

Conditions d'utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- Le Conservatoire numérique communément appelé le Cnum constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n° 78-753 du 17 juillet 1978 :

- la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue ([Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - https://cnum.cnam.fr](https://cnum.cnam.fr))
- la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- les reproductions de documents protégés par le droit d'auteur, uniquement consultables dans l'enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

4- Pour obtenir la reproduction numérique d'un document du Cnum en haute définition, contacter [cnum\(at\)cnam.fr](mailto:cnum(at)cnam.fr)

5- L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment possible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d'utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

NOTICE DE LA REVUE	
Auteur(s) ou collectivité(s)	Laboratoire d'essais mécaniques physiques chimiques et de machines du Conservatoire national des Arts et Métiers
Auteur(s)	Laboratoire d'essais mécaniques physiques chimiques et de machines du Conservatoire national des Arts et Métiers
Titre	Publication : Laboratoire d'essais
Adresse	Paris : Conservatoire national des arts et métiers, 193.-195.
Nombre de volumes	125
Cote	CNAM-BIB P 1329-B et P 1329-C
Sujet(s)	Conservatoire national des arts et métiers (France) Génie industriel -- 20e siècle
Note	La collection comporte des lacunes : n°24; n°58; n°63; n°67; n°76-n°77
Notice complète	https://www.sudoc.abes.fr/cbs//DB=2.1/SET=17/TTL=3/REL ?PPN=261820893&RELTYP=NT
Permalien	https://cnum.cnam.fr/redir?P1329-B_P1329-C
LISTE DES VOLUMES	
	N°25 (1936)
	N°26 (1937)
	N°27 (1937)
	N°28 (1937)
	N°29 (1938)
	N°30 (1939)
	N°31 (1936)
	N°32 (1938)
	N°33 (1938)
	N°34 (1938)
	N°35 (1938)
	N°36 (1938)
	N°37 (1938)
	N°38 (1938)
	N°39 (1938)
	N°40 (1939)
	N°41 (1939)
	N°42 (1939)
	N°43 (1939)
	N°44 (1939)
	N°45 (1938)
	N°46 (1940)
	N°47 (1940)
	N°48 (1940)
	N°49 (1940)
	N°50 (1940)
	N°51 (1941)
	N°52 (1941)
	N°53 (1941)
	N°54 (1941)
	N°55 (1942)
	N°56 (1942)
	N°57 (1942)
	N°59 (1942)

	N°60 (1941)
	N°61 (1942)
	N°62 (1943)
	N°64 (1943)
	N°65 (1943)
	N°66 (1943)
	N°68 (1943)
	N°69 (1943)
	N°70 (1943)
	N°71 (1943)
	N°72 (1944)
	N°73 (1943)
	N°74 (1944)
	N°75 (1944)
	N°78 (1944)
	N°79 (1944)
	N°80 (1944)
	N°81 (1944)
	N°82 (1944)
	N°83 (1944)
	N°84 (1944)
	N°85 (1944)
	N°86 (1945)
	N°87 (1945)
	N°88 (1945)
	N°89 (1945)
	N°90 (1945)
	N°91 (1945)
	N°92 (1945)
	N°93 (1945)
	N°94 (1945)
	N°95 (1946)
	N°96 (1946)
	N°97 (1946)
	N°98 (1944)
	N°99 (1945)
	N°100 (1945)
	N°101 (1946)
	N°102 (1946)
	N°103 (1946)
	N°104 (1946)
	N°105 (1946)
	N°106 (1946)
	N°107 (1947)
	N°108 (1947)
	N°109 (1947)
	N°110 et 111 (1947)
	N° 112 (1947)
	N° 113 (1947)
	N° 114 (1947)
	N° 115 (1947)
	N° 116 (1947)
	N° 117 (1947)
VOLUME TÉLÉCHARGÉ	N° 118 (1948)
	N° 119 (1948)
	N° 120 (1948)
	N° 121 (1948)
	N° 122 (1947)

	N° 123 (1948)
	N° 124 (1948)
	N° 125 (1948)
	N° 126 (1948)
	N° 127 (1948)
	N° 128 (1948)
	N° 129 (1948)
	N° 130 (1949)
	N° 131 (1949)
	N° 132 (1949)
	N° 133 (1948)
	N° 134 (1949)
	N° 135 (1948)
	N° 136 (1949)
	N° 137 (1950)
	N° 138 (1950)
	N° 139 (1950)
	N° 140 (1950)
	N° 141 (1950)
	N° 142 (1948)
	N° 143 (1950)
	N° 144 (1950)
	N° 145 (1951)
	N° 146 (1951)
	N° 147 (1951)
	N° 148 (1951)
	N° 149 (1951)
	N° 150 (1951)
	N° 151 (1951)
	N° 152 (1951)
	N° 153 (1952)
	N° 154 (1952)
	N° 155 (1952)

NOTICE DU VOLUME TÉLÉCHARGÉ	
Auteur(s) volume	Laboratoire d'essais mécaniques physiques chimiques et de machines du Conservatoire national des Arts et Métiers
Titre	Publication : Laboratoire d'essais
Volume	N° 118 (1948)
Adresse	Paris : Conservatoire national des arts et métiers, 1948
Collation	1 vol. (p. [275-284]) : ill. ; 27 cm
Nombre de vues	16
Cote	CNAM-BIB P 1329-C (26)
Sujet(s)	Conservatoire national des arts et métiers (France) Génie industriel -- 20e siècle
Thématique(s)	Histoire du Cnam
Typologie	Revue
Langue	Anglais Français
Date de mise en ligne	10/04/2025
Date de génération du PDF	07/02/2026
Recherche plein texte	Disponible
Notice complète	https://www.sudoc.fr/039014541
Permalien	https://cnum.cnam.fr/redir?P1329-C.26

Note de présentation du

...

8^e Rue lot

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
LABORATOIRE D'ESSAIS



BULLETIN
DU
LABORATOIRE D'ESSAIS

1948 - N° 27

PUBLICATION N° 118
(Voir le sommaire au verso)

SOMMAIRE

R. CABARAT — Contribution à la détermination des constantes
élastiques des matériaux par un procédé acoustique . . .
(à suivre)

BULLETIN DU LABORATOIRE D'ESSAIS DU CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS & MÉTIERS



CONTRIBUTION A LA DÉTERMINATION DES CONSTANTES ÉLASTIQUES DES MATERIAUX PAR UN PROCÉDÉ ACOUSTIQUE.

