \left\{ t_1 \cos \delta_1 \cdot \frac{d\delta_1}{d\phi} + b \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\phi} + r_1 \cos(\gamma + \alpha_2) \cdot \frac{d\gamma}{d\phi} \right\} + \\ & + Z z \cos \tau - (P + P_0) a \cos(\alpha + \alpha_1 + \phi) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & St \cos \delta \cdot \frac{d\delta}{d\phi} + S_1 t_1 \cos \delta_1 \cdot \frac{d\delta_1}{d\phi} + \\ & + \left\{ Z_1 z_1 \cos \tau_1 + S r \cos \gamma + (B + C + S_1) r_1 \cos(\gamma + \alpha_2) \right\} \frac{d\gamma}{d\phi} + \\ & + (B c + C x + S_1 b) \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\phi} + Z z \cos \tau - \\ & - (P + P_0) a \cos(\alpha + \alpha_1 + \phi) = 0 . . . (1) \end{aligned}$$

A cette équation, il doit être satisfait indépendamment de x ; l'équation (1) renferme donc les deux équations de condition :

$$\frac{d\beta}{d\phi} = 0 \quad (6) \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

et

$$S t \cos \delta \cdot \frac{d\delta}{d\phi} + S_1 t_1 \cos \delta_1 \cdot \frac{d\delta_1}{d\phi} + \\ + \left\{ Z_1 z_1 \cos \tau_1 + S r \cos \gamma + (B + C + S_1) r_1 \cos (\gamma + \alpha_2) \right\} \cdot \frac{d\gamma}{d\phi} + \\ + Z z \cos \tau - (P + P_0) a \cos (\alpha + \alpha_1 + \phi) = 0. \quad (3)$$

L'équation (2) donne la condition à laquelle, *en cas de position normale du fléau*, le résultat du pesage sera indépendant de la place de la charge sur le tablier; l'équation (3) donne, dans cette position de la bascule, une équation entre C et P .

b. La Sensibilité.

La valeur du rapport $\frac{d\phi}{dP}$ exprime la mesure de sensibilité; on obtient cette valeur en différentiant l'équation d'équilibre (1).

Nous trouvons

$$S t \cos \delta \cdot \frac{d^2 \delta}{d\phi^2} - S t \sin \delta \left(\frac{d\delta}{d\phi} \right)^2 + S_1 t_1 \cos \delta_1 \cdot \frac{d^2 \delta_1}{d\phi^2} - S_1 t_1 \sin \delta_1 \left(\frac{d\delta_1}{d\phi} \right)^2 + \\ + \left\{ Z_1 z_1 \cos \tau_1 + S r \cos \gamma + (B + C + S_1) r_1 \cos (\gamma + \alpha_2) \right\} \frac{d^2 \gamma}{d\phi^2} - \\ - \left\{ Z_1 z_1 \sin \tau_1 + S r \sin \gamma + (B + C + S_1) r_1 \sin (\gamma + \alpha_2) \right\} \left(\frac{d\gamma}{d\phi} \right)^2 + \\ + (B c + C x + S_1 b) \cos \beta \cdot \frac{d^2 \beta}{d\phi^2} - (B c + C x + S_1 b) \sin \beta \cdot \left(\frac{d\beta}{d\phi} \right)^2 - \\ - Z z \sin \tau + (P + P_0) a \sin (\alpha + \alpha_1 + \phi) - a \cos (\alpha + \alpha_1 + \phi) \frac{dP}{d\phi} = 0. \quad (4)$$

Si nous admettons qu'on ait satisfait à la condition (2), alors le terme avec $\left(\frac{d\beta}{d\phi} \right)^2$ disparaît; et, comme la sensibilité doit être indépendante de x , la dernière équation se transforme dans les deux équations de condition suivantes:

$$\frac{d^2 \beta}{d \phi^2} = 0 \quad (7) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

et divisant par $a \cos(\alpha + \alpha_1 + \phi)$,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\phi} = & (P + P_0) \operatorname{tg}(\alpha + \alpha_1 + \phi) + \frac{S t \cos \delta \cdot \frac{d^2 \delta}{d\phi^2} - S t \sin \delta \left(\frac{d\delta}{d\phi} \right)^2}{a \cos(\alpha + \alpha_1 + \phi)} + \\ & + \frac{S_1 t_1 \cos \delta_1 \cdot \frac{d^2 \delta_1}{d\phi^2} - S_1 t_1 \sin \delta_1 \cdot \left(\frac{d\delta_1}{d\phi} \right)^2}{a \cos(\alpha + \alpha_1 + \phi)} + \\ & + \frac{\{Z_1 z_1 \cos \tau_1 + S r \cos \gamma + (B + C + S_1) r_1 \cos(\gamma + \alpha_2)\} \frac{d^2 \gamma}{d\phi^2}}{a \cos(\alpha + \alpha_1 + \phi)} - \\ & - \frac{\{Z_1 z_1 \sin \tau_1 + S r \sin \gamma + (B + C + S_1) r_1 \sin(\gamma + \alpha_2)\} \left(\frac{d\gamma}{d\phi} \right)^2 - Z z \sin \tau}{a \cos(\alpha + \alpha_1 + \phi)} \quad (6) \end{aligned}$$

L'équation (5) exprime la condition à laquelle la sensibilité, *en cas de position normale du fléau*, sera indépendante de la place de la charge sur le tablier; l'équation (6) donne l'inverse du coefficient de sensibilité dans cette position de la bascule.

Le résultat de notre calcul est donc que, pour construire une bascule telle que lorsque le fléau est dans sa position normale aussi bien l'équilibre que la sensibilité soient indépendants de x , la bascule doit répondre à deux exigences, c'est-à-dire que $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$ et que $\frac{d^2\beta}{d\phi^2} = 0$.

Pour pouvoir apprécier l'importance de ces conditions, nous devons exprimer les quotients différentiels $\frac{d\delta_1}{d\phi}$, $\frac{d\beta}{d\phi}$, $\frac{d\gamma}{d\phi}$ et $\frac{d\delta}{d\phi}$ et mettre ensuite

$$\frac{d\beta}{d\phi} = 0 \text{ et } \frac{d^2\beta}{d\phi^2} = 0.$$

A cet effet, sont nécessaires *quatre* équations que nous obtenons en projetant les lignes fermées B F E H K B et B D G K B sur une horizontale; alors nous obtenons

$$-e_1 \cos \phi + s_1 \cos \delta_1 + b \cos \beta + r_1 \cos (\gamma + \alpha_2) = n \cos \Sigma . \quad (7)$$

$$-e_1 \sin \phi + s_1 \sin \delta_1 + b \sin \beta + r_1 \sin (\gamma + \alpha_2) = n \sin \Sigma . \quad (8)$$

$$e \cos(\phi + \alpha_1) + s \cos \delta + r \cos \gamma = n \cos \Sigma \dots \dots \quad (9)$$

$$\text{et} - e \sin(\phi + \alpha_1) + s \sin \delta + r \sin \gamma = n \sin \Sigma \dots \dots \quad (10)$$

Et en différentiant ces équations,

$$- e_1 \sin \phi - s_1 \sin \delta_1 \cdot \frac{d \delta_1}{d \phi} - b \sin \beta \cdot \frac{d \beta}{d \phi} - r_1 \sin(\gamma + \alpha_2) \cdot \frac{d \gamma}{d \phi} = 0 \quad (11)$$

$$- e_1 \cos \phi + s_1 \cos \delta_1 \cdot \frac{d \delta_1}{d \phi} + b \cos \beta \cdot \frac{d \beta}{d \phi} + r_1 \cos(\gamma + \alpha_2) \cdot \frac{d \gamma}{d \phi} = 0 \quad (12)$$

$$- e \sin(\phi + \alpha_1) - s \sin \delta \cdot \frac{d \delta}{d \phi} - r \sin \gamma \cdot \frac{d \gamma}{d \phi} = 0 \dots \dots \quad (13)$$

$$\text{et} - e \cos(\phi + \alpha_1) + s \cos \delta \cdot \frac{d \delta}{d \phi} + r \cos \gamma \cdot \frac{d \gamma}{d \phi} = 0 \dots \dots \quad (14)$$

En multipliant (11) par $\cos \delta_1$ et (12) par $\sin \delta_1$ nous obtenons en additionnant:

$$- e_1 \sin(\phi + \delta_1) - b \sin(\beta - \delta_1) \cdot \frac{d \beta}{d \phi} - r_1 \sin(\gamma + \alpha_2 - \delta_1) \cdot \frac{d \gamma}{d \phi} = 0$$

d'où

$$\frac{d \beta}{d \phi} = \frac{e_1 \sin(\delta_1 + \phi) - r_1 \sin(\delta_1 - \gamma - \alpha_2) \cdot \frac{d \gamma}{d \phi}}{b \sin(\delta_1 - \beta)} \dots \dots \quad (15)$$

En multipliant (13) par $\cos \delta$ et (14) par $\sin \delta$ et en additionnant ensuite, nous obtenons:

$$- e \sin(\phi + \alpha_1 + \delta) - r \sin(\gamma - \delta) \cdot \frac{d \gamma}{d \phi} = 0$$

d'où

$$\frac{d \gamma}{d \phi} = \frac{e \sin(\delta + \phi + \alpha_1)}{r \sin(\delta - \gamma)} \dots \dots \dots \quad (16)$$

de sorte que (15) devient:

$$\frac{d \beta}{d \phi} = \frac{e_1 \sin(\delta_1 + \phi) - \frac{r_1 e \sin(\delta_1 - \gamma - \alpha_2) \cdot \sin(\delta + \phi + \alpha_1)}{r \sin(\delta - \gamma)}}{b \sin(\delta_1 - \beta)} \dots \dots \quad (17)$$

Si maintenant $\frac{d \beta}{d \phi} = 0$, alors le numérateur du second membre de (17) doit être égal à 0, tandis que le dénominateur garde une valeur finie; donc la condition $\frac{d \beta}{d \phi} = 0$ équivaut à la relation:

$$\frac{e_1 \sin(\delta_1 + \phi)}{r_1 \sin(\delta_1 - \gamma - \alpha_2)} = \frac{e \sin(\delta + \phi + \alpha_1)}{r \sin(\delta - \gamma)} . . . (18)$$

ou, en d'autres mots: »les projections de B F et K H sur une perpendiculaire à la ligne F E doivent être proportionnelles aux projections de B D et K G sur une perpendiculaire à la ligne D G.”

Si inversement cette relation existe, alors $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$, ce qui ressort immédiatement de (17), à moins qu'égalelement $\sin(\delta_1 - \beta) = 0$, c'est-à-dire $\beta = \delta_1$, ou $\delta_1 - \beta = 180^\circ$ (c.-à-d. $\beta = \delta_1 - 180^\circ$), ou $\delta_1 - \beta = -180^\circ$ (c.-à-d. $\beta = \delta_1 + 180^\circ$). Comme cependant aucune de ces valeurs de β ne peut se présenter dans la bascule que nous considérons, et que, par conséquent, $\sin(\delta_1 - \beta)$ ne peut pas être égal à zéro, $\frac{d\beta}{d\phi}$ sera donc aussi = 0, si la relation (18) existe.

On obtient l'expression pour $\frac{d^2\beta}{d\phi^2}$ en différentiant l'équation qui précède immédiatement (15); nous trouvons alors

$$\begin{aligned} & -e_1 \cos(\delta_1 + \phi) \cdot \frac{d\phi + d\delta_1}{d\phi} + b \sin(\delta_1 - \beta) \frac{d^2\beta}{d\phi^2} + \\ & + b \cos(\delta_1 - \beta) \cdot \frac{d\beta}{d\phi} \cdot \frac{d\delta_1 - d\beta}{d\phi} + r_1 \sin(\delta_1 - \gamma - \alpha_2) \frac{d^2\gamma}{d\phi^2} + \\ & + r_1 \cos(\delta_1 - \gamma - \alpha_2) \cdot \frac{d\gamma}{d\phi} \cdot \frac{d\delta_1 - d\gamma}{d\phi} = 0 \end{aligned}$$

ou, en admettant qu'on ait satisfait à la condition $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$ et donc aussi à (17):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\beta}{d\phi^2} = & \frac{e_1 \cos(\delta_1 + \phi) \cdot \frac{d\phi + d\delta_1}{d\phi} - r_1 \sin(\delta_1 - \gamma - \alpha_2) \frac{d^2\gamma}{d\phi^2}}{b \sin(\delta_1 - \beta)} - \\ & - \frac{r_1 \cos(\delta_1 - \gamma - \alpha_2) \cdot \frac{d\gamma}{d\phi} \cdot \frac{d\delta_1 - d\gamma}{d\phi}}{b \sin(\delta_1 - \beta)} . . . (19) \end{aligned}$$

Dans cette expression, nous devons encore exprimer les quotients différentiels dans les données.

A cet effet, nous obtenons, en additionnant (13) et (14), après avoir préalablement multiplié (13) par $\cos \gamma$ et (14) par $\sin \gamma$,

$$\frac{d \delta}{d \phi} = \frac{e \sin(\gamma + \alpha_1 + \phi)}{s \sin(\gamma - \delta)}; \quad \dots \quad (20)$$

par l'addition de (11) et (12), après avoir multiplié (11) par $\cos(\gamma + \alpha_2)$ et (12) par $\sin(\gamma + \alpha_2)$ en supposant que $\frac{d \beta}{d \phi} = 0$ et que, par conséquent, on a satisfait à la condition (18),

$$\frac{d \delta_1}{d \phi} = \frac{e_1 \sin(\gamma + \alpha_2 + \phi)}{s_1 \sin(\gamma + \alpha_2 - \delta_1)}, \quad \dots \quad (21)$$

et en différentiant (16), en prenant en considération (20),

$$\frac{d^2 \gamma}{d \phi^2} = \frac{s \left(\frac{d \delta}{d \phi} \right)^2 + e \cos(\delta + \phi + \alpha_1) + r \cos(\delta - \gamma) \left(\frac{d \gamma}{d \phi} \right)^2}{r \sin(\delta - \gamma)}. \quad (22)$$

De sorte que, en substituant dans (19) la valeur que nous avons obtenue pour $\frac{d^2 \gamma}{d \phi^2}$, en prenant en considération (16), (18) et (21), nous trouvons que la condition $\frac{d^2 \beta}{d \phi^2} = 0$ équivaut à la relation

$$\begin{aligned} & \frac{r \sin(\delta - \gamma)}{r_1 \sin(\delta_1 - \gamma - \alpha_2)} = \\ & = \frac{e \cos(\delta + \phi + \alpha_1) + s \left(\frac{d \delta}{d \phi} \right)^2 + r \cos(\delta - \gamma) \left(\frac{d \gamma}{d \phi} \right)^2}{e_1 \cos(\delta_1 + \phi) + s_1 \left(\frac{d \delta_1}{d \phi} \right)^2 + r_1 \cos(\delta_1 - \gamma - \alpha_2) \left(\frac{d \gamma}{d \phi} \right)^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Si ce rapport existe en sens inverse, alors $\frac{d^2 \beta}{d \phi^2}$ sera aussi égal à zéro, à moins qu'en même temps $\sin(\delta_1 - \beta) = 0$, ce qui, comme nous venons de le faire remarquer, ne peut pas être le cas dans la bascule dont nous nous occupons en ce moment.

Les équations (18) et (23) expriment donc, dans les données, les conditions auxquelles la bascule doit répondre pour

que, lorsque le fléau se trouve dans la position normale, l'équilibre et la sensibilité soient indépendants de la place de la charge sur le tablier.

§ 5.

Construction de la coupe d'une bascule dont, pendant les oscillations du fléau, le tablier se déplace toujours parallèlement à sa position normale.

Nous avons prouvé, dans le paragraphe précédent, que, lorsque le fléau est dans sa position normale, l'équilibre et la sensibilité sont indépendants de la place de la charge sur le tablier, pourvu qu'il ait été satisfait aux conditions (18) et (23).

Les équations (7), (8), (9) et (10) font dépendre les grandeurs qui se présentent dans (18) et (23) de *quatre* conditions, de sorte qu'en tout il existe *six* conditions entre toutes les grandeurs de la bascule.

Donc il y a dans la bascule — en ne comptant pas, il est vrai, le poids des parties mobiles — en tout *dix-huit* grandeurs, à savoir: $e_1, \Phi, s_1, \delta_1, b, \beta, r_1, \alpha_2, r, \gamma, s, \delta, e, \alpha_1, n, \Sigma, a$ et α , qui dépendent donc de *six* conditions seulement, de sorte que nous pouvons encore admettre arbitrairement *douze* conditions, qui sont indépendantes les unes des autres et également des six conditions connues.

Le problème: Construire une bascule dont, lorsque le fléau se trouve dans la position normale, l'équilibre et la sensibilité soient indépendants de la place de la charge sur le tablier, est donc très indéterminé.

Si provisoirement nous admettons, pour obtenir de simples équations de condition, p. e.

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0 \text{ et } \frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r},$$

alors (18) devient

$$\frac{\sin(\delta_1 + \Phi)}{\sin(\delta_1 - \gamma)} = \frac{\sin(\delta + \Phi)}{\sin(\delta - \gamma)} \quad \dots \quad (24)$$

à quoi on satisfait e. a. en posant

$$\delta_1 = \delta \quad (8).$$

Si nous posons dans (23) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\delta_1 = \delta$ et $e_1 r = r_1 e$, alors nous obtenons

$$r s_1 \left(\frac{d \delta_1}{d \phi} \right)^2 = r_1 s \left(\frac{d \delta}{d \phi} \right)^2;$$

et, en transférant de (20) et (21) dans la dernière expression les valeurs de $\frac{d \delta}{d \phi}$ et $\frac{d \delta_1}{d \phi}$,

$$\frac{s_1}{s} = \frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}.$$

De $\delta_1 = \delta$, il résulte, étant données les conditions arbitraires

$\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ et $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$, que les tiges D G et F E de la figure IV doivent être parallèles, comme il est indiqué dans la fig. V; et, comme s et s_1 sont proportionnels à e et e_1 , les points B, E et G tombent dans une ligne droite.

Il résulte ensuite que

$$\frac{s}{s - s_1} = \frac{r}{r - r_1} = \frac{G K}{G H} = \frac{G B}{G E};$$

donc EH doit être parallèle à BK et $\beta = \Sigma$.

Enfin nous avons :

$$b : n = (r - r_1) : r \text{ ou } b = n \cdot \frac{r - r_1}{r}.$$

Les égalités obtenues $\delta_1 = \delta$, $\beta = \Sigma$, etc. ne valent jusqu'ici que pour la position normale du fléau; elles demeurent cependant valables quelle que soit la position du fléau, ce qui peut être indiqué de la façon suivante:

$$\text{Admettons } \frac{s_1}{s} = \frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r} = \lambda$$

et par conséquent

$$b = n \cdot \frac{r - r_1}{r} = n \left(1 - \frac{r_1}{r} \right) = n (1 - \lambda);$$

ensuite $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$, égalités qui évidemment persistent quelle que soit la position de la figure, du moment qu'il y a

été satisfait dans une position déterminée; et, si nous substituons ces valeurs dans (7) et (8), nous trouvons:

$$\lambda e \cos \phi + \lambda s \cos \delta_1 + (1 - \lambda) n \cos \beta + \lambda r \cos \gamma = n \cos \Sigma$$

et

$$-\lambda e \sin \phi + \lambda s \sin \delta_1 + (1 - \lambda) n \sin \beta + \lambda r \sin \gamma = n \sin \Sigma.$$

De ces équations, nous soustrayons respectivement les équations (9) et (10) multipliées par λ , alors

$$\lambda s (\cos \delta_1 - \cos \delta) + (1 - \lambda) n \cos \beta = (1 - \lambda) n \cos \Sigma$$

et

$$\lambda s (\sin \delta_1 - \sin \delta) + (1 - \lambda) n \sin \beta = (1 - \lambda) n \sin \Sigma;$$

ou

$$\lambda s (\cos \delta_1 - \cos \delta) = (1 - \lambda) n (\cos \Sigma - \cos \beta)$$

et

$$\lambda s (\sin \delta_1 - \sin \delta) = (1 - \lambda) n (\sin \Sigma - \sin \beta);$$

en place de quoi, nous pouvons aussi écrire:

$$\lambda s \sin^{1/2}(\delta_1 + \delta) \cdot \sin^{1/2}(\delta_1 - \delta) =$$

$$= (1 - \lambda) n \sin^{1/2}(\Sigma + \beta) \cdot \sin^{1/2}(\Sigma - \beta)$$

et

$$\lambda s \sin^{1/2}(\delta_1 - \delta) \cdot \cos^{1/2}(\delta_1 + \delta) =$$

$$= (1 - \lambda) n \sin^{1/2}(\Sigma - \beta) \cdot \cos^{1/2}(\Sigma + \beta).$$

Ces équations sont générales et sont valables quelle que soit la position de la figure. Si nous n'avons pas $\delta_1 = \delta$ et $\beta = \Sigma$, alors nous obtenons en divisant:

$$\operatorname{tg}^{1/2}(\delta_1 + \delta) = \operatorname{tg}^{1/2}(\Sigma + \beta),$$

donc

$${}^{1/2}(\delta_1 + \delta) = {}^{1/2}(\Sigma + \beta) \pm n\pi,$$

ou

$$\delta_1 + \delta = \Sigma + \beta \pm 2n\pi.$$

Si nous supposons qu'uniquement dans la position normale $\delta_1 = \delta$ et $\beta = \Sigma$, alors est valable, pour toutes les positions excepté la position normale, la relation

$$\delta_1 + \delta = \Sigma + \beta \pm 2n\pi.$$

Mais, si cette relation est valable pour toutes les autres positions, alors elle doit l'être aussi pour la position normale, attendu que le mouvement est continu et qu'il ne peut se présenter de modifications brusques; de sorte que cette rela-

tion, qui existe de façon *continue*, ne peut être suspendue lorsque le fléau revient dans sa position normale.

Cette relation doit donc également être valable dans la position où $\beta = \Sigma$ et $\delta_1 = \delta$; donc

$$\delta = \Sigma \pm n\pi,$$

ce qui, comme il résulte de la figure, aboutit à l'absurde. Il ne reste donc d'autre ressource que de poser

$$\delta_1 = \delta \text{ et } \beta = \Sigma$$

pour toutes les positions de la figure, par quoi il est satisfait aux dernières équations.

Suit ici la construction complète de la figure:

Nous prenons, fig. V, arbitrairement les points B et K, c'est-à-dire les grandeurs n et Σ ; tirons les lignes BD et KG dans des directions arbitraires, et y prenons arbitrairement les points F, D et G, par quoi nous avons admis arbitrairement les *sept* grandeurs n , Σ , φ , γ , e_1 , e et r . Nous joignons D et G, et tirons en F une ligne parallèle à DG; sur cette ligne parallèle, le point E doit être placé de telle façon que $FE : DG = BF : BD$; à cet effet, nous joignons B et G; E est le point d'intersection de BG avec la parallèle à DG tirée du point F. Ensuite, de E, nous tirons une ligne parallèle à BK, parce que nous devons avoir $\beta = \Sigma$; H est le point d'intersection de cette ligne avec GK. Comme $\beta = \Sigma$ demeure constant pendant les oscillations du fléau, le tablier se déplace parallèlement à sa position normale. Le point E décrit donc un cercle autour d'un point fixe K_1 , qui est déterminé par EK_1 , que nous admettons égal et parallèle à HK. Le quadrilatère EHK K_1 est donc toujours un parallélogramme. Nous pouvons encore prendre la ligne BA dans une direction arbitraire et lui donner la longueur que nous voulons.

§ 6.

Recherches des conditions auxquelles doit satisfaire la bascule pour que la sensibilité soit grande lorsque le fléau se trouve dans sa position normale.

Nous pouvons évidemment nous contenter ici de considérer la coupe du levier triangulaire et du tablier avec le plan de mouvement du fléau, car, quelles que soient les positions des centres de gravité du levier triangulaire et du tablier par rapport au plan de mouvement du fléau, ces points, lorsque le fléau fait un angle d'inclinaison, subissent des mouvements absolument identiques à ceux de leurs projections sur le plan de mouvement du fléau.

Si, dans la fig. IV, nous admettons $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ et $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$, et que la bascule est construite, voyez fig. V, conformément au § 5, alors $\delta_1 = \delta$ dans toutes les positions; donc aussi $\frac{d\delta_1}{d\phi} = \frac{d\delta}{d\phi}$ et $\frac{d^2\delta_1}{d\phi^2} = \frac{d^2\delta}{d\phi^2}$; et (6) devient, après substitution de $St + S_1 t_1 = X$ et $Sr + (B + C + S_1) r_1 = Y$,

$$\frac{dP}{d\phi} = (P + P_0) \operatorname{tg}(\alpha + \phi) + \left. \begin{aligned} & \left\{ X \left\{ \cos \frac{d^2\delta}{d\phi^2} - \sin \delta \left(\frac{d\delta}{d\phi} \right)^2 \right\} + \left\{ Z_1 z_1 \cos \tau_1 + Y \cos \gamma \right\} \frac{d^2\gamma}{d\phi^2} - \right. \\ & \left. \left. - \left\{ Z_1 z_1 \sin \tau_1 + Y \sin \gamma \right\} \left(\frac{d\gamma}{d\phi} \right)^2 - Z z \sin \tau \right\} \right. \\ & \left. + \frac{a \cos(\alpha + \phi)}{\right.} \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

Pour connaître la signification de cette expression, nous devons encore exprimer le quotient différentiel $\frac{d^2\delta}{d\phi^2}$ dans les connues. En différentiant (20), nous obtenons, en prenant en considération (16),

$$\frac{d^2\delta}{d\phi^2} = -\frac{e \cos(\phi + \gamma) + s \cos(\gamma - \delta) \left(\frac{d\delta}{d\phi} \right)^2 + r \left(\frac{d\gamma}{d\phi} \right)^2}{s \cdot \sin(\gamma - \delta)}.$$

Si nous posons encore p. e. $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\phi = 0$, $\delta = 90^\circ$, $Z = 0$ et $Z_1 = 0$, alors (25) devient

$$\frac{dP}{d\phi} = 0$$

et la bascule est en équilibre instable.

La bascule doit cependant répondre à la condition que, si le fléau fait un angle d'inclinaison restreint ϕ , elle demeure sensible et que l'équilibre est stable entre $\phi = 0$ et $\phi = \phi$. On y satisfait e. a. en posant $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ et $\alpha = 0$ et, dans la position normale de la bascule, $\phi = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 90^\circ$, $s \geq e$ et $r \geq e$ et en plaçant les centres de gravité Z et Z_1 au-dessous, mais cependant dans la proximité respectivement de l'axe du fléau et du levier triangulaire.

Car, si nous supposons que, dans ces données, le fléau fasse un angle d'inclinaison ϕ , infiniment petit du premier ordre, alors il résulte de (16) que γ est un infiniment petit du même ordre, tandis que de (20) ressort que $d\delta$, et par conséquent aussi $\cos \delta$, sont des infiniment petits du second ordre; donc, en négligeant les infiniment petits du second ordre, (25) devient

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\phi} = \frac{1}{a} & \left[(P + P_0) a \sin \phi + \left\{ Z_1 z_1 \cos \tau_1 + Y \right\} \frac{d^2 \gamma}{d\phi^2} - \right. \\ & \left. - \left\{ Z_1 z_1 \sin \tau_1 + Y \sin \gamma \right\} \left(\frac{d\gamma}{d\phi} \right)^2 - Z z \sin \tau \right]. \end{aligned}$$

Or, selon (22) et (16), en négligeant les infiniment petits du second ordre, pourvu que $e \sin \phi = r \sin \gamma$:

$$\frac{d^2 \gamma}{d\phi^2} = -\frac{e}{r} \sin \phi + \frac{e^2}{r^2} \sin \gamma = \sin \gamma \left\{ \frac{e^2}{r^2} - 1 \right\}, \text{ et } \left(\frac{d\gamma}{d\phi} \right)^2 = \frac{e^2}{r^2},$$

donc:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\phi} = \frac{1}{a} & \left[(P + P_0) a \sin \phi + \left\{ Z_1 z_1 \cos \tau_1 + Y \right\} \left\{ \frac{e^2}{r^2} - 1 \right\} \sin \gamma - \right. \\ & \left. - \left\{ Z_1 z_1 \sin \tau_1 + Y \sin \gamma \right\} \frac{e^2}{r^2} - Z z \sin \tau \right] = \\ = \frac{1}{a} & \left[(P + P_0) a \sin \phi - \frac{e^2}{r^2} Z_1 z_1 \left\{ \sin \tau_1 - \cos \tau_1 \cdot \sin \gamma \right\} - \right. \\ & \left. - \left\{ Z_1 z_1 \cos \tau_1 + Y \right\} \sin \gamma - Z z \sin \tau \right], \end{aligned}$$

ou, suivant (3) en négligeant les infiniment petits du second ordre :

$$Z_1 z_1 \cos \tau_1 + Y = \left\{ (P + P_0) a - Z z \cos \tau \right\} \frac{r}{e},$$

ainsi nous trouvons, après réduction, en prenant en considération que $\frac{r}{e} \sin \gamma = \sin \phi$:

$$\frac{dP}{d\phi} = - \frac{1}{a} \left\{ \frac{e^2}{r^2} Z_1 z_1 (\sin \tau_1 - \cos \tau_1 \cdot \sin \gamma) + Z z (\sin \tau - \cos \tau \cdot \sin \phi) \right\},$$

ou, étant donné que $(\sin \tau_1 - \cos \tau_1 \cdot \sin \gamma)$ et $(\sin \tau - \cos \tau \cdot \sin \phi)$ ne diffèrent respectivement que d'une grandeur infiniment petite du second ordre de $\sin(\tau_1 - \gamma)$ et $\sin(\tau - \phi)$:

$$\frac{dP}{d\phi} = - \frac{1}{a} \left\{ \frac{e^2}{r^2} \cdot Z_1 z_1 \sin(\tau_1 - \gamma) + Z z \sin(\tau - \phi) \right\}.$$

A l'effet de rendre la bascule pratique, la somme des deux termes du second membre de la dernière équation doit être positive, ce qui a lieu e. a. lorsque les centres de gravité Z et Z_1 sont situés respectivement au-dessous de l'axe du fléau et du levier triangulaire. Dans ce cas, la sensibilité augmente en raison que Z_1 , Z , $z_1 \sin(\tau_1 - \gamma)$, $z \sin(\tau_1 - \phi)$ et e deviennent plus petits et que par contre a et r deviennent plus grands, c'est-à-dire à mesure que le fléau et le levier triangulaire sont plus légers, et que leurs centres de gravité tombent plus dans la proximité de leurs axes, et à mesure que $B D = e$, fig. IV, est pris plus petit et que, par contre, $A B = a$ et $K G = r$ sont pris plus grands. En même temps, il résulte de la dernière formule qu'aussi longtemps que l'angle d'inclinaison ϕ reste très petit et que le frottement n'entre pas en considération, le poids de C et celui de P n'ont pas d'influence sur la sensibilité de la bascule, pas plus que s et s_1 , c'est-à-dire la longueur des tiges de traction $D G$ et $F E$.

Grâce à (25), on peut aisément constater que la dernière expression obtenue pour la sensibilité, en cas d'une valeur croissante de ϕ , sera d'autant plus longtemps valable que les relations $\frac{e}{r}$ et $\frac{e}{s}$ seront plus petites, c'est-à-dire en raison que e sera plus petit et que r et s seront plus grands. —

Les conclusions concernant Z_1 et Z , que nous avons tirées de la formule qui fait connaître la valeur de $\frac{dP}{d\phi}$, ne sont vraies que pour autant que les leviers ne fléchissent pas considérablement, même lorsque la bascule est sous l'action de sa charge maximum. La formule nous apprend donc seulement par rapport à Z_1 et Z , que les leviers doivent être faits de telle sorte que toute diminution dans leur solidité aurait pour effet une flexion sensible.

