

Conditions d'utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- [Le Conservatoire numérique](#) communément appelé [le Cnum](#) constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n° 78-753 du 17 juillet 1978 :

- la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue ([Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - https://cnum.cnam.fr](#))
- la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- les reproductions de documents protégés par le droit d'auteur, uniquement consultables dans l'enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

4- Pour obtenir la reproduction numérique d'un document du Cnum en haute définition, contacter [cnum\(at\)cnam.fr](mailto:cnum(at)cnam.fr)

5- L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d'utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

NOTICE DE LA REVUE	
Auteur(s) ou collectivité(s)	Laboratoire d'essais mécaniques physiques chimiques et de machines du Conservatoire national des Arts et Métiers
Auteur(s)	Laboratoire d'essais mécaniques physiques chimiques et de machines du Conservatoire national des Arts et Métiers
Titre	Publication : Laboratoire d'essais
Adresse	Paris : Conservatoire national des arts et métiers, 193.-195.
Nombre de volumes	125
Cote	CNAM-BIB P 1329-B et P 1329-C
Sujet(s)	Conservatoire national des arts et métiers (France) Génie industriel -- 20e siècle
Note	La collection comporte des lacunes : n°24; n°58; n°63; n°67; n°76-n°77
Notice complète	https://www.sudoc.abes.fr/cbs//DB=2.1/SET=17/TTL=3/REL?PPN=261820893&RELTYPE=NT
Permalien	https://cnum.cnam.fr/redir?P1329-B_P1329-C
LISTE DES VOLUMES	
	N°25 (1936)
	N°26 (1937)
	N°27 (1937)
	N°28 (1937)
	N°29 (1938)
	N°30 (1939)
	N°31 (1936)
	N°32 (1938)
	N°33 (1938)
	N°34 (1938)
	N°35 (1938)
	N°36 (1938)
	N°37 (1938)
	N°38 (1938)
	N°39 (1938)
	N°40 (1939)
	N°41 (1939)
	N°42 (1939)
	N°43 (1939)
	N°44 (1939)
	N°45 (1938)
	N°46 (1940)
	N°47 (1940)
	N°48 (1940)
	N°49 (1940)
	N°50 (1940)
	N°51 (1941)
	N°52 (1941)
	N°53 (1941)
	N°54 (1941)
	N°55 (1942)
	N°56 (1942)
	N°57 (1942)
	N°59 (1942)

	N°60 (1941)
	N°61 (1942)
	N°62 (1943)
	N°64 (1943)
	N°65 (1943)
	N°66 (1943)
	N°68 (1943)
	N°69 (1943)
	N°70 (1943)
	N°71 (1943)
	N°72 (1944)
	N°73 (1943)
	N°74 (1944)
	N°75 (1944)
	N°78 (1944)
	N°79 (1944)
	N°80 (1944)
	N°81 (1944)
	N°82 (1944)
	N°83 (1944)
	N°84 (1944)
	N°85 (1944)
	N°86 (1945)
	N°87 (1945)
	N°88 (1945)
	N°89 (1945)
	N°90 (1945)
	N°91 (1945)
	N°92 (1945)
	N°93 (1945)
	N°94 (1945)
	N°95 (1946)
	N°96 (1946)
	N°97 (1946)
	N°98 (1944)
	N°99 (1945)
	N°100 (1945)
	N°101 (1946)
	N°102 (1946)
	N°103 (1946)
	N°104 (1946)
	N°105 (1946)
	N°106 (1946)
	N°107 (1947)
	N°108 (1947)
	N°109 (1947)
	N°110 et 111 (1947)
	N° 112 (1947)
	N° 113 (1947)
	N° 114 (1947)
	N° 115 (1947)
	N° 116 (1947)
	N° 117 (1947)
	N° 118 (1948)
	N° 119 (1948)
	N° 120 (1948)
	N° 121 (1948)
	N° 122 (1947)

	N° 123 (1948)
	N° 124 (1948)
	N° 125 (1948)
	N° 126 (1948)
	N° 127 (1948)
	N° 128 (1948)
	N° 129 (1948)
	N° 130 (1949)
	N° 131 (1949)
	N° 132 (1949)
	N° 133 (1948)
	N° 134 (1949)
	N° 135 (1948)
	N° 136 (1949)
	N° 137 (1950)
	N° 138 (1950)
	N° 139 (1950)
VOLUME TÉLÉCHARGÉ	N° 140 (1950)
	N° 141 (1950)
	N° 142 (1948)
	N° 143 (1950)
	N° 144 (1950)
	N° 145 (1951)
	N° 146 (1951)
	N° 147 (1951)
	N° 148 (1951)
	N° 149 (1951)
	N° 150 (1951)
	N° 151 (1951)
	N° 152 (1951)
	N° 153 (1952)
	N° 154 (1952)
	N° 155 (1952)

NOTICE DU VOLUME TÉLÉCHARGÉ	
Auteur(s) volume	Laboratoire d'essais mécaniques physiques chimiques et de machines du Conservatoire national des Arts et Métiers
Titre	Publication : Laboratoire d'essais
Volume	N° 140 (1950)
Adresse	Paris : Conservatoire national des arts et métiers, 1950
Collation	1 vol. (p. [201-207]) : ill. ; 28 cm
Nombre de vues	12
Cote	CNAM-BIB P 1329-B (81)
Sujet(s)	Conservatoire national des arts et métiers (France) Génie industriel -- 20e siècle
Thématique(s)	Histoire du Cnam
Typologie	Revue
Langue	Anglais Français
Date de mise en ligne	10/04/2025
Date de génération du PDF	07/02/2026
Recherche plein texte	Disponible
Notice complète	https://www.sudoc.fr/039014541
Permalien	https://cnum.cnam.fr/redir?P1329-B.81

...

