

Conditions d'utilisation des contenus du Conservatoire numérique

1- [Le Conservatoire numérique](#) communément appelé [le Cnum](#) constitue une base de données, produite par le Conservatoire national des arts et métiers et protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle. La conception graphique du présent site a été réalisée par Eclydre (www.eclydre.fr).

2- Les contenus accessibles sur le site du Cnum sont majoritairement des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public, provenant des collections patrimoniales imprimées du Cnam.

Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n° 78-753 du 17 juillet 1978 :

- la réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur ; la mention de source doit être maintenue ([Cnum - Conservatoire numérique des Arts et Métiers - https://cnum.cnam.fr](#))
- la réutilisation commerciale de ces contenus doit faire l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

3- Certains documents sont soumis à un régime de réutilisation particulier :

- les reproductions de documents protégés par le droit d'auteur, uniquement consultables dans l'enceinte de la bibliothèque centrale du Cnam. Ces reproductions ne peuvent être réutilisées, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

4- Pour obtenir la reproduction numérique d'un document du Cnum en haute définition, contacter [cnum\(at\)cnam.fr](mailto:cnum(at)cnam.fr)

5- L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

6- Les présentes conditions d'utilisation des contenus du Cnum sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

Auteur(s)	Frelin, Marcel (1934-2023)
Auteur(s) secondaire(s)	Podevin, Pierre
Titre	Mécanique des milieux continus et thermodynamique techniques : application aux turbomachines : cours avec exercices corrigés
Adresse	[Lieu de production inconnu] : [Pierre Podevin], 2025
Collation	331 vues
Nombre de vues	331
Sujet(s)	Milieux continus, Mécanique des Thermodynamique Turbomachines
Thématique(s)	Histoire du Cnam Machines & instrumentation scientifique
Typologie	Ouvrage
Note	Recueil de cours donnés par Marcel Frelin au Conservatoire national des arts et métiers. Le livre 4 est inachevé
Langue	Français
Date de mise en ligne	27/02/2025
Date de génération du PDF	27/02/2025
Notice complète	https://www.sudoc.fr/28323086X
Permalien	https://cnum.cnam.fr/redir?DOCELEC1

***MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS ET
THERMODYNAMIQUE TECHNIQUES***

Livre 0

Application aux turbomachines

Cours avec exercices corrigés.

Marcel Frelin

Sous-Directeur de laboratoire honoraire au
Conservatoire National des Arts et Métiers

Préface

Marcel Frelin a été mon professeur au Conservatoire national des arts et métiers. Ayant obtenu mon diplôme d'ingénieur en spécialité "Machines", j'ai rejoint cette institution en 1986. En charge de travaux de recherche à la chaire de turbomachines et moteurs, mon activité a porté principalement sur les études et essais des moteurs à combustion interne et l'adaptation du turbocompresseur au moteur. Dès lors Marcel Frelin m'a apporté un soutien effectif dans mes travaux mais m'a aussi permis de collaborer à ses enseignements de thermodynamique et d'élasticité.

Marcel avait à cœur de publier sous forme numérique, un recueil des cours qu'il a enseignés sous le titre général : "Mécanique des milieux continus et thermodynamique techniques : Application aux turbomachines".

Ce recueil est constitué de quatre grandes parties constituées de cours et d'exercices.

Concepts généraux (Livre 1)

Mécanique des milieux continus (Livre 2)

Thermodynamique (Livre 3)

Turbomachines (Livre 4)

J'ai repris ce recueil et apporté quelques corrections de présentation quant à la mise en forme du texte.

Le livre 4 se termine au chapitre 25, Marcel n'ayant malheureusement pu poursuivre la rédaction de cet ouvrage.

Je remercie chaleureusement Josette Frelin de m'avoir confié les travaux de son mari, en vue de leur diffusion.

Pierre Podevin

Ingénieur de recherche à la chaire de turbomachines du Cnam.

Le 10 février 2025

Sommaire

D'après les historiens, la roue aurait été découverte en Mésopotamie environ trois mille cinq ans avant notre ère. Elle est considérée comme la mécanique initiale pour toute civilisation, sans cette pièce il n'y a pas de mécanisme, pas de machine. De façon triviale, on peut dire que la roue est l'ancêtre de toutes les machines tournantes.

Avant cette invention, la principale source d'énergie était le muscle humain. La roue a permis d'utiliser la force animale pour transporter et faire tourner des moulins broyeurs de grains. La technique était née.

La science est apparue avec les Grecques qui avaient hérité des connaissances scientifiques égyptiennes. Ils sont considérés comme les fondateurs des mathématiques. Par exemple Archimède est l'un des principaux scientifiques de l'Antiquité. Aujourd'hui on le qualifierait de mécanicien. Parmi ses principaux domaines d'étude on peut citer l'hydrostatique, la mécanique statique, le principe du levier et bien sûr la vis d'Archimède.

Jusqu'au 16^{ème} siècle les progrès techniques ont précédé les progrès scientifiques. La première révolution industrielle se situe vers la fin du XVIII^e avec l'extraction massive du charbon et l'exploitation de la machine à vapeur. Il y a alors, un rapprochement entre sciences et techniques. Les scientifiques s'inspirent des progrès techniques pour mieux comprendre certains phénomènes naturels, la thermodynamique en est un bon exemple. Elle permet en effet de comprendre le comportement des machines thermiques, qui sont au cœur de la révolution industrielle.