La flexion d'un levier dépend de la matière dont il est fait; de sa longueur et de la forme de son profil; de la grandeur, le point d'application et la direction de la force qui agit sur lui; etc. Il nous est possible, en cas de poids égal, de longueur égale et de charge égale, de réduire à un minimum la flexion d'un levier et cela en le fabriquant d'une matière dont le module d'élasticité est grand; en lui donnant une coupe plus haute que large; en diminuant peu à peu, vers le point d'application de la force, cette hauteur de la coupe, et en plaçant le centre de gravité très près du point d'appui. En général les bascules en usage dans le commerce satisfont suffisamment à ces exigences, en tenant compte que lors des pesées effectuées par la bascule on ne réclame pas une précision rigoureuse. L'important est de prendre pour les bascules des leviers bien solides, afin que les pesées maximales les fassent pas fléchir et en même temps de donner à z et z_1 une valeur petite. —

On sait que le frottement augmente et que pour la même raison la sensibilité diminue à mesure que le poids des leviers et des tiges augmente; mais le frottement est insignifiant lorsque les couteaux et les coussinets de la bascule sont faits d'un acier très dur et parfaitement poli, que les couteaux sont convenablement affilés et que, de même que les coussinets, ils sont d'un travail bien fini. Je connais une balance à bras égaux dont le fléau est massif et de très grande hauteur (ainsi relativement très lourd) et de si bonne construction que son centre de gravité ne se déplace *presque pas* à la charge maximum de la balance. Grâce à la bonne construction du fléau, pour ce qui regarde les couteaux, les coussinets, le rapport de sa

hauteur à son épaisseur et la place de son centre de gravité, cette balance, chargée dans chaque plateau d'un poids de 40 K. G., est encore sensible pour un poids additionnel de 1 m. G., sensibilité qu'elle garde à peu près pour toutes les charges jusqu'à la charge nulle. On voit combien, dans cette balance, est minime l'influence du frottement sur la précision des pesées. Cependant, on ne peut pas perdre de vue que la bascule de Quintenz, p. e., compte plusieurs (au moins dix) couteaux, tandis que la balance ordinaire n'en compte que trois; qu'en général les couteaux et les coussinets des bascules sont assez grossièrement construits, et que par conséquent il est recommandable, dans cette construction, d'éviter toutes causes qui pourraient augmenter le frottement, pour autant qu'on ne contrevienne pas aux autres exigences auxquelles la bascule doit satisfaire.

Dans l'expression pour la sensibilité

$$\frac{dP}{d\phi} = -\frac{1}{a} \left\{ \frac{e^2}{r^2} Z_1 z_1 \sin(\tau_1 - \gamma) + Z z \sin(\tau - \phi) \right\}$$

les relations $\frac{e_1}{e}$ et $\frac{r_1}{r}$ ne se présentent pas, d'où résultera que la sensibilité est indépendante des valeurs de ces relations. Si cependant nous avions aussi porté en compte la flexion, nous aurions trouvé que ces relations doivent être aussi petites que possible, parce que plus les points H et F, fig. V, s'éloignent respectivement de K et B, plus aussi doivent être grandes, à charge et à flexion égales, les dimensions des leviers KG et BD, à la suite de quoi leur poids et par conséquent aussi le frottement augmentent, de même que le prix de la bascule et l'espace qu'elle occupe, tandis qu'il devient aussi plus difficile de la déplacer. La longueur de r dépend de la dimension de la charge la plus volumineuse que doit peser la bascule; si nous admettons donc pour r une certaine longueur, alors e_1 et e doivent être aussi petits que le permet la construction du fléau.

Si nous soustrayons de l'équation d'équilibre (1) celle obtenue en mettant dans (1) $C = 0$ et $P = 0$, c'est-à-dire l'équation à laquelle il est satisfait en tarant, alors nous obtenons pour l'équation d'équilibre entre C et P :

$$Cr_1 \cos(\gamma + \alpha_2) \cdot \frac{d\gamma}{d\phi} + Cx \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\phi} - Pa \cos(\alpha + \alpha_1 + \phi) = 0. \quad (26)$$

Si nous posons, dans la fig. V, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha = 0$, $\phi = 0$, $\gamma = 0$, $\delta_1 = \delta = 90^\circ$ et $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$, alors (26), suivant (15) et (16), devient

$$Ce_1 = Pa \text{ ou } \frac{C}{P} = \frac{a}{e_1};$$

tandis que, selon (19), $\frac{d^2\beta}{d\phi^2} = 0$, d'où résulte que, dans ces conditions, l'équilibre et la sensibilité sont indépendants *et de la place de la charge sur le tablier et de l'angle* β , c'est-à-dire de la relation $\frac{s_1}{s}$; voyez fig. II.

§ 7.

Le Frottement.

De préférence la charge doit être placée sur le tablier dans la proximité de l'axe du levier triangulaire supérieur.

Si la bascule est en repos, il faudra placer dans le plateau un poids additionnel P_1 pour mettre la bascule en mouvement, c'est-à-dire pour vaincre le frottement des couteaux sur les coussinets. Lorsque la bascule est chargée nous pouvons, en plaçant la charge sur le tablier, aider à diminuer P_1 .

Pour démontrer ce fait, admettons que le travail pour vaincre le frottement soit proportionnel à la pression et à l'angle de rotation.

Dans cette conjecture, il s'agit de déterminer le poids qui, lorsque la bascule est en repos, doit être mis dans le plateau pour vaincre le frottement.

Déterminons d'abord le frottement pour autant que celui-ci est produit par la pression des couteaux sur les coussinets, exclusivement par la charge C et le poids P ; de sorte que

provisoirement nous négligeons le poids des parties mobiles de la bascule.

Soit, fig. V, M le point d'application de la charge sur le tablier (9), $MH = x$; et admettons que la bascule soit en équilibre dans sa position normale, qu'en outre les tiges F E et D G soient verticales et que α_1 , α_2 , α , γ et ϕ soient égaux à zéro; représentons encore les pressions que la charge produit sur les couteaux par K, H, G, E, etc., pressions qui agissent sur les points du même nom, alors nous avons:

$$H + E = C.$$

Considérant comme égaux les moments de $(H + E)$ et C par rapport au point H, nous avons

$$Eb = Cx, \text{ ainsi } E = F = \frac{x}{b} C \text{ et } H = \frac{b-x}{b} \cdot C;$$

nous avons ensuite

$$Gr = Hr_1, \text{ ainsi } G = D = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{b-x}{b} \cdot C,$$

$$K = H - G = \frac{r-r_1}{r} \cdot \frac{b-x}{b} \cdot C$$

et

$$B = A + F + D = P + \frac{r_1}{r} \cdot C + \frac{r-r_1}{r} \cdot \frac{x}{b} \cdot C.$$

X,

Selon le principe des vitesses virtuelles, il faut que le travail accompli par le poids additionnel, soit égal au travail accompli par le frottement. Maintenant, suivant la conjecture précédente, quand f est une constante, le travail du frottement sera

$$\text{en } K = \frac{r-r_1}{r} \cdot \frac{b-x}{b} Cf d\gamma,$$

$$\text{en } H = \frac{b-x}{b} \cdot Cf d\gamma,$$

$$\text{en } G = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{b-x}{b} \cdot Cf(d\gamma - d\delta),$$

$$\text{en } E = \frac{x}{b} Cf d\delta,$$

$$\text{en } D = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{b-x}{b} \cdot Cf(d\phi + d\delta),$$

$$\text{en } F = \frac{x}{b} \cdot Cf(d\phi + d\delta),$$

$$\text{en } B = \left(P + \frac{r_1}{r} C + \frac{r - r_1}{r} \cdot \frac{x}{b} C \right) f d\phi \text{ et}$$

$$\text{en } A = Pf d\phi;$$

tandis que le travail accompli par le poids additionnel équivaudra à

$$P_1 a d\phi.$$

Par conséquent, en négligeant $d\delta$ — grandeur qui, selon (20), en cas que ϕ , γ et $(90^\circ - \delta)$ seraient des infinitésimales, est elle-même infinitésimale par rapport à $d\phi$ et $d\gamma$ (10) — nous avons

$$P_1 = \frac{f}{a} \left\{ \frac{r - r_1}{r} \cdot \frac{b - x}{b} C \cdot \frac{d\gamma}{d\phi} + \frac{b - x}{b} C \cdot \frac{d\gamma}{d\phi} + \frac{r_1}{r} \cdot \frac{b - x}{b} \cdot C \frac{d\gamma}{d\phi} + \right. \\ \left. + \frac{r_1}{r} \cdot \frac{b - x}{b} C + \frac{x}{b} C + P + \frac{r_1}{r} C + \frac{r - r_1}{r} \cdot \frac{x}{b} C + P \right\},$$

ou, en prenant en considération (16):

$$P_1 = \frac{2f}{a} \left\{ \frac{e + r_1 + \frac{x}{b}(r - e - r_1)}{r} \cdot C + P \right\},$$

et donc pour $x = 0$

$$P_{1x=0} = \frac{2f}{a} \left\{ \frac{e + r_1}{r} \cdot C + P \right\}; \quad \dots \quad (27)$$

et pour $x = b$

$$P_{1x=b} = \frac{2f}{a} \left\{ C + P \right\};$$

et la différence

$$P_{1x=b} - P_{1x=0} = \frac{2f}{a} \cdot \frac{r - e - r_1}{r} C.$$

Dans la bascule de Quintenz de dimensions ordinaires, la différence est certainement positive; et, par conséquent, il y a un avantage certain à faire tomber le centre de gravité de la charge au-dessus du point H (11). Si nous posons par exemple $r = 4e = 6r_1$ et $P = \frac{1}{10}C$, alors la différence s'élève presque à la moitié de $P_{1x=b}$. —

Soit P_0 le poids du plateau en A, Z le poids du fléau, Z_1 celui du levier triangulaire, S_1 et S ceux des tiges, B celui du tablier, etc. comme dans le § 4.

Le poids des parties mobiles effectue les pressions suivantes :

$$\text{en } E = \frac{c}{b} B,$$

$$\text{en } H = \frac{b-c}{b} B,$$

$$\text{en } G = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{b-c}{b} B + \frac{z_1 \cos \tau_1}{r} Z_1,$$

$$\text{en } K = \frac{r-r_1}{r} \cdot \frac{b-c}{b} B + \frac{r-z_1 \cos \tau_1}{r} Z_1,$$

$$\text{en } D = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{b-c}{b} B + \frac{z_1 \cos \tau_1}{r} Z_1 + S,$$

$$\text{en } F = \frac{c}{b} B + S_1,$$

$$\text{en } B = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{b-c}{b} B + \frac{z_1 \cos \tau_1}{r} Z_1 + S + \frac{c}{b} B + S_1 + Z + P_0 \text{ et}$$

$$\text{en } A = P_0.$$

Si nous calculons le poids additionnel qui est nécessaire pour vaincre le frottement occasionné par ces pressions, alors nous trouvons que ce poids équivaut à :

$$\frac{2f}{a} \left[\left\{ \frac{b-c}{b} \cdot \frac{e+r_1}{r} + \frac{c}{b} \right\} B + \frac{e+2z_1 \cos \tau_1}{2r} \cdot Z_1 + S + S_1 + \frac{Z}{2} + P_0 \right].$$

De cette dernière expression et de (27), résulte entre autre que le frottement diminue en prenant a et r grands et en prenant par contre e et r_1 petits; nous devons par conséquent, si nous voulons que la sensibilité de la bascule soit grande, diminuer $e_1 = \frac{e r_1}{r}$ autant que le permet la construction de la bascule. Concernant e_1 nous avons déjà trouvé un même résultat à la fin du paragraphe précédent.

Z.

d d.

§ 8.

Recherche concernant l'influence de petits défauts de construction de la bascule sur l'indépendance de l'équilibre et de la sensibilité de la place de la charge sur le tablier.

Toujours, dans les bascules en usage dans le commerce, se produiront de petites inexactitudes dans la position et les dimensions des leviers et des tiges, inexactitudes provenant d'une construction défectueuse, ou bien elles se produiront à la suite des flexions et des tensions des tiges pendant le chargement du tablier; elles se produiront aussi à la suite de l'usure des couteaux et des coussinets, et à cause de la dilatation et de la contraction du matériel dont la bascule est formée; etc. Aussi le point E n'est pas dans la ligne BG, comme dans la fig. V, mais les tiges FE et DG sont, comme dans la fig. II, à peu près d'égales longueurs.

Nous allons rechercher quelle influence ces déviations de la forme parfaite ont sur l'indépendance dont nous avons parlé plus haut. Nous partons à cet effet de la supposition qu'on s'est efforcé de construire la bascule de telle sorte que, dans la position normale, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha = 0$, $\phi = 0$ et $\delta_1 = \delta = 90^\circ$.

a. *L'équilibre.*

Suivant (26), l'équation d'équilibre entre C et P s'exprime par

$$Cr_1 \cos(\gamma + \alpha_2) \cdot \frac{d\gamma}{d\phi} + Cx \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\phi} - Pa \cos(\alpha + \alpha_1 + \phi) = 0.$$

Si nous acceptons maintenant que les grandeurs α , α_1 , α_2 , ϕ , γ , $90^\circ - \delta$ et $90^\circ - \delta_1$ sont des infiniment petits du premier ordre et qu'il a été satisfait à l'égalité $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$, alors, en négligeant les infiniment petits du second ordre, la dernière équation d'équilibre, en prenant en considération (16), devient

$$\frac{Ce_1}{Pa} = \frac{\sin(\delta - \gamma)}{\sin(\delta + \phi + \alpha_1)} \cdot \left\{ 1 - \frac{Cx \cos \beta}{Pa} \cdot \frac{d\beta}{d\phi} \right\};$$

tandis que (17) devient

$$\frac{d\beta}{d\phi} = \frac{e_1}{b} \cdot \frac{\sin(\delta - \gamma) \cdot \sin(\delta_1 + \phi) - \sin(\delta_1 - \gamma - \alpha_2) \cdot \sin(\delta + \phi + \alpha_1)}{\sin(\delta_1 - \beta) \cdot \sin(\delta - \gamma)}.$$

Puisque maintenant chacun des angles $(\delta - \gamma)$, $(\delta_1 + \phi)$, $(\delta_1 - \gamma - \alpha_2)$ et $(\delta + \phi + \alpha_1)$ n'a, avec 90° , qu'une différence infiniment petite et que, par conséquent, le sinus de chacun de ces angles n'a, avec l'unité, qu'une différence représentée par un infiniment petit du second ordre, il est évident que — *indépendamment de la valeur positive ou négative de β , pourvu que $(\delta - \beta)$ représente une grandeur finie* — la valeur de la relation $\frac{d\beta}{d\phi}$ sera un infiniment petit du second ordre; d'où résulte que, *s'il a été satisfait à l'égalité $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$* , la longueur de la tige F E, voyez fig. II, et les petites déviations dans la construction de la bascule, n'auront pas d'effet appréciable sur l'indépendance de l'équilibre de la place de la charge sur le tablier.

b. La sensibilité.

On peut dériver de (4) la sensibilité.

Comme il est ressorti précisément que, dans les conditions données, la valeur de $\frac{d\beta}{d\phi}$ est un infiniment petit du second ordre, uniquement le terme en (4), dont $\frac{d^2\beta}{d\phi^2}$ est le facteur, détermine si la sensibilité est dépendante de la place qu'occupe la charge sur le tablier.

L'expression pour $\frac{d^2\beta}{d\phi^2}$ se présente sous (19), dans la superposition que $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$, et est donc maintenant aussi utilisable parce que $\frac{d\beta}{d\phi}$ est du second ordre; et, puisque, selon les conditions posées, étant donnés (16) et (21), $d\delta_1$ est un infiniment petit par rapport à $d\phi$ et $d\gamma$, nous pouvons, en négligeant les infiniment petits d'un ordre plus élevé que le premier, et après substitution de (16) et (22), écrire

$$CC. \quad b \sin(\delta_1 - \beta) \frac{d^2 \beta}{d \phi^2} = e_1 \cos(\delta_1 + \phi) + r_1 \cos(\delta_1 - \gamma - \alpha_2) \cdot \frac{e^2 \sin^2(\delta + \phi + \alpha_1)}{r^2 \sin^2(\delta - \gamma)} - \\ - r_1 \sin(\delta_1 - \gamma - \alpha_2) \cdot \frac{e \cos(\delta + \phi + \alpha_1) + r \cos(\delta - \gamma) \frac{e^2 \sin^2(\delta + \phi + \alpha_1)}{r^2 \sin^2(\delta - \gamma)}}{r \sin(\delta - \gamma)},$$

ou, après substitution de $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$ et, en négligeant ensuite les infiniment petits d'un ordre plus élevé que le premier:

$$dd. \quad \frac{d^2 \beta}{d \phi^2} = \frac{e_1}{b \sin(\delta_1 - \beta)} \cdot \left\{ \cos(\delta_1 + \phi) + \frac{e}{r} \cos(\delta_1 - \gamma - \alpha_2) - \right. \\ \left. - \cos(\delta + \phi + \alpha_1) - \frac{e}{r} \cos(\delta - \gamma) \right\}.$$

Comme maintenant chacun des termes du dernier membre est un infiniment petit du premier ordre, $\frac{d^2 \beta}{d \phi^2}$ est également une grandeur du même ordre, d'où résulte que de petites inexactitudes dans la construction de la bascule auront de l'influence sur l'indépendance de la sensibilité de la place de la charge sur le tablier; c'est-à-dire, que si la charge repose au-dessus du point H, fig. II, et que si elle est ensuite placée dans la proximité du point G, alors — abstraction faite du frottement — le rapport des poids additionnels P_1 et P_2 , qui, dans les deux positions, doivent être respectivement mis dans le plateau pour donner au fléau un même angle d'inclinaison, diffère de l'unité.

La question est maintenant de savoir si la différence en sensibilité est *appréciable*. Cela dépend — abstraction faite du frottement — de la valeur de la somme des termes dans le second membre de (6), surtout de la valeur des termes $Z_1 z_1 \sin \tau_1$ et $Z z \sin \tau$. Si cette somme est relativement grande et si, par conséquent, la bascule n'est pas très sensible et si les défauts dans la construction sont peu importants, alors, lorsque le fléau fait un petit angle d'inclinaison, la différence de sensibilité aux différents points du tablier ne sera pas appréciable. Si au contraire la somme des termes $Z_1 z_1 \sin \tau_1$ et $Z z \sin \tau$ est très petite et que, par conséquent, la sensibilité de la bascule soit extrême, alors la différence,

en cas de défauts considérables dans la construction et si le fléau fait un angle d'inclinaison relativement grand, sera assez appréciable (13).

Comme généralement dans le commerce on n'exige pas une exactitude fort scrupuleuse, mais comme il importe surtout de pouvoir peser *rapidement*, une trop grande sensibilité rendrait la plupart du temps la bascule moins utilisable. Nous pouvons par conséquent accepter que si, dans une bonne bascule de commerce — donc une bascule dont e. a. la sensibilité n'est pas excessive — α , α_1 , α_2 , γ , ϕ , $90^\circ - \delta$ et $90^\circ - \delta_1$ sont très petits dans la position normale, le terme $\frac{d^2\beta}{d\phi^2}$ — indépendamment de la valeur de β — sera si petit que la sensibilité, à un angle d'inclinaison pas trop grand, sera suffisamment indépendante de la place de la charge sur le tablier.

De ce qui précède il résulte donc, que la bascule de Quintenz, dans laquelle les tiges, de même que dans la fig. II, sont à peu près de la même longueur, peut répondre aux conditions d'un bon pesage aussi bien que la bascule construite conformément à la fig. V.

Evidemment les résultats qui ont été trouvés dans le § 7 concernant le frottement demeurent entièrement applicables si les tiges DG et FE, fig. II, sont à peu près de la même longueur; et, en même temps, la possibilité que le tablier se déplace, si le fléau fait un angle d'inclinaison, demeure plus petite que lorsque les tiges, comme dans la fig. V, diffèrent considérablement en longueur; il est donc préférable, étant donné ce qui précède, de construire la bascule conformément à la fig. II que conformément à la fig. V.

§ 9.

**Formes de bascules dont la théorie équivaut à celle
de la bascule de Quintenz.**

1^o. Si, en laissant de côté le bras de fléau A B, fig. V, une force agit en R sur le bras de levier prolongé B D dans le sens indiqué par la petite flèche, alors nous obtenons en principe la bascule représentée par la fig. VI. Cette bascule est en usage pour le pesage de charges très lourdes et de grandes dimensions, comme par exemple des voitures chargées, etc. L'équation d'équilibre, dans la position indiquée par la fig. VI, est

$$\frac{C}{P} = \frac{M N}{N Q} \cdot \frac{R B}{F B};$$

s'il a été satisfait à l'égalité

$$\frac{K H}{K G} = \frac{F B}{D B}.$$

Si nous prenons $M N = 10 N Q$ et $R B = 10 F B$, nous avons

$$C = 100 P.$$

Cette bascule est donc une centésimale.

Pour épargner de la place, le fléau M Q, dans beaucoup de bascules, est perpendiculaire à la position indiquée dans la figure VI.

Il est évident que cette position du fléau, en prenant en considération le déplacement restreint du couteau Q lors des pesages, ne peut pas avoir d'influence marquante sur l'équilibre et la sensibilité de l'instrument, pourvu qu'entre autre la tige Q R ne soit pas trop courte.

Cette dernière remarque est aussi applicable à la bascule centésimale représentée par la fig. VI^a. Cette bascule consiste dans la réunion de deux leviers triangulaires K G K₁ et k G k₁, dont les plans, dans la position normale de la bascule, tombent dans un seul plan horizontal et dont les extrémités G, très proches l'une de l'autre, sont élevées au moyen

de deux tiges DG qui en haut aboutissent à un seul coussinet reposant sur le couteau D , lequel est fixé sur le levier RB ; le levier RB lui-même repose en B sur un coussinet fixe et est élevé en R par la tige RQ ; tandis qu'à son tour cette tige repose en Q sur le levier QM , qui repose sur le coussinet fixe N .

Le tablier de la bascule repose à gauche sur les points H et H_1 du levier triangulaire KGK_1 , et à droite sur les points e et e_1 des tiges he et h_1e_1 , qui sont suspendues en h et h_1 au levier triangulaire kGk_1 .

Si dans cette bascule $NM.BR.Gk_2 = 100QN.DB.h_2k_2$, alors $C = 100P$ (*).

Il est évident que, conformément à la théorie, cette bascule ne peut satisfaire aux conditions (2) et (5) dans aucune autre position que la normale, vu que les points H et C , lorsque le point D s'élève, ne décrivent pas des courbes égales, de sorte que, en cas de déplacement du point D , la ligne He ne peut se déplacer parallèlement à sa position primitive, et non plus par conséquent le tablier.

Cependant, il résulte du § 8 que, si, comme il est d'usage, les leviers triangulaires KGK_1 et kGk_1 sont grands et si respectivement les distances, entre les points H et h et les lignes KK_1 et kk_1 , sont petites et si aussi l'angle d'inclinaison est petit, les différences de sensibilité, en cas que la charge soit placée sur divers points du tablier, seront peu appréciables (14).

Parfois aussi le tablier de cette bascule n'est *pas* suspendu à des tiges ou à des chaînes en h et h_1 , mais il s'appuie aussi en ces points directement sur les leviers kG et k_1G ; d'où résulte nécessairement qu'avec n'importe quel angle d'inclinaison du fléau il doit se produire un frottement extrêmement nuisible entre les coussinets du tablier et les couteaux sur lesquels ils reposent.

2^o. Si nous prenons, comme dans le § 5, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$,

(*) Gk_2 représente une perpendiculaire de G sur kk_1 ; h_2 est le point d'intersection des lignes Gk_2 et hh_1 .

$\delta_1 = \delta$ et $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$, mais cette fois $e_1 > e$, alors nous obtenons d'après (18) et (23) de nouveau

$$\frac{s_1}{s} = \frac{e_1}{e}.$$

La fig. VII représente, dans la forme la plus simple, la coupe de cette bascule.

3°. Par la combinaison de deux formes selon la fig. VII, nous obtenons la bascule de comptoir conforme à la fig. VIII (système de Béranger) (15).

4°. $\delta = \delta_1 + 180^\circ$ satisfait aussi à (24).

Si nous posons (23) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$ et $\delta = \delta_1 + 180^\circ$, alors nous trouvons:

$$-\frac{s_1}{s} = \frac{e_1}{e},$$

d'où, étant donnée la condition $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$, il résulte ou bien que e_1 et r_1 doivent être négatifs et e et r positifs, ou bien que e_1 et r_1 doivent être positifs et e et r négatifs.

Pour e_1 et r_1 négatifs on a la fig. IX, et, pour e_1 et r_1 positifs, la fig. X.

5°. Par la combinaison de deux formes selon la fig. IX, on obtient la bascule de comptoir selon la fig. XI.

6°. Par la combinaison de deux formes selon la fig. X, on obtient la bascule de comptoir selon la fig. XII.

Si ici les bras de levier KG et KH sont pris égaux et si en outre KG_1 est égal à KG, alors nous obtenons la bascule représentée à la fig. XIII (16).

7°. $\delta_1 = \delta + 180^\circ$ satisfait également à (24). Si nous posons en (23) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\delta_1 = 180^\circ + \delta$ et $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$, alors nous trouvons $-\frac{e_1}{s_1} = \frac{e}{s}$, et, par conséquent, il faut, si e , r_1 , r

et s sont positifs, que s_1 soit pris négativement, c'est-à-dire, que le tablier, au lieu d'être, comme dans les autres figures,

ff.

g'g'.

suspendu à une tige doit au contraire reposer *sur* une tige, comme nous le montre la fig. XIV.

Il est évident qu'une telle forme serait peu pratique; du § 8 cependant, il a déjà résulté que β , ou, ce qui revient au même, que la longueur de la tige d'appui peut être prise fort arbitrairement et aussi négativement sans que ceci ait une influence marquante sur la sensibilité.

Naturellement les modifications dans la longueur et aussi éventuellement dans la nature des tiges demeurent sans effets sur l'état d'équilibre lorsque le fléau est dans la position horizontale, en supposant qu'alors les tiges se trouvent dans une direction verticale.

Nous pouvons donc, comme dans la fig. XV, suspendre tout aussi bien le tablier à une tige de longueur arbitraire (17).

Ici encore nous pourrions, par exemple, prendre $e_1 > e$.

8°. Par la combinaison des deux formes selon la fig. IX et la fig. XV, nous obtenons la bascule de comptoir conforme à la fig. XVI.

L'équation d'équilibre des quatre dernières formes est pour toutes la même, notamment

$$\frac{C}{P} = \frac{B_1 F_1}{B F}$$

et, en même temps, il doit être satisfait à l'égalité

$$\frac{FB}{BD} = \frac{KH}{KG} = \frac{F_1 B_1}{B_1 D_1} = \frac{K_1 H_1}{K_1 G_1}.$$

Les relations $\frac{FE}{DG}$ et $\frac{F_1 E_1}{D_1 G_1}$ peuvent, pour toutes les formes de bascule ici représentées, pourvu qu'elles ne soient pas trop petites, être prises arbitrairement.

9°. $\gamma = 180^\circ - \phi$ satisfait également à (24).

Si nous posons en (23) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$ et $\gamma = 180^\circ - \phi$, alors nous trouvons, en prenant en considération (16), (17), (20) et (21), $e_1 = r_1$ et par conséquent aussi $e = r$, indépendamment de la relation $\frac{s_1}{s}$ et des angles β et δ_1 . La figure XVII représente la bascule en question.

hh

Pour arriver au dernier résultat, il faut que nous démontrions au cours des calculs que $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$, si nous prenons

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r} \text{ et } \gamma = 180^\circ - \phi.$$

Dans cette supposition, il résulte de (17)

$$\frac{d\beta}{d\phi} = \frac{(r e_1 - r_1 e) \sin(\delta_1 + \phi)}{b r \sin(\delta_1 - \beta)},$$

de sorte que la valeur de $\frac{d\beta}{d\phi}$ devient zéro pour toutes les valeurs de δ_1 et β qui n'annulent pas $\sin(\delta_1 - \beta)$; tandis que, pour $\beta = \delta_1$ la dernière égalité devient $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$. Mais si $\beta = \delta_1$, alors $\frac{d\beta}{d\phi}$ devient $\frac{d\delta_1}{d\phi}$ et pour cette valeur particulière de β , selon (21), indépendamment de la valeur de la proportion $\frac{e}{r}$, nous avons :

$$(s_1 + b) \cdot \frac{d\beta}{d\phi} = s \cdot \frac{d\beta}{d\phi} = 0;$$

d'où résulte qu'également, pour cette valeur de β , il faut que $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$, indépendamment de $\frac{e}{r}$.

Si nous acceptons encore que $e_1 = e$ et que, par conséquent aussi $r_1 = r$, il en découle les formes de bascules qui sont représentées par les fig. XVII^a, XVII^b et XVII^c.

Chacune de ces bascules — qui peuvent être nommées à bon droit, d'après leur inventeur, bascules de Roberval — consistent en un fléau auquel sont fixés les trois couteaux A, B et D. Ces couteaux ont les fonctions suivantes: Le couteau B du fléau repose sur un support fixe BK et supporte donc le fléau; le couteau D soutient le tablier sur lequel doit être placée la charge C et le couteau A porte le plateau, qui peut contenir le poids P devant faire équilibre à la charge C. — Le support fixe est muni en K et le tablier est muni en G d'un couteau; ces deux couteaux sont réunis au moyen d'une tige qui empêche le chavirement du

tablier. Dans les bascules de grand format et dans celles dont les tabliers doivent être assez grands, le fléau doit se terminer en fourche, de façon que le couteau d'appui, divisé en deux parties, repose sur deux coussinets et que le fléau supporte le tablier en deux points.

Il est évident que, dans les bascules suivant les fig. XVII^a et XVII^c, les charges ne pourront être placées qu'à gauche de la planche D G et que, par contre, dans les bascules conformes à la fig. XVII^b, les charges devront être placées seulement à droite, à moins que la tige G K soit construite de telle sorte qu'elle puisse à la fois servir de tige d'appui ou bien exercer une traction, selon que la charge est placée sur le tablier soit à gauche soit à droite de la planche D G.

10^o. La bascule de Roberval à deux tabliers consiste dans une jonction de deux des formes suivant la fig. XVII^b ou XVII^c.

La fig. XVIII représente la bascule de comptoir très connue de Roberval (18).

Ici D D₁ représente le fléau qui, en B, repose sur un support B M N et qui, en D et D₁, porte les tiges D G et D₁ G₁ auxquelles sont adaptés les plateaux. Ces tiges sont réunies aux extrémités par le levier G G₁.

Le support se termine par deux barres M et N qui se trouvent des deux côtés, quoique cependant très près du plan vertical qui passe par B et qui est perpendiculaire au plan de mouvement du fléau. Entre ces barres, se meut le levier G G₁ qui toujours, au moyen d'une des deux dents dont en son milieu et suivant un plan horizontal ce levier est muni, repose contre le plan vertical d'une de ces barres. Ce levier sert donc à la fois de tige d'appui et de tige de traction (ainsi qu'il en a été question dans l'alinéa final sub 9^o).

La tige D₁ G₁ est, en bas, échancrée dans le sens de son axe et suivant un plan qui est perpendiculaire au plan de mouvement du fléau. Contre cette échancrure est fixée une petite plaque, partiellement ouverte, qui sert au levier G G₁ à s'appuyer et à empêcher qu'il ne glisse de côté.

A l'extrémité G₁ du levier G G₁, est ménagée une ouverture destinée à laisser passer l'extrémité inférieure de la tige

$D_1 G_1$, grâce à quoi elle peut intérieurement reposer contre le levier.

Au point G de la tige DG et du levier GG_1 , la construction est la même qu'au point analogue G_1 .

La fig. XVIII^a représente la coupe du levier GG_1 , des barres M et N , des tiges et des plaques avec un plan horizontal, qui passe par l'axe du levier.

Les fig. XVIII^b et XVIII^c représentent la liaison entre les tiges et les plaques, vue dans la direction GG_1 .

La fig. XVIII^d montre de quelle façon les tiges sont suspendues au fléau.

11^o. Dans quelques formes de bascules, le principe de la bascule de Roberval est fusionné avec celui de Quintenz. Ainsi la bascule de George (19), suivant la fig. XIX, diffère de celle de Roberval en ce que le tablier ne repose pas directement sur le fléau, mais est porté au moyen d'une tige DG qui, en D , est suspendue au fléau et, en G , agit sur le tablier. En outre le tablier est relié au support fixe au moyen de *deux* tiges et cela au moyen de la tige de traction $K_1 G_1$ et de la tige d'appui KG .