P1329

8^e Kulof (77)

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
LABORATOIRE D'ESSAIS



DÉTERMINATION DE LA PERMÉABILITÉ APPARENTE
ET DU FACTEUR DE QUALITÉ EN HAUTE FRÉQUENCE
D'UNE POUDRE MAGNÉTIQUE
par M. A. Colombani

PUBLICATION N° 140
(Extrait du Journal de Physique T II, n° 5, mai 1950)



DÉTERMINATION DE LA PERMEABILITÉ APPARENTE ET DU FACTEUR DE QUALITÉ EN HAUTE FRÉQUENCE D'UNE POUDRE MAGNÉTIQUE

Par A. COLOMBANI.

Sommaire. — Le but de ce travail a été de calculer la perméabilité apparente μ_a et le facteur de qualité Q_F d'une poudre dont les grains magnétiques et conducteurs assimilés à des « particules » ou « grains » sphériques se trouvent noyés dans un milieu isolant. L'ensemble est soumis à un champ magnétique périodique et uniforme dont la fréquence peut atteindre plusieurs mégacycles.

Le problème a consisté à calculer d'abord les champs résultants extérieurs et intérieurs à une seule particule. Puis, en adoptant l'hypothèse de Lorentz sur le champ efficace et uniforme, à appliquer les résultats obtenus à un milieu dans lequel la distribution des particules est supposée uniforme. Les résultats donnent évidemment une perméabilité apparente complexe d'où l'on déduit aisément le coefficient de qualité $Q_F = -\frac{\mu_r}{\mu_i}$ et le facteur de réduction de flux $\eta = \frac{\mu_r}{\mu_a}$. Les calculs sont longs et assez délicats, mais ils permettent d'obtenir des solutions, fonctions de la fréquence, de la perméabilité, de la conductibilité et de la grosseur du « gain », en très bon accord avec les résultats expérimentaux.



Considérons une sphère de conductibilité γ , de perméabilité μ et de pouvoir inducteur spécifique ε placée dans un milieu isolant ($\gamma_1 = 0, \mu_1, \varepsilon_1$). Sur cette sphère agit un champ magnétique uniforme et sinusoïdal de pulsation ω telle que la longueur d'onde des oscillations correspondantes

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\omega} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \quad (c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm : s})$$

soit grande par rapport au diamètre de la sphère.

Nous nous proposons tout d'abord de calculer les valeurs du champ électrique et du champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

Pour nous permettre d'expliciter les conditions aux limites, nous adopterons les coordonnées sphériques ayant pour centre celui de la sphère, le champ inducteur $\vec{\mathcal{C}} = H_0 e^{j\omega t}$ étant dirigé suivant l'axe des z (fig. 1).

Nous appellerons

$$\vec{\mathcal{C}} = H e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{B}} = h e^{j\omega t}$$

le champ magnétique et le champ électrique (H et h sont indépendants du temps). Les inductions corres-

pondantes seront

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{E}} = \varepsilon \vec{\mathcal{B}}.$$

Nous supposons que les quantités μ et ε sont constantes et le champ inducteur assez faible pour éviter la saturation si la sphère est ferromagnétique.

Si ρ est la densité de charge et \vec{i} la densité de courant, les équations de l'électromagnétisme qui s'écrivent en U. E. M. :

$$\text{rot } \vec{\mathcal{B}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{C}}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{\mathcal{C}} = 4\pi \vec{i} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}, \quad \text{avec} \quad \vec{i} = \gamma \vec{\mathcal{E}}, \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{\mathcal{B}} = 0, \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{\mathcal{E}} = 4\pi c^2 \rho \quad (4)$$

se réduisent évidemment aux seules équations (1) et (2), si l'on suppose les solutions harmoniques et si l'on tient compte de la condition de conser-

vation du courant

$$\operatorname{div} \vec{i} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

D'autre part, les conditions de symétrie permettent d'écrire

$$\vec{b}_r = 0, \quad \vec{b}_\theta = 0, \quad \vec{\partial \mathcal{E}}_\varphi = 0.$$

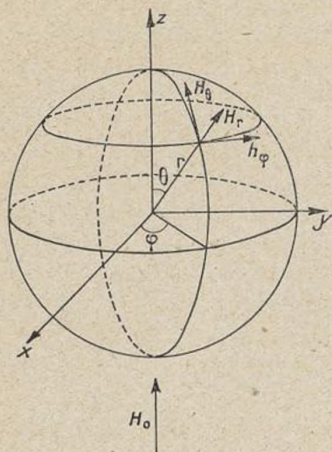


Fig. 1.