Le module d'élasticité E et le module de torsion φ de la plupart des substances solides peuvent être mesurés en déterminant la fréquence propre pour la vibration longitudinale et pour la vibration de torsion des éprouvettes.

Basé sur un procédé électrostatique pour l'entretien des vibrations dans les verges, le montage que nous avons utilisé convient bien pour produire soit des vibrations longitudinales, soit des vibrations de torsion, et mesurer avec une grande précision dans les deux cas la fréquence propre d'une éprouvette cylindrique. On opère sur des éprouvettes d'une longueur de l'ordre de 250 mm et d'un diamètre de 10 mm.

Les substances étudiées peuvent être aussi bien isolantes que conductrices.

Pour les aciers au nickel nous avons utilisé, pour produire des oscillations de torsion, l'effet WIEDEMANN qui est un cas particulier de magnétostriction.

Ce procédé électrostatique permet, en vibrations forcées, de relever commodément la courbe de résonance de l'éprouvette étudiée, et, en oscillations libres, d'enregistrer, à l'oscillographie, après détection, la courbe enveloppe de décroissance exponentielle de l'amplitude en fonction du temps. Ces deux courbes permettent de calculer le décrément logarithmique des vibrations qui caractérise le frottement interne de la substance étudiée. Pour relever ces courbes avec précision, nous avons dû résoudre deux difficultés expérimentales : avoir une amplification linéaire et réaliser un oscillateur très stable.

Nous avons fait la théorie simplifiée des vibrations longitudinales d'une barre avec amortissement.

Nous avons appliqué ce procédé à la mesure du module d'élasticité de différentes substances conductrices et isolantes.

La variation du module d'élasticité des ferro-nickels réversibles, en fonction de la température, a été étudiée par cette méthode. La mesure du module de rigidité de ces alliages nous a permis de calculer, pour la température ambiante, le coefficient de POISSON en fonction de la teneur en nickel.

Sur l'Invar nous avons étudié la variation du module d'élasticité en fonction de l'aimantation.

Enfin des mesures de frottement interne sur des ferro-nickels réversibles terminent ce travail, et ces différentes applications montrent les possibilités du dispositif étudié.

La précision des mesures atteinte est de l'ordre de $\pm 0,1\%$.

INTRODUCTION

Récemment, de nombreuses méthodes basées sur des procédés dynamiques ont permis le calcul de constantes élastiques des matériaux à partir des fréquences propres d'éprouvettes en vibrations longitudinales ou tournantes.

Dans les travaux de COOKE [1] et BROWN, en Amérique, et de NAKAMURA [2] au Japon, les procédés utilisés pour faire vibrer les éprouvettes à leur fréquence propre sont le plus souvent magnétiques ou piézo-électriques.

Ces méthodes, bien que relativement précises, sont difficilement utilisables si l'on veut étudier les variations des constantes élastiques des matériaux et le frottement interne en fonction de la température et de l'aimantation.

Le procédé électrostatique que nous avons utilisé permet ces mesures. Pour la commodité de notre exposé, nous le divisons en cinq chapitres :

- 1° Généralités; description de la méthode;
- 2° Etude théorique des vibrations longitudinales d'une barre avec amortissement;
- 3° Description des appareils;

4° Application à la mesure des constantes élastiques de différents matériaux;

5° Applications diverses.

Ce travail a été exécuté, de 1942 à 1947, au Laboratoire d'Essais du Conservatoire National des Arts et Métiers, sous la direction de M. BOUTRY.

Nous tenons à exprimer à M. BOUTRY, directeur du Laboratoire d'Essais, professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers, notre profonde reconnaissance pour la confiance qu'il nous a témoignée et les moyens matériels qu'il a mis à notre disposition en nous faisant profiter des grandes possibilités de travail qu'offre le Laboratoire d'Essais.

Nous remercions aussi bien vivement M. LE BLAN, chef de la Section de Physique au Laboratoire d'Essais, pour ses conseils judicieux, et qui a, par son esprit critique, facilité notre tâche.

Qu'il nous soit permis également de remercier ici M. SALMON, chef d'atelier du Laboratoire d'Essais, et ses ouvriers qui ont, grâce à leur compétence et leur dévouement, aplani toutes les difficultés de construction des appareils utilisés dans ce travail.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS

On sait que le module d'élasticité E d'une éprouvette se calcule d'après la mesure de l'allongement qui correspond à un effort de traction F.

E, module d'élasticité statique, est donné par la formule :

$$E = \frac{F}{S} \cdot \frac{L_0}{L - L_0}$$

dans laquelle :

S est la section de l'éprouvette;

L_0 sa longueur initiale;

$L - L_0$ l'allongement élastique produit par l'effort F.

Cette définition n'est valable que si l'éprouvette ne subit pas de déformation permanente. Il est donc indispensable que :

$$\frac{L - L_0}{L_0} \text{ soit très petit,}$$

Comme la méthode statique ordinaire permet difficilement de satisfaire à cette condition tout en garantissant une grande précision, il est préférable d'utiliser la méthode dynamique, déjà préconisée par KUNDT en 1865.

Dans la méthode dynamique, le module d'élasticité E d'une éprouvette fixée en son milieu est lié à la fréquence propre par la relation :

$$E = (2NL)^2 \Delta$$

Δ est la densité du matériau;

[1] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie finale.

N, la fréquence propre de l'éprouvette en vibration longitudinale;

L, la longueur de l'éprouvette.

Dans cette formule, il n'est pas tenu compte du fait que l'éprouvette en vibration longitudinale se dilate et se contracte alternativement suivant son rayon. Pour une éprouvette cylindrique, le calcul montre [3] que si on tient compte des variations de section, la densité devient légèrement plus grande :

$$\Delta_1 = \Delta \left(1 + \frac{2\pi^2 \sigma^2 r^2}{\lambda^2} \right)$$

où σ est le coefficient de POISSON;

r le rayon de l'éprouvette;

λ la longueur d'onde de la vibration stationnaire dans la barre.

le résultat de la théorie rigoureuse donne :

$$E = (2NL)^2 \Delta \left(1 + \frac{2\pi^2 \sigma^2 r^2}{\lambda^2} \right)$$

Dans nos mesures, la quantité $\frac{2\pi^2 \sigma^2 r^2}{\lambda^2}$ est négligeable parce que la longueur d'onde λ est généralement très grande par rapport au diamètre de l'éprouvette.