12^o. Si, dans la fig. XIX, nous intervertissons la tige d'appui et la tige de traction et si ensuite nous renversons le tablier, nous obtenons la bascule suivant la fig. XX. —

Il est évident que beaucoup d'autres formes de bascules peuvent être dérivées des formules que nous avons trouvées et qu'elles peuvent être combinées entre elles de différentes manières. Nous nous bornerons cependant à celles qui précédent. Toute bascule basée sur un système de leviers et de tiges peu flexibles et peu extensibles, pourra être facilement étudiée au moyen des formules que nous avons exposées, de sorte qu'on pourra rapidement déterminer les conditions auxquelles elle doit satisfaire.

§ 10.

Vérification des bascules de Quintenz et de Roberval.

45

- a. *Détermination, dans la bascule de Quintenz, de la grandeur des fautes dans la longueur des bras de levier, au moyen de pesages.*

Nous admettons que la ligne $K_1 K$, fig. I, est perpendiculaire au plan du fléau; que, dans la position normale de la bascule, les couteaux du fléau se trouvent à peu près dans un plan horizontal; de même les couteaux du levier triangulaire inférieur; que les tiges sont approximativement verticales, et que la charge — dont le centre de gravité se trouve dans la verticale qui passe par le point M du tablier — fait équilibre au poids placé dans le plateau.

S'il faut, lorsque la charge est placée sur un autre point du tablier, ajouter un poids additionnel pour faire revenir le fléau dans sa position normale d'équilibre, alors ceci résulte — sans nous occuper du frottement —, conformément au § 8, uniquement de ce que les longueurs des bras de levier de la bascule ne satisfont pas à l'égalité

$$\frac{\text{longueur de la verticale du couteau } H \text{ sur } K_1 K}{\text{longueur de la verticale du couteau } G \text{ sur } K_1 K} = \frac{\text{longueur de la verticale du couteau } H_1 \text{ sur } K_1 K}{\text{longueur de la verticale du couteau } G \text{ sur } K_1 K} = \frac{B F}{B D} . \quad (28)$$

Car, s'il avait été vraiment satisfait à cette égalité, alors le déplacement de la charge sur le tablier n'aurait pas eu d'influence appréciable sur l'équilibre.

La grandeur des fautes dans la longueur des bras de levier peut se déterminer au moyen de *trois* pesages, dans lesquels une même charge est placée la première fois au-dessus du couteau H , une seconde fois au-dessus du couteau H_1 et une troisième fois dans le plan de mouvement du fléau au point M_1 (20). Chaque fois la bascule est ramenée dans sa position normale en plaçant un poids additionnel dans le plateau.

A la suite des deux premiers pesages, on détermine la correction que doit subir une des perpendiculaires de H ou H_1 sur $K_1 K$, pour que ces perpendiculaires soient égales entre elles, tandis que le troisième pesage sert à pouvoir calculer quelle correction il faut faire aux perpendiculaires maintenant égales, qui tombent de H_1 et H sur $K_1 K$, ou à une des grandeurs B F et B D ou à la perpendiculaire de G sur $K_1 K$ pour donner la même valeur aux proportions de (28).

Supposons que la charge C au-dessus de H fasse équilibre au poids P; au-dessus de H_1 au poids $P + P_1$, et, au-dessus de M_1 au poids $P + P_2$; que lors du dernier pesage la verticale qui passe par le centre de gravité de la charge se trouve à la distance x de la ligne $H_1 H$; et que $H_1 h_0 = h_1$, $h_0 H = h$, que les perpendiculaires de H et H_1 sur $K_1 K$ soient respectivement égales à r_1 et r_2 et que la distance de la ligne F E à la ligne qui passe par les couteaux H_1 et H soit égale à b, alors nous avons les pressions

au premier pesage: en $H = C$ et en $H_1 = E = 0$;
au deuxième pesage: en $H_1 = C$ et en $H = E = 0$;

$$\text{au troisième pesage: en } H = \frac{h_1}{h+h_1} \cdot \frac{b-x}{b} \cdot C,$$

$$\text{en } H_1 = \frac{h}{h+h_1} \cdot \frac{b-x}{b} \cdot C$$

$$\text{et en } E = \frac{x}{b} \cdot C.$$

Suivant la notation du § 4, l'équation d'équilibre entre C et P, $P + P_1$ et $P + P_2$ s'exprime, conformément au principe des vitesses virtuelles, respectivement par

$$C \cdot d(r_1 \sin \gamma) - P \cdot d\{a \sin(\alpha + \alpha_1 + \phi)\} = 0,$$

$$C \cdot d(r_2 \sin \gamma) - (P + P_1) \cdot d\{a \sin(\alpha + \alpha_1 + \phi)\} = 0$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{h}{h+h_1} \cdot \frac{b-x}{b} \cdot C \cdot d(r_1 \sin \gamma) + \frac{h}{h+h_1} \cdot \frac{b-x}{b} \cdot C \cdot d(r_2 \sin \gamma) + \\ & + \frac{x}{b} \cdot C \cdot d \left\{ b \sin \beta + \frac{h r_2 + h_1 r_1}{h+h_1} \sin \gamma \right\} - \\ & - (P + P_2) \cdot d\{a \sin(\alpha + \alpha_1 + \phi)\} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$C r_1 \cdot \cos \gamma \cdot \frac{d\gamma}{d\phi} = P a \cos (\alpha + \alpha_1 + \phi),$$

$$C r_2 \cos \gamma \cdot \frac{d\gamma}{d\phi} = (P + P_1) a \cos (\alpha + \alpha_1 + \phi),$$

et

$$\left\{ \frac{h_1}{h+h_1} \cdot \frac{b-x}{b} \cdot r_1 + \frac{h}{h+h_1} \cdot \frac{b-x}{b} \cdot r_2 + \frac{x}{b} \cdot \frac{h r_2 + h_1 r_1}{h+h_1} \right\} C \cos \gamma \cdot \frac{d\gamma}{d\phi} + \\ + x C \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\phi} = (P + P_2) a \cos (\alpha + \alpha_1 + \phi).$$

Ces équations sont générales, de même que les valeurs de $\frac{d\gamma}{d\phi}$ et $\frac{d\beta}{d\phi}$ de (16) et (17).

Si nous supposons maintenant que $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \phi, \beta, \gamma, \delta - 90^\circ$ et $\delta_1 - 90^\circ$ sont très petits, alors les trois équations d'équilibre, en prenant en considération (16) et (17), deviennent

$$C r_1 \cdot \frac{e}{r} = P a,$$

$$C r_2 \cdot \frac{e}{r} = (P + P_1) a$$

et

$$C \cdot \frac{h_1 r_1 + h r_2}{h+h_1} \cdot \frac{e}{r} + C \cdot \frac{e_1 r - r_1 e}{b r} \cdot x = (P + P_2) a.$$

KK.

III.

En soustrayant la première équation des deux dernières, nous obtenons

$$C (r_2 - r_1) \frac{e}{r} = P_1 a \quad (29)$$

et

$$C \cdot \frac{h (r_2 - r_1)}{h+h_1} \cdot \frac{e}{r} + C \cdot \frac{e_1 r - r_1 e}{b r} \cdot x = P_2 a . . . \quad (30)$$

En substituant en (30) l'égalité de (29), notamment

$$\frac{h}{h+h_1} \cdot C (r_2 - r_1) \frac{e}{r} = \frac{h}{h+h_1} \cdot P_1 a,$$

on trouve

$$C \cdot \frac{e_1 r - r_1 e}{b r} x = P_2 a - \frac{h}{h+h_1} \cdot P_1 a$$

d'où

$$r_1 - \frac{e_1}{e} r = \frac{a b r}{C e x} \left(\frac{h}{h + h_1} P_1 - P_2 \right) \quad \dots \quad (31)$$

Tout d'abord un des points H_1 ou H doit être déplacé pour rendre équivalents r_2 et r_1 . Si, par exemple, on déplace H_1 alors r_2 doit subir une correction, de sorte que

$$r_2 + \text{corr. } r_2 = r_1, \text{ ou, suivant (29),}$$

$$\text{corr. } r_2 = - \frac{P_1 a r}{C e}.$$

Après avoir corrigé r_2 , r_2 devient $= r_1$; il faut maintenant encore faire subir une correction commune à r_1 et $(r_2 + \text{corr. } r_2)$, de sorte que nous avons

$$r_1 + \text{corr. } r_1 = \frac{e_1}{e} r, \text{ ou, suivant (31),}$$

$$\text{corr. } r_1 = \frac{a b r}{C e x} \left(P_2 - \frac{h}{h + h_1} P_1 \right).$$

nn. Il reste encore à satisfaire à l'équation

$$e_1 : (a + \text{corr. } a) = 1 : n$$

d'où

$$\text{corr. } a = n e_1 - a,$$

n étant égal à 10 ou 100, suivant que la bascule est une décimale ou une centésimale.

La grandeur e_1 n'est pas susceptible d'être mesurée exactement; de (30) résulte

$$e_1 = r_1 \frac{e}{r} - \frac{a b}{C x} \left(\frac{h}{h + h_1} P_1 - P_2 \right) \quad (21).$$

b. *Détermination, dans la bascule de Quintenz, de la grandeur des fautes dans la longueur des bras de levier, au moyen d'un niveau d'eau.*

S'il a été satisfait aux conditions posées au commencement de ce paragraphe et en même temps à l'égalité (28) alors, suivant le § 8, le tablier, pendant les oscillations du fléau, se déplacera parallèlement à sa position normale. Si donc, pendant les oscillations du fléau, le tablier de la bascule dont il est question au commencement de ce §, ne se

déplace pas parallèlement à sa position normale, alors ce fait prouve que les dimensions des bras de levier ne satisfont pas à l'égalité (28).

Maintenant il résulte de (16), que, si au fléau dans sa position normale on fait faire un angle très petit d'inclinaison ϕ et si alors l'angle, que fait le plan $K_1 G K$ avec sa direction primitive, est égal à γ , il sera très approximativement

$$\sin \gamma = \frac{e}{r} \sin \phi;$$

ainsi l'élévation qui correspond avec l'angle d'inclinaison ϕ est très rapprochée

$$\text{élévation } H = r_1 \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin \phi,$$

et

$$\text{élévation } H_1 = r_2 \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin \phi;$$

par conséquent

$$\text{élévation } h_0 = \frac{h_1 r_1 + h r_2}{h + h_1} \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin \phi.$$

Encore on a très approximativement

$$\text{élévation } E = e_1 \sin \phi.$$

Si nous supposons maintenant que l'angle que fait la ligne $h_0 E$, lorsque le fléau fait un angle d'inclinaison ϕ , avec sa position lorsque l'angle d'inclinaison est nul, soit égal à ζ , celui de la ligne $H H_1$ égal à ζ_1 , et que le tablier dans la position normale de la bascule soit approximativement horizontal, alors nous avons :

$$(h + h_1) \sin \zeta_1 = \text{élévation } H_1 - \text{élévation } H = (r_2 - r_1) \frac{e}{r} \sin \phi. \quad (32)$$

et

$$b \sin \zeta = \text{élévation } E - \text{élévation } h_0 = \left(e_1 - \frac{h_1 r_1 + h r_2}{h + h_1} \cdot \frac{e}{r} \right) \sin \phi. \quad (33)$$

Tout d'abord r_2 doit subir une »correction r_2'' », de sorte que nous avons de nouveau :

$$r_2 + \text{corr. } r_2 = r_1$$

ou, suivant (32), étant donné que ζ_1 , et aussi ζ sont supposés très petits,

$$\text{corr. } r_2 = - \frac{(h + h_1) r}{e} \cdot \frac{\zeta_1}{\phi}.$$

En substituant

$$r_2 \frac{e}{r} \sin \phi = (h + h_1) \sin \zeta_1 + r_1 \frac{e}{r} \sin \phi$$

de (32) dans l'égalité de (33), on obtient

$$\begin{aligned} b \sin \zeta &= e_1 \sin \phi - \frac{h_1 r_1}{h + h_1} \cdot \frac{e}{r} \sin \phi - \\ &- \frac{h}{h + h_1} \left\{ (h + h_1) \sin \zeta_1 + r_1 \frac{e}{r} \sin \phi \right\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\left(\frac{e_1}{e} r - r_1 \right) \sin \phi = \frac{b}{e} r \sin \zeta + \frac{h}{e} r \sin \zeta_1;$$

ainsi, puisque $r_1 + \text{corr. } r_1 = \frac{e_1}{e} r$, on trouve pour la correction commune à r_1 et $(r_2 + \text{corr. } r_2)$

$$\text{corr. } r_1 = \frac{r}{e \phi} (b \zeta + h \zeta_1) \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

De (33) résulte

$$e_1 = b \cdot \frac{\zeta}{\phi} + \frac{h_1 r_1 + h r_2}{h + h_1} \cdot \frac{e}{r}.$$

Pour déterminer les angles ζ et ζ_1 , on peut faire usage entre autres d'un niveau d'eau très sensible ou d'un plomb pendent à un support.

c. Vérification de la bascule de Roberval.

La fig. XXI représente la coupe de cette bascule dont les bras de levier $B D$ et $G K$ et la tige $D G$ sont de longueurs plus ou moins inégales. Les points B et K sont des points fixes; le quadrilatère $B D G K$ est variable; le tablier $M M_1$ est fixé à la ligne $D G$; en M repose la charge C . La longueur de la ligne $B D$ est égale à e ; ensuite $D G = s$, $G K = r$, $K B = n$ et $B A = a$; un angle de $(180^\circ - \alpha)$ est inscrit entre les bras de levier $A B$ et $B D$.

1^o. Conditions pour l'indépendance de l'équilibre de la place de la charge sur le tablier.

Dans 9^o, page 34, se trouve démontré que si $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$ et

$\gamma = 180^\circ - \phi$, $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$, indépendamment de la relation $\frac{e}{r}$, c'est-à-dire: il suffit, pour l'indépendance de l'équilibre dans la position normale du fléau, que BD et KG soient parallèles; les longueurs mêmes de BD et de KG peuvent être inégales (22).

2^o. Calcul de la différence d'inclinaison de BD et de KG.

Supposons, lorsque l'angle d'inclinaison du fléau est ϕ , que la charge C en M fasse équilibre au poids P dans le plateau. Si nous transférons la charge C au point M₁, alors, au cas que les angles γ et $180^\circ - \phi$ ne sont pas égaux, l'équilibre sera rompu, et il faudra ajouter au poids P un poids additionnel P_1 pour remplacer, avec le même angle d'inclinaison ϕ du fléau, la bascule en équilibre.

Si Mm et M₁m₁ sont des verticales, et m₁m = x, alors nous trouvons, en soustrayant l'équation d'équilibre de C en M de celle de C en M₁,

$$C x \cos \delta \cdot \frac{d\delta}{d\phi} = P_1 a \cos (\alpha + \phi),$$

ou, étant donné que selon (20)

$$\frac{d\delta}{d\phi} = \frac{e \sin (\gamma + \phi)}{s \sin (\gamma - \delta)},$$

nous obtenons

$$\sin (\gamma + \phi) = \frac{P_1 a s \cos (\alpha + \phi) \cdot \sin (\gamma - \delta)}{C e x \cos \delta}.$$

Si nous posons maintenant que MM₁ = y est approximativement horizontal et que chacun des angles α , ϕ , $180^\circ - \gamma$ et $\delta - 90^\circ$ est très petit, alors nous avons approximativement $x \cos \delta = y$ et

$$\sin (\gamma + \phi) = \frac{P_1 a s}{C e y};$$

ou, posant $\gamma = 180^\circ - \gamma_1$, alors

$$\sin (\gamma_1 - \phi) = \frac{P_1 a s}{C e y} \dots \dots \quad (35)$$

d. *Vérification de la bascule de comptoir de Roberval.*

La fig. XXII représente la coupe d'une telle bascule, dont les bras de levier et les tiges ont des longueurs plus ou moins inégales.

Remarquons que, ci-dessous sub 1^o, 2^o et 3^o, les trois couteaux du fléau D B D₁ sont supposés perpendiculaires au plan de mouvement du fléau; de même pour les trois couteaux du levier G K G₁; en outre que le point K ne peut pas être un point fixe, mais qu'il doit y avoir en ce point, en sens horizontal et vertical, quelque jeu entre les couteaux et les coussinets; car, dans le cas contraire, dans une construction non absolument juste, il n'y aurait pas de mouvement possible sans torsion du levier G G₁.

1^o. *Recherche si les bras du fléau D B et B D₁ sont égaux.*

Nous supposons qu'avant le chargement le fléau de la bascule ait une position horizontale. On s'enquiert si les bras du fléau D B et B D₁ sont égaux en plaçant deux poids identiques P sur les plateaux aux points M et M₁ situés dans les verticales qui passent par D et D₁; on peut admettre alors que les poids agissent sur les points D et D₁. S'il se présente maintenant qu'un des plateaux, par exemple celui qui repose sur la tige D₁ G₁, doit encore recevoir un poids additionnel P_1 pour que le fléau prenne la même position qu'avant le chargement, alors nous avons:

$$P a = (P + P_1) e_1,$$

et, par conséquent, e_1 doit être corrigé, de sorte que nous obtenons

$$P e = (P + P_1) (e - \text{corr. } e_1);$$

d'où

$$\text{corr. } e_1 = \frac{P_1 e}{P + P_1} = \frac{P_1 e_1}{P},$$

indépendamment de la longueur des bras du levier inférieur et de la longueur et de la position des tiges.

2^o. Recherche si le fléau et le levier inférieur sont parallèles.

Nous chargeons la bascule en M et M₁ avec des poids identiques P; soit ϕ l'angle d'inclinaison; et si ensuite, dans le plateau de gauche, nous déplaçons le poids du point M au point M₂, alors, si la construction de la bascule est peu précise, il faudra, lorsque le poids P est en M₂, ajouter le poids additionnel P₁ pour rendre au fléau le même angle d'inclinaison ϕ . Suivant (35) nous avons alors, en admettant que ($e_1 - e$), ϕ , γ_1 , $\delta - 90^\circ$ et $\delta_1 - 90^\circ$ sont très petits, approximativement

$$\sin(\gamma_1 - \phi) = \frac{P_1}{P} \cdot \frac{s}{y};$$

d'où l'on peut déduire, en cas de position normale du fléau, la position du levier inférieur par rapport au fléau. —

Nous pouvons aussi faire cette dernière épreuve au moyen de deux niveaux d'eau très sensibles posés sur les deux plateaux dans la direction du fléau. Si nous faisons faire au fléau avec sa position normale un angle d'inclinaison ϕ , alors nous avons, comme il résulte de (20),

$$\frac{d\delta}{d\phi} = \frac{e \sin(\gamma + \phi)}{s \sin(\gamma - \delta)}.$$

Si nous représentons par β la différence entre les angles que fait le plateau de gauche lorsque $\phi = 0$ et lorsque $\phi = \phi$, et si ϕ , $180^\circ - \gamma$ et $90^\circ - \delta$ sont très petits, alors nous avons fort approximativement

$$\frac{\beta}{\phi} = \frac{e}{s} \sin(\gamma + \phi),$$

ou

$$\sin(\gamma_1 - \phi) = \frac{\beta}{\phi} \cdot \frac{s}{e};$$

d'où peut ressortir si γ_1 diffère de ϕ .

3^o. Recherche concernant l'égalité en longueur des tiges.

Nous venons de trouver

$$\frac{d\delta}{d\phi} = \frac{e \sin(\gamma + \phi)}{s \sin(\gamma - \delta)};$$

de même nous avons l'égalité

$$\frac{d \delta_1}{d \phi_1} = \frac{e_1 \sin(\gamma_1 + \phi_1)}{s_1 \sin(\gamma_1 - \delta_1)};$$

ou bien, étant donné que $\gamma + \gamma_1 = 360^\circ$ et $\phi + \phi_1 = 0$, c'est-à-dire $\gamma_1 = -\gamma$, $\phi_1 = -\phi$ et $d\phi = d\phi_1$,

$$\frac{d \delta_1}{d \phi} = \frac{e_1 \sin(\gamma + \phi)}{s_1 \sin(\gamma + \delta_1)}.$$

Si γ n'est pas égal à $180^\circ - \phi$, alors nous trouvons en divisant

$$\frac{d \delta}{d \delta_1} = \frac{e}{e_1} \cdot \frac{s_1}{s} \cdot \frac{\sin(\gamma + \delta_1)}{\sin(\gamma - \delta)};$$

et si ensuite $180^\circ - \gamma$, $90^\circ - \delta_1$ et $(e_1 - e)$ sont très petits, alors nous avons fort approximativement

$$\frac{d \delta}{d \delta_1} = \frac{s_1}{s},$$

par conséquent, lorsque le fléau oscille, le plateau, qui est relié à la plus petite tige, fera le plus grand angle avec sa position primitive.

Si s et s_1 , c'est-à-dire les tiges, sont de longueur égale, alors les angles que les plateaux font avec l'horizon augmenteront *d'une quantité égale*.

Si nous représentons par β et β_1 la différence entre les angles que font les plateaux en B et D₁, lorsque $\phi = 0$ et $\phi = \phi$, alors nous avons

$$\frac{\beta}{\beta_1} = \frac{s_1}{s} = \frac{s + \text{corr. } s}{s},$$

$$\text{ou corr. } s = s \frac{\beta}{\beta_1} - s = s \left(\frac{\beta}{\beta_1} - 1 \right).$$

4^o. Détermination des angles que font les couteaux de suspension du fléau avec le couteau d'appui.

Dans la fig. XXIII, bB représente le couteau d'appui et dD et d₁D₁ représentent les couteaux de suspension.

Soit d_b = m, b d₁ = n, D₁B = q, BD = p et bB = k; les longueurs dD, bB et d₁D₁ peuvent être considérées comme égales.

Si nous supposons maintenant, fig. XVIII^d, que lorsque le fléau est dans sa position normale, une charge C fasse équilibre, au-dessus du point d , à la charge C_1 , placée au-dessus du point d_1 ; que de même une charge C , au-dessus de d , fasse équilibre à la charge C_2 au-dessus de D_1 ; et qu'enfin une charge C_3 au-dessus de D fasse équilibre à la charge C_2 au-dessus de D_1 ; alors nous avons

$$Cm = C_1 n, \text{ d'où } n = \frac{C}{C_1} m; \quad \textbf{VV}.$$

$$Cm = C_2 q, \text{ d'où } q = \frac{C}{C_2} m;$$

$$C_3 p = C_2 q = C_1 n = Cm, \text{ d'où } p = \frac{C}{C_3} m.$$

Si nous désignons par ϕ et ϕ_1 les angles que font les lignes dD et d_1D_1 avec bB , alors

$$k \sin \phi = p - m = \left(\frac{C}{C_3} - 1 \right) m, \text{ d'où } \sin \phi = \frac{m}{k} \cdot \frac{C - C_3}{C_3}$$

et

$$k \sin \phi_1 = q - n = \left(\frac{C}{C_2} - \frac{C}{C_1} \right) m, \text{ d'où}$$

$$\sin \phi_1 = \frac{m}{k} \cdot \frac{C}{C_1} \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_2} = \frac{n}{k} \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_2}$$

ou

$$\sin \phi_1 = \frac{m}{k} \cdot \frac{C}{C_2} \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_1} = \frac{q}{k} \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_1}. \quad \textbf{WW}.$$

N O T E S.

(1) Quintenz, de Strasbourg, est l'inventeur de la bascule qui porte son nom. Elle fut construite pour la première fois par lui en 1821; plus tard Rollé, Schwilgué, Schüller, Béranger et d'autres y apportèrent des modifications. Voyez Friedr. Bamberger: *Beschreibung und Abbildung der in neuerer Zeit erfundenen und verbesserten Maschinen zum Wägen*; Quedlinburg und Leipzig, 1832.

(2) Nous entendons par »position normale du fléau”, la position où le rapport de la charge C avec le poids P est constant pour toute charge C pour laquelle la bascule peut être employée. Dans les instruments parfaitement achevés, le fléau dans sa position normale est placé le plus exactement possible dans la position horizontale.

Par »position normale du tablier” nous entendons la position qu’occupe le tablier lorsque le fléau lui-même est dans la position normale; même remarque pour les leviers, les tiges, etc.

(3) Ici et dans la suite, nous entendons par »couteau” l’arête du couteau.

(4) Il s’agit du plan vertical dans lequel se meut l’axe longitudinal du fléau, lorsqu’il fait un angle d’inclinaison.

(5) Le poids des parties mobiles de la bascule peut rester hors de considération, puisqu’il n’a pas d’influence sur l’indépendance que nous avons en vue ici.

(6) Il est évidemment inutile de considérer que l’équilibre est indépendant de x si $\cos \beta = 0$, c’est-à-dire que, si

le tablier est vertical, la charge peut être déplacée dans le sens du centre de gravité sans que l'équilibre soit troublé.

(7) La sensibilité est également indépendante de x , si $\cos \beta = 0$ et si en outre $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$; voyez la note (6) concernant ce point.

(8) A l'équation (24) satisfont encore d'autres conditions que $\delta_1 = \delta$; nous nous occuperons de ces valeurs dans le § 9.

(9) La somme des pressions, occasionnées par la charge C sur les points H_1 et H , K_1 et K , fig. 1, ne varie pas si, sur le tablier, la charge se déplace dans une direction perpendiculaire au plan de mouvement du fléau; par conséquent le frottement est aussi indépendant de ce déplacement de la charge; d'où résulte que nous pouvons ici aussi considérer la largeur du tablier et celle du levier triangulaire comme égales à 0.

(10) Généralement le point E de la tige FE et celui du levier triangulaire supérieur ne reposent pas l'un sur l'autre au moyen d'un couteau et d'un coussinet, mais au moyen d'un oeillet et d'un crochet de fer épais. Etant donnée la grandeur du frottement en E , il résulte que ce dispositif peut être appliqué sans guère intéresser la sensibilité de la bascule. Voyez, e. a., le dernier alinéa de l' »Einleitung» du traité de »Th. Schönemann: »Von der Empfindlichkeit der Brückewagen» (Aus dem V Bande der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien).

(11) Les grandeurs a et r doivent être prises relativement grandes et les grandeurs e et r_1 relativement petites. Voyez, dans le § 6, l'alinéa précédent immédiatement l'avant-dernier.

(12) Voyez le dernier alinéa de l' »Einleitung» du traité de Schönemann: »Von der Empfindlichkeit der Brückewagen» et notre note (9).

(13) Voyez les notes (10) et (12).

(14) On trouve une description très détaillée de cette bas-

cule avec figure sous le n° 317 dans le *Traité sur la Balance ou théorie des Instruments de pesage* par J. S. Lucciardi, Annecy, 1899, où se trouvent décrites longuement les bascules admises en France à la vérification, ainsi que leurs principales parties constitutives.

(15) Voyez n° 190 de l'ouvrage de Lucciardi précédemment cité et la page 63 ainsi que les figures 41 et 45 de l'ouvrage de Ernst Brauer cité à la note (18) ci-après.

(16) Il s'agit ici de la bascule de comptoir de Pfanzeder, que les frères Pfitzer fabriquaient en grand nombre autrefois et qui, pour cette raison, a souvent porté leur nom. Cette bascule est admise à la vérification en Autriche et en Allemagne.

Voyez »*Instruktion in Ausführung der Eichordnung vom 16 Juli 1869;*” Berlin et »*Instruktion für die Aichämter der im Reichsrath vertretenen Königreiche und Länder der Oesterreichisch-ungarischen Monarchie;*” Wien, 1872.

(17) Les mêmes remarques concernant les tiges d'appui qui, dans les fig. XIV, XV et XVI, reposent en H et H₁ sur les coussinets.

(18) Les premiers instruments de ce genre parurent sous le nom de *balances anglaises* ou bien de *balances de Roberval*, parce qu'elles étaient l'application d'une particularité des leviers, qu'avait mise en lumière ce mathématicien, qui fut, au 17^e siècle, professeur au Collège de Paris.

Dans la forme où elle est représentée à la fig. XVIII, cette bascule de Roberval est reçue à la vérification aussi bien en France qu'en Belgique. Pour ce qui regarde la Belgique, nous renvoyons à la planche n° 24 de l' *Atlas des Plans formant annexe au 1^{er} supplément du Recueil des Arrêtés Royaux et des Instructions relatifs au service des poids et mesures*, Bruxelles, 1895, où entre autres sont représentés dans tous leurs détails les instruments de pesage qui sont reçus à la vérification en Belgique.

En Autriche, la bascule de Roberval est exclue de la vérification; autrefois c'était aussi le cas en Prusse; maintenant cependant, après que la tige G G₁ a été modifiée par West-

phal et Cramer, cette bascule est également admise dans l'empire allemand. Voyez Ernst Brauer: *Die Konstruktion der Waage*, Weimar, 1887, fig. 184. Cet important ouvrage — une continuation de l'excellent ouvrage de Schönemann, cité précédemment dans la note (12) — est une édition corrigée de Hartmann's *Waagen und ihre Konstruktion* (Zweite vermehrte und verbesserte Auflage von Robert Jasmund) Weimar, 1864. Ce livre de Brauer traite consciencieusement des instruments de pesage en général, aussi bien au point de vue théorique qu'au point de vue pratique, surtout même à ce dernier point de vue, tandis que les parties constitutives d'un grand nombre de bascules sont représentées par des dessins extrêmement détaillés et clairs. Voyez aussi Prechtl: *Technologische Encyclopädie*, Volume XX, tables 486—504.

(19) Voyez Schönemann: *Von der Empfindlichkeit der Brückenwagen*, § 9, et Ernst Brauer: *Die Konstruktion der Waage*, page 51.

(20) Aussi près que possible du point E.

(21) *Recherche des défauts dans les dimensions d'une bascule décimale de Quintenz.*

Soient, dans cette bascule (voyez aussi la fig. 1) les dimensions de

$$\begin{aligned} AB &= a = 482 \text{ m.M.}; \\ BD &= e = 290 \quad \gg \end{aligned}$$

Soient la distance entre la verticale F E et la ligne H H_1 = = b = 1170 m.M.;

la distance entre la verticale D G et la ligne K K_1 = = r = 1119 m.M. et

la distance de la perpendiculaire de H à la ligne K K_1 = = r_1 = 188 m.M.;

$$\begin{aligned} H h_0 &= h = 305 \text{ m.M.}, \\ H_1 h_0 &= h_1 = 307 \text{ m.M.} \end{aligned}$$

En pesant une charge $C = 100$ Kilog., l'équilibre s'établit en plaçant dans le plateau:

lorsque C se trouve au-dessus de H un poids de $P = 10,108^3$ Kilog.,
 » $C \gg \gg \gg \gg H_1 \gg \gg P + P_1 = 10,054^6 \gg$,
 » $C \gg \gg \gg \gg M_1 \gg \gg P + P_2 = 10,192^3 \gg$.

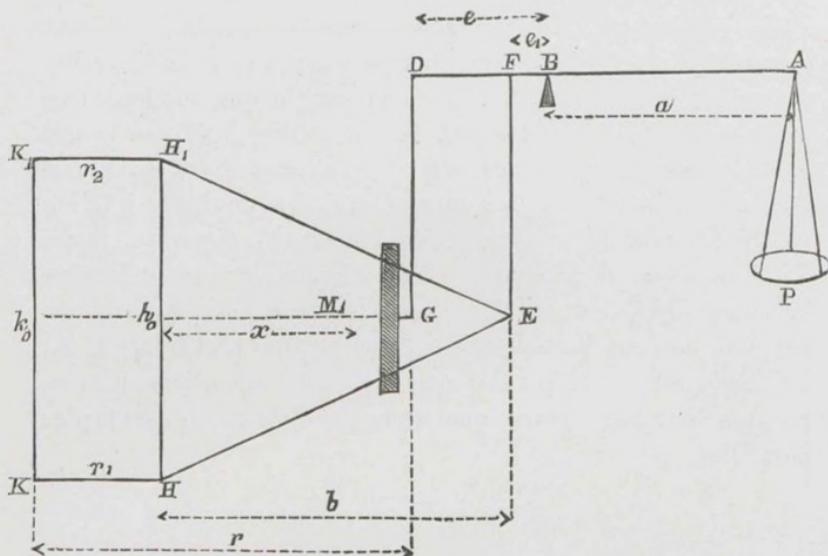


Fig. 1.