Les équations (1) et (2) se réduisent alors aux suivantes :

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\varphi \sin \theta) + j\omega\mu H_r = 0, \quad (3)$$

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rh_\varphi) + j\omega\mu H_\theta = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} - \left(4\pi\gamma + \frac{j\omega\epsilon}{c^2} \right) h_\varphi = 0. \quad (5)$$

Les équations (3) et (4) donnent H_r et H_θ en fonction de h_φ . En tenant compte de cela (5) se transforme en une équation (8) à laquelle doit satisfaire le seul champ h_φ :

$$H_r = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\varphi \sin \theta) \frac{1}{j\omega\mu}, \quad (6)$$

$$H_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rh_\varphi) \frac{1}{j\omega\mu}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial (rh_\varphi)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\varphi \sin \theta) \right] + \left(-j4\pi\mu\gamma\omega + \frac{\omega^2\mu\epsilon}{c^2} \right) h_\varphi = 0. \quad (8)$$

Nous poserons

$$K = \sqrt{\frac{\omega^2\mu\epsilon}{c^2} - j4\pi\mu\gamma\omega}, \quad (9)$$

et nous nous placerons dans le cas du régime quasi stationnaire, c'est-à-dire que nous négligerons le

courant de déplacement devant celui de conduction. Comme nous l'avons déjà vu, cela est parfaitement admissible jusqu'aux fréquences les plus élevées ($f = 10^{11}$ par exemple, c'est-à-dire $\lambda = 3$ mm). N'oublions pas cependant que la longueur d'onde correspondant à ces fréquences doit être nettement plus grande que le diamètre $2a$ de la sphère, de façon à pouvoir définir une région dans laquelle on puisse admettre l'uniformité du champ [1]. Ainsi nos exemples porteront sur les diamètres de l'ordre de quelques microns qui sont utilisés dans la technique haute fréquence.

Remarquons qu'à l'extérieur de la sphère on a

$$\gamma = 0, \quad \mu = \mu_1, \quad \epsilon = \epsilon_1.$$

Donc

$$K = \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_1}, \quad \text{avec } c_1 = \frac{c}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}},$$

c_1 est la vitesse de la lumière dans le milieu extérieur.

Posons également

$$rh_\varphi \sin \theta = S.$$

L'équation (8) devient

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} + K^2 S = 0. \quad (10)$$

Suivant la méthode classique, remplaçons S par le produit des fonctions R_r et θ_θ qui ne dépendent chacune que de r ou que de θ et divisons tous les termes obtenus par $R_r \theta_\theta$. On obtient

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{\theta} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} - \frac{1}{\theta} \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{d\theta}{d\theta} + K^2 = 0. \quad (11)$$

Comme on sait, cette équation se décompose en deux équations qui sont

$$\frac{d^2 \theta}{d\theta^2} - \cot \theta \frac{d\theta}{d\theta} + L(L+1) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left(K^2 - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) R = 0. \quad (13)$$

Il est bien connu que la première équation n'a de solution régulière en θ que si

$$L = l(l+1) \quad (l = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Si L a l'une de ces valeurs, une discussion assez simple de cette équation montre que sa solution qui est liée aux polynômes associés de Legendre est

$$\theta_l^\theta = - \sin \theta P_l^1(\cos \theta). \quad (14)$$

La seconde équation

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left[K^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (15)$$

peut se transformer en posant

$$R = f(r)r^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad u = Kr$$

en une équation de Bessel

$$\frac{d^2 f}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{df}{du} + \left[1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2} \right] f = 0.$$

La seule solution de cette équation d'ordre $l + \frac{1}{2}$ qui reste régulière pour $r = 0$, est $J_{l+\frac{1}{2}}(Kr)$. La solution de l'équation (15) est donc

$$R = Mr^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(Kr) \quad (M \text{ étant une constante}).$$

La solution générale à l'intérieur de la sphère est donc

$$S_i = -Mr^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(Kr) \sin \theta P_l^1(\cos \theta), \quad (16)$$

avec

$$S = rh_{\varphi} \sin \theta.$$

A l'extérieur de la sphère, si l'on néglige le courant de déplacement, on a $K = 0$. Donc (15) devient

$$\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0,$$

qui admet pour solution

$$R = \beta_1 r^{l+1} + \frac{\beta_2}{r^l}.$$

A l'extérieur de la sphère, la solution générale est donc

$$S_e = -\left(\beta_1 r^{l+1} + \frac{\beta_2}{r^l}\right) \sin \theta P_l^1(\cos \theta), \quad (17)$$

avec

$$S = rh_{\varphi} \sin \theta.$$

Remarquons que la continuité de h_{φ} exige d'autre part la même valeur pour l dans (16) et (17).