La formule pratique devient :

$$E = (2NL)^2 \Delta$$

Il suffit donc, pour connaître le module d'élasticité E, de mesurer avec précision la longueur et la densité de l'éprouvette, puis de déterminer la fréquence propre de l'éprouvette en vibration longitudinale.

Une autre constante élastique est le module de

torsion ou coefficient de rigidité μ . Nous le définissons simplement à l'aide de la figure 1 dans laquelle ABCD est la section d'un cube égal à l'unité, la base étant appliquée sur un plan horizontal. Sur la face supérieure agit tangentiellement et parallèlement à l'arête BC, une force F.

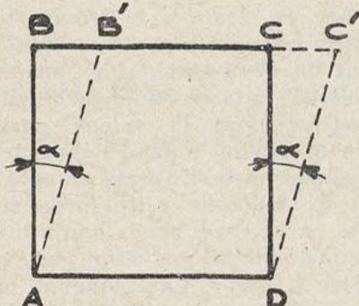


Fig. 1

Il en résulte un glissement des lamelles qui constituent le cube et la force F est équilibrée par les réactions élastiques qui se produisent. La section ABCD devient un losange AB'C'D. La déformation est caractérisée par l'angle $BAB' = \alpha$; on a :

$$\alpha = \frac{BB'}{AB} \text{ radian.}$$

Le module de torsion μ est défini par le rapport $\frac{F}{\alpha}$. Si la mesure de la fréquence propre de la barre en vibration longitudinale permet de calculer le module d'élasticité, de même la connaissance de sa fréquence propre en vibration de torsion permet de déterminer le module de rigidité μ . La vitesse de propagation de ces vibrations est :

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mu}{\Delta}}$$

Dans le cas d'une éprouvette cylindrique prise en son milieu, on a :

$$\lambda = 2L = \frac{\Omega}{N_t} = \frac{1}{N_t} \sqrt{\frac{\mu}{\Delta}}$$

N_t étant la fréquence propre de l'éprouvette en oscillation de torsion, d'où :

$$\mu = (2N_t L)^2 \Delta$$

Pour une substance isotrope homogène, la connaissance de E et de μ permet de calculer le coefficient de POISSON (c'est-à-dire le rapport de la contraction transversale relative à l'allongement relatif produit par la traction sur une éprouvette).

On a :

$$\sigma = \frac{E}{2\mu} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{N_t} \right)^2 - 1.$$

Description de la méthode.

En 1941, Pierre GRIVET a décrit une expérience où les vibrations d'un diapason sont entretenues par une action électrostatique [4].

Basé sur ce procédé d'entretien, le montage que nous avons utilisé [5] dans ce travail convient parfaitement pour produire soit des vibrations longitudinales, soit des vibrations de torsion, et mesurer avec une grande précision dans les deux cas la fréquence propre d'une éprouvette cylindrique.

Nous avons opéré sur des éprouvettes d'une longueur de l'ordre de 200 à 250 mm et d'un diamètre de 8 à 12 mm.

La figure 2 indique le montage que nous avons utilisé pour la production de vibrations longitudinales dans l'éprouvette.

L'éprouvette cylindrique est fixée en son milieu par trois aiguilles d'acier trempé qui la maintiennent verticalement entre deux électrodes ajustables A et B.

L'électrode A reçoit la torsion amplifiée d'un générateur hétérodyne basse fréquence et exerce une attraction électrostatique périodique sur l'éprouvette, produisant dans celle-ci des vibrations longitudinales. L'autre, B, sert de microphone électrostatique. Les tensions produites par

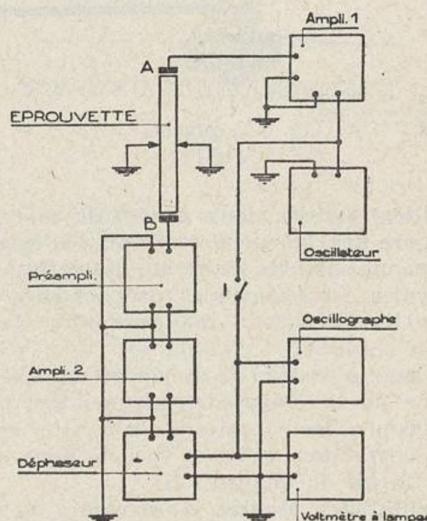


Fig. 2

le déplacement de l'éprouvette sont enregistrées après amplification sur un oscilloscope cathodique. L'éprouvette doit être au potentiel du sol. L'amplitude des vibrations n'est notable que si la fréquence des vibrations électriques est égale à la fréquence propre de l'éprouvette. En faisant varier la fréquence de la tension appliquée entre l'électrode A et la terre par l'action du condensateur variable du générateur, on atteint la résonance : l'amplitude des vibrations enregistrées sur l'oscilloscope passe alors par un maximum. La fréquence lue sur le cadran du générateur basse fréquence est donc bien égale à la fréquence propre de l'éprouvette qui vibre longitudinalement.

Pour la détermination des vibrations propres de torsion, nous avons apporté les modifications indiquées par la figure 3. Une petite plaque conductrice est collée ou soudée suivant un diamètre à chaque extrémité de l'éprouvette.

Deux électrodes ajustables E_1 et E_2 (fig. 4) en

regard des plaques P_1 et P_2 jouent le rôle des électrodes A et B du montage précédent. Pour la détermination de la fréquence propre de torsion, nous avons dû prendre certaines précautions, car en plus des vibrations de torsion, il peut se produire des vibrations transversales; pour diminuer l'importance de ces dernières, il est nécessaire de souder les plaques P_1 et P_2 à angle droit.

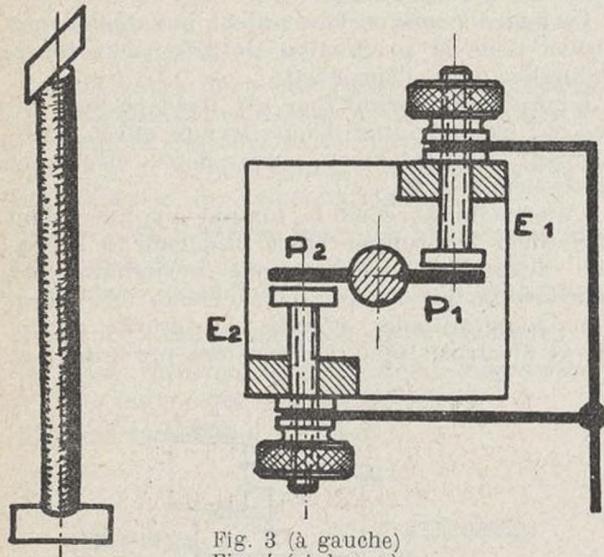


Fig. 3 (à gauche)
Fig. 4 (ci-dessus)

Pour identifier les deux genres de vibrations, on compare les fréquences propres d'éprouvettes de même nature mais de diamètres différents. Seules les fréquences propres des vibrations de torsions sont indépendantes du diamètre.