Soit placée, dans la dernière pesée, la charge dans le plan de mouvement du fléau et soit la distance, entre la verticale qui passe par le centre de gravité de C jusqu'à la ligne $H H_1$, $x = 690$ m.M.; alors on a:

$$\text{corr. } r_2 = -\frac{P_1 a r}{C e} = -\frac{-0,0537 \cdot 482 \cdot 1119}{100 \cdot 290} = +0,999 \text{ m.M.},$$

$$\begin{aligned} \text{corr. } r_1 &= \frac{a b r}{C e x} \left(P_2 - \frac{h}{h+h_1} P_1 \right) = \\ &= \frac{482 \cdot 1170 \cdot 1119}{100 \cdot 290 \cdot 690} \left(0,084 + \frac{305}{612} \cdot 0,0537 \right) = 3,49 \text{ m.M.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 &= r_1 \frac{e}{r} - \frac{a b}{C x} \left(\frac{h}{h+h_1} P_1 - P_2 \right) = 188 \cdot \frac{290}{1119} + \\ &+ \frac{482 \cdot 1170}{100 \cdot 690} \left(\frac{305}{612} \cdot 0,0537 + 0,084 \right) = 49,6273 \text{ m.M. et} \end{aligned}$$

$$\text{corr. } a = n e_1 - a = 496,273 - 482 = 14,274 \text{ m.M.}$$

Nous avons donc à apporter les corrections suivantes:

Le coussinet H doit être déplacé de 3,49 m.M. dans la

direction de B vers A ; et le coussinet H_1 : $3,490 + 0,999 = 4,489$ m.M. Le bras de levier A B doit être allongé de 14,237 m.M.

(22) *Le paradoxe statique de Roberval.*

La justesse de la règle ressort immédiatement en faisant agir au point D deux forces perpendiculaires C de direction contraire ; il se produit alors une couple qui, indépendamment de la place de la charge sur le tablier M M_1 , se trouve annulée par la résistance aux points fixes B et K, tandis que, en D, il subsiste une force C qui fait équilibre à P en A. Si la bascule est construite comme l'indique la figure XXII, alors la règle continue à se vérifier, également lorsque le levier D D_1 est courbé et que le levier G G_1 est ou non composé de deux parties, pourvu que DB//GK et BD₁//KG₁. La règle est en défaut dès que le fléau cesse d'être dans sa position normale, parce que alors les leviers ne sont plus parallèles.

Fig. I.

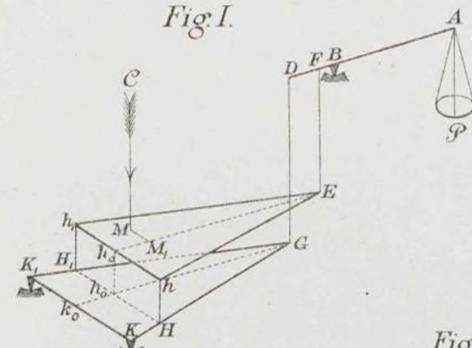


Fig. IV.

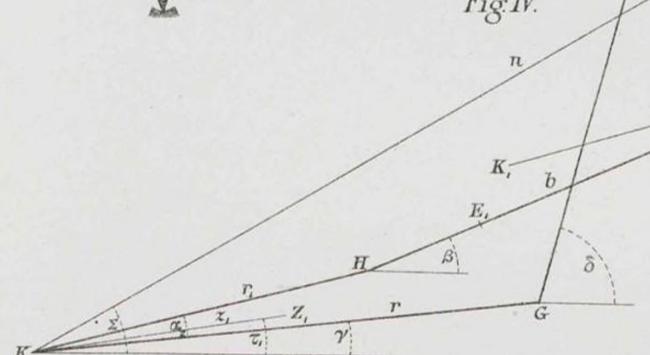


Fig. II.

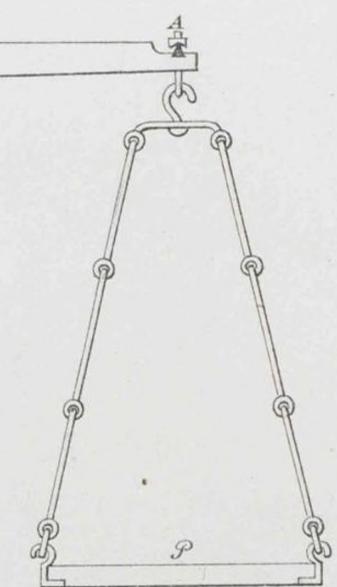
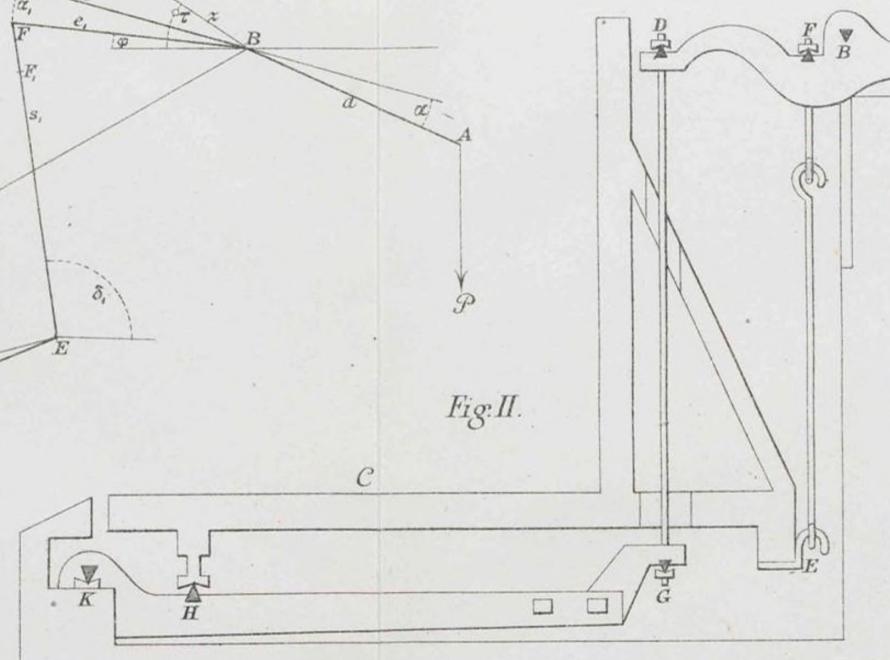


Fig. V.

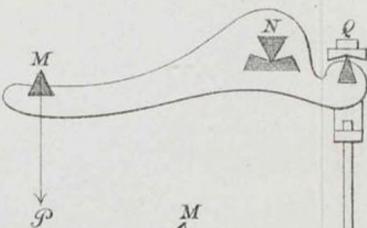
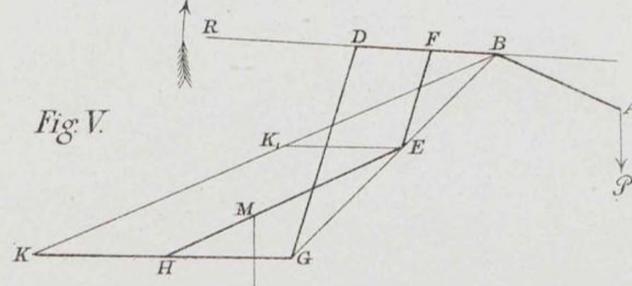


Fig. VI.

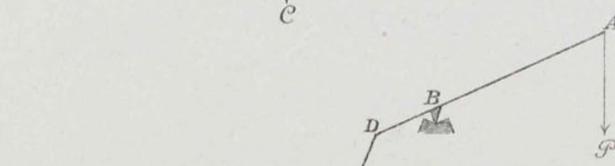


Fig. III.

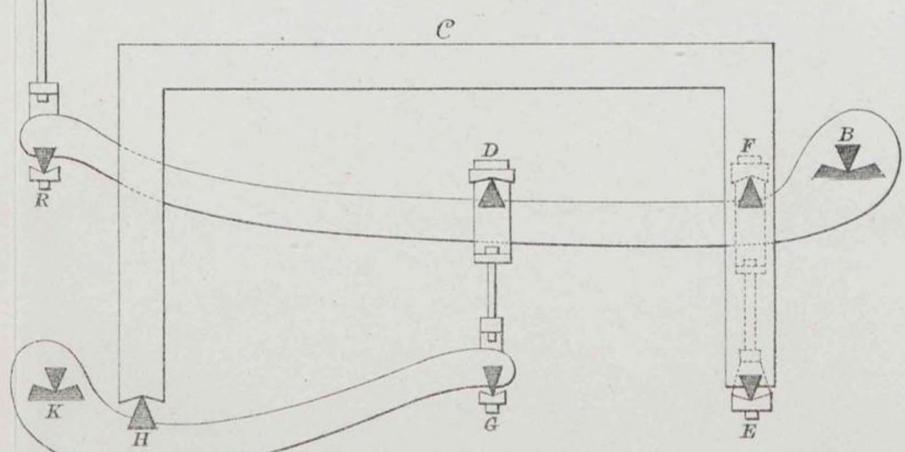
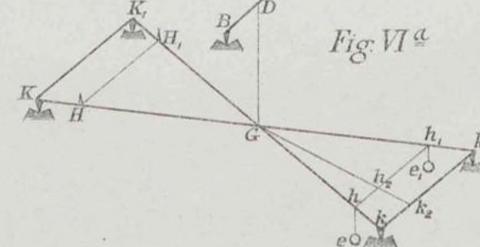


Fig. VII.

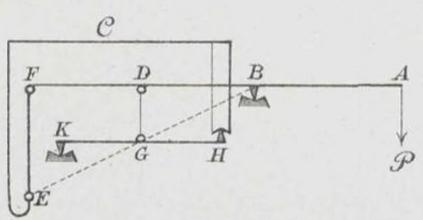


Fig. VIII.

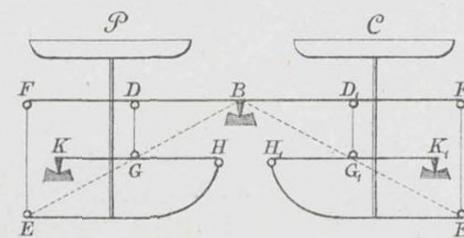


Fig. IX.

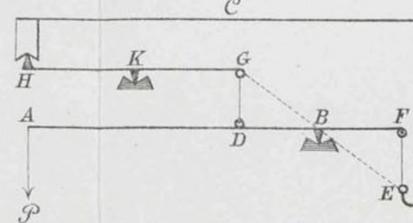


Fig. XI.

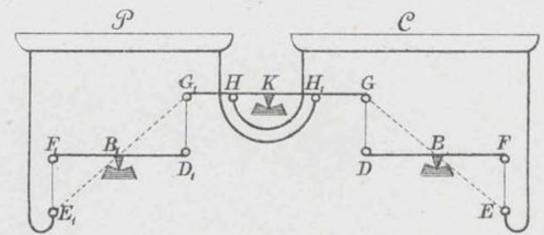


Fig. X.

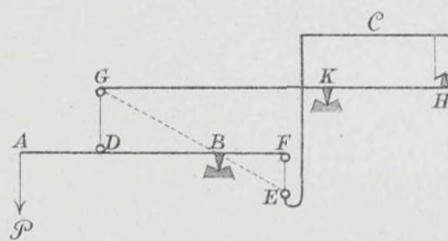


Fig. XII.

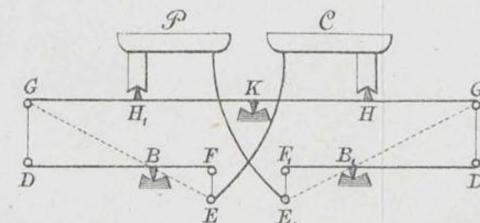


Fig. XIII.

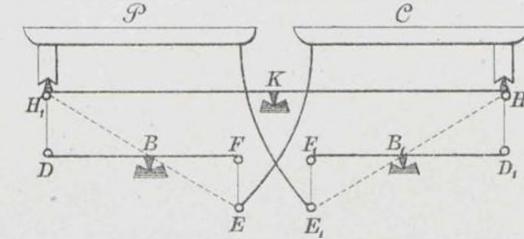


Fig XIV.

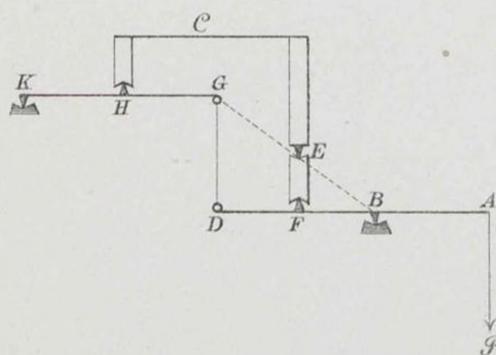


Fig. XV.

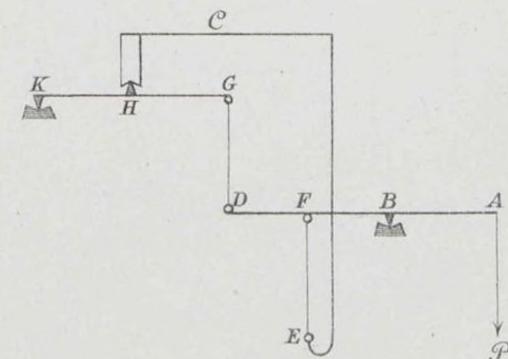


Fig. XVI.

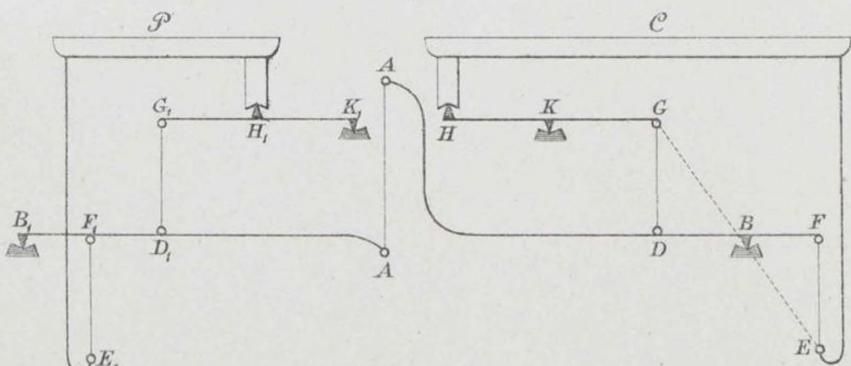


Fig. XVII.

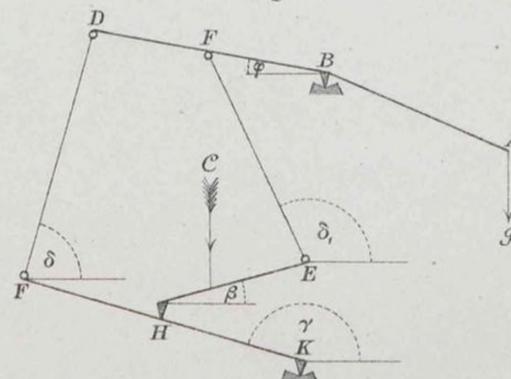


Fig. XVII^a.

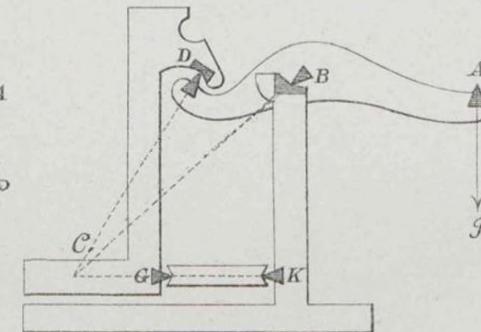


Fig. XVII^b

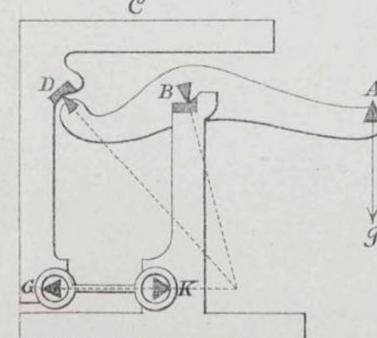


Fig. XVII^c

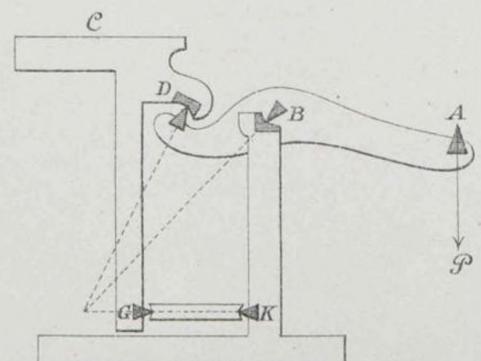


Fig. XVIII.

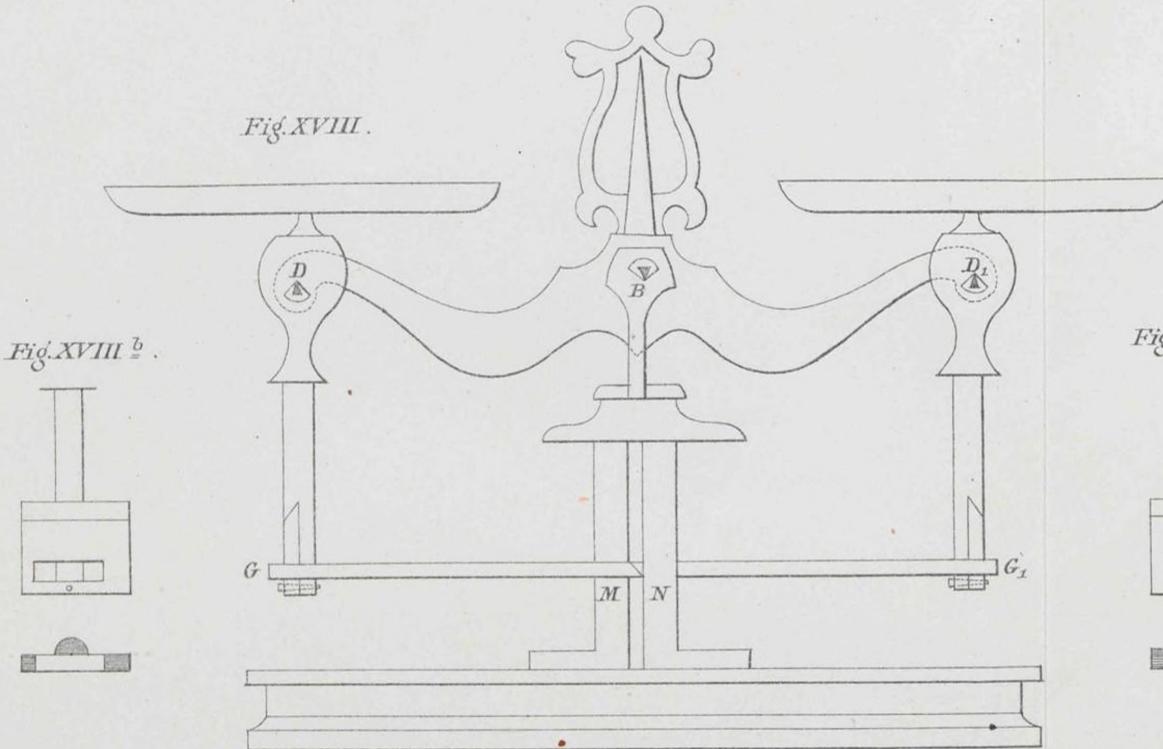
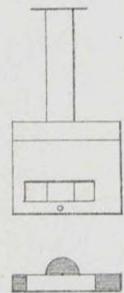
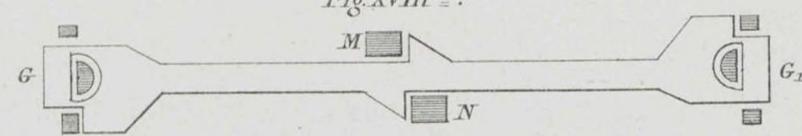
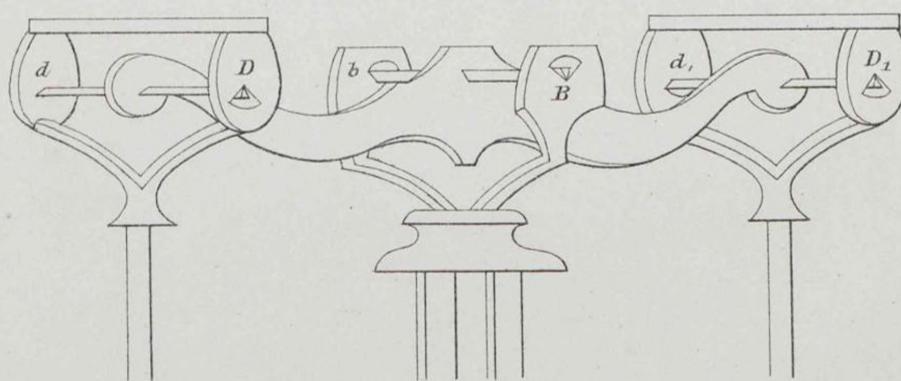
Fig. XVIII^b.Fig. XVIII^c.Fig. XVIII^d.

Fig. XIX.

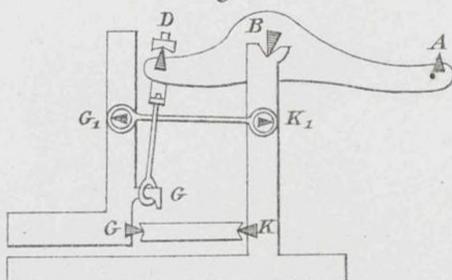
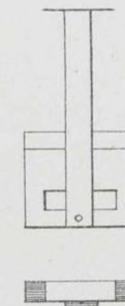
Fig. XVIII^e.

Fig. XX.

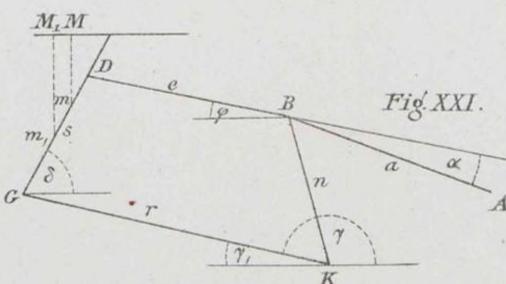
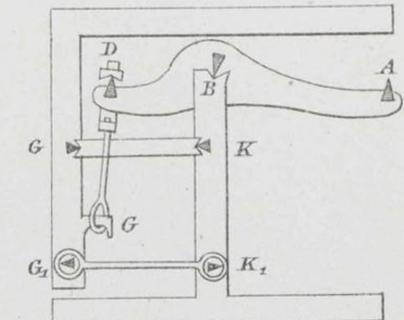


Fig. XXI.

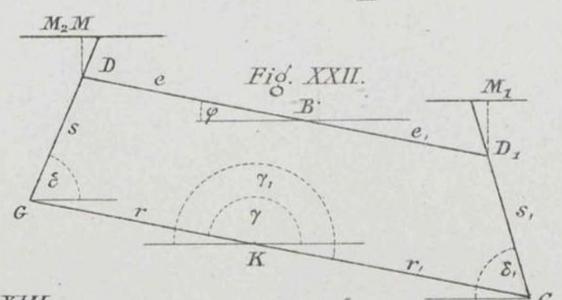
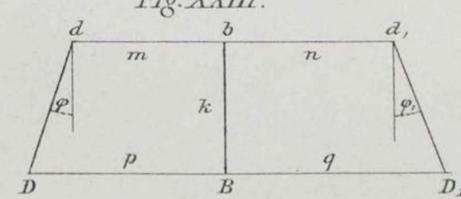
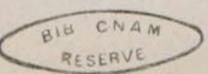


Fig. XXII.



Additionnes.



d. l'pression en $E = Cx$, ainsi pr. $E = \frac{x}{\ell} C$.

Par conséquent : somme des pressions en H_1 et H_2 :

$$= C - \frac{x}{\ell} C = C \left(1 - \frac{x}{\ell}\right).$$

Pr. on $H_1 = \frac{y+h}{h+h_1} \cdot C \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$ et on $H_2 = \frac{h_2+y}{h_2+h_1} \cdot C \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$

ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{y+h}{h+h_1} C \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \text{ élér. } H_1 = \frac{x}{\ell} C \text{ élér. } E + \\ & + \frac{h-y}{h+h_1} C \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \text{ élér. } H_2 + P \text{ élér. } A = 0 \text{ ou} \\ & \frac{y}{h+h_1} C \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \text{ élér. } H_1 + \frac{h}{h+h_1} C \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \text{ élér. } H_2 + \\ & + \frac{x}{\ell} C \text{ élér. } E - \frac{y}{h+h_1} C \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \text{ élér. } H_1 + \\ & + \frac{h}{h+h_1} C \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \text{ élér. } H_2 + P \text{ élér. } A = 0 \text{ ou} \\ & \frac{y}{h+h_1} C \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) (\text{élér. } H_1 - \text{élér. } H_2) + \\ & + C \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \frac{h_1 \text{ élér. } H_1 + h_2 \text{ élér. } H_2}{h+h_1} + \\ & + \frac{x}{\ell} C \text{ élér. } E + P \text{ élér. } A = 0; \end{aligned}$$

si élér. $H_1 = \text{élér. } H_2$, l'équation devient

$$C \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \text{ élér. } H + \frac{x}{\ell} C \text{ élér. } E + P \text{ élér. } A = 0$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{x}{\ell} C (\text{élévation } E - \text{élévation } H) + C \text{ élér. } H + \\ & + P \text{ élér. } A = 0 \end{aligned}$$

57

b.

$$-e_i \sin \varphi \cos \delta'_i - e_i \sin \delta'_i \cos \delta'_i \frac{d\delta'_i}{dq} - b \sin \beta \cos \delta'_i \frac{d\beta}{dq} - z_i \sin (\delta'_i + \alpha_2) \cos \delta'_i \frac{d\delta'_i}{dq} = 0.$$

$$-e_i \cos \varphi \sin \delta'_i + e_i \cos \delta'_i \sin \delta'_i \frac{d\delta'_i}{dq} + b \cos \beta \sin \delta'_i \frac{d\beta}{dq} + z_i \cos (\delta'_i + \alpha_2) \sin \delta'_i \frac{d\delta'_i}{dq} = 0.$$

$$-e_i \sin (\varphi + \delta'_i) - b \sin (\beta - \delta'_i) \frac{d\beta}{dq} - z_i \sin (\delta'_i + \alpha_2 - \delta'_i) \frac{d\delta'_i}{dq} = 0,$$

aindi

$$\frac{d\beta}{dq} = \frac{e_i \sin (\delta'_i + \varphi) - z_i \sin (\delta'_i - \beta - \alpha_2) \frac{d\delta'_i}{dq}}{b \sin (\delta'_i - \beta)}$$

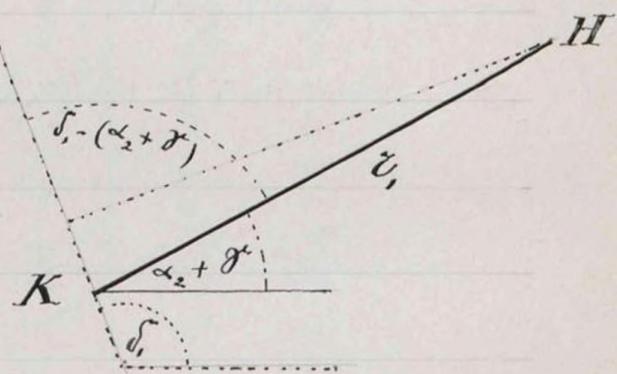
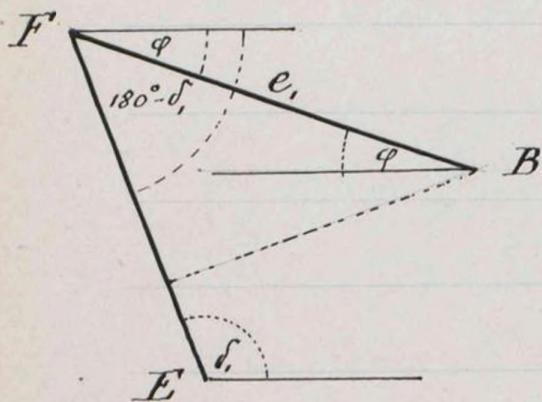
(15)

$$\begin{aligned}
 \underline{C.} \quad & -e \sin(\varphi + \alpha_1) \cos \delta - s \cdot \sin \delta \cdot \cos \delta \cdot \frac{d\delta}{dq} - r \sin \gamma \cos \delta \cdot \frac{d\gamma}{dq} = 0 \\
 & -e \cos(\varphi + \alpha_1) \sin \delta + s \cdot \cos \delta \cdot \sin \delta \cdot \frac{d\delta}{dq} + r \cdot \cos \gamma \sin \delta \cdot \frac{d\gamma}{dq} = 0 \\
 \hline
 & -e \sin(\varphi + \alpha_1 + \delta) - r \sin(\gamma - \delta) \frac{d\gamma}{dq} = 0
 \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d\gamma}{dq} = \frac{e \sin(\delta + \varphi + \alpha_1)}{r \sin(\delta - \gamma)} \quad (16)$$

cl.



$$\begin{aligned}
 BF \sin \angle BFE &= e_1 \sin(180^\circ - \delta - \varphi) = r \sin(\delta - \gamma - \alpha_2) \\
 &= e_1 \sin(\delta + \varphi).
 \end{aligned}$$

e. Si $\frac{d\beta}{dq} = 0$, alors le 3^{ème} terme disparaît.

f.

$$-e \sin(\varphi + \alpha_1) \cos \theta - s \sin \delta \cos \theta \frac{d\delta}{d\varphi} - r \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{d\varphi} = 0 \quad \dots \quad (13)$$

$$-e \cos(\varphi + \alpha_1) \sin \theta + s \cos \delta \sin \theta \frac{d\delta}{d\varphi} + r \cos \theta \sin \theta \frac{d\theta}{d\varphi} = 0 \quad \dots \quad (14)$$

$$-e \sin(\varphi + \alpha_1 + \theta) - s \sin(\delta - \theta) \frac{d\theta}{d\varphi} = 0, \text{ ou}$$

$$-e \sin(\varphi + \alpha_1 + \theta) + s \sin(\theta - \delta) \frac{d\delta}{d\varphi} = 0$$

ainsi

$$\frac{d\delta}{d\varphi} = \frac{e \sin(\theta + \alpha_1 + \varphi)}{s \sin(\theta - \delta)} \quad \dots \quad (20)$$

g.