Calcul de l et de β_1 . — A l'infini on doit trouver pour H_r et H_{θ} des valeurs indépendantes de r qui sont respectivement

$$H_r = H_0 \cos \theta \quad \text{et} \quad H_{\theta} = -H_0 \sin \theta. \quad (18)$$

Or (6) et (7) donnent, avec (17),

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{-1}{r^2 \sin \theta j \omega \mu_1} \frac{\partial S}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{j \omega \mu_1 \sin \theta} \left[\beta_1 r^{l+1} + \frac{\beta_2}{r^l} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta P_l^1(\cos \theta)], \\ H_{\theta} &= \frac{1}{r \sin \theta j \omega \mu_1} \frac{\partial S}{\partial r} \\ &= \frac{-P_l^1(\cos \theta)}{j \omega \mu_1} \left[(l+1) \beta_1 r^{l-1} - \frac{\beta_2}{r^{l+2}} \right]. \end{aligned}$$

Pour que H_r et H_{θ} soient indépendants de r à l'infini, il faut donc $l = 1$.

Dans ces conditions, comme $P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta$,

on en tire

$$S_e = \left(\beta_1 r^2 + \frac{\beta_2}{r} \right) \sin^2 \theta.$$

Enfin, avec $l = 1$ et par l'intermédiaire de la condition à l'infini (18), on déduit

$$\beta_1 = -\frac{H_0}{2} j \omega \mu_1.$$

On a donc finalement les solutions suivantes :

A l'intérieur de la sphère :

$$S_i = Mr^{\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(Kr) \sin^2 \theta.$$

A l'extérieur de la sphère :

$$S_e = \left(\beta_1 r^2 + \frac{\beta_2}{r} \right) \sin^2 \theta.$$

Avec

$$J_{\frac{3}{2}}(Kr) = \left(\frac{2Kr}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{Kr} \left[\frac{\sin Kr}{Kr} - \cos Kr \right],$$

on déduit finalement

$$S_i = M \sqrt{\frac{2}{\pi K}} \left[\frac{\sin Kr}{Kr} - \cos Kr \right] \sin^2 \theta, \quad (19)$$

$$S_e = \left(\beta_1 r^2 + \frac{\beta_2}{r} \right) \sin^2 \theta. \quad (20)$$

Calcul des champs. — Dans la sphère l'équation (19) nous donne

$$\begin{aligned} h_{\varphi} &= \frac{S_i}{r \sin \theta} = M \sqrt{\frac{2}{\pi K}} \frac{\sin \theta}{r} \left[\frac{\sin Kr}{Kr} - \cos Kr \right], \\ \text{Puis par (6) et (7)} \\ H_r &= \frac{2j}{\omega \mu_0} M \sqrt{\frac{2}{\pi K}} \frac{\cos \theta}{r^2} \left[\frac{\sin Kr}{Kr} - \cos Kr \right], \\ H_{\theta} &= \frac{-jM}{\omega \mu_0} \sqrt{\frac{2}{\pi K}} K \frac{\sin \theta}{r} \\ &\quad \times \left[\frac{\cos Kr}{Kr} + \sin Kr \left(1 - \frac{1}{K^2 r^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

A l'extérieur de la sphère des calculs identiques portant sur S_e donnent

$$\begin{aligned} h_{\varphi} &= \frac{S_e}{r \sin \theta} = \left(-\frac{H_0}{2} j \omega \mu_1 r + \frac{\beta_2}{r^2} \right) \sin \theta, \\ H_r &= H_0 \cos \theta + \frac{2j\beta_2}{\omega \mu_1 r^3} \cos \theta, \\ H_{\theta} &= -H_0 \sin \theta + \frac{j\beta_2}{\omega \mu_1 r^3} \sin \theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Posons dès maintenant

$$M \sqrt{\frac{2}{\pi K}} = NH_0 \quad \text{et} \quad \beta_2 = BH_0.$$

Déterminations des constantes N et B . —

L'expression de la continuité des composantes tangentielle h_φ et H_θ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère de rayon a fournit les deux équations suivantes :

Continuité de h_φ :

$$H_0 N (\sin Ka - Ka \cos Ka) = BH_0 K - j\mu_1 a^3 \omega \frac{KH_0}{2}.$$

$$N = -\frac{3}{2} j\mu_1 \omega a^3 K \frac{1}{K^2 a^2 \mu_1 \sin Ka + (\mu - \mu_1) [\sin Ka - Ka \cos Ka]}, \quad (23)$$

$$B = j\frac{\mu_1}{2} \omega a^3 \left\{ 1 - 3\mu \frac{\sin Ka - Ka \cos Ka}{K^2 a^2 \mu_1 \sin Ka + (\mu - \mu_1) [\sin Ka - Ka \cos Ka]} \right\}. \quad (24)$$