Nous avons vérifié expérimentalement que l'influence de la masse des plaques sur la fréquence propre des vibrations de torsion est faible et la correction qu'il y a lieu de faire est indiquée à la fin du chapitre II.

Si la substance étudiée est isolante, on la recouvre d'un enduit conducteur (argenture chimique, aluminure par évaporation, etc...) d'épaisseur assez faible pour ne pas modifier les phénomènes de façon appréciable.

Pour les matériaux ferromagnétiques, tels que les alliages fer-nickel qui ont été étudiés dans ce travail, nous avons utilisé, pour produire des oscillations de torsion, le phénomène de WIEDEMANN [6] qui est un cas particulier de magnétostriction.

Ce phénomène se résume ainsi :

1° Si l'on fait passer un courant dans un fil, aimanté longitudinalement au moyen d'une bobine qui l'entoure, on constate que le fil se tord;

2° Réciproquement, si l'on tord un fil de fer aimanté longitudinalement, on produit une force électro-motrice dans le fil.

La figure 5 indique le montage utilisé. L'éprouvette cylindrique est fixée en son milieu comme précédemment par trois aiguilles d'acier trempé qui la maintiennent verticalement suivant l'axe d'une bobine S, alimentée par une source de courant continu. L'électrode A, reliée à l'amplificateur A_1 , est en contact avec l'extrémité supérieure de la barre à étudier par l'in-

termédiaire d'un petit ressort R_1 terminé en pointe. L'amplificateur A_1 amplifie la tension produite par le générateur hétérodyne basse fréquence. Le courant de sortie de l'amplificateur circule dans la moitié supérieure de l'éprouvette et provoque dans celle-ci des oscillations de torsion. Ces oscillations ne sont notables que si leur fréquence est égale à la fréquence propre de l'éprouvette en vibration de torsion. L'éprouvette vibrant en demi-onde, il se produit, entre l'extrémité B et la terre, une force électromotrice alternative dont la valeur passe également par un maximum, quand l'éprouvette vibre à sa fréquence propre. Un ressort en cuivre R_2 identique à R_1 recueille cette force électromotrice qui est enregistrée après amplification sur un oscilloscope cathodique, et mesurée à l'aide d'un voltmètre à lampe. La fréquence propre de torsion est lue sur le cadran de l'oscillateur basse fréquence pour la valeur maximum de la force électromotrice induite.

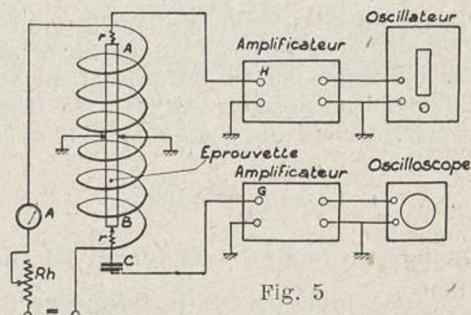


Fig. 5

Dans ce dispositif la pression des ressorts est très faible, et la résistance mécanique offerte par les électrodes aux oscillations de torsion est négligeable, d'autant plus que les efforts sont dirigés suivant l'axe de l'éprouvette.

Le procédé de mesure que nous avons décrit utilisant les vibrations longitudinales donne le module d'élasticité adiabatique car, pendant la durée d'un quart de période, la chaleur ne peut s'équilibrer dans le corps soumis à l'essai. Ce module d'élasticité E_a est un peu supérieur au module d'élasticité isothermique E_i que donne la mesure statique ordinaire, lorsqu'il s'écoule un temps suffisant entre l'instant d'application de la force de déformation et l'instant de la détermination de cette force.

Le rapport entre ces deux modules a pour expression [7] :

$$\frac{E_a}{E_i} = 1 + \alpha^2 T \frac{E_a}{\Delta \cdot C_p}$$

α = coefficient de dilatation.

Δ = densité.

T = température absolue.

C_p = chaleur spécifique à pression constante.

Pratiquement ce rapport est très voisin de 1, de sorte que la différence entre les deux modules peut être négligée.

Mesure du frottement interne.

Le frottement interne est caractérisé par l'amortissement qui se produit dans un solide,

en vibrations libres, quand celui-ci est fixé de telle sorte qu'aucune énergie ne puisse s'échapper à l'extérieur (supports). Quand un tel solide est soumis à une force périodique, le frottement interne empêche que l'amplitude de la vibration devienne infinie, lorsque la fréquence approche de la fréquence propre de la barre étudiée.

Pour traduire par un nombre la grandeur du frottement interne, on peut utiliser le coefficient d'amortissement K qui est le rapport des deux amplitudes maxima successives $K = \frac{A_n}{A_{n+1}}$, ou encore calculer le décrément logarithmique des oscillations :

$$\delta = L \cdot \frac{A_n}{A_{n+1}} = LK.$$

Si, comme nous l'avons fait, on enregistre la courbe de décroissance exponentielle de l'amplitude en fonction du temps, on peut en déduire ce qu'on appelle la constante de temps, qui est l'inverse du coefficient d'amortissement. Cette constante de temps mesure le temps nécessaire pour que, dans le mouvement libre, l'amplitude ait été réduite par l'amortissement dans le rapport $1/e$. Le décrément logarithmique est par conséquent égal au quotient de la période par la constante de temps (8).

Un autre procédé pour la mesure du décrément logarithmique consiste à utiliser la courbe de résonance (fig. 6).

On démontre par un calcul simple que le décrément logarithmique est :

$$\delta = \frac{\pi}{m} \cdot \frac{dF}{F_0}.$$

Si l'on prend des valeurs de A telles que $A_0/A = \sqrt{2}$,

$$\text{on a : } m = 1 \text{ et } \delta = \pi \cdot \frac{dF}{F_0}.$$

Dans ce travail, nous avons utilisé ces deux méthodes, et, dans un des chapitres qui suivent, nous indiquerons en détail les précautions prises pour l'enregistrement des courbes d'amortissement et la détermination des courbes de résonance.