$$-e_i \sin \varphi \cos(\theta + \alpha_2) - s_i \sin \delta \cos(\theta + \alpha_2) \frac{d\delta_i}{d\varphi} - r_i \sin(\theta + \alpha_2) \cos(\theta + \alpha_2) \frac{d\theta}{d\varphi} = 0 \quad (11)$$

$$-e_i \cos \varphi \sin(\theta + \alpha_2) + s_i \cos \delta \sin(\theta + \alpha_2) \frac{d\delta_i}{d\varphi} + r_i \cos(\theta + \alpha_2) \sin(\theta + \alpha_2) \frac{d\theta}{d\varphi} = 0 \quad (12)$$

$$-e_i \sin(\theta + \alpha_2 + \varphi) - s_i \sin(\delta_i - \theta - \alpha_2) \frac{d\delta_i}{d\varphi} = 0 \text{ ou}$$

$$-e_i \sin(\theta + \alpha_2 + \varphi) = -s_i \sin(\theta + \alpha_2 - \delta_i) \frac{d\delta_i}{d\varphi} = 0$$

ainsi

$$\frac{d\delta_i}{d\varphi} = \frac{e_i \sin(\theta + \alpha_2 + \varphi)}{s_i \sin(\theta + \alpha_2 - \delta_i)} \quad \dots \quad (21)$$

$$\frac{d^2y}{dq^2} = \frac{\varepsilon \sin(\delta - \vartheta) e \cos(\delta + \vartheta + \alpha) - e \sin(\delta + \vartheta + \alpha) e \cos(\delta - \vartheta)}{dq^2} \cdot \frac{d\delta + d\vartheta}{dq} \cdot \frac{d\delta - d\vartheta}{dq} =$$

$$\varepsilon^2 \sin^2(\delta - \vartheta)$$

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon \sin(\delta - \vartheta) e \cos(\delta + \vartheta + \alpha) - e \sin(\delta + \vartheta + \alpha) e \cos(\delta - \vartheta) \right] \frac{d\delta}{dq} + \\ & + \varepsilon \sin(\delta - \vartheta) e \cos(\delta + \vartheta + \alpha) + e \sin(\delta + \vartheta + \alpha) e \cos(\delta - \vartheta) \right] \frac{d\vartheta}{dq} \\ & = \frac{\varepsilon^2 \sin^2(\delta - \vartheta)}{\varepsilon \sin(\delta - \vartheta - \alpha) \frac{d\delta}{dq} + e \varepsilon \sin(\delta - \vartheta) \cos(\delta + \vartheta + \alpha) + e^2 \sin(\delta + \vartheta + \alpha) \cos(\delta - \vartheta)} = \\ & = \frac{-e \sin(\delta + \alpha + \vartheta) \frac{d\delta}{dq}}{-e \sin(\delta - \vartheta) + e \cos(\delta + \vartheta + \alpha) + e \left(\frac{d\vartheta}{dq} \right) \cos(\delta - \vartheta) \frac{d\vartheta}{dq}} = \\ & = \frac{\varepsilon^2 \sin^2(\delta - \vartheta)}{\varepsilon \sin(\delta - \vartheta)} = \\ & = \frac{\left(\frac{d\delta}{dq} \right)^2 + e \cos(\delta + \vartheta + \alpha) + e \left(\frac{d\vartheta}{dq} \right) \cos(\delta - \vartheta) \frac{d\vartheta}{dq}}{\varepsilon \sin(\delta - \vartheta)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2y}{dq^2} = 0 \text{ équivaut à (voyez (19)) :} \\ & e \cos(\delta + \vartheta + \alpha) + e \cos(\delta + \vartheta) \frac{d\delta}{dq} - e \sin(\delta - \vartheta - \alpha_2) \cdot \frac{d\delta}{dq} + e \cos(\delta + \vartheta + \alpha) + e \cos(\delta + \vartheta + \alpha_2) \frac{d\vartheta}{dq} - \\ & - e \sin(\delta - \vartheta - \alpha_2) \cdot \frac{d\vartheta}{dq} \frac{d\delta}{dq} + e \cos(\delta + \vartheta - \alpha_2) \left(\frac{d\vartheta}{dq} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sin(\delta - \vartheta) \left\{ e \cos(\delta + \vartheta) + \left[e \cos(\delta + \vartheta) - e \cos(\delta - \vartheta - \alpha_2) \right] \frac{d\vartheta}{dq} + \right. \\ & \left. + e \cos(\delta - \vartheta - \alpha_2) \left(\frac{d\vartheta}{dq} \right)^2 \right\} = \\ & = \varepsilon \sin(\delta - \vartheta - \alpha_2) \left\{ \delta \left(\frac{d\delta}{dq} \right)^2 + e \cos(\delta + \vartheta + \alpha) + e \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{dq} \right)^2 \right\}. \\ & Donc avons : e \cos(\delta + \vartheta) - e \cos(\delta - \vartheta - \alpha_2) \frac{d\vartheta}{dq} = (d'après 16) = \\ & = e \cos(\delta + \vartheta) - e \cos(\delta - \vartheta - \alpha_2). \frac{e \sin(\delta + \vartheta + \alpha)}{e \sin(\delta - \vartheta)} = (d'après 18) = \\ & = e \cos(\delta + \vartheta) - \frac{e \sin(\delta + \vartheta) \cos(\delta - \vartheta - \alpha_2)}{\sin(\delta - \vartheta - \alpha_2)} = \\ & = \frac{e}{\sin(\delta - \vartheta - \alpha_2)} \cdot \left\{ \sin(\delta - \vartheta - \alpha_2) \cos(\delta + \vartheta) - \sin(\delta - \vartheta - \alpha_2) \right\} = \\ & = \frac{e \sin(\delta - \vartheta - \alpha_2 - \delta_1 - \vartheta)}{\sin(\delta - \vartheta - \alpha_2)} = \frac{e \sin(\delta + \alpha_2 + \vartheta)}{\sin(\delta + \alpha_2 - \delta_1)} = (d'après 21) = \delta_1 \cdot \frac{d\delta}{dq} \\ & \text{ainsi :} \\ & \frac{\varepsilon \sin(\delta - \vartheta)}{\varepsilon \sin(\delta - \vartheta - \alpha_2)} = \frac{e \cos(\delta + \vartheta + \alpha_1) + \delta \left(\frac{d\delta}{dq} \right)^2 + e \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{dq} \right)^2}{e \cos(\delta + \vartheta + \alpha_1) + \delta \left(\frac{d\delta}{dq} \right)^2 + e \cos(\delta - \vartheta - \alpha_2) \left(\frac{d\vartheta}{dq} \right)^2} = \end{aligned}$$

61.

$$\underline{J.} \quad \frac{z \sin(\delta - \gamma)}{z, \sin(\delta - \gamma)} = \frac{e \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right) + z \cos(\delta - \gamma) \left(\frac{d\gamma}{d\varphi} \right)^2}{e, \cos(\delta + \varphi) + s, \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right) + z, \cos(\delta - \gamma) \left(\frac{d\gamma}{d\varphi} \right)^2}$$

on

$$z e \cos(\delta + \varphi) + z s, \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 + z z, \cos(\delta - \gamma) \left(\frac{d\gamma}{d\varphi} \right)^2 = \\ = z, e \cos(\delta + \varphi) + z, s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 + z z, \cos(\delta - \gamma) \left(\frac{d\gamma}{d\varphi} \right)^2$$

on

$$z e \cos(\delta + \varphi) + z s, \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 = z, e \cos(\delta + \varphi) + z, s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2$$

ainsi, puisque $\frac{e'}{e} = \frac{z}{z}$, on $ze = z, e$,

$$zs, \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 = z, s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2$$

K.

$z s, \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 = z, s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)$. Nous trouvons d'après (20) et (21)

$$z s, \cdot \frac{e^2 \sin^2(\gamma + \varphi)}{s^2 \sin^2(\delta - \gamma)} = z, s, \cdot \frac{e^2 \sin^2(\gamma + \varphi)}{s^2 \sin^2(\delta - \gamma)}$$

on

$$z s, \cdot \frac{e^2}{s^2} = z, s, \frac{e^2}{s^2} \text{ on } \frac{z}{s}, \frac{e^2}{s^2} = \frac{z}{s} e^2.$$

Mais

$$ze = z, e, \text{ ainsi } \frac{e}{s} = \frac{e}{s} \text{ ou } \frac{e'}{e} = \frac{s'}{s};$$

par conséquent aussi

$$\frac{e'}{e} = \frac{s'}{s} = \frac{z}{z}.$$

$$\underline{I.} \quad \frac{s_i}{s_j} = \frac{\tau_i}{\tau_j}, \text{ ainsi } s : s_i = \tau : \tau_i$$

$$\text{et } s : s - s_i = \tau : \tau - \tau_i.$$

$$\text{Nous avons : } s : s - s_i = GB : GE$$

$$\text{et } \tau : \tau - \tau_i = GK : GH$$

$$\text{ainsi } GB : GE = GK : GH \text{ ou}$$

$$GK \cdot GE = GB \cdot GH$$

par conséquent

$$\frac{GK}{GH} = \frac{GB}{GE}.$$

m.

$$\begin{aligned} \lambda e \cos \varphi + \lambda s \cos \delta_i + (1-\lambda) n \cos \beta + \lambda r \cos \theta' &= n \cos \Sigma \\ \lambda e \cos \varphi + \lambda s \cos \delta &+ \lambda r \cos \theta' = \lambda n \cos \Sigma. \quad (9) \\ \hline \lambda s (\cos \delta_i - \cos \delta) + (1-\lambda) n \cos \beta &= (1-\lambda) n \cos \Sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\lambda e \sin \varphi + \lambda s \sin \delta_i + (1-\lambda) n \sin \beta + \lambda r \sin \theta' &= n \sin \Sigma \\ -\lambda e \sin \varphi + \lambda s \sin \delta &+ \lambda r \sin \theta' = \lambda n \sin \Sigma. \quad (10) \\ \hline \lambda s (\sin \delta_i - \sin \delta) + (1-\lambda) n \sin \beta &= (1-\lambda) n \sin \Sigma \end{aligned}$$

11.

$$\cos q - \cos p = 2 \sin \frac{1}{2} (p+q) \cdot \sin \frac{1}{2} (p-q)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{1}{2} (p-q) \cdot \cos \frac{1}{2} (p+q)$$

ainsi

$$\delta s (\cos \delta_i - \cos \delta_j) = 2 \delta s \cdot \sin \frac{1}{2} (\delta_i + \delta_j) \cdot \sin \frac{1}{2} (\delta_i - \delta_j)$$

et

$$(1-\delta) n (\cos \Sigma - \cos \beta) = 2 (1-\delta) n \sin \frac{1}{2} (\Sigma + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2} (\beta - \Sigma)$$

par conséquent

$$\delta s \cdot \sin \frac{1}{2} (\delta_i + \delta_j) \cdot \sin \frac{1}{2} (\delta_i - \delta_j) = (1-\delta) n \sin \frac{1}{2} (\Sigma + \beta) \sin \frac{1}{2} (\beta - \Sigma).$$

Nous avons aussi

$$\delta s (\sin \delta_i - \sin \delta_j) = 2 \delta s \cdot \sin \frac{1}{2} (\delta_i - \delta_j) \cos \frac{1}{2} (\delta_i + \delta_j)$$

et

$$(1-\delta) n (\sin \Sigma - \sin \beta) = 2 (1-\delta) n \sin \frac{1}{2} (\Sigma - \beta) \cos \frac{1}{2} (\Sigma + \beta)$$

ainsi

$$\delta s \sin \frac{1}{2} (\delta_i - \delta_j) \cos \frac{1}{2} (\delta_i + \delta_j) =$$

$$= (1-\delta) n \sin \frac{1}{2} (\Sigma - \beta) \cos \frac{1}{2} (\Sigma + \beta).$$

O.

$$\frac{dP}{d\varphi} = (P + P_0) \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) + \frac{St \cos \delta \frac{d^2\delta}{d\varphi^2} - St \sin \delta \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2}{\alpha \cos(\alpha + \varphi)} +$$

$$+ \frac{St \cos \delta \frac{d^2\delta}{d\varphi^2} - St \sin \delta \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2}{\alpha \cos(\alpha + \varphi)} +$$

$$+ \frac{\{X, z, \cos \tau + Sr \cos \varphi + (B + C + S) z, \cos \varphi\} \frac{d^2\varphi}{d\varphi^2}}{\alpha \cos(\alpha + \varphi)} -$$

$$- \frac{\{X, z, \sin \tau + Sr \sin \varphi + (B + C + S) z, \sin \varphi\} \left(\frac{d\varphi}{d\varphi} \right)^2 - X z \sin \tau}{\alpha \cos(\alpha + \varphi)} =$$

$$= (P + P_0) \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) +$$

$$+ \frac{\left[X \left\{ \cos \delta \frac{d^2\delta}{d\varphi^2} - \sin \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right) \right\} + \{X, z, \cos \tau, + Y \cos \varphi\} \frac{d^2\varphi}{d\varphi^2} - \right.}{\alpha \cos(\alpha + \varphi)} \\ \left. - \{X, z, \sin \tau, + Y \sin \varphi\} \left(\frac{d\varphi}{d\varphi} \right)^2 - X z \sin \tau \right] \quad (25)$$

$$\frac{d^2 \int -s \sin(\beta - \delta) \cos(\beta + \varphi) \left\{ \frac{d\beta}{dq} + 1 \right\} - e \sin(\beta + q) s \cos(\beta - \delta) \left\{ \frac{d\beta}{dq} - \frac{d\delta}{dq} \right\}}{dq^2} =$$

$$= \frac{s e \left\{ \sin(\beta - \delta) \cos(\beta + q) - s \sin(\beta + q) \cos(\beta - \delta) \right\} \frac{d\beta}{dq} + s e \sin(\beta - \delta) \cos(\beta + q) + s \sin(\beta + q) \cos(\beta - \delta) \frac{d\delta}{dq}}{s^2 \sin^2(\beta - \delta)}$$

$$s^2 \sin^2(\beta - \delta)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{s e \sin(\beta - \delta - q) \frac{d\beta}{dq} + s e \sin(\beta + q) \cos(\beta - \delta)}{s^2 \sin^2(\beta - \delta)} + \frac{s e \sin(\beta + q) \cos(\beta - \delta)}{s^2 \sin^2(\beta - \delta)} \cdot \frac{d\beta}{dq} = \\ &= \frac{e \sin(\delta + q)}{2 \sin(\beta - \delta)} \cdot \frac{\frac{d\beta}{dq} + e \cos(\beta + q)}{s \sin(\beta - \delta)} + \frac{e \sin(\beta + q)}{s \sin(\beta - \delta)} \cdot \frac{s \cos(\beta - \delta)}{s \sin(\beta - \delta)} \cdot \frac{d\beta}{dq} = \\ &\text{ainsi, d'après (16) et (20)} \\ &\frac{d^2 \beta}{dq^2} = \frac{e \left(\frac{d\beta}{dq} \right)^2 + e \cos(\beta + q) + s \cos(\beta - \delta) \left(\frac{d\beta}{dq} \right)^2}{s \sin(\beta - \delta)} \end{aligned}$$

66.

9. Etant donné: $\alpha = 0$, $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$, $\delta = 90^\circ$, $\tau = 0$
et $\lambda_z = 0$, alors $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 0$; puis, d'après (20),
 $\frac{d\delta}{d\varphi} = 0$, d'après (16), $\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{\ell}{z}$; $\cos \delta = 0$; $\frac{d^2\delta}{d\varphi^2} =$
 $= -\frac{e + \ell \cdot \frac{\ell}{z}}{s}$; d'après (22), $\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} = 0$, ainsi tous les
termes dans le nominateur du second membre
de (25) sont égaux à zéro, par conséquent
 $\frac{d\vartheta}{d\varphi} = 0$.

1. On trouve de (11): $\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\ell^2}{z^2}$, ainsi (22) devient
 $\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} = \frac{-e \sin \varphi + z \sin \vartheta \cdot \frac{\ell^2}{z^2}}{z} =$
 $= -\frac{e}{z} \sin \varphi + \frac{\ell^2}{z^2} \sin \vartheta = -\sin \vartheta + \frac{\ell^2}{z^2} \sin \vartheta = \sin \vartheta \left(\frac{\ell^2}{z^2} - 1\right)$.

8. $(P + P_o) \alpha \sin \varphi + \{h_z, z, \cos t, + Y\} \left\{ \frac{\ell^2}{z^2} - 1 \right\} \sin \vartheta -$
 $- \{h_z, z, \sin t, + Y \sin \vartheta\} \frac{\ell^2}{z^2} - h_z \sin t =$
 $= (P + P_o) \alpha \sin \varphi + h_z, z, \cos t, \cdot \frac{\ell^2}{z^2} \sin \vartheta - h_z, z, \cos t, \sin \vartheta +$
 $+ Y \frac{\ell^2}{z^2} \sin \vartheta - Y \sin \vartheta \cdot h_z, z, \sin t, \frac{\ell^2}{z^2} + Y \sin \vartheta \cdot \frac{\ell^2}{z^2} - h_z, z, \sin t =$
 $= (P + P_o) \alpha \sin \varphi - \frac{\ell^2}{z^2} h_z, z, \{ \sin t, - \cos t, \sin \vartheta \} -$
 $- \{h_z, z, \cos t, + Y\} \sin \vartheta - h_z \sin t.$

t. Il suit de (3), considérant (16):

$\{h_z, z, \cos t, + S_z + (B + C + S_z) z\} \frac{\ell}{z} + h_z \cos t = (P + P_o) \alpha$
ou $\{h_z, z, \cos t, + Y\} \frac{\ell}{z} + h_z \cos t = (P + P_o) \alpha$ donc
 $h_z, z, \cos t, + Y = \left\{ (P + P_o) \alpha - h_z z \cos t \right\} \frac{z}{\ell}$.

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{P} + \mathcal{P}_0) a \sin \varphi - \frac{e^2}{2} h_x \left\{ \sin t, -\cos t, \sin \mathcal{P} \right\} - \left\{ (\mathcal{P} + \mathcal{P}_0) a, -h_x \cos t \right\} \frac{e}{e} \sin \mathcal{P} - h_x \sin t = \\
 & = (\mathcal{P} + \mathcal{P}) a \sin \varphi - \frac{e^2}{2} h_x \left\{ \sin t, -\cos t, \sin \mathcal{P} \right\} - \left\{ (\mathcal{P} + \mathcal{P}_0) a, -h_x \sin t \right\} \sin \varphi - h_x \sin t = \\
 & = -\frac{e^2}{2} h_x \left(\sin t, -\cos t, \sin \mathcal{P} \right) + h_x \cos t \cdot \sin \varphi - h_x \sin t = \\
 & = -\frac{e^2}{2} h_x \left(\sin t, -\cos t, \sin \mathcal{P} \right) - h_x \left(\sin t \cdot \cos t \cdot \sin \varphi \right) = \\
 & = -\left\{ \frac{e^2}{2} h_x \left(\sin t, -\cos t, \sin \mathcal{P} \right) + h_x \left(\sin t \cdot \cos t \cdot \sin \varphi \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\sin(t, -\mathcal{P}) = \sin t, \overset{\text{h}}{\cos} \mathcal{P} \cdot \sin \mathcal{P} \cos t,$$

$$\sin t, -\cos t, \sin \mathcal{P} = \sin t, -\sin \mathcal{P} \cos t,$$

$$\text{difference} = \sin t, (1, \cos \mathcal{P}).$$

Nous avons : $\cos \mathcal{P} = \cos^2 \frac{1}{2} \mathcal{P} \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{P}$; par conséquent :

difference = $\sin t, (1 - \cos^2 \frac{1}{2} \mathcal{P} + \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{P}) = 2 \sin t, \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{P}$, ce qui est une grandeur infinitement petite du deuxième ordre.

Deux angles à la note appartenant à bb se trouvent

69.

W (15) devient : $\frac{d\beta}{dq} = \frac{e_r - z_r \cdot \frac{dx}{dz}}{b}$

et (16) : $\frac{dx}{dz} = \frac{e}{z}$,

par conséquent

$$\frac{d\beta}{dq} = \frac{e_r - z_r \cdot \frac{e}{z}}{b} = \frac{e_r z - z_r e}{bz} = 0$$

transporté en (2b) on trouve

$$C_{r_1} \cdot \frac{e}{z} - \mathcal{P}_a = C_{e_r} - \mathcal{P}_a = 0.$$

X_{z'}

$$\begin{aligned} A + \bar{F} + D &= P + \frac{x}{b} C + \frac{z_r}{z} \cdot \frac{b-x}{b} \cdot C = P + \frac{x}{b} C + \frac{z_r}{z} C - \frac{z_r}{z} \cdot \frac{x}{b} C = \\ &= P + \frac{z_r}{z} C + \frac{z_r - z_r}{z} \cdot \frac{x}{b} C. \end{aligned}$$

X_x

$$\begin{aligned} C &\left\{ \frac{z - z_r}{z} \cdot \frac{b - x}{b} \cdot \frac{e}{z} + \frac{b - x}{b} \cdot \frac{e}{z} + \frac{z_r}{z} \cdot \frac{b - x}{b} \cdot \frac{e}{z} + \frac{z_r}{z} \cdot \frac{b - x}{b} + \frac{x}{b} + \frac{P}{C} + \frac{z_r}{z} + \frac{z - z_r}{z} \cdot \frac{x}{b} + \frac{P}{C} \right\} = \\ &= C \left\{ \left(\frac{z - z_r}{z} + \frac{z_r}{z} + \frac{z_r}{z} \right) \frac{b - x}{b} \cdot \frac{e}{z} + \frac{z_r}{z} \cdot \frac{x}{b} + \frac{z_r}{z} + \frac{x}{b} - \frac{z_r}{z} \cdot \frac{x}{b} + \lambda \frac{P}{C} \right\} = \\ &= C \left\{ 2 \cdot \frac{b - x}{b} \cdot \frac{e}{z} + 2 \frac{z_r}{z} - 2 \frac{z_r}{z} \cdot \frac{x}{b} + 2 \frac{x}{b} + \lambda \frac{P}{C} \right\} = \\ &= 2 C \left\{ \frac{e}{z} - \frac{x}{b} \cdot \frac{e}{z} + \frac{z_r}{z} - \frac{z_r}{z} \cdot \frac{x}{b} + \frac{x}{b} + \frac{P}{C} \right\} = \\ &= 2 \left[C \left\{ \frac{e}{z} + \frac{z_r}{z} + \frac{x}{b} - \frac{x}{b} \cdot \frac{e}{z} - \frac{z_r}{z} \cdot \frac{x}{b} \right\} + P \right] = \\ &= 2 \frac{e + z_r + \frac{x}{b}(z - e - z_r)}{z} \cdot C + 2 P. \end{aligned}$$

Y. $\frac{z - e - z}{z} C = \frac{6z - \frac{b}{4} z - z}{6z} = \frac{24 - 6 - 4}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} = 0.6 C$,
 tandis $C + P = 1.1 C$; ainsi presque la moitié.

Z. Dans le § 4 on a supposé que le contre de gravité du tablier agit sur E_1 , fig. IV, étant $HE_1 = c$

dd. En négligeant $d\delta$ et en mettant, d'après (16), $\frac{dF}{dq} = \frac{e}{z}$, alors on trouve :

$$\begin{aligned} & f \left[\frac{b-c}{b} \cdot \frac{e}{z} \mathcal{B} + \left\{ \frac{z}{z} \cdot \frac{b-c}{b} \mathcal{B} + \frac{z \cos t}{z} \cdot \frac{e}{z} \right\} \frac{e}{z} + \right. \\ & + \left\{ \frac{z-z}{z} \cdot \frac{b-c}{b} \mathcal{B} + \frac{z-z \cos t}{z} \cdot \frac{e}{z} \right\} \frac{e}{z} + \frac{b-c}{b} \mathcal{B} + \frac{z \cos t}{z} \cdot \frac{e}{z} + \\ & + S + \frac{c}{b} \mathcal{B} + S + \frac{z}{z} \cdot \frac{b-c}{b} \mathcal{B} + \frac{z \cos t}{z} \cdot \frac{e}{z} \cdot \frac{e}{z} + S + \frac{c}{b} \mathcal{B} + S + h + P_o + P_o \Big] = \\ & = f \left[\left\{ \frac{b-c}{b} \mathcal{B} + \frac{z}{z} \cdot \frac{b-c}{b} \mathcal{B} + \frac{z \cos t}{z} \cdot \frac{e}{z} \right\} \frac{e}{z} + \frac{z-z}{z} \cdot \frac{b-c}{b} \mathcal{B} + \frac{z-z \cos t}{z} \cdot \frac{e}{z} \right. \\ & + \left\{ \frac{z}{z} \cdot \frac{b-c}{b} + \frac{c}{b} + \frac{z}{z} \cdot \frac{b-c}{b} + \frac{c}{b} \right\} \mathcal{B} + \frac{z \cos t}{z} \cdot \frac{e}{z} \cdot \frac{e}{z} + S + S + \frac{z \cos t}{z} \cdot \frac{e}{z} + \\ & + S + S + h + 2P_o \Big] = \\ & = f \left[\left\{ 2 \cdot \frac{b-c}{b} \mathcal{B} + h \right\} \frac{e}{z} + \left\{ 2 \cdot \frac{z}{z} \cdot \frac{b-c}{b} \mathcal{B} + 2 \cdot \frac{c}{b} \mathcal{B} \right\} + \right. \\ & \left. + 2 \left\{ \frac{z \cos t}{z} \cdot \frac{e}{z} \cdot \frac{e}{z} + S + S + \frac{z}{z} h + P_o \right\} \right] = \\ & = 2 \frac{f}{a} \left[\left\{ \frac{b-c}{b} \cdot \frac{e+z}{z} + \frac{c}{b} \right\} \mathcal{B} + \frac{e+2z \cos t}{2z} \cdot \frac{e}{z} \cdot \frac{e}{z} \cdot \frac{e}{z} + S + S + \frac{z}{z} h + P_o \right]. \end{aligned}$$

hh.

En substituant (16) et $r_i = \frac{e_i}{\epsilon} z$, on trouve

$$C \frac{e_i}{\epsilon} z \cos(\theta + \alpha_2) \cdot \frac{e \sin(\delta + \varphi + \alpha_1)}{z \sin(\delta - \theta)} + Cx \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\varphi} - Pa \cos(\alpha + \alpha_1 + \varphi) = 0$$

ou

$$C e_i \cos(\theta + \alpha_2) \cdot \frac{\sin(\delta + \varphi + \alpha_1)}{\sin(\delta - \theta)} + Cx \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\varphi} = Pa \cos(\alpha + \alpha_1 + \varphi)$$

$$\text{Or } \cos(\theta + \alpha_2) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta + \alpha_2)} =$$

$$= \{1 - \sin^2(\theta + \alpha_2)\}^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(\theta + \alpha_2) \quad (*)$$

d'où il ressort que le cos d'un angle infiniment petit du premier ordre ne diffère qu'une grandeur infiniment petite du second ordre de l'unité; donc en négligeant ces valeurs, on trouve:

$$C e_i \cdot \frac{\sin(\delta + \varphi + \alpha_1)}{\sin(\delta - \theta)} + Cx \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\varphi} = Pa$$

ou

$$\frac{C e_i}{Pa} = \frac{\sin(\delta - \theta)}{\sin(\delta + \varphi + \alpha_1)} \cdot \left\{ 1 - \frac{Cx \cos \beta}{Pa} \cdot \frac{d\beta}{d\varphi} \right\}$$

$$(*) (1 - b)^n = 1^n - \frac{n}{1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b^2 - \text{etc.}$$

$$\{1 - \sin^2(\theta + \alpha_2)\}^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(\theta + \alpha_2) + \text{etc.}$$

CC.

(19) devient, en négligeant les termes qui sont affectés de $d\delta$,

$$\frac{d^2\beta}{dq^2} \cdot b \sin(\delta - \beta) = e, \cos(\delta + \varphi) - z, \sin(\delta - \vartheta - \alpha_2) \frac{d^2\vartheta}{dq^2} + \\ + z, \cos(\delta - \vartheta - \alpha_2) \left(\frac{d\vartheta}{dq} \right)^2,$$

et après substitution de (16) en (22), notamment

$$\frac{d\vartheta}{dq} = \frac{e \sin(\delta + \varphi + \alpha_1)}{z \sin(\delta - \vartheta)}$$

et

$$\frac{d^2\vartheta}{dq^2} = \frac{e \cos(\delta + \varphi + \alpha_1) + z \cos(\delta - \vartheta) \cdot \frac{e^2 \sin^2(\delta + \varphi + \alpha_1)}{z^2 \sin^2(\delta - \vartheta)}}{z \sin(\delta - \vartheta)} :$$

$$b \sin(\delta - \beta) \frac{d^2\beta}{dq^2} =$$

$$= e, \cos(\delta + \varphi) + z, \cos(\delta - \vartheta - \alpha_2) \cdot \frac{e^2 \sin^2(\delta + \varphi + \alpha_1)}{z^2 \sin^2(\delta - \vartheta)} - \\ - z, \sin(\delta - \vartheta - \alpha_2) \cdot \frac{e \cos(\delta + \varphi + \alpha_1) + z \cos(\delta - \vartheta) \frac{e^2 \sin^2(\delta + \varphi + \alpha_1)}{z^2 \sin^2(\delta - \vartheta)}}{z \sin(\delta - \vartheta)}$$

dd.

$$\begin{aligned} b \sin(\beta_1 - \beta) \frac{d^2 \beta}{d\varphi^2} &= e_1 \cos(\beta_1 + \varphi) + e_1 \cdot \frac{e}{e} \cos(\beta_1 - \beta - \alpha_2) \cdot \frac{e^2}{e^2} \cdot \frac{\sin^2(\beta_1 + \varphi + \alpha_1)}{\sin^2(\beta - \beta')} - \\ &- e_1 \cdot \frac{\sin(\beta_1 - \beta - \alpha_2)}{e \sin(\beta - \beta')} \cdot e \cos(\beta_1 + \varphi + \alpha_1) - e_1 \cdot \frac{\sin(\beta_1 - \beta - \alpha_2)}{e \sin(\beta - \beta')} \cdot e \cos(\beta_1 + \varphi + \alpha_1) \text{ ou} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \sin(\beta_1 - \beta) \frac{d^2 \beta}{d\varphi^2} &= e_1 \cos(\beta_1 + \varphi) + e_1 \cdot \frac{e}{e} \cos(\beta_1 - \beta - \alpha_2) \cdot \frac{\sin^2(\beta_1 + \varphi + \alpha_1)}{\sin^2(\beta - \beta')} - \\ &- e_1 \cos(\beta_1 + \varphi + \alpha_1) \cdot \frac{\sin(\beta_1 - \beta - \alpha_2)}{\sin(\beta - \beta')} - e_1 \cdot \frac{e}{e} \cos(\beta_1 - \beta') \cdot \frac{\sin(\beta_1 - \beta - \alpha_2)}{\sin(\beta - \beta')} \cdot \frac{\sin^2(\beta_1 + \varphi + \alpha_1)}{\sin^2(\beta - \beta')} . \end{aligned}$$

Or $\sin(90^\circ - A) = \cos A$. Si A est un infinitement petit du premier ordre, alors

$\sin(90^\circ - A)$ ne diffère de l'unité qu'une grandeur infinitiment petite du second ordre - voyez la note cc. La relation $\frac{\sin(\beta_1 + \varphi + \alpha_1)}{\sin(\beta - \beta')}$ ne diffère donc donc

de l'unité qu'une grandeur infinitement petite de second ordre, donc

$$b \sin(\beta_1 - \beta) \frac{d^2 \beta}{d\varphi^2} = e_1 \left\{ \cos(\beta_1 + \varphi) + \frac{e}{e} \cos(\beta_1 - \beta - \alpha_2) - \cos(\beta_1 + \varphi + \alpha_1) - \frac{e}{e} \cos(\beta_1 - \beta') \right\},$$

ou $\cos(\beta_1 + \varphi)$, etc. sont du premier ordre, car $\cos(90^\circ + A) = \sin A$ est du pre-

smier ordre.

ee. La charge se partage entre les points H et F , de sorte qu'en H agit une force Q et en F une force $C-Q$.

Or $G \cdot GK = Q \cdot HK$, donc $G = \frac{HK}{GK} \cdot Q$, dont on R est transmise une force

$$\frac{HK}{GK} \cdot \frac{DB}{RB} \cdot Q.$$

La force qui agit en F notamment ($C-Q$) est transmise comme $\frac{FB}{RB} \cdot (C-Q)$ en R .

Ainsi l'équation d'équilibre est :

$$MN \mathcal{P} = NQ \left\{ \frac{FB}{RB} (C-Q) + \frac{HK}{GK} \cdot \frac{DB}{RB} \cdot Q \right\}$$

ou

$$\mathcal{P} = \frac{NQ}{MN} \left\{ \frac{FB}{RB} \cdot C + \left(\frac{HK}{GK} \cdot \frac{DB}{RB} - \frac{FB}{RB} \right) Q \right\} =$$

$$= \frac{NQ}{MN} \left\{ \frac{FB}{RB} \cdot C + \frac{FB}{RB} \left(\frac{HK}{FB} \cdot \frac{DB}{GK} - 1 \right) Q \right\}.$$

Si $\frac{HK}{GK} = \frac{FB}{DB}$ ou $\frac{HK}{FB} \cdot \frac{DB}{GK} = 1$ alors

$$\mathcal{P} = \frac{NQ}{MN} \cdot \frac{FB}{RB} \cdot C$$

ff.