Utilisation des fonctions de Bessel d'ordre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$. — En partant des relations suivantes :

$$\sin Kr = \left(\frac{\pi Kr}{2} \right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(Kr),$$

$$\frac{\sin Kr}{Kr} - \cos Kr = \left(\frac{\pi Kr}{2} \right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(Kr),$$

$$\left(\frac{3}{K^2 r^2} - 1 \right) \sin Kr - \frac{3}{Kr} \cos Kr = \left(\frac{\pi Kr}{2} \right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{5}{2}}(Kr),$$

on obtient pour les composantes des champs intérieurs à la sphère

$$h_\varphi = -\frac{j\mu\omega}{2} H_0 \sin \theta T r^{\frac{1}{2}} \left[J_{\frac{1}{2}}(Kr) + J_{\frac{3}{2}}(Kr) \right], \quad (25)$$

$$H_r = H_0 T \cos \theta r^{-\frac{1}{2}} \left[J_{\frac{1}{2}}(Kr) + J_{\frac{3}{2}}(Kr) \right], \quad (26)$$

$$H_\theta = H_0 T \sin \theta r^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} J_{\frac{3}{2}}(Kr) - J_{\frac{1}{2}}(Kr) \right], \quad (27)$$

avec

$$T = \frac{jNK}{3\mu\omega} (2\pi K)^{\frac{1}{2}}.$$

Chaque fois que cela sera possible, nous supprimerons l'indice (Kr) ou (Ka) des fonctions J afin d'alléger l'écriture. Nous aurons donc pour T , N , B les valeurs suivantes :

$$T = \frac{3\mu_1 a^{\frac{1}{2}}}{(2\mu_1 + \mu) J_{\frac{1}{2}} + (\mu - \mu_1) J_{\frac{3}{2}}}, \quad (28)$$

$$N = -\frac{9j\mu_1 \omega a^{\frac{1}{2}}}{K(2\pi K)^{\frac{1}{2}} (2\mu_1 + \mu) J_{\frac{1}{2}} + (\mu - \mu_1) J_{\frac{3}{2}}}, \quad (29)$$

$$B = \frac{j\mu_1 \omega a^3}{2} \left[\frac{2(\mu_1 - \mu) J_{\frac{1}{2}} - (2\mu + \mu_1) J_{\frac{3}{2}}}{(2\mu_1 + \mu) J_{\frac{1}{2}} + (\mu - \mu_1) J_{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (30)$$

Remarquons dès maintenant que pour des valeurs de K très faibles on peut utiliser les développements en série de

$$J_{\frac{1}{2}}(Kr) \sim \left(\frac{2Kr}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{K^2 r^2}{6} \right),$$

$$J_{\frac{3}{2}}(Kr) \sim \left(\frac{2Kr}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{K^2 r^2}{6}.$$

Continuité de H_θ :

$$H_0 N [(K^2 a^2 - 1) \sin Ka + Ka \cos Ka] = -BH_0 K \frac{\mu}{\mu_1} - j\mu\omega Ka^3 H_0.$$

Ces deux équations sont suffisantes pour déterminer N et B . On trouve

Ce qui donne

$$T \sim \frac{3\mu_1}{(2\mu_1 + \mu) \left(\frac{2K}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$T \left[J_{\frac{1}{2}}(Kr) + J_{\frac{3}{2}}(Kr) \right] = \frac{3\mu_1 r^{\frac{1}{2}}}{2\mu_1 + \mu}.$$

D'où

$$H_r = \frac{3\mu_1}{2\mu_1 + \mu} \cos \theta H_0,$$

$$H_\theta = \frac{3\mu_1}{2\mu_1 + \mu} \sin \theta H_0,$$

$$h_\varphi = -\frac{j\mu\omega}{2} \frac{3\mu_1}{2\mu_1 + \mu} r \sin \theta H_0.$$

La composante H_z parallèle à Oz a donc pour valeur

$$H_z = -H_\theta \sin \theta + H_r \cos \theta = \frac{3\mu_1}{2\mu_1 + \mu} H_0.$$

Pour $\mu_1 = 1$ l'induction vaut donc

$$B_z = \frac{3\mu}{\mu + 2} H_0.$$

Nous retrouvons bien un résultat classique concernant l'action d'un champ magnétique constant sur une sphère isolée de perméabilité μ .

Calcul de l'aimantation. — Appelons H_z la résultante suivant Oz des champs H_r et H_θ

$$H_z = -H_\theta \sin \theta + H_r \cos \theta = H_0 T r^{-\frac{1}{2}} \left\{ J_{\frac{3}{2}}(Kr) \left[\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right] + J_{\frac{1}{2}}(Kr) \right\}.$$

L'aimantation correspondante suivant Oz est par unité de volume

$$dI = \frac{\mu - 1}{4\pi} H_z dv.$$

L'aimantation pour toute la sphère de rayon a est donc

$$I = H_0 T \frac{(\mu - 1)}{4\pi} \times \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{-\frac{1}{2}} \left\{ J_{\frac{3}{2}}(Kr) \left[1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right] + J_{\frac{1}{2}}(Kr) \right\} \times r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

soit

$$I = H_0 T(\mu - 1) \left[\int_0^a r^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(Kr) dr - \frac{3}{K} \int_0^a r^{\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(Kr) dr \right],$$

qui, en tenant compte de la relation

$$J_{\frac{3}{2}}(Kr) = \frac{Kr}{3} \left[J_{\frac{1}{2}}(Kr) + J_{\frac{5}{2}}(Kr) \right]$$

donne sans difficultés

$$I = H_0 \frac{T}{K} (\mu - 1) a^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(Ka),$$

En posant

$$\alpha = \frac{T}{K} (\mu - 1) a^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(Ka), \quad (31)$$

on aura donc

$$I = \alpha H_0,$$

le coefficient α caractérisant à la fréquence considérée le degré d'aimantation que la sphère est susceptible d'acquies.