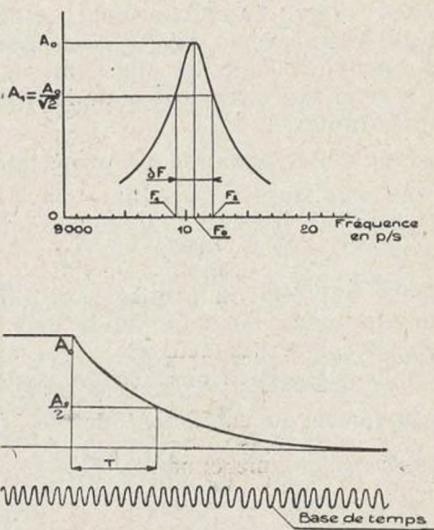


Fig. 6

Ces deux méthodes se complètent parfaitement l'une l'autre. Pour un matériau à grand amortissement on peut utiliser commodément la courbe de résonance. Dans les matériaux à très faible amortissement ($\delta < 10^{-4}$), l'acuité de la courbe de résonance est très grande, l'amplitude maximum est mal déterminée et il est donc difficile de mesurer dF avec précision.

CHAPITRE II

ÉTUDE DES VIBRATIONS LONGITUDINALES. D'UNE BARRE AVEC AMORTISSEMENT

La propagation de vibrations longitudinales dans des barres cylindriques et les phénomènes d'ondes stationnaires qui en résultent sont étudiés dans les traités classiques de Mécanique⁽¹⁾. Leurs auteurs indiquent qu'en général les accélérations perpendiculaires à la direction de propagation sont négligeables. Ces accélérations, déterminées par le coefficient de Poisson, résultent des compressions et dilatations auxquelles est soumise une tranche de barre perpendiculaire à la direction des génératrices. BOUASSE⁽²⁾ reproduit à ce sujet un calcul approché qui permet de déterminer l'erreur commise en négligeant ces accélérations pour des barres de révolution. On obtient :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi^2 \sigma^2 r^2}{\lambda^2} \quad (1)$$

(1) BRUHAT, *Mécanique physique*, page 515.

(2) BOUASSE, *Verges et Plaques*, pages 4 et 5.

où E est le coefficient d'élasticité, ΔE l'erreur commise sur sa détermination expérimentale d'après la fréquence propre d'une barre quand on néglige dans le calcul les accélérations radiales.

σ est le coefficient de POISSON pour la matière utilisée, r est le rayon de la barre, λ la longueur d'onde de la vibration dans la barre.

Dans nos expériences, nous avons toujours $r \leq 0,5$ cm, et $\lambda = 50$ cm. Prenons en moyenne $\sigma = 0,3$; il vient :

$$\frac{\Delta E}{E} = 1,8 \times 10^{-4}.$$

Cette erreur est, comme nous l'avons déjà mentionné, petite par rapport à l'erreur totale intervenant dans la détermination de E .

Dans ce qui suit nous allons donc continuer à négliger les accélérations radiales (nous utilisons toujours des barres de révolution).

Nous nous proposons d'étudier la propagation

d'ondes longitudinales avec amortissement dans le but particulier d'établir la relation qui existe entre ce dernier et la courbe de résonance d'une barre vibrant par exemple en quart d'onde. Cette relation, analogue à celle existant pour les oscillateurs harmoniques sans propagation, ne semble pas avoir été signalée pour les oscillateurs à propagation⁽³⁾.

Nous n'avons donc pas l'intention ici de faire une étude des raisons qui peuvent, en Physique moléculaire, créer l'amortissement, étude qui sortirait du cadre de ce travail. Nous nous bornerons à introduire dans les équations un terme analogue à celui qui intervient pour le frottement interne des fluides⁽⁵⁾.

On obtient ainsi l'équation de propagation :

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (2)$$

qui est celle qui régit la propagation d'ébranlements longitudinaux dans un fluide avec amortissement purement visqueux⁽⁶⁾. μ est alors le coefficient de viscosité. Nous n'avons pas lieu de préciser la forme du coefficient de $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$, et nous prendrons comme équation de départ :

$$(3) \dots \begin{cases} \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

Rappelons que x représente l'abscisse d'une tranche infiniment mince de barre, mesurée le long de l'axe, la barre étant au repos. $x + u$ est l'abscisse de la même tranche à l'instant t au cours du mouvement.

Il est indiqué de rechercher une solution de la forme :

$$U = U_0 e^{-ax} + J \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \phi_0 \right) \quad (4)$$

En portant dans (3), il vient :

$$\left(\alpha + \frac{2\pi j}{\lambda} \right)^2 = - \frac{\varrho \omega^2 (E - jA\omega)}{E^2 + A^2 \omega^2} \quad (5)$$

La résolution de cette relation complexe peut se faire rigoureusement. En posant le second membre égal à $a + jb$, il vient :

$$(6) \dots \begin{cases} \alpha = \frac{b\lambda}{4\pi} \\ \frac{2\pi}{\lambda} = \pm \sqrt{-\frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \right)} \end{cases}$$

Les expressions (6) sont compliquées. Pour

leur utilisation pratique, nous allons les alléger en faisant les remarques suivantes :

a) En se reportant à (4), on voit que $1/\alpha$ est le chemin que doit parcourir l'onde pour que son amplitude soit divisée par e . L'expérience montre que les solides auxquels nous appliquerons cette étude sont assez peu amortis pour que $1/\alpha$ soit grand par rapport à λ (en général : $1/\alpha\lambda < 1000$).

La suite du calcul montrera comment on peut passer des faits expérimentaux à cette conclusion. Nous prendrons $\alpha\lambda$ comme infiniment petit principal.

b) En développant le premier membre de (5), il vient :

$$\left(\alpha + \frac{2\pi j}{\lambda} \right)^2 = \frac{-4\pi^2}{\lambda^2} + \alpha^2 + \frac{4\pi j\alpha}{\lambda} \quad (7)$$

La partie principale du terme réel est d'après (a) $-4\pi^2/\lambda^2$ au deuxième ordre près. Il s'ensuit que l'argument de (7) est un infiniment petit équivalent à $\alpha\lambda/\pi$ et, d'après (5), b/a est du même ordre, ainsi que $A\omega/E$.