(23) devient pour ces valeurs.

$$-\frac{z}{z_1} = \frac{e \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 + r \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2}{-e \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 - r \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2}.$$

Si l'on prend ici $r = \frac{z_1}{e} \cdot e$, alors on trouve

$$-\frac{z_1 \cdot \frac{e}{e}}{z_1} = \frac{\frac{e}{e} \cdot e \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 + \frac{z_1}{e} \cdot e \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2}{-e \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 - z_1 \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2}$$

ou

$$-1 = \frac{e \cos(\delta + \varphi) + \frac{e}{e} s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 + z_1 \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2}{-e \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 - z_1 \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2},$$

par conséquent

$$\begin{aligned} e \cos(\delta + \varphi) - s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 + z_1 \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2 &= \\ = e \cos(\delta + \varphi) + \frac{e}{e} s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 + z_1 \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2; \end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{e}{e} s = -s, \text{ ou } -\frac{s}{s} = \frac{e}{e}.$$

83

Nous avons

$$r, \sin(\delta - \vartheta) = r, \sin(180^\circ + \delta - \vartheta) = -r, \sin(\delta - \vartheta),$$

$$e, \cos(\delta + \varphi) = e, \cos(180^\circ + \delta + \varphi) = -e, \cos(\delta + \varphi)$$

et

$$r, \cos(\delta - \vartheta) = r, \cos(180^\circ + \delta - \vartheta) = -r, \cos(\delta - \vartheta)$$

ainsi

$$\frac{r \sin(\delta - \vartheta)}{-r, \sin(\delta - \vartheta)} = \frac{e \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 + r \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2}{-e, \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 - r, \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2}$$

$$\text{ou, puisque } \frac{r}{r,} = \frac{e}{e,},$$

$$-\frac{e}{e,} = \frac{e \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 + r \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2}{-e, \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 - r, \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2}$$

ou

$$e e, \cos(\delta + \varphi) - e s, \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 + e r, \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2 =$$

$$= e e, \cos(\delta + \varphi) + e, s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 + e, r \cos(\delta - \vartheta) \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2$$

ainsi, puisque

$$e r, = e, r,$$

nous avons :

$$-e s, = e, s \quad \text{ou} \quad -\frac{e}{s,} = \frac{e,}{s,}.$$

77.

hh.

Foyez à la page suivante.

hh.

$$\frac{r \sin(\delta - 180^\circ + \varphi)}{r \sin(\delta - 180^\circ + \varphi)} = \frac{e \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 + r \cos(\delta - 180^\circ + \varphi) \left(\frac{d\gamma}{d\varphi} \right)^2}{e \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 + r \cos(\delta - 180^\circ + \varphi) \left(\frac{d\gamma}{d\varphi} \right)^2} =$$

$$\frac{r \sin(\delta + \varphi)}{r \sin(\delta + \varphi)} = \frac{e \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 - r \cos(\delta + \varphi) \left(\frac{d\gamma}{d\varphi} \right)^2}{e \cos(\delta + \varphi) + s \left(\frac{d\delta}{d\varphi} \right)^2 - r \cos(\delta + \varphi) \left(\frac{d\gamma}{d\varphi} \right)^2}$$

Nous avons: d'après (16)

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = \frac{e \sin(\delta + \varphi)}{r \sin(\delta - 180^\circ + \varphi)} = \frac{e \sin(\delta + \varphi)}{-r \sin(\delta + \varphi)} = -\frac{e}{r};$$

et d'après (17)

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{e \sin(\delta + \varphi) - \frac{r, e \sin(\delta - 180^\circ + \varphi) \sin(\delta + \varphi)}{r \sin(\delta - 180^\circ + \varphi)}}{b \sin(\delta - \beta)}$$

$$= \frac{e \sin(\delta + \varphi) r \sin(\delta + \varphi) - r, e \sin(\delta + \varphi) \sin(\delta + \varphi)}{b r \sin(\delta + \varphi) \sin(\delta - \beta)} =$$

$$= \frac{(r e, -r, e) \sin(\delta + \varphi) \sin(\delta + \varphi)}{b r \sin(\delta + \varphi) \sin(\delta - \beta)} =$$

$$= \frac{(r e, -r, e) \sin(\delta + \varphi)}{b r \sin(\delta - \beta)} = \sigma \text{ (comme il est prouvé dans le texte);}$$

puis d'après (20)

$$\frac{d\delta}{d\varphi} = \frac{e \sin(180^\circ - \varphi + \varphi)}{s \sin(180^\circ - \varphi - \delta)} = \frac{e \sin 180^\circ}{s \sin(\delta + \varphi)} = \sigma;$$

enfin d'après (21)

$$\frac{d\delta_i}{d\varphi} = \frac{e \sin(180^\circ - \varphi + \varphi)}{s_i \sin(180^\circ - \varphi - \delta_i)} = \frac{e \sin 180^\circ}{s_i \sin(\delta_i + \varphi)} = \sigma;$$

de sorte que nous avons

$$\frac{r \sin(\delta + \varphi)}{r \sin(\delta + \varphi)} = \frac{e \cos(\delta + \varphi) - r \cos(\delta + \varphi) \cdot \frac{\ell^2}{z^2}}{e \cos(\delta + \varphi) - r \cos(\delta + \varphi) \cdot \frac{e^2}{z^2}},$$

donc

$$e, r \sin(\delta + \varphi) \cos(\delta + \varphi) - \frac{z}{\ell} e^2 \sin(\delta + \varphi) \cos(\delta + \varphi) = \\ = e r, \sin(\delta + \varphi) \cos(\delta + \varphi) - \frac{z}{\ell} e^2 \sin(\delta + \varphi) \cos(\delta + \varphi), \\ \text{ou, puisque } e, r = e z, \text{ et } \frac{z}{\ell} e = e, :$$

$$e z, \{ \sin(\delta + \varphi) \cos(\delta + \varphi) - \sin(\delta + \varphi) \cos(\delta + \varphi) \} = \\ = e, e \{ \sin(\delta + \varphi) \cos(\delta + \varphi) - \sin(\delta + \varphi) \cos(\delta + \varphi) \}, \\ \text{par conséquent } e, = z, .$$

II.

$$\mathcal{E}b = Cx, \text{ ainsi } \mathcal{E} = \frac{x}{\ell} \cdot C \text{ et}$$

$$h_o = C - \frac{x}{\ell} C = \frac{\ell - x}{\ell} C.$$

$$\mathcal{H}(h_o + h) = h_o \cdot h = h_o \cdot \frac{\ell - x}{\ell} C;$$

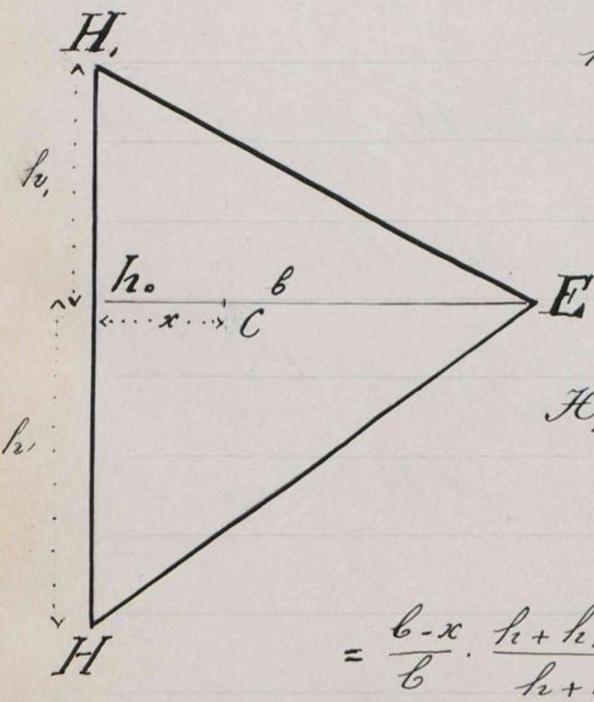
par conséquent

$$\mathcal{H} = \frac{h_o}{h_o + h} \cdot \frac{\ell - x}{\ell} C,$$

$$\mathcal{H}_o = h_o - \mathcal{H} = \frac{\ell - x}{\ell} C - \frac{h_o}{h_o + h} \cdot \frac{\ell - x}{\ell} C =$$

$$= \frac{\ell - x}{\ell} \left\{ 1 - \frac{h_o}{h_o + h} \right\} C =$$

$$= \frac{\ell - x}{\ell} \cdot \frac{h_o + h - h_o}{h_o + h} C = \frac{h_o}{h_o + h} \cdot \frac{\ell - x}{\ell} C.$$



JJ. Lorsque l'angle d'inclinaison du fléau est un infiniment petit du premier ordre, le déplacement dans le sens vertical du point H , lors de la première pesée, est de $v_1 \sin \vartheta^o$ et le déplacement du point H_1 , lors de la deuxième pesée, est de $v_2 \sin \vartheta^o$.

Lors de la troisième pesée, l'élevation du point H_o est égale à la moyenne des élévations des points H et H_1 . Or

$$\{ \text{élévation } H - \text{élévation } H_1 \} : (h + h_1) = \\ = \{ \text{élévation } H_o - \text{élévation } H_1 \} : h_1$$

ainsi

$$\{ \text{élév. } H_o - \text{élév. } H_1 \} = \frac{h_1}{h+h_1} \{ \text{élév. } H - \text{élév. } H_1 \}$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{élév. } H_o &= \frac{h+h_1}{h+h_1} \cdot \text{élév. } H_1 + \frac{h_1}{h+h_1} \cdot \text{élév. } H - \frac{h_1}{h+h_1} \cdot \text{élév. } H_1 = \\ &= \frac{h_1}{h+h_1} \cdot \text{élév. } H + \frac{h}{h+h_1} \cdot \text{élév. } H_1 = \\ &= \frac{h_1 v_1 \sin \vartheta^o + h v_2 \sin \vartheta^o}{h+h_1} = \frac{h_1 v_1 + h v_2}{h+h_1} \cdot \sin \vartheta^o; \end{aligned}$$

tandis que l'élevation du point $E = b \sin \beta$.

KK.

Le cosinus d'un angle infiniment petit du premier ordre ne diffère de l'unité, qu'une grandeur infiniment petite du second ordre, de sorte qu'ici le cosinus d'un angle infiniment petit du premier ordre peut être considéré comme égal à l'unité. Poyez la note bb.

On a, par exemple, dans (16):

$$\begin{aligned} \sin(\delta + \varphi + \alpha) &= \sin\{90^\circ + [(\delta - 90^\circ) + \varphi + \alpha]\} = \\ &= \sin 90^\circ \cos[(\delta - 90^\circ) + \varphi + \alpha] + \sin[(\delta - 90^\circ) + \varphi + \alpha] \cos 90^\circ = \\ &= 1, \text{ ainsi } \frac{d^{\mathcal{F}^e}}{d\varphi} = \frac{e}{z}. \end{aligned}$$

II.

$$\left\{ \frac{h_1}{h+h_1} z_1 - \frac{h_1}{h+h_1} \cdot \frac{x}{\ell} \cdot z_1 + \frac{h_1}{h+h_1} z_2 - \frac{h_1}{h+h_1} \cdot \frac{x}{\ell} z_2 + \frac{h_1}{h+h_1} \cdot \frac{x}{\ell} \cdot z_2 + \frac{h_1}{h+h_1} \cdot \frac{x}{\ell} z_1 \right\} C \frac{e}{z} +$$

$$+ x C \frac{e}{\ell} - x C \frac{z_1 e}{z \ell} = (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) \alpha$$

ou

$$C \cdot \frac{h_1 z_1 + h_1 z_2}{h_1 + h_2} \cdot \frac{e}{z} + C \cdot \frac{e, z - z_1 e}{\ell z} \cdot x = (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) \alpha.$$

mm. $C \cdot \frac{e_r - r_e}{C_r} \cdot x = P_2 a - \frac{h}{h+h_1} \cdot P_1 a$
ou

$$C_{e_r} x - C_r ex = bra \left(P_2 - \frac{h}{h+h_1}, P_1 \right)$$

ou

$$r_i - \frac{e_i}{e} r = \frac{\alpha b r}{C ex} \left(\frac{h}{h+h_1}, P_1 - P_2 \right)$$

nn. Au lieu de faire subir une correction commune à ($r_2 + \text{corr. } r_2$) et r_1 , on pourrait corriger r ou ℓ .

oo.

$$- r_i \cdot \frac{e}{e} + e_i = - \frac{\alpha b}{Cx} \left(\frac{h}{h+h_1}, P_1 - P_2 \right)$$

ou

$$\ell_i = r_i \cdot \frac{e}{e} - \frac{\alpha b}{Cx} \left(\frac{h}{h+h_1}, P_1 - P_2 \right)$$

pp. 1^e calcul: Soit la charge placée au-dessus d'un des points H et H_1 , par exemple, au-dessus de H ; on a alors:

$$C(z + \text{corr. } z) = Gz \text{ donc } G = \frac{z + \text{corr. } z}{z} C$$

et

$$G_e = \mathcal{P}(a + \text{corr. } a) \text{ donc } \mathcal{P} = \frac{e}{a + \text{corr. } a} \cdot \frac{z + \text{corr. } z}{z} C =$$

$$= \frac{290 (108 + 3,49)}{496,273 \cdot 1119} \cdot 100 = 9,99984 = \mathcal{P}.$$

2^e calcul. La charge est placée au point M :

On trouve ap-	H	une	20,4457 K.G.
proximative-	E	pression	58,9744 "
ment en	H	de	20,5799 "

$$\text{donc } \mathcal{H} + \mathcal{H}_1 = 41,0256$$

$$\mathcal{E} = 58,9744$$

$$\mathcal{H} + \mathcal{H}_1 : \frac{290 \cdot 191,49}{496,273 \cdot 1119} \cdot 41,0256 = 4,10249$$

$$\mathcal{E} : \frac{49,6273}{496,2732} \cdot 58,9744 = \underline{\underline{5,89744}}$$

$$9,99993$$

D'où il apparaît qu'après que ces corrections auront été effectuées, la bascule travaillera avec précision et l'équilibre entre le poids et la charge sera indépendant de la place de la charge sur le tablier.

99.

D'après (32) nous avons

$$(h+h_1) \sin \tilde{\gamma} = (\gamma_z - \gamma_x - \text{corr.} \gamma_z) \frac{e}{z} \sin \varphi$$

ou

$$\text{corr.} \gamma_z = - \frac{\gamma}{e} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \cdot (h+h_1) \sin \tilde{\gamma},$$

ou, puisque φ et $\tilde{\gamma}$ sont très petits,

$$\text{corr.} \gamma_z = - \frac{(h+h_1) \gamma}{e} \cdot \frac{\tilde{\gamma}}{\varphi}.$$

IP. Suivant (26), après avoir substitué
 $\gamma_1 = 0$ et $\beta = \delta$.

S'S.

$$C x \cos \delta \cdot \frac{e \sin(\tilde{\gamma} + \varphi)}{s \sin(\tilde{\gamma} - \varphi)} = P_a \alpha \cos(\alpha + \varphi)$$

ou

$$\sin(\tilde{\gamma} + \varphi) = \frac{P_a \alpha s \cos(\alpha + \varphi) \sin(\tilde{\gamma} - \delta)}{C e x \cos \delta}.$$

tt. Dans l'expression $\cos(\alpha + \varphi) \sin(\tilde{\gamma} - \delta)$
on a : $\cos(\alpha + \varphi)$ très près de 1 et
 $\sin(\tilde{\gamma} - \delta)$ très près de 1, puisque $\tilde{\gamma}$ est très
près de 180° et δ très près de 90° , ainsi
 $\sin(\tilde{\gamma} - \delta)$ très près de $\sin 90^\circ = 1$.

$$\underline{uu.} \quad \mathcal{P}_e = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_{,e} - (\mathcal{P}_+ \mathcal{P}_-) \text{corr. } e,$$

ainsi

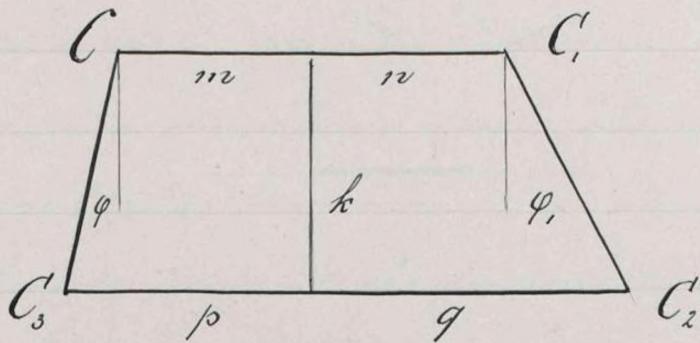
$$\text{corr. } e_1 = \frac{\mathcal{P}_{,e}}{\mathcal{P}_+ \mathcal{P}_-} \quad \text{ou } (\mathcal{P}_+ \mathcal{P}_-) e_1 = \mathcal{P}(e_1 + \text{corr. } e_1)$$

$$\mathcal{P}_{,e} + \mathcal{P}_{,e_1} = \mathcal{P}_{,e} + \mathcal{P}_{\text{corr. } e_1}$$

$$\mathcal{P}_{,e_1} = \mathcal{P}_{\text{corr. } e_1}$$

ainsi $\text{corr. } e_1 = \frac{\mathcal{P}_{,e_1}}{\mathcal{P}}$.

VV.



WW.

$$\sin \varphi_1 = \frac{m}{k} \left(\frac{C}{C_2} - \frac{C}{C_1} \right) = \frac{m}{k} C_1 \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_1 C_2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{m C_1}{C_1} \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_2}.$$

La Balance à bras égaux

par
B. P. Moors,

Inspecteur du service des poids et
mesures

à
La Haye.

Cable

Table des matières.

Page.

aperçu historique	88.
Théorie de la Balance à bras égaux.	99.
Du fléchissement du fléau d'une balance	109.
Application	115.
À propos de la méthode des moindres carrés	121.
Les couleaux du fléau sont-ils parallèles?	133.
La balance considérée comme pendule	137.
Les balances à bras courts	144.
De la fixation des plateaux dans les pesages de précision	146.
Notes	152.

Aperçu historique. (23)

§1. Dans la vie sociale, la balance est un des instruments les plus indispensables. Sans elle, pas de commerce sinon peut-être le troc des objets de première nécessité, tel qu'il se fait chez les tribus les plus arriérées, mais il ne convient pas de donner à ce troc le nom de commerce.

Sans la balance, plusieurs branches de la science ne pourraient exister. Ainsi la chimie lui est en grande partie tributaire. Sans la balance non plus, aucun progrès dans la médecine n'eût été possible, car la balance est l'unique moyen de faire des pesages exacts et de composer les médicaments dans les proportions où ils doivent être efficaces.

Un nombre considérable des inventions les plus utiles de notre époque sont dues à la balance. Grâce à elle, dans les manufactures, il est possible de déterminer de façon précise les rapports entre les différentes matières qui doivent être travaillées, de telle sorte que le produit ait toutes les qualités, toute la so-

lidité, toute la beauté possible et de telle sorte qu'il ait constamment ces qualités.

On ignore qui a inventé la balance. Le nom de son inventeur est enseveli dans les ténèbres du passé.

Il se pourrait bien que non pas une mais plusieurs personnes aient inventé la balance. Car il est arrivé souvent que deux peuples, sans relations entre eux et s'ignorant l'un l'autre, ayant atteint un certain degré de civilisation se sont trouvés en présence de problèmes identiques et les ont résolus de la même manière et par les mêmes procédés. Il est possible qu'il en ait été ainsi pour la balance.

Si on ne connaît donc pas le nom de l'inventeur de la balance, en tous cas l'invention elle-même doit être extrêmement ancienne.

Si la balance a été donnée comme emblème à la déesse de la Justice et si on a placé la balance (24) parmi les signes du zodiaque (25), c'est une preuve, étant donnée la haute antiquité du zodiaque, que la balance était comme

dès les temps les plus reculés.

Les anciens ajoutaient à la constellation de la balance la figure d'un homme. Peut-être, dit la Lande, est-ce celle de Mochos, l'inventeur des balances²⁶.

Les anciens auteurs citent différents noms. Pline (23-79 av. J.-C.) attribue l'invention de la balance à Phidias Argiro; Aulus-Gelle l'attribue à Palamede²⁷; Saerté l'attribue à Pythagore (567-470 av. J.-C.).

Il est question, dans différents endroits du Coran, d'une balance dans laquelle seront pesées les bonnes et les mauvaises œuvres de chaque homme. S'il faut en croire les commentateurs musulmans, cette balance, qui est peut-être la même qui servira au jour du jugement dernier, a été apportée du ciel sur la terre par l'ange Gabriel, et donnée (2400 av. J.-C.) à Noé pour qu'il la transmît à ses descendants²⁸.

Josèphe considère l'invention de la balance comme étant à peu de chose près

aussi ancienne que la race humaine, c'est-à-dire qu'elle daterait de 4000 ans av. J.-C. Selon cet auteur, la balance aurait déjà été inventée du vivant d'Adam. Dans le premier livre de l'histoire juive, il met de façon assez singulière l'invention de la balance sur le compte de Cain. Elle fut une punition pour l'humanité car elle a détruit la simplicité de la vie et elle a introduit dans l'existence, auparavant sincère et pleine de bonne foi, un moyen de fraude criminelle (29).

§ 2. Au moyen âge, on semble n'avoir connu que deux sortes de balances : la balance à bras égaux et la balance romaine (30).

Dans le Glosfaire Archéologique du moyen âge et de la Renaissance, Paris, 1887, on lit, à l'article Balance, ce qui suit : " Tandis que la romaine, par l'originalité de son galbe ou de la délicatesse de ses ciselures, devient à certaines

„ époques un véritable objet d'art, la balance
 „ à fléau et à plateaux équivalents reste à
 „ peu près la même dans tous les temps. Ob.
 „ servée sur un sarcophage chrétien des pre-
 „ miers siècles, dans un tombeau de l'époque
 „ franque ou dans les miniatures des ma-
 „ nuscrits, elle a toujours le même aspect,
 „ et je ne saurais signaler parmi les exem-
 „ plaires anciens de ces ustensiles aucune
 „ marque apparente des perfectionnements
 „ que le temps a dû apporter à sa construc-
 „ tion : "

Sous des fouilles de Pompeï (31), on a dé-
 couvert relativement peu de balances à
 bras égaux. Assez nombreuses étaient les
 balances romaines de forme élégante.

Chisholm (32) donne, à la page 133 de son
 ouvrage Weighing and Measuring un
 dessin et une description d'une balance
 romaine trouvée à Pompeï et qui y était
 en usage en l'an 77 après J.-C.

Il existe des données positives établis-
 sant que déjà trois et quatre siècles a-

vant notre ère on se servait de balances à bras égaux qui supporteraient la comparaison avec celles en usage actuellement.

On peut l'inférer de ce qu'Archimède (287 - 212) a dû disposer d'une balance assez bonne pour déterminer la différence entre les poids spécifiques de l'or et de l'argent; on peut l'inférer aussi des résultats qu'obtint Aristote (384 - 322) en pesant l'air.

Chez les Hébreux, les Egyptiens, les Babyloniens et d'autres peuples anciens, avant qu'il existât de l'argent monnayé, les achats et les ventes se faisaient en pesan des morceaux d'argent ou d'or. Pour peser cependant, il fallait non seulement des poids mais aussi des instruments de pesage; il en découle que les peuples de l'antiquité, dès qu'il est question chez eux de poids, doivent aussi avoir connu l'emploi des instruments de pesage. N'est-il pas vrai que des poids sans plus n'auraient guère

eu de raison d'être ou d'utilité ? Poids et balance ne font qu'un tout inseparable et il a dû par conséquent exister dans l'antiquité des instruments permettant de se servir avec fruit des poids (33).

Au British Museum, dans les Galeries assyriennes (la Konyunjuk Gallerie) on conserve des poids assyriens ayant la forme d'ovies (34), qui ont été retirés des fouilles du palais de Sennachérib qui, à ce que l'on suppose, obtint le pouvoir environ 700 ans av. J.-C. Dans la Galerie de Névrrod on voit une collection remarquable de poids de bronze ayant la forme de lions couchés et datant probablement de l'an 880 avant Jésus-Christ (35).

Beaucoup d'expressions et de données de la Bible (36) confirment que déjà très tôt il existait des poids et que, par conséquent, déjà très tôt les Hébreux savaient peser. Selon la Genèse XXIII, 16, Abraham pesa : "Et Abraham pesa à Ephron "l'argent qui il avait dit, en présence des

„enfants de Heth, quatre cents siècles d'argent ayant cours chez le marchand," (2000 ans environ avant Jésus-Christ). —

Il existe des preuves indubitables que les anciens Egyptiens ont fait usage de balances à bras égaux (37). Sur un papyrus très bien conservé, et exposé au British Muséum, papyrus datant de 1350 av. J.-C. et connu comme le "Rituel des Morts" (38), on voit un dessin représentant une opération de pesage au moyen d'une balance à bras égaux très bien constituée. On y pèse l'âme d'un mort. Sur ce papyrus, le milieu et les extrémités du fléau de la balance, ainsi que la partie inférieure du support, sont colorées de telle façon qu'elles doivent représenter du laiton poli; les autres parties de la balance ont la teinte sombre de bronze. Il convient encore de faire remarquer que les extrémités du fléau sont pourvues de plaques de laiton courbées fixées au fléau, probablement pour protéger contre la poussière et les détériorations les couteaux et les ciseaux,

perfectionnement qui, à mon sens, indique que la balance à cette époque devait déjà être comme depuis très longtemps. Ses couleurs du papyrus sont fraîches et limpides, à croire qu'elles viennent d'être appliquées.

On montre l'âme du mort placée dans un des plateaux tandis que dans l'autre se trouve un poids étalon. Il y a un certain nombre d'autres desfins, mais moins délicats, représentant le pesage d'une âme dans l'espace de la Justice Parfaite et en présence d'Osiris.

On peut voir ces desfins sur papyrus au mur de l'escalier de pierre, qui, au British Museum, conduit de la galerie des statues égyptiennes aux salles égyptiennes (39).

Dans l'Histoire de l'art. dans l'antiquité. Paris 1882, p. 744, on voit un desfin figurant un homme qui, une balance à bras égaux à la main, pèse des denrées, un autre personnage, en face de lui, annote les résultats des pesages. Ce desfin est emprunté à un bas-relief trouvé dans la grande pyramide de Sakkarah, que M. Mariette (p. 212, au

bras) regarde comme la plus ancienne de toutes.

Également les Babyloniens connaissaient la balance à bras égaux. Nous le savons grâce au Code de Lois de Hammurabi (40), rédigé vers l'an 2000 av. J.-C., dans lequel sont réglés l'affermage des terres, les pénalités en cas de violences contre hommes ou animaux, la location d'hommes ou d'animaux, le taux des salaires, le commerce, etc.; on y cite une série de montants exprimés en poids d'argent, entre autres:

un sixième de sicle d'argent (§ 224),

2 sicles	"	"	17 ,
----------	---	---	------

$2\frac{1}{2}$	"	"	27 $\frac{1}{4}$,
----------------	---	---	--------------------

3	"	"	27 $\frac{1}{2}$
---	---	---	------------------

5	"	"	211
---	---	---	-----

10	"	"	204
----	---	---	-----

$\frac{1}{3}$ de mine	"	"	116
-----------------------	---	---	-----

$\frac{1}{2}$ mine	"	"	59
--------------------	---	---	----

1	"	"	24, etc.
---	---	---	----------

Ces quantités d'argent étaient pesées en présence de témoins, de même qu'il se fit lors du transfert de la pièce de terre

à Abraham dont il est question dans la Genèse XXIII, 16. Cela résulte encore d'un grand nombre de briques mises au jour et sur lesquelles sont écrits des actes de vente et d'achat de fermes, etc. Ces actes étaient dressés par un scribe et les témoins les signaient en y mettant l'empreinte de leurs ongles. Voici un extrait d'un de ces actes dressé vers l'an 1000 av. J.-C. (41).

... Sa femme Sutbuni de bon cœur,
de plein gré,

le verger avec la maison pour son prix

à Kuner a donné ! (vendu)

dont le prix total,

4 sicles d'argent, il a pesé et payé.

L'expression "il a pesé et payé" se rencontre sur toutes les briques en question qui mentionnent un achat de fermes, etc. -

De tout ce qui précède il résulte de façon évidente que les Hébreux, les Egyptiens et les Babyloniens, bien avant 2000 ans av. J.-C., possédaient des

poids et des balances. Il est permis de supposer que ces balances étaient à bras égaux.

Il est vrai qu'on n'a fait que commencer les fouilles qui doivent nous mettre au courant des moeurs et des coutumes de ces anciens peuples. Leurs territoires sont, pour l'Allemagne, la France, l'Angleterre et l'Amérique un vaste champ de recherches. Si l'on continue ces recherches, on découvrira peut-être que l'époque où la balance a été inventée est même plus ancienne encore que ne le croyait Joseph.

Théorie de la Balance à bras égaux.

§ 3. Soit, fig. 1, la représentation schématique d'une balance fautive dite ancienne, ordinaire, ou à bras égaux, dont A et D sont les couteaux ou points de suspension, B le couteau ou point d'appui et Z le centre de gravité de la balance non chargée. Les lignes AB, BD et

BZ ont respectivement une longueur de α , β et γ unités de longueur et font successivement les angles α , β et 90° avec l'horizontale qui passe par B . Le poids de la balance non chargée - et nous entendons par là le poids de toutes les parties de la balance non chargée portées par le couffinet sur lequel repose le couteau d'appui (le fléau avec l'aiguille, les pièces de suspension, chaînes et plateaux) - soit égal à Z ; soit P la charge devant être pesée dans le plateau de droite et soit P' le poids dans le plateau de gauche. Les grandeurs Z , P et P' sont exprimées dans les mêmes unités de poids. Dans la position ABD du fléau représentée dans la fig. 1, le centre de gravité Z se trouve dans la verticale qui passe par B , et P et P' se font équilibrer.

Si maintenant au poids P nous ajoutons le poids additionnel R , alors le fléau prendra la position A, BD , pour laquelle nous fixons l'angle d'inclinaison $A, BA = Z, BZ = D, BD = \varphi$.

L'équation d'équilibre de la balance chargée sera donc

$$(P + R) d \cos(\delta + \varphi) = h z \sin \varphi + P' a \cos(\alpha - \varphi) \dots \dots (1)$$

ou

$$P d \cos \delta \cos \varphi + R d \cos \delta \cos \varphi - P d \sin \delta \sin \varphi - R d \sin \delta \sin \varphi = \\ = h z \sin \varphi + P' a \cos \alpha \cos \varphi + P' a \sin \alpha \sin \varphi \dots \dots (2)$$

Si, dans (1), on prend $R = 0$ et par conséquent aussi $\varphi = 0$, alors l'équation d'équilibre de la balance chargée est représentée de la façon suivante

$$P d \cos \delta = P' a \cos \alpha \text{ ou } P d \cos \delta \cos \varphi = P' a \cos \alpha \cos \varphi \dots \dots (3)$$

équation qui, soustraite de (2), donne

$$R d \cos \delta \cos \varphi - P d \sin \delta \sin \varphi - R d \sin \delta \sin \varphi = \\ = h z \sin \varphi + P' a \sin \alpha \sin \varphi,$$

d'où, divisant par $\cos \varphi$,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R d \cos \delta}{P d \sin \delta + R d \sin \delta + h z + P' a \sin \alpha} \dots \dots (4)$$

De (3), il résulte

$$\frac{P}{P'} = \frac{a \cos \alpha}{d \cos \delta} \dots \dots \dots \dots \dots \dots (5)$$

La formule (4) fait connaître la grandeur de la tangente de l'angle d'inclinaison, lorsque le plateau de gauche de la balance chargée de P et P' reçoit un poids additionnel R ; tandis que la formule (5) donne le rapport du

poids P avec la charge P' .

§ 4. La première condition à laquelle doit satisfaire la balance à bras égaux est celle-ci : Si dans l'état d'équilibre du fléau (2), deux poids arbitraires mais égaux sont placés dans les plateaux, le fléau doit demeurer dans la même position.