Application. — Considérons un milieu isolant de perméabilité unité dans lequel sont noyées un grand nombre de granules ou particules sphériques semblables à la sphère déjà étudiée. Leur densité de répartition est supposée constante et leur diamètre identique pourra être compris entre une fraction de micron et quelques dizaines de microns.

Il est bien évident que si les distances mutuelles des particules sont extrêmement grandes, l'aimantation totale est la somme des aimantations individuelles.

Le problème est différent, si, les distances sont petites. Il faut alors tenir compte des influences qu'exercent sur la particule étudiée toutes les autres particules de la substance qui sont, elles aussi, polarisées.

Or, le champ réel dit efficace F qui agit sur une particule est celui qui existerait en ce lieu si l'on supposait que cette particule en fut enlevée sans troubler l'état des autres particules. Si nous considérons l'ensemble de la substance, hors de la particule, comme *aimantée d'une façon homogène* \mathcal{J} , ce qui n'est qu'une première approximation, puisque les particules sont en nombre fini quoique très grand; la quantité de matière extérieure à la particule sphérique agit comme si sa superficie portait une charge de densité $-\mathcal{J}_n$ (n normale extérieure).

Un calcul classique donne pour le champ engendré à l'intérieur de la sphère par une telle distribution $\frac{4\pi}{3} \mathcal{J}$, le coefficient $\frac{4\pi}{3}$ est le coefficient de Lorentz.

Nous admettons donc comme valable pour notre cas le raisonnement utilisé pour Becker sur les diélectriques : aussi longtemps qu'on peut assimiler

les effets mutuels des particules à ceux de dipôles ponctuels, le champ efficace qui agit sur une particule individuelle est donné par

$$F = H_0 + \frac{4\pi}{3} \mathcal{J} \quad (1).$$

Tant que la répartition des champs ne sera pas perturbée par des contacts entre particules résultant d'une densité de répartition trop élevée, cette hypothèse sera d'autant plus justifiée que le diamètre des particules sera plus faible et leur nombre par unité de volume plus grand.

Calcul de la perméabilité apparente et des facteurs de qualité et de réduction de flux. —

Appelons N le nombre de particules par centimètre cube, a leur rayon, τ le volume total qu'elles occupent dans 1 cm³. On a

$$\mathcal{J} = NI = \frac{3\tau}{4\pi a^3} I \quad (\tau \text{ varie de } 0 \text{ à } 1).$$

D'après le raisonnement précédent, nous considérerons F au lieu de H_0 . Donc

$$I = \alpha F \quad \text{et} \quad \mathcal{J} = N\alpha F = \frac{3\tau\alpha}{4\pi a^3} \left[H_0 + \frac{4\pi}{3} \mathcal{J} \right].$$

D'où

$$\mathcal{J} = H_0 \frac{3\tau\alpha}{4\pi a^3 \left(1 - \frac{\tau\alpha}{a^3} \right)}.$$

L'induction apparente est donc

$$B_{ap} = H_0 + 4\pi \mathcal{J} = H_0 \left(1 + \frac{3\tau\alpha}{a^3 - \tau\alpha} \right).$$

Et la perméabilité apparente

$$\mu_a = \frac{B_{ap}}{H_0} = \frac{a^3 + 3\tau\alpha}{a^3 - \tau\alpha}.$$

Remplaçons α par sa valeur tirée de (28) et (31) en remarquant que

$$J_{\frac{3}{2}}(Ka) = \frac{Ka}{3} \left[J_{\frac{1}{2}}(Ka) + J_{\frac{5}{2}}(Ka) \right].$$

En supprimant l'indice (Ka) pour alléger l'écriture on déduit

$$\mu_a = \frac{[\mu + 2 + 2\tau(\mu - 1)]J_{\frac{1}{2}} + (\mu - 1)(1 + 2\tau)J_{\frac{3}{2}}}{[\mu + 2 - \tau(\mu - 1)]J_{\frac{1}{2}} + (\mu - 1)(1 - \tau)J_{\frac{3}{2}}}. \quad (32)$$

Nous pouvons dès maintenant remarquer que pour de très faibles valeurs de Ka (basse fréquence) les développements en série limités au second ordre des fonctions $J_{\frac{1}{2}}(Ka)$ et $J_{\frac{3}{2}}(Ka)$ donnent pour la

(1) \mathcal{J} est l'aimantation présente dans la matière. Cette formule s'applique rigoureusement pour le réseau régulier et en moyenne pour des corps amorphes dans le cas des diélectriques (8).



perméabilité apparente la valeur

$$\mu_a = \frac{3 + (\mu - 1)(2\tau + 1)}{3 + (\mu - 1)(1 - \tau)}. \quad (33)$$

Elle est indépendante de Ka .