Les expressions (6) peuvent alors être remplacées par les expressions équivalentes, v étant la vitesse de propagation d'une onde sinusoïdale de pulsation ω :

$$(8) \dots \begin{cases} \frac{2\pi}{\lambda} = \pm \omega \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \left(1 + \frac{7}{8} \frac{A^2 \omega^2}{E^2} \right) \\ \text{d'où } v = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \left(1 + \frac{7}{8} \frac{A^2 \omega^2}{E^2} \right) \\ \text{et } \alpha = \pm \frac{A\omega}{2E} \omega \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{A^2 \omega^2}{E^2} \right) \end{cases}$$

On voit d'après (8) que la vitesse de propagation est différente de la vitesse v_0 sans amortissement, d'un terme du second ordre⁽⁷⁾.

Dans tout ce qui suit on aura des valeurs en-tachées d'une erreur relative au second ordre en remplaçant v par $v_0 = \sqrt{E/\varrho}$. En particulier on prendra :

$$\alpha \neq \pm \frac{A\omega}{2E} \frac{\omega}{v_0} \neq \frac{A\omega^2}{2Ev_0}$$

Les signes \pm correspondent aux possibilités de propagation dans les deux sens des deux ondes de somme U :

$$9 \dots \begin{cases} U = U_0 e^{-\frac{A\omega^2 x}{2Ev_0}} + J \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_0} \right) - \varphi_0 \right] \\ + U_1 e^{-\frac{A\omega^2 x}{2Ev_0}} + J \left[\omega \left(t + \frac{x}{v_0} \right) - \varphi_1 \right] \end{cases}$$

La solution (9) contient 4 constantes qui permettent de satisfaire à des conditions de mouvement imposées à deux sections de la barre (deux conditions : phase et amplitude pour chaque section).

(3) Lord RAYLEIGH, *Theory of Sound*, Vol. II, p. 314.
 (4) F. Y. ROCARD, *Dynamique générale des vibrations* (Ch. II et III).
 (5) Plusieurs théories de ce genre ont été avancées, en particulier par MAXWELL. La plus complète et la dernière en date, due à C. ZENER, est en bon accord avec les résultats expérimentaux.
 (6) On sait que les causes d'amortissement peuvent être multiples. Cf. ROCARD, *Propagation et Absorption du son*, p. 40.

(7) Les termes du 2^e ordre de (8) ne sont d'ailleurs pas corrects, puisque le calcul a été mené au 2^e ordre près.

Barre vibrant en quart d'onde

Nous prenons une barre encastrée pour $x = 0$, et soumise à une force $F = F_0 e^{j\omega t}$ à son extrémité libre $x = l$.

a) $x = 0 \quad U = 0$ quel que soit t , d'où :

$$U_1 e^{-j\phi_1} = -U_0 e^{-j\phi_0} \quad (10)$$

On pourra satisfaire à cette condition par exemple en prenant :

$$\varphi_1 = \varphi_0; \quad U_1 = -U_0. \quad (11)$$

D'où pour (9)

$$U = U_0 e^{j(\omega t - \phi_0)} \left(e^{-\frac{A\omega^2 x}{2Ev_0}} - j\frac{\omega x}{v_0} - e^{\frac{A\omega^2 x}{2Ev_0}} + j\frac{\omega x}{v_0} \right) \quad (12)$$

b) $x = l$. Etant donné une section droite de la barre, la force exercée par le morceau situé du côté des x croissants sur l'autre morceau s'écrit :

$$F = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (13)$$

d'où, pour la section terminale,

$$F_0 = -U_0 e^{-j\phi_0} \left(e^{-\frac{A\omega^2 l}{2Ev_0}} - j\frac{\omega l}{v_0} + e^{\frac{A\omega^2 l}{2Ev_0}} + j\frac{\omega l}{v_0} \right) \left(\frac{A\omega^2}{2Ev_0} + j\frac{\omega}{v_0} \right) \quad (14)$$

(14) détermine $U_0 e^{-j\phi_0}$, et l'on peut maintenant écrire U , toutes les constantes étant connues :

$$U = -e^{-j\omega t} \frac{e^{-\frac{A\omega^2 x}{2Ev_0}} - j\frac{\omega x}{v_0} - e^{\frac{A\omega^2 x}{2Ev_0}} + j\frac{\omega x}{v_0}}{e^{-\frac{A\omega^2 l}{2Ev_0}} - j\frac{\omega l}{v_0} + e^{\frac{A\omega^2 l}{2Ev_0}} + j\frac{\omega l}{v_0}} \frac{F_0}{\frac{A\omega^2}{2Ev_0} + j\frac{\omega}{v_0}} \quad (15)$$

En prenant la partie réelle de U , on obtiendrait la représentation habituelle d'ondes stationnaires avec amortissement. Nous nous attacherons plus particulièrement à l'amplitude de l'extrémité de la barre pour mettre en évidence les phénomènes de résonance.

Tant que l n'est pas grand par rapport à λ :

$$\frac{A\omega^2 l}{2Ev_0} = \frac{A\omega}{E} \frac{\pi l}{\lambda} \text{ est de l'ordre de } \frac{A\omega}{E}.$$

Il est manifeste que $|U(e)|$ est minimum pour des valeurs de ω très voisines de celles qui satisfont à :

$$\sin \frac{\omega l}{v_0} = 0, \text{ soit } l = k \frac{\lambda}{2}$$

et maximum au voisinage de :

$$\cos \frac{\omega l}{v_0} = 0, \text{ soit } l = (2k+1) \frac{\lambda}{4}.$$

Nous allons étudier ce qui se passe au voisinage de $l = \frac{\lambda}{4}$ quand ω varie. La variation du facteur du dénominateur :

$$D = 2 \cos \frac{\omega l}{v_0} - j \frac{A\omega^2 l}{Ev_0} \sin \frac{\omega l}{v_0}$$

est alors de beaucoup la plus rapide, et comme on le verra, dans un très petit intervalle relatif de fréquence l'équation (15) s'écrit, pour $x = l$:

$$U(l) = e^{j\omega t} \frac{F_0 l}{\alpha l + j\beta l} \frac{\cotg \beta l Th \alpha l + j}{\cotg \beta l + j Th \alpha l} \quad (16)$$

en posant :

$$\alpha = \frac{A\omega^2}{2Ev_0}; \quad \beta = \frac{\omega}{v_0} \quad (17)$$

$Th \alpha l$ est de l'ordre de αl . On voit d'après (16)

que $U(l)$ est maximum au voisinage des valeurs de ω qui annulent $\cotg \beta l$. Il est manifeste que dans (16) c'est le facteur du dénominateur $\cotg \beta l + j Th \alpha l$ qui a, au module et en phase, la variation la plus rapide.