Il en résulte, conformément à (5), que, si $P' = P$, il faut également que

$$d \cos \delta = a \cos \alpha \dots \dots \dots \quad (6)$$

c'est-à-dire que, dans l'état d'équilibre du fléau, les projections des bras du fléau sur une ligne horizontale doivent être égales entre elles, ainsi qu'il est représenté dans la fig. 2. Si on a satisfait à la condition sub (6), alors (4) devient

$$R a \cos \alpha$$

$$\tan \varphi = \frac{R a \cos \alpha}{P d \sin \delta + R d \sin \delta + \tilde{Z} z + P a \sin \alpha} \dots \dots \dots \quad (7)$$

Voici une seconde condition à laquelle la balance à bras égaux doit répondre : L'angle d'inclinaison doit être le même qui on mette le poids additionnel R dans le

plateau de droite ou de gauche. Si maintenant, fig. 2, un poids additionnel \tilde{R} , est nécessaire dans le plateau de droite pour, la même charge P étant placée dans chacun des plateaux, faire faire au fléau un angle d'inclinaison φ , alors on trouve

$$\tilde{P}d \cos(\delta - \varphi) + \tilde{\chi}_z \sin \varphi = (\tilde{P} + \tilde{R}) a \cos(\alpha + \varphi) \text{ ou}$$

$$\tilde{P}d \cos \delta \cos \varphi + \tilde{P}d \sin \varphi \sin \delta + \tilde{\chi}_z \sin \varphi =$$

$$\tilde{P}a \cos \alpha \cos \varphi + \tilde{R}a \cos \alpha \cos \varphi - \tilde{P}a \sin \alpha \sin \varphi - \tilde{R}a \sin \alpha \sin \varphi$$

ou puisque, selon (3) il faut que

$$\tilde{P}d \cos \delta \cos \varphi = \tilde{P}a \cos \alpha \cos \varphi$$

ainsi

$$\tilde{P}d \sin \varphi \sin \delta + \tilde{\chi}_z \sin \varphi = \tilde{R}a \cos \alpha \cos \varphi -$$

$$- \tilde{P}a \sin \alpha \sin \varphi - \tilde{R}a \sin \alpha \sin \varphi$$

d'où, après avoir divisé par $\cos \varphi$,

$$\frac{\tilde{R}a \cos \alpha}{\tilde{P}d \sin \delta + \tilde{\chi}_z + \tilde{P}a \sin \alpha + \tilde{R}a \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\tilde{R}a \cos \alpha}{\tilde{P}d \sin \delta + \tilde{\chi}_z + \tilde{P}a \sin \alpha + \tilde{R}a \sin \alpha} \quad \dots \quad (8)$$

Si maintenant $\tilde{R} = R$, alors, dans (7) et (8), les numérateurs sont égaux entre eux et par conséquent les dénominateurs de ces équations doivent être aussi égaux entre eux, d'où résulte

$$d \sin \delta = a \sin \alpha,$$

donc en rapport avec (6)

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \alpha$$

par conséquent

$$\delta = \alpha \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

et

$$d = a \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

De (10), il résulte donc que les bras de flean doivent être d'une longueur égale et, de (9), que, dans l'état d'équilibre de la balance, ils doivent faire avec l'horizontale des angles égaux, ainsi qu'il est montré dans la fig. 3. -

La balance doit encore répondre à la condition qu'un petit poids additionnel, ou, ce qui revient au même, qu'une petite différence R entre les charges placées dans les plateaux, se marquera par un angle d'inclinaison relativement grand φ . Suivant (7) et (8), nous avons, pour la balance représentée à la fig. 3,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{(2P+R) \operatorname{tg} \alpha + 2 \frac{z}{a \cos \alpha}} \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

Par conséquent, il faut que le dénominateur

de (11), c'est-à-dire

$$(2P+R) \operatorname{tg} \alpha + h \frac{x}{\cos \alpha} \quad (12)$$

soit petit. La valeur de l'expression en (12) devient petite lorsque α est positif et x négatif ou inversement et lorsque la différence entre les deux termes est petite.

Également les deux termes peuvent être pris positifs et chacun en particulier petit. En faisant les deux termes négatifs on rend tout pesage impraticable.

Puisque P a une valeur variable, il ne suffit pas que la somme des deux termes en (12) soit petite pour une valeur déterminée de P , mais cette somme doit être petite quelle que soit la valeur de P , par conséquent il faut veiller que ces deux termes, chacun en particulier, soient petits et cela en prenant expressément α petit et de préférence en le faisant égal à 0.

Cela signifie que les arêtes des trois conteneurs doivent, dans l'état d'équilibre de la balance, se trouver autant que possible dans un plan horizontal. En ou-

tre il faut que $\frac{x}{\alpha \cos \alpha}$ soit aussi petit que possible.

Il est dans notre pouvoir de rendre $\frac{x}{\alpha \cos \alpha}$ aussi petit que nous le voulons, en faisant α extrêmement petit. Lorsque α est (négatif ou) = 0, x ne peut être égal à 0, car, dans ce cas, la balance serait en équilibre (instable ou) indifférent. En prenant α grand et x petit on obtient une balance de mauvaise qualité, parce que un fléau long et léger, en cas d'une charge quelque peu lourde, fléchit fortement, circonstance dans laquelle par conséquent la valeur de x serait très variable. Il est absolument inutile de vouloir rendre une balance sensible en s'efforçant avec un soin excessif de choisir pour le fléau une forme telle qu'en cas de charge maximum on ait un fléchissement minimum. On peut obtenir un résultat convenable en prenant x petit, pourvu naturellement que, pour ce qui concerne le frottement, les couteaux soient affilés et d'un travail convenablement achevé. Il n'y a

que dans les balances destinées à des pesages de haute précision, où il est admissible qu'on cherche une forme de fléau qui, pour une longueur égale et une charge égale dans les plateaux, présente le minimum de flexion. Même pour les balances de laboratoire, convient la forme courante des fléaux en usage dans les balances du commerce.

Il ne faut donc pas, dans la forme courante, que le fléau soit léger, mais au contraire qu'il soit assez lourd, pour que, même lorsque la balance porte sa plus forte charge, il ne fléchisse pas de façon appréciable. lorsque dans (12), x est à peu près égal à 0, alors conformément à (11) la sensibilité - laissant de côté le frottement (p. 21) - est suffisamment indépendante aussi bien de la charge P , que - au cas où x est très petit - du poids γ de la balance non chargée. Pour ce qui regarde la longueur, il suffit que chacun des bras du fléau ait un peu plus de la moitié du diamètre du plateau sur le-

quel se place la charge, étant admis naturellement que ce plateau ait des dimensions suffisantes pour qu'y prenne place la charge la plus grande pour laquelle la balance est destinée sans que cette charge entre en contact avec quoi que ce soit.

Des fléaux à bras courts ont plus d'avantages que ceux à bras longs : entre autre ils fléchissent moins dans des circonstances identiques, de sorte que λ , étant petit lorsque le fléau n'est pas chargé, le demeure aussi lorsqu'il a une charge considérable ; leurs oscillations sont de courte durée (voyez plus loin § 11), de sorte que les opérations de pesage avec ces balances absorbent moins de temps qu'avec les balances à fléaux à bras longs ; ces balances à bras courts occupent moins de place, ce qui n'est pas d'un petit avantage pour les vérificateurs, lorsqu'ils font leur voyage de service. On a l'intention, aux Pays-Bas, de remplacer peu à peu les balances de contrôle ayant des fléaux de

la longueur autrefois en usage par des balances à bras courts.

Tes pages qui suivent ont aussi pour but de faire connaître avec quelque détail les raisons de ce remplacement.

Du fléchissement du fléau d'une balance (42)

§ 5. Lorsque le fléau d'une balance à bras égaux est chargé à chacun de ses couteaux de suspension d'un poids P , les bras du fléau fléchissent toujours plus ou moins, c'est-à-dire que ces couteaux, de même que le centre de gravité du fléau, se déplacent vers le bas. Ces déplacements seront sinon tout à fait du moins à peu de chose près proportionnels au poids P .

Soit, fig. 4, la balance non chargée et A, B, D et Z respectivement la place des trois couteaux et du centre de gravité et soient X le poids de la balance, & l'angle

que forment les bras du fléau avec la ligne unissant les couteaux de suspension; soient
à la longueur de chaque bras de fléau; x
et c respectivement la distance entre le
point B et le centre de gravité et la lig-
ne AD .

Figurons nous que la balance soit
chargée d'un poids P dans chaque plateau
et que, à la suite de cette charge, les
points A , D et Z se déplacent en A' ,
 D' et Z' et que l'angle α devient α' .

Soient en outre $\alpha \sin \alpha = c$, $\alpha \sin \alpha' = c'$,
 $BZ = z$ et $BZ' = z'$ et soient horizontales
les lignes AD et $A'D'$.

Si nous placons dans le plateau de
gauche un petit poids additionnel R ,
par quoi le fléau fait un angle φ d'incli-
nation, alors nous avons comme équa-
tion d'équilibre de la balance ainsi
chargée

$$(P+R) \alpha \cos(\alpha'+\varphi) = P \alpha \cos(\alpha'-\varphi) + R z' \sin \varphi$$

ou

$$P \alpha \cos \alpha' \cos \varphi - P \alpha \sin \alpha' \sin \varphi + R \alpha \cos \alpha' \cos \varphi - R \alpha \sin \alpha' \sin \varphi =$$

$$= Pa \cos \alpha' \cos \varphi + Pa \sin \alpha' \sin \varphi + h z' \sin \varphi$$

d'où

$$Ra(\cos \alpha' \cos \varphi - \sin \alpha' \sin \varphi) = 2 Pa \sin \alpha' \sin \varphi + h z' \sin \varphi$$

et, en divisant par $\cos \varphi$,

$$\mathcal{R} = \frac{2 Pa \sin \alpha' + h z'}{\alpha (\cos \alpha' - \sin \alpha' \cdot \operatorname{tg} \varphi)} \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

ou, prenant en considération que $\alpha \sin \alpha' = C'$ et que α' et φ sont très petits, nous pouvons également écrire

$$\mathcal{R} = \frac{2 P c' + h z'}{a} \cdot \operatorname{tg} \varphi \dots \dots \dots \quad (13)$$

Si nous établissons maintenant que, chaque fois que nous augmentons d'une unité de poids la charge dans les deux plateaux, la descente de chacun des points A et D s'élève à c , et la descente du point Z s'élève à z , inités de longueur, alors $c' = c + P_c$, et $z' = z + P_z$,

ce qui, transporté en (13), donne

$$\mathcal{R} = \frac{1}{a} \{ 2 P(c + P_c) + h(z + P_z) \} \operatorname{tg} \varphi$$

ou

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{h}{a} h + \frac{2c + h z}{a} P + \frac{2c}{a} P^2 \right\} \operatorname{tg} \varphi \dots \dots \quad (14)$$

Si l'angle d'inclinaison φ est pris

constant pour les différentes valeurs de P , alors toutes les grandeurs dans (14) sont également constantes, à l'exception de \mathcal{P} et R , de sorte qu'on peut écrire en général

$$R = A + B \cdot P + C \cdot P^2 \dots \dots \quad (15)$$

où

$$A = \frac{z}{a} \cdot h \cdot \operatorname{tg} \varphi ,$$

$$B = \frac{2c + hz}{a} \cdot \operatorname{tg} \varphi \text{ et}$$

$$C = \frac{2c}{a} \cdot \operatorname{tg} \varphi .$$

Les valeurs de A , B et C peuvent se calculer de (15) si on connaît les valeurs de R qui, en cas d'un même angle d'inclinaison φ , appartiennent à trois valeurs de P , par exemple, aux trois valeurs $P=0$, $P=n$ et $P=2n$, où $2n$ représente la charge maximum que peut supporter la balance.

Soient R_0 , R_n et R_{2n} les poids additionnels qui, lors de la charge 0, n et $2n$, sont nécessaires pour faire faire au fléau le même angle d'inclinaison φ , alors nous avons

$$\text{pour } P = 0 : \quad R_o = A$$

$$\text{`` } P = n : \quad R_n = A + nB + n^2C \text{ et}$$

$$\text{`` } P = 2n : \quad R_{2n} = A + 2nB + 4n^2C .$$

Grâce à ces équations, on obtient

$$R_n - R_o = nB + n^2C \text{ ou } 2R_n - 2R_o = 2nB + 2n^2C$$

$$\text{et } R_{2n} - R_o = 2nB + 4n^2C$$

$$\text{donc } R_{2n} - 2R_n + R_o = 2n^2C$$

$$\text{d'où } C = \frac{R_{2n} - 2R_n + R_o}{2n^2}$$

$$\text{En outre } 4R_n - 4R_o = 4nB + 4n^2C$$

$$\text{et } R_{2n} - R_o = 2nB + 4n^2C$$

$$\text{de sorte que } 4R_n - R_{2n} - 3R_o = 2nB , \text{ d'où}$$

$$B = \frac{4R_n - R_{2n} - 3R_o}{2n}$$

par conséquent

$$(16) \quad A = \frac{x}{\alpha} h \cdot \operatorname{tg} \varphi = R_o \quad , \text{ d'où } x = \frac{\alpha R_o}{h \cdot \operatorname{tg} \varphi} \dots (16)$$

$$(17) \quad B = \frac{2c + x}{\alpha} h \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{4R_n - R_{2n} - 3R_o}{2n} \quad " \quad x = \frac{1}{\alpha} \left\{ \alpha \cdot \frac{4R_n - R_{2n} - 3R_o}{2n \operatorname{tg} \varphi} - 2c \right\}$$

$$(18) \text{ et } C = \frac{2c}{\alpha} h \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{R_{2n} - 2R_n + R_o}{2n^2} \quad " \quad C = \alpha \cdot \frac{R_{2n} - 2R_n + R_o}{4n^2 \operatorname{tg} \varphi} \quad (18)$$

Dans ces trois équations se présentent, sans compter les charges n et $2n$ et les poids additionnels R_o , R_n et R_{2n} , que nous consi-

dérons comme connus, sept grandeurs, notamment: a , φ , h , c , C , z et x , dont seules les trois dernières ne peuvent être déterminées directement et qui, par conséquent doivent être considérées comme les inconnues dans les trois équations et qui en peuvent être déduites.

Les grandeurs a , φ , h et c peuvent être évaluées directement au moyen de mensurations ou de pesages; on peut entre autre mesurer la longueur a au moyen d'une mesure de longueur graduée; on peut calculer φ d'après l'angle d'inclinaison que l'on a constaté; h s'obtient au moyen de pesage et on peut déterminer c en tendant un fil très mince sur les couleaux de suspension et en mesurant la distance du coureau d'appui du fil à l'au fil. (43)

De la sorte, on peut, en constatant la sensibilité de la balance avec trois charges, déterminer sa sensibilité quelle que soit la charge, ainsi que la place Z_1 du centre de gravité de la balance non chargée

et la longueur de la descente des couteaux A et D, ainsi que la descente du centre de gravité Z pour chaque charge. Il demeure naturellement sous-entendu que, dans tous les cas, les points de contact entre les couteaux et les coussinets restent les mêmes à chaque charge, chose qui, dans la pratique, ne se présente pas souvent, mais doit se rencontrer à peu de chose près quand on a affaire à de bonnes balances. -

Lorsqu'on désire un calcul exact des grandeurs A, B et C, il est préférable de déterminer la valeur de R en rapport avec plus de trois charges et ensuite de calculer les valeurs de A, B et C par la méthode des moindres carrés.

Application.

§ 6. Dans une balance dont la charge maximum est égale à 50 kilog.,

avec fléau de laiton, on a trouvé :

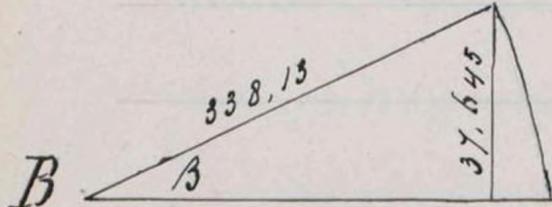
Distance entre les couteaux de suspension = $2a = 726,24$ m.M., donc $a = 363,12$ m.M.

Distance du couteau d'appui jusqu'à la ligne des couteaux de suspension = $c = 0,19$ m.M..

Longueur de l'aiguille indicatrice (mesurée depuis la pointe jusqu'à l'arête du couteau d'appui) = 338,13 m.M.

Et longueur de la demi-corde du limbe (arc gradué), qui est divisée en 38 parties,

$$= \frac{75,29}{2} = 37,645 \text{ m.M.}; \text{ donc } 338,13 \sin \beta = 37,645, \text{ d'où } \beta = 6^{\circ}23'31''77, \text{ par conséquent 1 partie} = \\ = \varphi = \frac{6^{\circ}23'31''77}{19} = 20'11''14,6.$$



Poids du fléau avec les deux appareils de suspension, les cordes ou chaînes et les plateaux = $R = 6,150$ Kilog.

En outre on a trouvé, au moyen de pesage, que le poids R qui est nécessaire pour incliner le fléau d'une partie du limbe comporte :

pour la charge $P=0$, $R = 0,000\ 134$ Kilog.,
 $P=25$ $R_{25} = 0,000\ 967$ " et
 $P=50$ $R_{50} = 0,003\ 131$ " .

On trouve

$$\text{de (16)}: \chi = \frac{\alpha R_0}{Z \operatorname{tg} \varphi} = \frac{363,12 \cdot 0,000134}{6,15 \cdot 0,0058718} = 1,347;$$

$$\begin{aligned} \text{de (17)}: \chi_1 &= \frac{1}{\chi} \left\{ \alpha \cdot \frac{4R_{25} - R_{50} - 3R_0}{50 \cdot \operatorname{tg} \varphi} - 2c \right\} = \\ &= \frac{1}{6,15} \left\{ 363,12 \cdot \frac{0,000335}{0,29359} - 0,38 \right\} = \\ &= \frac{1}{6,15} (0,4143 - 0,38) = \frac{1}{6,15} \cdot 0,0343 = 0,0056 \text{ et} \end{aligned}$$

$$\text{de (18)}: c_1 = \alpha \cdot \frac{R_{50} - 2R_{25} + R_0}{2500 \cdot \operatorname{tg} \varphi} = 0,033.$$

Il apparaît donc que, dans cette balance, lorsque les plateaux sont vides, le couteau d'appui se trouvait à peu près à 0,2 m.M. au dessus de la ligne des couteaux de suspension et le centre de gravité Z à 1,35 m.M. au dessous du couteau d'appui, et que, en raison de chaque Kilog. que l'on ajoutait dans chacun des plateaux, le centre de gravité de la balance descendait de 0,006 m.M. et chaque couteau de suspension de 0,033 m.M.

§ 7. Si les valeurs A , B et C de la formule (15) sont calculées, alors il est facile de calculer la valeur de R_p en rapport avec chacune des charges comprises entre 0 et $2n$.

Si, notamment on remplace, dans (15) P par $P+1$, alors on obtient
 $R_{p+1} = A + BP + B + CP^2 + 2CP + C$, tandis que
 $R_p = A + BP + CP^2$
par conséquent

$$R_{p+1} - R_p = B + 2CP + C$$

ou

$$R_{p+1} = R_p + 2CP + (B+C)$$

Si, dans cette équation, on substitue successivement

$P = 0, 1, 2, \dots, 2n$ alors on obtient

$$R_1 = R_0 + (B+C),$$

$$R_2 = R_1 + 2C + (B+C),$$

$$R_3 = R_2 + 4C + (B+C),$$

$$R_4 = R_3 + 6C + (B+C),$$

etc.

Maintenant on trouve, pour la balance dont il est question dans les précédents,

conformément à (16), (17) et (18)

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}_o = 0.000134 ,$$

$$\mathcal{B} = \frac{4\mathcal{R}_{25} - \mathcal{R}_{50} - 3\mathcal{R}_o}{50} = \frac{0.003868 - 0.003131 - 0.000402}{50} =$$

$$= \frac{0.003868 - 0.003533}{50} = \frac{0.000335}{50} = 0.000067 \text{ yet}$$

$$C = \frac{\mathcal{R}_{50} - 2\mathcal{R}_{25} + \mathcal{R}_o}{1250} = \frac{0.003131 - 0.001934 + 0.000134}{1250} =$$

$$= \frac{0,003265 - 0,001934}{1250} = \frac{0,001331}{1250} = 0,000\,001$$

donc

$B + C = 0,000\ 008$, par conséquent:

$$\mathcal{R}_o = 0,000134 \quad . \quad = 0,000134,$$

$$R_1 = 134 + 0,0000008 = 142,$$

$$\mathcal{R}_z = 142 + 0.0000002 + \delta = 152, \\ \mathcal{R} = 152 : 4 : \delta = 164$$

$$R = 164 + 6 + 8 = 178,$$

etc

Ces résultats donnent la table de sensibilité suivante :

Table de sensibilité

dans laquelle les charges sont données en Kilog. et les poids additionnels en millig., pour 1 partie du limbe.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
134	142	152	164	178	194	212	232	255	280
1	307	336	347	400	435	471	511	553	597
2	691	742	794	849	906	967	1028	1091	1156
3	1294	1366	1440	1516	1594	1674	1756	1841	1928
4	2106	2199	2294	2391	2490	2592	2696	2802	2910
5	3131								

Pour les subdivisions du Kilog., on pourrait interpoler; par exemple la sensibilité exigée:

en cas de charge de 14 Kilog. 435 millig.

" " " " 13 " 400 "

par conséquent, pour chaque Heklog. de la charge entre 13 et 14 Kilog., $\frac{35}{10} = 3,5$ mil. lig.

A propos de la méthode des moindres carrés.

§ 8. En substituant dans l'équation (15) les valeurs trouvées pour A, B et C sous (16), (17) et (18), on pourrait donc, au moyen de trois pesées, calculer la sensibilité de la balance pour quelque charge que ce soit, ainsi que les valeurs de α , β , et c ; si, bien entendu, chacune de ces pesées procure un résultat parfaitement exact. Cependant, les petits poids additionnels R_0 , R_n et R_{2n} sont toujours plus ou moins incertains, d'une part parce que les angles d'inclinaison φ que l'on a mesurés et dont elles doivent être déduites sont inexacts, d'autre part parce que les oscillations de la balance, à cause des influences perturbatrices qui agissent sur elle, sont toujours plus ou moins irrégulières et qu'il n'est pas possible de mettre ces irrégularités en compte. Si par conséquent l'on ne fait usage que de 3 équations alors certainement à la suite des erreurs inévi-

tables dans la détermination de R_0 , R_n et R_{2n} , les valeurs trouvées pour A, B et C ne seront pas parfaitement exactes et, comme on doit prendre les poids additionnels tels que les donnent les calculs, ils seront affectés d'erreurs qui passeront dans les valeurs de A, B et C qu'on en a déduites.

Pour déterminer les grandeurs A, B et C de façon plus précise qu'il n'est possible de le faire au moyen de trois pesées et de trois équations, on doit effectuer plus de trois pesées de différentes charges. On obtient ainsi plus d'équations que d'inconnues et c'est de tout l'ensemble des équations que l'on déduit les inconnues; alors nécessairement les erreurs dans la constatation des angles d'inclinaison, de même que celles provenant des oscillations irrégulières de la balance, doivent se contrebalancer dans le résultat final, de sorte que l'on obtient un résultat beaucoup plus exact que celui que procure un nombre

d'équations égal à celui des inconnues.

Dans ce cas et dans tous les cas analogues, c'est un point de la plus haute importance que de savoir de quelle façon il faut combiner les équations données afin d'obtenir, pour les inconnues, les résultats les plus exacts possible. Ce point ne peut être tranché que par les mathématiques supérieures. Avant que celles-ci eussent procuré à cet égard une solution définitive on a combiné les équations de différentes manières, mais il est maintenant prouvé que ces combinaisons ne donnaient pas les résultats avec toute l'exactitude que la combinaison des équations était susceptible de procurer.

Pour expliquer la manière d'après laquelle, selon les données des mathématiques supérieures, les équations doivent être combinées, nous établissons ici ces équations dans leur forme la plus générale :

$$a + b_1x + c_1y + d_1z = 0,$$

$$a_1 + b_2x + c_2y + d_2z = 0,$$

$$a_2 + b_3x + c_3y + d_3z = 0,$$

$$a_3 + b_4x + c_4y + d_4z = 0, \text{ etc.}$$

et nous établissons, pour faciliter le raisonnement, que l'on a affaire à trois inconnues x , y et z et à un grand nombre d'équations entre ces inconnues, tandis que les coefficients de ces équations sont incomplètement déterminés.

Si l'on résout les inconnues des trois premières équations, alors les résultats obtenus devront dans tous les cas satisfaire à ces équations, c'est-à-dire que la substitution de ces équations doit réduire les seconds membres à 0. Si on attribue ces valeurs aux inconnues dans les autres équations, alors, comme ni les valeurs obtenues pour les inconnues ni les coefficients ne sont parfaits, il n'est possible que par un hasard tout à fait particulier, que le 2^e membre d'une des équations devienne exactement 0 et pour

le second membre de chaque équation on obtiendra une petite grandeur qui pourrait être considérée comme l'erreur de l'équation si les valeurs admises pour les inconnues étaient parfaites. Si dans l'ensemble des équations, on en prend arbitrairement trois et si on les résout on obtiendra pour les inconnues des valeurs qui différeront quelque peu des précédentes. Si on substitue ces valeurs dans les équations que l'on a prises comme fondamentales, alors les seconds membres doivent devenir 0, tandis que cela ne peut être le cas dans une des autres équations que par suite d'un hasard particulier. Si l'on partage les équations en 3 groupes et si l'on additionne les équations de chaque groupe, alors on obtient 3 équations finales dont la solution de nouveau procurera pour les inconnues des valeurs qui différeront quelque peu des anciennes, mais qui, sans hasard particulier, ne réduira parfaitement chez aucune

des équations originales le second membre à 0.

Nous pouvons nous représenter une très grande variété de combinaisons entre les équations primitives, combinaisons qui donneront trois équations finales pour les trois inconnues dont la solution fera, pour ces inconnues, trouver des valeurs qui ne différeront pas beaucoup de leurs valeurs exactes et dont la substitution, si non fortuitement, ne réduira chez aucune des équations originales le second membre parfaitement à 0.

Ainsi au moyen de différentes combinaisons des équations primitives, on peut obtenir pour les inconnues différents systèmes de valeurs qui ne diffèrent pas beaucoup de leurs valeurs exactes et dont la substitution dans les équations primitives fera trouver certainement, pour les seconds membres, des valeurs différentes mais toujours petites. Les valeurs seraient toujours nulles si les équations

étaient parfaites et, de la sorte, les valeurs de ces seconds membres, obtenues par la substitution d'un système de valeurs pour x , y et z qui est déduit d'une combinaison d'équations en rapport avec ce système, pourront être considérées comme les erreurs des différentes équations.

Les mathématiques supérieures nous apprennent, que parmi les nombreux systèmes de valeurs pour les inconnues qui peuvent être déduits des différentes combinaisons constituées au moyen des équations primitives, celui-là est le plus exact dont la somme des deuxièmes puissances des fautes que comportent les équations est inférieure aux mêmes sommes dans les autres systèmes.

Chaque système de valeurs pour les inconnues déduit d'une certaine combinaison des équations primitives, fait, au moyen de la substitution, trouver certaines valeurs pour les erreurs des équations et une certaine somme pour la somme

des carrés de ces erreurs. Pour tous les systèmes possibles de valeurs pour les inconnues déduits de différentes combinaisons des équations primitives, ce système là est le plus exact dont la somme des carrés des erreurs est le plus petit. La combinaison des équations primitives en autant d'équations finales qu'il y a d'inconnues, dont la solution immédiate procure certainement les valeurs les plus probables pour les inconnues porte le nom de Méthode des moindres carrés.

Après que les mathématiques supérieures eurent déterminé les conditions auxquelles les valeurs des inconnues doivent satisfaire pour être celles qui, parmi les valeurs pouvant être déduites de la réunion de toutes les équations données, sont les plus probables, ces mathématiques devaient encore nous apprendre de quelle manière les équations données doivent être combinées pour obtenir des équations finales dont la solution fait trouver, pour les inconnues, des valeurs qui certaine-

ment répondent à cette condition.

Les mathématiques supérieures prouvent que seules les combinaisons suivantes, constituées au moyen des équations primitives, font atteindre le but.

Règle : "On multiplie chaque équation par le coefficient de la première inconnue telle qu'elle se présente dans l'équation et on additionne toutes les équations que l'on a multipliées. De la sorte, on obtient la première équation finale.

" Ensuite on multiplie chaque équation par le coefficient de la deuxième inconnue telle qu'elle se présente dans l'équation et on additionne toutes les équations que l'on a multipliées. De la sorte, on obtient la deuxième équation finale.

" On multiplie ensuite chaque équation par le coefficient d'une inconnue suivante et on obtient de la sorte autant d'équations finales qu'il y a d'inconnues.

" La solution des équations finales fait,

" pour les inconnues, trouver des valeurs en rapport avec lesquelles la somme des carrés des erreurs qui offrent les équations primitives est aussi petite que possible, valeurs qui représentent donc le plus exactement les inconnues pouvant être déduites des équations données (*).

§ 9. Nous appliquerons la règle qui précède aux pesées du § 6 en supposant que nous ayons obtenu au moyen de pesages

(*) Si l'on n'a qu'une inconnue et, pour cette inconnue, n résultats différents, alors on a n équations de la forme simple: $\alpha + x = 0$, $\alpha' + x = 0$, $\alpha'' + x = 0$, etc.

Le coefficient de x est ici, dans toutes les équations, l'unité et l'équation finale devient donc la somme des équations primitives, donc

$$\sum \alpha + nx = 0$$

$$\text{d'où } x = -\frac{\sum \alpha}{n}$$

Donc la valeur la plus exacte de l'in-

le poids additionnel pour faire un angle égal à une partie (subdivision) du limbe : lorsque les plateaux sont vides. . . . 0,000129 K.G.,

" 10	Kilog.	dans chaque plateau	320	" ,
" 20	"	" "	684	" ,
" 30	"	" "	1302	" ,
" 40	"	" "	2096	" ,
" 50	"	" "	3135	" .

On obtient, selon (15), en appliquant la méthode des moindres carrés :

$$\begin{aligned}
 P = 0 & \quad 0,000129 = A, \\
 " 10 & \quad 0,000320 = A + 10B + 100C, \\
 " 20 & \quad 0,000684 = A + 20B + 400C, \\
 " 30 & \quad 0,001302 = A + 30B + 900C, \\
 " 40 & \quad 0,002096 = A + 40B + 1600C, \\
 " 50 & \quad \underline{0,003135 = A + 50B + 2500C}, \\
 & \quad 0,007666 = bA + 150B + 5500C;
 \end{aligned}$$

première équation finale.

comme est la moyenne arithmétique de tous les résultats que l'on a trouvés pour elle.

$$\begin{aligned}
 0,00320 &= 10A + 100B + 1000C, \\
 0,01368 &= 20A + 400B + 8000C, \\
 0,03906 &= 30A + 900B + 27000C, \\
 0,08384 &= 40A + 1600B + 64000C, \\
 0,15675 &= 50A + 2500B + 125000C, \\
 \hline
 0,29653 &= 150A + 5500B + 225000C;
 \end{aligned}$$

deuxième équation finale.

$$\begin{aligned}
 0,0320 &= 100A + 1000B + 10000C, \\
 0,2736 &= 400A + 8000B + 160000C, \\
 1,1718 &= 900A + 27000B + 810000C, \\
 3,3536 &= 1600A + 64000B + 2560000C, \\
 \hline
 7,8375 &= 2500A + 125000B + 6250000C, \\
 12,6685 &= 5500A + 225000B + 9790000C;
 \end{aligned}$$

troisième équation finale.

Si, de ces trois équations, on résout les inconnues et si l'on substitue dans (15) les valeurs que l'on a obtenues, c'est à dire dans

$$R = A + BP + CP^2 \quad (*)$$

(*) Cette équation est celle d'une parabole ordinaire; la sensibilité d'une balance peut donc aussi être exprimée au moyen d'une telle courbe.

alors on obtient

$$R = 0,000134 + 0,000006717 P + 0,00000106429 P^2 \dots \quad (19)$$

où R et P sont exprimés dans la même unité de poids, c'est-à-dire en Kilog., en d'autres mots R donne en Kilog. le poids additionnel nécessaire pour faire faire à la balance, lorsqu'elle est chargée du poids P , un angle d'inclinaison égal à une subdivision du limbe.