En particulier, si $\tau = 1$ on retrouve bien $\mu_a = \mu$ et si $\tau = 0$ on a $\mu_a = 1$. Si μ est très grand avec $\tau \neq 1$, μ_a tend vers

$$\mu_a = \frac{2\tau + 1}{\tau - 1}.$$

Si Ka n'est pas petit, μ_a présente une partie réelle et une partie imaginaire.

Posons

$$s = \sqrt{2\pi\mu\omega\gamma} a \quad (\text{ce qui revient à écrire } Ka = s\sqrt{2}).$$

On a

$$J_{\frac{1}{2}}(Ka) = \left[\frac{\sqrt{2j}}{\pi s} \right]^{\frac{1}{2}} [\sin s \cosh s - j \cos s \sinh s],$$

$$J_{\frac{3}{2}}(Ka) = \left[\frac{\sqrt{2j}}{\pi s} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3j}{2s^2} - 1 \right) [\sin s \cosh s - j \cos s \sinh s]$$

$$- \frac{3}{2s} (1 + j) [\cos s \cosh s + j \sin s \sinh s].$$

En transportant ces valeurs dans l'expression générale de μ_a et en séparant les parties réelle et imaginaire on aboutit après un long calcul aux expressions suivantes :

$$\mu_r = \frac{\left\{ (\mu - 1)^2 (1 - \tau) (1 + 2\tau) [1 + 2s^2 R - 2sP] \right\} + 4s^4 + 2s^2(\mu - 1)(2 + \tau)Q}{\left\{ (\mu - 1)^2 (1 - \tau)^2 [1 + 2s^2 R - 2sP] \right\} + 4s^4 + 4s^2(\mu - 1)(1 - \tau)Q}, \quad (34)$$

$$\mu_i = 3\tau(\mu - 1)s^2 \frac{1 - sP}{\left\{ (\mu - 1)^2 (1 - \tau)^2 [1 + 2s^2 R - 2sP] \right\} + 4s^4 + 2s^2(\mu - 1)(1 - \tau)Q}, \quad (35)$$

expressions dans lesquelles on a posé

$$P = \frac{\sinh 2s + \sin 2s}{\cosh 2s - \cos 2s},$$

$$Q = \frac{\sinh 2s - \sin 2s}{\cosh 2s - \cos 2s},$$

$$R = \frac{\cosh 2s + \cos 2s}{\cosh 2s - \cos 2s}.$$

Les trois fonctions P , Q , R tendent chacune vers l'unité dès que la variable s est supérieure à quelques unités (pratiquement à partir de $2s = 4$).

Les formules (34) et (35) permettent déjà d'observer que pour des valeurs de s supérieures à quelques unités, si μ est grand et $\tau = 1$ (remplissage complet), μ_a varie comme $\sqrt{\mu}$, ce qui est bien conforme aux résultats connus concernant le cylindre plein [1].

Si $\tau \neq 1$ pour les grandes valeurs de μ , la perméabilité μ_i tend vers zéro, mais μ_r tend vers $\frac{1 + 2\tau}{1 - \tau}$.

Ce résultat est tout à fait de l'ordre de grandeur des perméabilités apparentes observées dans la pratique. Ainsi pour $\tau = \frac{1}{2}$, on a $\mu_a = 4$ et pour $\tau = \frac{3}{4}$ on a $\mu_a = 10$. Ce sont là des valeurs courantes.

Sur les formules donnant μ_r et μ_i on peut également constater :

1° Que pour $\tau = 0$ ($\mu \neq 1$) quel que soit s : $\mu_r = 1$ et $\mu_i = 0$.

Il en est de même si $\mu = 1$ ($\tau \neq 1$).

2° Que pour $0 \leq \tau \leq 1$, lorsque s croît, μ_r tend vers 1 et μ_i tend vers zéro.

Nous mettons ainsi en évidence un résultat important.

Lorsque la fréquence augmente ($s = \sqrt{2\pi\mu\omega\gamma} a$), la perméabilité apparente tend vers l'unité.

Dans les mêmes conditions, nous avons vu [1] que la perméabilité apparente tend vers zéro pour le tube ou le cylindre plein.

Les expressions (33) et (34) permettent d'évaluer les caractéristiques fondamentales d'une bobine dont le « noyau » est constitué par une poudre magnétique noyée dans un isolant.

Ce sont :

1° Le facteur de réduction de flux : $\eta = \frac{\mu_r}{\mu_a}$ qui est le rapport du flux inductif appliqué à un flux de même amplitude, mais de basse fréquence. C'est aussi le facteur de réduction de la perméabilité apparente.