Pour avoir d'une manière aussi rapprochée que possible la fréquence de résonance, nous al-

lons d'abord considérer que seul ce facteur est variable, et examiner ensuite les corrections à apporter à ce résultat.

Il nous faut donc examiner le module de :

$$D = \cotg \beta l + j Th \alpha l \quad (18)$$

au voisinage de $\beta l = \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $l = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$

Pour nous en tenir à une barre quart d'onde, nous poserons $k = 0$, et nous supposerons que l est voisin de $\lambda/4$, en écrivant :

$$\beta l = \frac{\pi}{2} (1 + \varepsilon),$$

ε étant un infiniment petit, dont par hypothèse l'ordre ne doit pas être inférieur à celui de αl . Nous désignerons par ω_0 la valeur de ω telle que :

$$\frac{\omega l}{v_0} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{d'où } \omega = \omega_0 (1 + \varepsilon),$$

et par α_0 la valeur correspondante de α .

$$\text{D'où : } |D|^2 = \frac{\pi^2}{4} \varepsilon^2 + (1 + 4\varepsilon) \alpha_0^2 l^2 \quad (19)$$

Pour justifier l'approximation qui permet de passer de (18) à (19), désignons par n l'ordre de ε ,

α_0 étant l'infiniment petit principal.

On a :

$$\begin{aligned} Th\alpha l &= \alpha l - \frac{\alpha^3 l^3}{3} + \dots \\ &= \alpha_0 l (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2) - \frac{\alpha_0^3 l^3}{3} (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2)^3 + \dots \\ \cotg \beta l &= \tg \varepsilon \frac{\pi}{2} = \varepsilon \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \frac{\pi^3}{8} + \dots \end{aligned}$$

On a donc rigoureusement :

$$\begin{aligned} |D|^2 &= \left(\frac{\pi^2}{4} \varepsilon^2 + \text{termes d'ordre } \geq 4n \right) \\ &\quad + \left[\alpha_0^2 l^2 (1 + 4\varepsilon) + \alpha_0^2 l^2 (6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4) \dots \dots \dots - \frac{\alpha_0^4 l^4}{3} \times \text{quantité finie} \right] \\ \text{D'où, en annulant } \frac{d|D|^2}{d\varepsilon}, \\ \text{on a : } -\frac{\pi^2}{2} \varepsilon &= \text{termes d'ordre } \geq 3n + 4\alpha_0^2 l^2 + \alpha_0^2 l^2 (12\varepsilon + \dots) - \frac{\alpha_0^4 l^4}{3} \times \text{quantité finie.} \end{aligned}$$

On voit ci-dessus qu'en conservant uniquement les termes figurant dans (19), on obtient pour la résonance une valeur de ε valable au troisième ordre près :

$$\varepsilon = -\frac{8\alpha_0^2 l^2}{\pi^2} \quad (20)$$

Voyons maintenant l'influence des autres facteurs de (16). Nous ne considérons que le facteur :

$$\begin{aligned} E &= \alpha l + j\beta l + \alpha_0 l + j \frac{\pi}{2} (1 + \varepsilon) \\ |E|^2 &= \alpha_0^2 l^2 + \frac{\pi^2}{4} (1 + 2\varepsilon). \end{aligned}$$

dont la relation relative du module est d'ordre n , tandis que la variation relative de module de $\cotg \beta l Th\alpha l + j$ est d'ordre $2n+2$.

Nous avons alors à rechercher le maximum de :

$$[1 + 2\varepsilon] [\pi^2 \varepsilon^2 + 16\alpha_0^2 l^2 \varepsilon + 4\alpha_0^2 l^2]$$

Il vient, pour la valeur principale de ε :

$$\varepsilon = -\frac{12\alpha_0^2 l^2}{\pi^2} \quad (21)$$

C'est là, au troisième ordre près, la valeur correcte de ε rendant maximum le module de $U(l)$ au voisinage de $l = \lambda/4$.

En conclusion, la fréquence de résonance ne diffère de ω_0 , en valeur relative, que d'une quantité du deuxième ordre. Ce résultat justifie l'hypothèse faite plus haut sur l'ordre de ε .

Courbe de résonance.

a) BANDE PASSANTE.

Nous allons d'abord évaluer le degré d'acuité de la résonance en déterminant la largeur de la bande passante, c'est-à-dire l'intervalle de fréquence encadrant le maximum, et pour lequel :

$$|U(l)| \geq \frac{|U(l)_{\max}|}{\sqrt{2}}$$

Pour cette évaluation, nous supposerons que ces frontières de la bande correspondent à des valeurs de ε d'ordre minimum 1, comme jusqu'à présent, et nous négligerons les quantités du deuxième ordre. Il suffit alors d'étudier la variation de $|D|^2$:

$|D|^2 \max = \alpha_0^2 l^2$ au deuxième ordre près.
Déterminons ε pour que $|D|^2 = 2\alpha_0^2 l^2$:

$$D^2 = \frac{\pi^2}{4} \varepsilon^2 + \alpha_0^2 l^2 = 2\alpha_0^2 l^2,$$

d'où :

$$\varepsilon = \pm \frac{2\alpha_0 l}{\pi} \quad (22)$$

Comme, au deuxième ordre près,

$$l = \frac{\lambda_0}{4} = \frac{\pi v_0}{2\omega_0},$$

on a, en désignant par $\Delta\omega$, la largeur de la bande passante qui est symétrique par rapport à ω_0 ,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2\varepsilon = \frac{A\omega_0}{E} \quad (23)$$

b) CONSÉQUENCES.

Tout d'abord (22) justifie l'hypothèse initiale suivant laquelle ε est d'ordre 1 (23) montre que $A\omega_0/E$ représente la quantité $\Delta\omega/\omega_0$ dont l'inverse est appelé coefficient de surtension pour les circuits oscillants, et d'une façon générale pour tous les oscillateurs linéaires sans propagation. Or l'expérience montre que la quantité $\Delta\omega/\omega_0$ déterminée sur la courbe de résonance de barres en matériaux usuels (acier, aluminium, verre, etc...) est de l'ordre de 10^{-4} , et en tous cas $< 10^{-3}$. Ceci justifie le fait que tout au long des calculs qui précèdent nous ayons considéré $A\omega/E$ comme un infiniment petit.

c) COURBE DE RÉSONANCE.