De (19) nous déduisons

$$\text{lorsque } P = 0 \quad R_0 = 0,000134 \text{ Kilog.},$$

$$\text{''} \quad P = 25 \quad R_{25} = 0,000987 \text{ "}$$

$$\text{''} \quad P = 50 \quad R_{50} = 0,003131 \text{ "}$$

d'où, selon notre calcul précédent :

$$c_1 = 0,033 \text{ m.M.}$$

$$\chi = 0,347 \text{ "}$$

$$\text{et } \chi_1 = 0,006 \text{ "}$$

Les couteaux du fléau sont-ils parallèles? 44

§ 10. Soit ADDA, fig. 6, la projection horizontale du fléau et des couteaux.

Lorsque, en A et D , à l'extrémité de devant des couteaux de suspension, on suspend deux petits plateaux tels que ceux représentés dans la fig. 7 et que l'on met la balance dans un état d'équilibre horizontal et qu'ensuite, dans chacun de ces petits plateaux, on place une unité de poids avec, d'un côté, un poids additionnel tel que l'équilibre soit de nouveau établi, alors la longueur des bras sera inversement proportionnelle aux poids qui ont été placés dans les petits plateaux.

En suspendant les petits plateaux en A , et D , on peut, de la même manière, trouver le rapport des longueurs A, B , et B, D , et, en suspendant les petits plateaux en A et D , ou en D et A , on trouve le rapport des longueurs B, D , et AB .

$$\text{Soit } dB = \alpha - x , \quad d\bar{B} = \alpha + x ,$$

$$BD = \alpha - x - z , \quad A\bar{B} = \alpha + x + z ,$$

$$B\bar{D} = \alpha - x + z , \quad AB = \alpha + x - z ,$$

avec quoi nous supposons

$$D_d = dD \quad \text{et} \quad Ad = dA ,$$

En outre

$$(\text{Poids en } D,)(\alpha - x - z,) = (\text{Poids en } A,)(\alpha + x + z),$$

$$(\text{, , , } D)(\alpha - x + z,) = (\text{, , , } A)(\alpha + x - z),$$

$$(\text{, , , } D)(\alpha - x - z,) = (\text{, , , } A)(\alpha + x - z),$$

$$(\text{, , , } D)(\alpha - x + z,) = (\text{, , , } A)(\alpha + x + z),$$

et établissant les rapports

$$\frac{\text{Poids en } A,}{\text{Poids en } D,} = (1+\alpha); \quad \frac{\text{Poids en } A}{\text{Poids en } D} = (1+\beta); \text{ etc.}$$

ainsi

$$\alpha - x - z, = (1+\alpha)(\alpha + x + z),$$

$$\alpha - x + z, = (1+\beta)(\alpha + x - z),$$

$$\alpha - x - z, = (1+\gamma)(\alpha + x - z),$$

$$\alpha - x + z, = (1+\delta)(\alpha + x + z),$$

ou

$$-\alpha x = (2+\alpha)x + (1+\alpha)z + z,$$

$$-\beta x = (2+\beta)x - (1+\beta)z - z,$$

$$-\gamma x = (2+\gamma)x - (1+\gamma)z + z,$$

$$-\delta x = (2+\delta)x + (1+\delta)z - z.$$

Ici, l'on pourrait appliquer la méthode des moindres carrés, mais étant donné que α , β , γ et δ sont toujours très petits en comparaison de 1 et 2, on peut aussi écrire sans erreur appréciable :

$$2x + z + z_1 = -\alpha a,$$

$$2x - z - z_1 = -\beta a,$$

$$2x - z + z_1 = -\gamma a,$$

$$2x + z - z_1 = -\delta a.$$

Ces quatre équations comprennent les 3 inconnues x , z et z_1 ; en résolvant ces équations selon la méthode des moindres carrés, on trouve :

La 1^e équation finale on additionnant les quatre équations parce que le coefficient de la 1^e inconnue, c.-à.-d. x est le même dans toutes les équations, donc

$$\delta x = -\alpha(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \dots . . . 1^{\text{e}} \text{ équation finale.}$$

$$2x + z + z_1 = -\alpha a$$

$$-2x + z + z_1 = +\beta a$$

$$-2x + z - z_1 = +\gamma a$$

$$\underline{2x + z - z_1 = -\delta a}$$

$$4z = -\alpha(\alpha - \beta - \gamma + \delta) \dots . . . 2^{\text{e}} \text{ équation finale.}$$

$$2x + z + z_1 = -\alpha a$$

$$-2x + z + z_1 = +\beta a$$

$$2x - z + z_1 = -\gamma a$$

$$\underline{-2x - z + z_1 = +\delta a}$$

$$4z_1 = -\alpha(\alpha - \beta + \gamma - \delta) \dots . . . 3^{\text{e}} \text{ équation finale.}$$

$$\text{donc } x = -\frac{\alpha}{8} (\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

$$\chi = -\frac{\alpha}{4} \{(\alpha - \beta) - (\gamma - \delta)\},$$

$$\chi_1 = -\frac{\alpha}{4} \{(\alpha - \beta) + (\gamma - \delta)\}.$$

Supposons qu'on ait constaté dans une balance

$$\alpha = 375 \text{ m.M.}, \quad \alpha = -0,0001851,$$

$$\beta = +0,0000780,$$

$$\gamma = -0,0001380,$$

$$\text{et } \delta = +0,0000323,$$

alors on trouve

$$x = 0,0089 \text{ m.M.},$$

$$\chi = 0,0087 \text{ "}$$

$$\text{et } \chi_1 = 0,0406 \text{ "}$$

La balance considérée comme pendule.

§ 11. Si l'on considère la balance comme un pendule composé, alors le carré de la durée t de l'oscillation est représenté avec une exactitude suffisante par l'équation:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{g} \frac{T}{M}$$

dans laquelle g représente l'accélération de la gravité, T la somme des moments d'inertie

de la masse oscillante par rapport au couteau d'appui et M le produit de la somme de ces masses avec la distance entre leur centre de gravité et le couteau d'appui.

Soient, fig. 3, B le couteau d'appui, A et D les couteaux de suspension, c la distance entre le couteau d'appui et la ligne des couteaux ~~d'appui~~^{de suspension}, Z le centre de gravité et γ le poids de la balance non-chargée, $BZ = z$, $AB = BD = a$, $BAD = BDA = \alpha$ et P le poids placé dans chaque plateau. —

Soient en outre exprimées les distances notamment q , a , z et c en millim.; les poids notamment γ et P en Kilog. et le temps ou t en secondes.

En calculant le moment d'inertie de la balance, on peut accepter que la masse des plateaux avec les accessoires et les charges est rassemblée dans les couteaux de suspension.

Si l'on dénomme les masses des différentes parties dont se compose la balance non chargée m_1, m_2, m_3 , etc. et la distance entre elles et le couteau d'appui k_1, k_2, k_3 , etc.,

alors la somme des moments d'inertie de ces masses est égale à

$$m_1 k^2 + m_2 k^2 + m_3 k^2 + \text{etc.}$$

On peut considérer cette somme comme équivalente à $m k^2$, dans quoi l'on peut apparemment prendre m ou k arbitrairement; si l'on prend

$$m_1 + m_2 + m_3 + \text{etc.} = m$$

alors la valeur de k^2 est également déterminée et la somme des moments d'inertie de la balance non chargée s'indique par

$$m k^2. \dots \dots \dots \quad (20)$$

En fait, la valeur sous (20) dépend de la charge dans les plateaux, parce que, lorsque la balance est chargée, le fléau fléchit, à la suite de quoi sa forme se modifie et par conséquent la distance des points par rapport au couteau d'appui change; mais en cas de fléchissement, les parties du fléau se déplacent si minimalement qu'on peut admettre que les distances entre elles et le couteau d'appui sont demeurées les mêmes; on peut donc admettre que le moment d'inertie de la balance non char-

gée par rapport avec le couteau d'appui est indépendant de P .

Si, par conséquent, on représente la durée de l'oscillation de la balance non chargée par t_0 et la distance entre son centre de gravité et le couteau d'appui par χ_0 , alors

$$t_0^2 = \frac{\pi^2}{g} \cdot \frac{m k^2}{m \chi_0} = \frac{\pi^2}{g} \cdot \frac{k^2}{\chi_0}$$

Si maintenant l'on place un poids additionnel R_0 dans un des plateaux de la balance non chargée et si φ représente l'angle d'inclinaison, alors on a très approximativement

$$\chi_0 \sin \varphi = R_0 \alpha \cos \varphi \dots \dots \quad (21)$$

d'où

$$\chi_0 = \frac{R_0}{g} \alpha \cot \varphi$$

et donc

$$t_0^2 = \frac{\pi^2}{g} \cdot \frac{\chi_0}{R_0} \cdot \frac{k^2}{\alpha \cot \varphi}$$

d'où

$$k^2 = t_0^2 \cdot \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{R_0}{\chi_0} \alpha \cot \varphi$$

De sorte que pour $m k^2$, sous (20), on trouve:

$$m k^2 = m t_0^2 \cdot \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{R_0}{\chi_0} \alpha \cot \varphi \dots \dots \quad (22)$$

Si l'on représente par M la masse de la charge P dans chacun des plateaux, alors la somme des moments d'inertie des charges,

par rapport avec le couteau d'appui, est égale à $2Ma^2$; par conséquent

$$T = 2Ma^2 + mt_0^2 \cdot \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{R_o}{h} \alpha \cot \varphi$$

et

$$M = 2Mc + mh$$

par conséquent

$$t^2 = \frac{\pi^2}{g} \cdot \frac{2Ma^2 + mt_0^2 \cdot \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{R_o}{h} \alpha \cot \varphi}{2Mc + mh}$$

$$\text{Mais } M = \frac{P}{g} \text{ et } m = \frac{h}{g}$$

ainsi

$$t^2 = \frac{\pi^2}{g} \cdot \frac{2 \frac{P}{g} a^2 + \frac{h}{g} \cdot t_0^2 \cdot \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{R_o}{h} \alpha \cot \varphi}{2 \frac{P}{g} c + \frac{h}{g} \cdot h}$$

ou

$$t^2 = \frac{\frac{2Pa^2\pi^2}{g} + t_0^2 R_o \alpha \cot \varphi}{2Pc + h^2} \quad \dots \dots \quad (23)$$

Les remarques que l'on a faites pour le sous (20) sont applicables aussi à α dans (23); α peut donc également être considéré comme constante.

Si nous établissons que les couteaux se trouvent dans une seule droite alors $c = 0$ dans (23) et pour (23) on peut écrire

$$t^2 = \frac{\frac{2Pa^2\pi^2}{g h^2} + t_0^2 \cdot \frac{R_o \alpha \cot \varphi}{h^2}}{\dots \dots \quad (24)}$$

Si maintenant le fléau est construit très solidement de sorte que le fléchissement pour toute charge permise soit tellement minime qu'il puisse être négligé, alors on peut établir $x_0 = x$ et conformément à (21) $\ddot{x}_0 \alpha \cot q = \frac{Y}{h} z$ de sorte qu'alors (24) devient

$$t^2 = \frac{2 \frac{\partial \alpha^2 \pi^2}{g h z}}{+ t_0^2} \quad \quad (25)$$

Nous en concluons que la durée de l'oscillation t devient petite :

1^e si α = le bras du fléau est petit,

2^e si Y = le poids de la balance non chargée et z = la longueur BZ , fig. 3, sont grands.

Il résulte de ceci qu'une grande sensibilité en faisant α long et une courte durée de l'oscillation sont incompatibles. C'est pourquoi l'on dit aussi qu'une balance à bras longs sensible est "paresseuse" ou "lente". La balance oscillera d'autant plus lentement que la sensibilité sera plus grande.

De la formule (25) on peut aussi déduire de quelle façon la durée de l'oscillation augmente lorsque la charge \mathcal{P} devient plus grande.

§ 12. La formule (15) en rapport avec (16), (17) et (18) nous a montré que la sensibilité d'une balance augmente quand on augmente la longueur a des bras. De la formule (25) il résulte cependant qu'il n'est pas bon de vouloir rendre sensible une balance en allongeant ses bras. Dans la formule (15), après substitution de (16), (17) et (18), la grandeur a se présente notamment à la première puissance et, dans la formule (25), a se présente à la seconde puissance. Si, par conséquent, on augmente a et donc aussi la sensibilité, alors la durée de l'oscillation s'accroît dans une bien plus grande mesure que la sensibilité. L'avantage quant à la sensibilité ne contrebalance pas l'inconvénient beaucoup plus grand qui résulte de l'augmentation de la durée des oscillations. Cela d'autant plus que l'on peut également augmenter la sensibilité d'une balance sans allonger ses bras, entre autre en diminuant la distance entre le couteau d'appui et la ligne des couteau de suspension. Aussi est-

ce dans cette dernière voie que l'on cherche aujourd'hui.

Si l'on prend en considération que la différence de température entre les deux bras du fléau a des effets plus désavantageux dans une balance à bras longs que dans une balance à bras courts, il résulte que cette dernière mérite encore à ce titre la préférence sur l'autre, car plus un pesage est de courte durée moins les influences de la température sont à craindre au cours d'un même pesage.

Les balances à bras courts.

§13. La résistance de l'air lorsqu'un objet fait des oscillations qui ne sont pas très petites, est proportionnelle au carré de la vitesse que met l'objet à se mouvoir dans l'air et proportionnelle à la surface de l'objet qui est exposé à la résistance de l'air. Il en résulte immédiatement qu'il y a un avantage à diminuer autant que pos-

fible la surface des plateaux des balances de précision (car quand la balance oscille la résistance de l'air est assez appréciable); en second lieu, il y a avantage de diminuer les oscillations car plus elles sont petites moins aussi est la vitesse et, en troisième lieu, il apparaît que les bras du fléau doivent être petits car, plus ils sont petits, moins seront aussi, l'angle d'inclinaison étant le même, les mouvements que devront accomplir les plateaux en sens horizontal.

En outre plus les plateaux sont petits, moins ils doivent avoir d'épaisseur pour pouvoir supporter leur charge maximum, c'est lorsque les plateaux ne sont pas plus grands ni plus épais qu'il ne faut qu'ils présentent le moins, chose qui, au point de vue de la sensibilité, peut être comptée comme un avantage, malgré que ce ne soit cependant qu'un avantage de très minime influence. Il n'y a en tous cas aucune raison de le négliger et de rendre inutilement la balance plus lourde qu'il ne faut.

Également dans une balance à bras courts, lorsque l'angle d'inclinaison est le même, les

oscillations accessoires seront plus petites que lorsque le bras de fléau est long. Ces oscillations partielles - qui produisent toujours une certaine perturbation - diminuent à mesure que les cordes ou chaînes auxquelles les plateaux sont suspendus sont plus courtes; il ne convient donc pas que ces cordes ou chaînes soient plus longues qu'il n'est nécessaire pour qu'on puisse placer aisément dans les plateaux les poids et les charges.

De la fixation des plateaux dans les pesages de précision.

§ 14. En suivant la méthode de pesage de la substitution (selon Borda), de même qu'en suivant celle de l'alternance, (45) on suppose que, dans le premier et le second pesage, chacun des deux bras de la balance n'a pas changé, c. à. d. qu'il a gardé de façon absolue la même longueur, supposition qui à strictement parler, ne se vérifie presque

jamais. Si l'on songe de quelle façon se détermine la longueur de ces bras et si l'on considère comment l'on doit placer les poids sur les plateaux, on comprendra sans peine, que la supposition dont nous venons de parler, concorde parfaitement avec la réalité des faits. En effet la longueur des bras doit, à l'occasion de chaque pesage se mesurer à partir du point de contact véel du couteau d'appui jusqu'aux points de contact réels des couteaux de suspension. Or, étant donné que pour procéder à un nouveau pesage on doit décharger l'un des deux plateaux ou tous les deux, ce déchargement n'est pas sans avoir quelque effet sur les points de contact et, lorsqu'on recharge les plateaux, les points de contact dont nous avons parlé ne sont plus absolument les mêmes. Naturellement le plus ou moins de soin avec lequel l'instrument est construit est ici de la plus grande influence, mais cependant, malgré tous les efforts des constructeurs, l'expérience apprend que, même dans les meilleures balances, en

faisant des pesages avec les mêmes poids dans les mêmes plateaux, il arrive rarement que deux pesages successifs donnent un résultat identique, c'est-à-dire dans la limite de l'exactitude qui correspond avec la sensibilité de la balance.

Stankart a adapté à la balance un dispositif - aussi simple qu'efficace - grâce auquel le déplacement des points de contact entre les couteaux et les consinets, dans deux pesages successifs, se trouve empêché.

Ce dispositif a pour effet que les poids de même que l'objet à peser peuvent être placés sur les plateaux et on peut les enlever sans que les pièces de suspension s'en ressentent, les mêmes forces continuant à agir sur les couteaux et cela aux mêmes points alors même qu'un des poids est enlevé d'un plateau.

Voici en quoi consiste le dispositif. Le support de toutes les balances dans les bureaux de vérification dans les Pays-Bas, sur lequel le fléau repose au moyen de son couteau d'appui, est fixé sur une planche qui il est possi-

ble de placer dans un plan horizontal au moyen d'un niveau d'eau; au dessous de chaque plateau, on a ménagé dans la planche une ouverture circulaire ab, fig. 8, dans laquelle une petite tige c peut se mouvoir horizontalement tandis que, à chaque plateau, est fixé, fig. 9, un petit étrier d. Au cours des pesages, les petites tiges c sont poussées de sorte qu' alors l'étrier d peut se déplacer librement dans l'espace ab.

Si l'on veut maintenant enlever un poids du plateau et le remplacer par un autre, on agit, en suivant la méthode de pesage de

(45) Borda, de la façon suivante: Soit A l'élaston et B le poids qui il faut contrôler.

L'on place B dans un des plateaux et on amène le fléau en équilibre dans le plan horizontal en placant dans l'autre plateau le contre-poids C. Avant d'enlever B et de le remplacer par A, on glisse en tièvement et sans choc la tige dans l'ouverture de l'étrier. En soulevant très doucement B, le plateau s'élève et la partie

inférieure de l'étrier entre en contact avec la tige, puis on efface B tout à fait. On met avec toute la prudence nécessaire A à la place de B et cela très lentement, de façon qu'en déposant A sur le plateau celui-ci descende sans le moindre choc. Enfin on retire la tige pour pouvoir effectuer le pesage de A . Par cette manière de faire, on a remplacé B par A sans que la pression sur chacun des couteaux se soit interrompue un seul instant et il est évident qu'au moyen d'un tel procédé il y a beaucoup plus de chance que dans tout autre cas pour que les points de contact demeurent les mêmes et qu'également les bras du fléau aient conservé la même longueur. Faisons aussi remarquer que l'élasticité des cordons de soie, auxquels les plateaux sont quelquefois suspendus, rend de grands services et favorise l'interruption du contact entre les points de suspension en amortissant tous les chocs. Disons en passant, que l'emploi de ces cordons de soie pour la suspension des plateaux, mérite donc la préférence aux tiges de cuivre.

rigides. On délaisse cependant d'ordinaire les cordons de soie parce qu'ils absorbent l'humidité ou parce qu'ils se dessèchent et que, de la sorte, les plateaux ne sont plus d'un poids identique ; mais ces défauts ne valent pas d'être pris en considération dans une série interrompue de pesages et ils s'éliminent d'eux-mêmes par la répétition des pesages.

Lorsqu'on veut appliquer la méthode de l'alternance - méthode qui mérite la préférence à celle de Borda - alors on peut procéder de la façon suivante :

Supposons qu'il faille comparer les deux poids très approximativement les mêmes A et B et que ces poids soient placés dans les plateaux. Admettons aussi qu'on ait un contre-poids A₁ (poids-tarre) très proche de A et B. On enlève B et on le remplace par A₁, ensuite on enlève A et on le remplace par B, enfin on enlève A₁ et on le remplace par A.

De sorte que :

O_{rr}

On avait d'abord sur la balance A et B,
ensuite après le premier échange A et A,
" " " Deuxième " B et A,
" " " Troisième " B et A.

Notes.

(23) Jozex D^r G. A. Venema: De balans en het wegen. Groningen, 1848, pag. 1 et 2.

(24) Pierre Larousse: Grand dictionnaire universel du 19^{ème} siècle. Paris. La Balance. Constellation zodiacale composée de huit étoiles, qui est ainsi appelée parce que, lorsque le soleil entre (au mois de Septembre) dans le signe qui lui correspondait autrefois, les jours sont égaux aux nuits; comme en équilibre. Jozex aussi Larousse aux noms de Pline, Palamède, etc.

(25) Description de l'Egypte ou Recueil des Observations et des Recherches

qui ont été faites pendant l'expédition de
l'armée française. Antiquités. Paris, 1821,
A, vol. IV, pl. 21.

(26) Astronomie par Jérôme le Franc,
(La Lande) Paris, 1742, pag. 207, art. 605.

(27) Un des héros de la guerre de Troie; les
 Grecs lui attribuaient l'invention de
 beaucoup de choses, telles que les monnaies,
 les poids et mesures, etc. (Saroufje).

(28) Saroufje : art. Sa balance.

(29) Histoire des Juifs, écrite par Flavius
Joseph, sous le Titre de Antiquitez Judai-
ques, traduite sur l'Original Grec par Mon-
sieur Arnould d'Andilly, Amsterdam,
1700, Livre premier, pag. 9.

(30) Julius Heisbach. Sohrbuch der Ingenieur-
und Maschinen Mechanik, Braunschweig,
1857, 2^e Theil, § 102; franc, balance romaine,

allem. Schnellwage mit Laufgewicht, angl.
steel-yard.

(31) Quoiqu'elles ne concernent pas directement notre sujet, les lignes suivantes, empruntées à l'ouvrage d'August Man: Pompeji in Leben und Kunst, Leipzig, 1900, pag. 83, sont, pour nous, d'un grand intérêt:

Parmi les monuments découverts à Pompeji se rangent le Forum et le temple y attenant d'Appolon avec parvis. Dans une des colonnes séparant le Forum et ce parvis, se trouve une niche dont l'ouverture est tournée vers le Forum et dans laquelle on a trouvé une table de vérification, mensa pondaria, qui se trouve actuellement dans le musée de Naples. Cette table de vérification consiste dans une dalle de pierre dure de 2,55 M. de longueur et 0,55 M. de largeur, (voyez ci-après fig. 10) munie d'ouvertures de différentes dimensions qui la traversent de part en part dans toute son épaisseur et qui correspondaient avec les étalons de mesures de

capacité alors en usage. Ces ouvertures pou-
vaient être fermées à leur partie inférieure,
de sorte que, lors d'une vérification, on pou-
vait remplir l'ouverture, puis laisser cou-
ler le contenu dans la mesure à contrôler
ou inversement. Cette dalle de pierre repro-
sait sur deux supports en pierre, tandis qu'
encore deux autres supports, reposant à leur
tour sur cette dalle, portaient une seconde
dalle percées de trois ouvertures. Cette
table de vérification date de l'époque
préromaine.

On peut admettre, dit Man, que le
fonctionnaire chargé du contrôle des mesures
soumises à la vérification, disposait du
petit espace qui se trouvait à côté de l'es-
calier près de l'angle septentrional du par-
vis dans la proximité immédiate de la
table de vérification.

On a trouvé de pareils tables de vérifi-
cation à différents endroits de l'Empire ro-
main, par exemple à Selinunt, dans les îles
grecques, à Brégent (Brigantio) sur le lac

de Constance. -

De ce qui précède, on peut conclure que, déjà longtemps avant notre ère, il existait une vérification des mesures commerciales, analogues à celles qui existaient il y a peu de temps encore chez nous ou y existent encore, quoique ces premiers procédés de contrôle fussent, il est vrai, moins parfaits que ceux que nous suivions ou suivons.

Foyer:

Recueil d'instructions sur les poids et mesures, imprimé par ordre de Son Excellence le Comte Corbière, Paris, 1824, pag. 62;

Encyclopédie Roret, Fabrication de poids et mesures, Paris, 1843, pag. 276, fig. 125;

Recueil officiel des Loi, Ordonnances, Décrets et Instructions sur la fabrication et la vérification des poids et mesures, Paris, 1862, pag. 101;

Sammlung von Gesetzen und Erlassen betreffend des Maasf- und Gewichtsweisen. Berlin, 1873, pag. 151;

Instruktion in Ausführung der Eich-

ordnung vom 16 Juli 1849, Berlin, pag. 27;
Handbuch des Eichungswesens, Berlin,
1889, pag. 60;

Instruktion für die Eichämter der im
Reichsrath vertratenen Königreiche und
Länder der österreichisch-ungarischen Monar-
chie, Wien, 1872, pag. 30, sub. 5;

Bundesgesetz über Mass und Gewicht
vom 3 Juli 1875 und Vollziehungsverord-
nung nebst Instruktion für die Eichmeis-
ter vom 24 November 1899, pag. 36;

Loi Fédérale sur les Poids et Mesures
du 3 Juillet 1875 et Règlement avec In-
struction pour les Vérificateurs du 24 No-
vembre 1899, pag. 27;

Weights and measures act, 1889, Model
regulations with respect to Inspectors and
the inspection of weights, measures, and
weighing and measuring instruments.
London, 1890, pag. 28.

weight bij H. Chisholm, warden of the standards. London, 1877

(33) G. van den Berge. De Maten, Gewichten en Muntten der Hebreërs of Joden.

Middelburg, 1889, pag. 43.

(34) Chisholm. Weighing and Measuring,
pag. 41.

Austen H. Layard. Discoveries in
the ruins of Nineveh and Babylon. London,
1853, pag. 600.

(35) British Museum. A Guide to
the exhibition rooms, 1877, pag. 94, 97
(n° 62) et 102 (n° 43).

(36) Poyez les notes pag. 61 et 62, dans Le
système des Poids, Mesures et Mon-
naies des Israélites d'après la Bible,
1904, Paris, de l'auteur de cet opuscule.

(37) Description de l'Egypte, ou Recueil

etc. Antiquités. Tome deuxième. Thèbes,
Pl. 46, n° 10.

(38) Chisholm, pag. 134.

(39) Foyer aussi e.a. Description de l'Egypte,
ou Recueil etc. A, Vol. II, pl. 60 (3
dessins), pl. 64 (2 dessins), pl. 67, 72, 83, etc.

(40) Délégation en Perse. Mémoires publiés
sous la direction de M. J. de Morgan.
Tome IV. Paris, 1902, pag. 11. (Foyer la note
(14), pag. 181, de notre Valeur approximative
d'une Intégrale définie. Paris, 1905)

(41) Délégation en Perse. Mémoires etc.
pag. 179.

(42) D'après un travail du Dr J. J. Stam-
hart, dans l'enema: De Balans etc. pag. 336.

(43) Ce moyen ne peut procurer une grande
précision, parce que les contoaux de

suspension et le couteau d'appui ne sont pas en contact avec le fil au même côté. Si les trois couteaux se trouvent dans le même plan ou si le couteau d'appui est situé un peu au desfous du plan passant par les couteaux de suspension, alors le fil se courbe. Cette courbure, qui est peu appréciable lorsque le fléau est quelque peu long, empêche une estimation exacte de la distance entre le couteau et le fil. C'est la raison pour laquelle je me sers, au cours des opérations de contrôle à mon bureau, d'un instrument que représente la fig. 5.

(44)

Fenema : De Balans etc. pag. 335.

(45)

Tour pour les mots Béranger, Borda, Gausf, Quintenk et Roberval : A. Guillermot, Conseils et Renseignements aux Vérificateurs des Poids et Mesures, Tome deuxième pag. 314, etc. Châlons-sur-Marne.

Fig: 1.

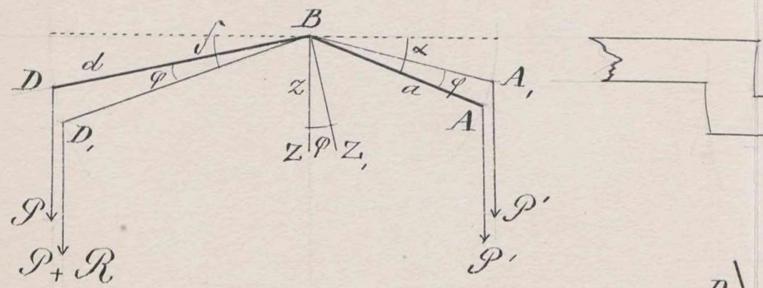


Fig: 2.

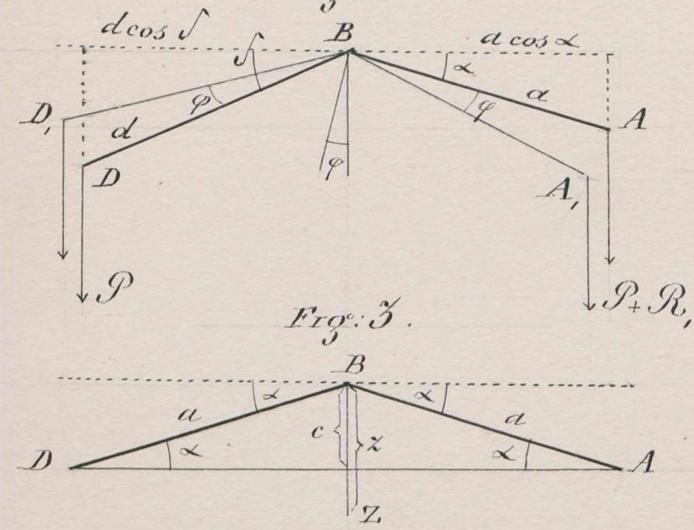


Fig: 3.

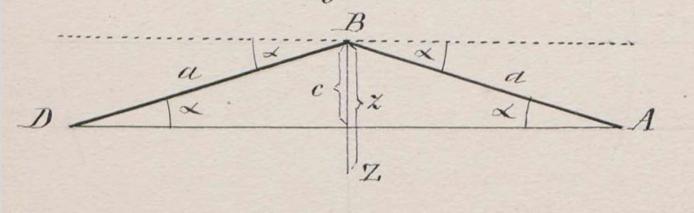


Fig: 4.

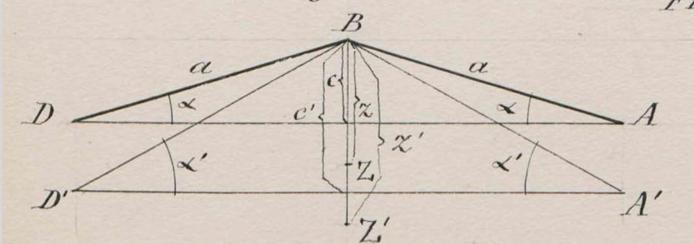


Fig: 5.

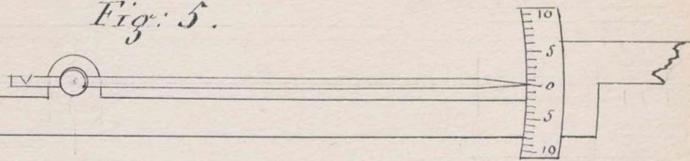


Fig: 6.

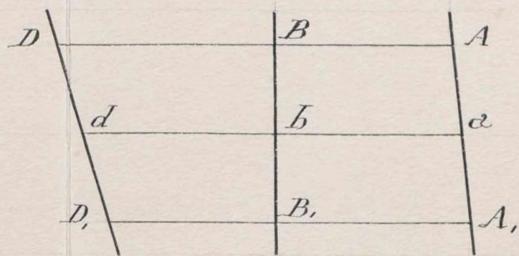


Fig: 7.

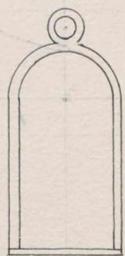


Fig: 8.

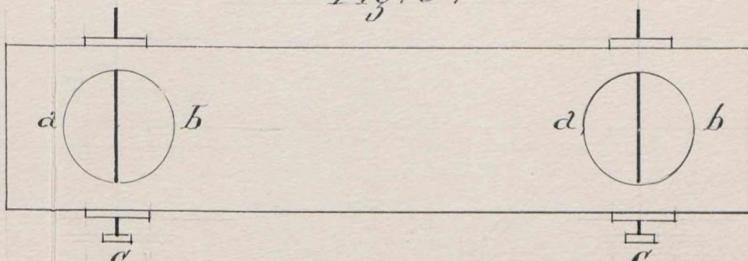


Fig: 9.