On a

$$\eta = \frac{\mu_r}{\mu_a} = \frac{3 + (\mu - 1)(1 - \tau)}{3 + (\mu - 1)(1 + 2\tau)} \times \frac{\left\{ (\mu - 1)^2 (1 - \tau) (1 + 2\tau) [1 + 2s^2 R - 2sP] \right\} + 4s^4 + 2s^2(\mu - 1)(2 + \tau)Q}{\left\{ (\mu - 1)^2 (1 - \tau)^2 [1 + 2s^2 R - 2sP] \right\} + 4s^4 + 4s^2(\mu - 1)(1 - \tau)Q}. \quad (36)$$

Les développements en série de P , Q , R (jusqu'à la puissance 4) montrent que pour les faibles valeurs de s , η est très voisin de l'unité.

Le facteur de réduction η ne commence à décroître que pour des valeurs de s beaucoup plus élevées que dans le cas du cylindre. D'ailleurs la limite de η pour les grandes valeurs de s dépend uniquement de μ et τ . Ainsi pour $\tau = \frac{1}{2}$, $\eta \rightarrow \frac{\mu + 5}{2\mu + 4}$ et vaut $\frac{1}{2}$ pour les grandes valeurs de μ ($\eta = 1$ si $\mu = 1$). Pour $\tau = 0$, $\eta \rightarrow 1$ et enfin pour τ très voisin de 1, $\eta \rightarrow \frac{1}{\mu}$ (zéro si μ est grand).

Ces résultats indiquent une différence profonde avec le cas du cylindre plein ou creux. Essentiellement elle est due à ce que la perméabilité μ intervient de façon différente (contrairement à ω et γ)

dans les équations des champs qui concernent le cylindre indéfini et la sphère.

2° Le facteur de qualité

$$Q_F = \frac{L\omega}{R_1} = -\frac{\mu_r}{\mu_i}$$

$L\omega$ et R_1 sont l'inductance et la résistance de pertes par courants de Foucault [1]

$$Q_F = -\frac{\mu_r}{\mu_i} = \frac{\{(\mu-1)^2(1-\tau)(1+2\tau)[1+2s^2R-2sP]\}}{3\tau(\mu-1)s^2(sP-1)} \quad (37)$$

L'étude de cette expression montre que Q_F , très grand pour de faibles valeurs de s , décroît lorsque s augmente, passe par un minimum aux environs de

$$s_m = \frac{\mu-1}{\sqrt{2}} [(1-\tau)(1+2\tau)]^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

ou en posant $d = 2a$,

$$\mu\omega d^2 = \frac{(\mu-1)^2}{\pi\gamma} (1-\tau)(1+2\tau). \quad (39)$$

(*) La dérivée de Q_F a quatre racines positives ce qui, conduit à deux maxima et deux minima. Mais seul le premier minima est à considérer. Au delà du second Q_F croît comme s .

Le facteur de qualité reste donc important jusqu'à des fréquences d'autant plus élevées que le diamètre des particules est plus faible. Les grandeurs μ , ω , γ , τ étant fixées, il y aura donc intérêt à utiliser des particules de diamètre nettement inférieur à celui qui est donné par l'égalité (39).

En fait la fréquence correspondant au minimum se trouve en général au-dessus du domaine des fréquences d'utilisation.

Suivant les usages auxquels on destine les noyaux, le diamètre des « particules » ou « grains » varie aux environs de 2μ à 30μ . Ainsi la poudre de fer de 20μ est utilisée pour des noyaux toriques jusqu'à 100 kc. Celle de 3μ est utilisée en très haute fréquence jusqu'à 10 Mc (*). Mais la pratique montre bien que quelque soit la grosseur du grain, le facteur de qualité diminue rapidement au-dessus d'une certaine fréquence. Ceci est bien conforme à nos calculs et justifie nos approximations.

Tous les calculs de cet exposé sont en très bon accord avec l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus dans la technique des poudres.

(*) La valeur de Q_F ne concerne que les pertes par courants de Foucault. Le facteur de qualité total doit tenir compte en plus des pertes hystérétiques et des pertes résiduelles. Pour les ferrites, ce sont ces dernières les plus importantes. Mais il apparaît qu'on ne peut les réduire qu'aux dépens de la perméabilité [10].

Manuscrit reçu le 26 janvier 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] COLOMBANI A. — Étude sur les courants de Foucault. (*J. Phys.*, 1948, 1, 273.)
- [2] THOMSON J. J. Recent Researches.
- [3] BROGLIE L. DE. — Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques (Gauthier-Villars).
- [4] JOUGUET M. — Courants de Foucault et fours à induction (Gauthier-Villars).
- [5] JAHNKE E. et EMDEN F. — Funktionentafeln mit Formeln und Kurven.
- [6] SLATER J. C. et FRANK N. — Electromagnetism (Mac Graw Hill Book).
- [7] WATSON G. N. — Bessel functions, (Cambridge university Press).
- [8] BECKER. — Théorie des électrons (Alcan).
- [9] Congrès Solvay du Magnétisme 1932 (Gauthier-Villars)
- [10] SNOEK J. L. — Substances magnétiques non métalliques pour hautes fréquences. (*Revue technique Philips*, décembre 1946.)
- [11] SHEA H. C. — Magnetic Powders. (*Electronic industries*, août 1945.)
- [12] POLYDOROFF W. J. — Permeability tuning, (*Electronics* novembre 1945.)