Elle peut être construite à partir de (19). En dehors de la bande passante, ε peut être d'ordre < 1 . Prenons-le alors comme infiniment petit principal, m étant l'ordre de $\alpha_0 l$, $m > 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} |D|^2 &= \left(\frac{\pi^2}{4} \varepsilon^2 + \text{termes d'ordre } \geq 4 \right) \\ &\quad + (\alpha_0^2 l^2 + \text{termes d'ordre } \geq 2m+1) \end{aligned}$$

En écrivant :

$$|D|^2 = \frac{\pi^2}{4} \varepsilon^2 + \alpha_0^2 l^2 \quad (24)$$

on fait sur $|D|^2$ une erreur relative dont la partie principale est d'ordre minimum

$1 = (2m + 1) - 2$, pour $m = 1$.
Donc

$$y = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4z_0^2 l^2}{\pi^2}}} \quad (25)$$

représente à un facteur constant près la courbe de résonance, avec une erreur relative de l'ordre de ε .

En désignant par ε_0 la valeur absolue de l'écart relatif $\Delta\omega_0/\omega_0$, qui donne d'après (22) les frontières de la bande passante, on a :

$$y = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon_0^2}} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (26)$$

avec $\varepsilon = k\varepsilon_0$.

Sur l'équation (26) on voit que, y n'étant défini qu'à un facteur constant près, toutes les courbes de résonance sont superposables, aux approximations ci-dessus près, si l'on prend pour unité en ordonnée l'amplitude maximum, et pour unité en abscisse ε_0 .

On a alors :

$$y = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (27)$$

L'origine des abscisses correspondant à la fréquence de résonance. On a représenté (fig. 6 bis)

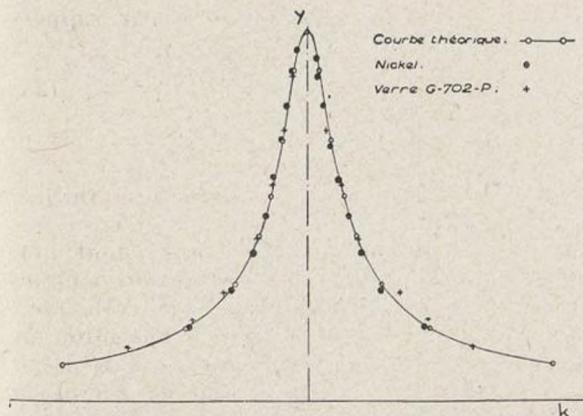


Fig. 6 bis

sur le même graphique des courbes expérimentales correspondant à des matériaux différents et une courbe théorique (équation 27), en utilisant le système de coordonnées précédent.

Constante de temps.

Nous nous proposons de déterminer quelle loi régit la décroissance de $U(l)$ quand on supprime la force d'entretien. La linéarité de l'équation de propagation initiale nous a conduit à une solution générale sinusoïdale pour une fréquence donnée qui fait intervenir deux ondes se propageant en sens inverse d'une manière indépendante du point de vue de l'amortissement en particulier. L'affaiblissement est toujours donné par la loi $e^{-\alpha x}$.

A partir du moment $t = 0$ où l'on arrête la force d'entretien, on peut considérer que la barre est le siège de la propagation d'une onde qui se

réfléchit successivement sur les deux extrémités et s'affaiblit en fonction du chemin parcouru.

Pour : $t = 0$, on a : $u(l, o) = u_0$.

A l'instant t , l'onde se réfléchissant à l'extrémité libre de la barre a parcouru sans entretien le chemin vt , et l'on a :

$$u(l, t) = u_0 e^{-\alpha vt} \quad (28)$$

(28) représente la loi cherchée. La constante de temps est :

$$\tau = \frac{1}{\alpha v} = \frac{2E}{A\omega^2} \quad (29)$$

Nous avons déjà trouvé (23) pour le coefficient de surtension :

$$q = \frac{E}{A\omega}$$

d'où la relation :

$$2q = \tau\omega \quad (30)$$

On a la même relation que pour les quantités τ et q définies pour les circuits oscillants :

$$q = \frac{L\omega}{R}; \quad \tau = \frac{2L}{R}; \quad 2q = \tau\omega.$$

Cette identité justifie l'emploi des mêmes termes (coefficient de surtension, décrément, etc...) pour les systèmes oscillants avec et sans propagation.

Remarque sur l'amortissement.

En se reportant au détail des calculs donnant (23) et (27), on voit que ces résultats demeurent si la quantité α est une fonction de ω quelconque mais dont la dérivée existe au point $\omega = \omega_0$. On a alors :

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \frac{\delta\alpha}{\delta\omega}\varepsilon + \dots$$

et les approximations faites conservent leur validité.

En conséquence, les vérifications expérimentales de l'équation (30) qui résulte de (23) et (29), ou la concordance des courbes de résonance théorique et expérimentale en coordonnées réduites, ne sont nullement en faveur des hypothèses faites concernant la cause physique de l'amortissement.

Par contre, la mesure de τ ou q à diverses fréquences permet de vérifier (23) et (29) en tant que fonctions de ω , et cette vérification confirme la validité du terme caractérisant la viscosité introduit dans l'équation de propagation.

Nous n'avons pas essayé cette vérification qui nécessite un appareillage spécial, mais nous nous proposons de le faire ultérieurement.

Autres similitudes avec les circuits oscillants.

Le facteur principal D à considérer pour la variation de $U(l)$ au voisinage de ω_0 est d'après (16), et en conservant

$$D = \varepsilon \frac{\pi}{2} + j\alpha l$$

$$\text{ou } D' = \varepsilon + j \frac{2\pi l}{\pi} = \varepsilon + \frac{j}{2q} \quad (31)$$

où ε est seul variable.

Pour un circuit oscillant, le facteur principal est :

$$\begin{aligned} F &= RC\omega + j(LC\omega^2 - 1) = RC\omega + j\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{q} + 2j\varepsilon \end{aligned}$$

ou bien :

$$F' = j(\varepsilon - \frac{j}{2q}) \quad (32)$$

(31) et (32) montrent que la variation des mo-

dules est la même : les courbes de résonance en coordonnées réduites sont superposables au voisinage de ω_0 . D'autre part, au signe près, la variation des phases est la même. En particulier la variation de phase à partir de $\omega = \omega_0$ est de $\pm \pi/4$ quand on atteint les frontières de la bande passante. Ceci implique que les considérations relatives à la stabilité d'oscillations entretenues dans un circuit oscillant par un amplificateur à lampes, en fonction de la phase de la réaction d'entretien, sont immédiatement applicables à une barre auto-entretenue par excitation électrostatique, à une rotation de $\pi/2$ près dans un sens convenable.

(A suivre.)

R. CABARAT.