Le premier ouvrage sur les moteurs thermiques a été écrit en 1824 par Sadi Carnot. Il s'intitulait *"Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance"*. La thermodynamique était née. Malgré tout, ses fondements seront établis quelques années plus tard en énonçant le premier principe de la thermodynamique. Ce fut ainsi la fin de la théorie du calorique qui était perçu comme un fluide sans masse capable de pénétrer les solides et les liquides.

Vers la fin du 19^{ème} siècle, deux courants de pensée virent le jour. L'un respectant l'apparente continuité des solides et des fluides et l'autre, au contraire, considérant la matière discontinue formé de particules extrêmement petites en mouvements incessants et rapides. Aujourd'hui, beaucoup d'historiens considèrent même que Démocrite est le "père de la science moderne".

Cet ouvrage se limitera à l'aspect macroscopique de la matière. Il se bornera à l'étude de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus orientée vers les applications industrielles et plus précisément les turbomachines. Aujourd'hui, la plupart des civilisations modernes ont placé l'énergétique au premier rang de leurs préoccupations. Il faut produire et utiliser de l'énergie au moindre coût en respectant les contraintes environnementales.

Des éléments d'analyse vectorielle indispensable à la théorie de la mécanique seront rappelés. Ce qui permettra d'évoquer les théorèmes généraux de la mécanique rationnelle, de donner des notions sur la théorie de l'élasticité et de fournir les éléments de mécanique des fluides nécessaires à l'étude des turbomachines.

Une partie importante de ce livre est consacrée à la thermodynamique classique, qu'on appelle parfois la thermodynamique phénoménologique, par opposition à la thermodynamique statistique. La thermodynamique passe, à juste titre, pour une science difficile. Sur le plan pédagogique, l'entropie fait parfois l'objet de polémiques. Cette notion, délicate pour les étudiants, est introduite, ici, en insistant sur les postulats de Clausius et de Thomson Kelvin.

Sommaire

L'application pratique de ces notions fondamentales est consacrée à l'étude des turbomachines que l'on rencontre dans de très nombreux domaines industriels. On peut même ajouter que demain, rares seront les projets énergétiques qui ne comporteront pas de turbomachines.

Ces machines sont traversées par un fluide qui assure un échange d'énergie avec un rotor, muni d'aubages (ou pales), qui est animé d'un mouvement de rotation à vitesse constante. Ainsi, on mesure l'apport précieux que constitue la thermodynamique pour analyser le fonctionnement de ces machines.

Ces machines se décomposent en deux grandes familles : les turbomachines hydrauliques et les turbomachines thermiques.

Les turbomachines hydrauliques sont constituées par les pompes, les ventilateurs, les éoliennes et les turbines hydrauliques. Les pompes et les ventilateurs reçoivent de l'énergie alors que les éoliennes et les turbines en fournissent.

Les turbomachines thermiques se composent essentiellement des compresseurs, des turbines à vapeur que l'on rencontre dans les centrales électriques, des turbines à gaz terrestres et des turbines aéronautiques.

La théorie des petites turbines centripètes fait, également l'objet d'un chapitre. Ces petites turbines équipent les turbocompresseurs de suralimentation des moteurs à combustion interne.

Le contenu de ce livre a été dispensé au Conservatoire national des arts et métiers ainsi qu'à l'Ecole supérieure de mécanique et d'électricité pendant une vingtaine d'années.

Table des matières

Livre 1

Concepts généraux

Chapitre I : Notions sur l'aspect microscopique

- 1 Remarques sur la structure de la matière
- 2 Moles et nombre d'Avogadro
- 3 Masses et volumes
- 4 Notions sur la théorie cinétique des gaz

Chapitre II : Analyse vectorielle

- 1 Vecteurs
- 2 Produit scalaire et produit vectoriel
- 3 Champ de vecteurs
- 4 Circulation du vecteur champ
- 5 Définition du flux
- 6 Gradient
- 7 Divergence
- 8 Rotationnel
- 9 Théorème d'Ostrogradski
- 10 Théorème de Green dans le plan
- 11 Théorème de Stokes
- 12 Relations générales

Livre 2

Mécanique des milieux continus

Chapitre III : Cinématique du solide

- 1 Référentiel et repère
- 2 Notions de torseur
- 3 Vecteur rotation
- 4 Torseur cinématique
- 5 Rotation d'un solide autour d'un axe fixe
- 6 Mouvement d'un repère
- 7 Dérivation des vecteurs
- 8 Composition des vitesses
- 9 Composition des accélérations
- 10 Coordonnées intrinsèques

Chapitre IV : Cinétique et dynamique du solide

- 1 Notion de masse
- 2 Centre de masse
- 3 Moment cinétique
- 4 Torseur cinétique

Sommaire

- 5 Torseur dynamique**
- 6 Relation entre moment cinétique et moment dynamique**
- 7 Moment d'inertie**
- 8 Dynamique**
- 9 Principe fondamental de la mécanique**
- 10 Travail et puissance d'une force qui s'exerce sur un point matériel**
- 11 Travail et puissance d'une force qui s'exerce sur un solide**
- 12 Energie cinétique**
- 13 Théorème de Kœnigs**
- 14 Théorème de l'énergie cinétique pour un système de particules**
- 15 Energie cinétique dans le repère central**

Chapitre V : Contraintes

- 1 Définition d'une contrainte**
- 2 Faisceau des contraintes**
- 3 Équations d'équilibre**
- 4 Tenseur des contraintes**

Chapitre VI Tenseur des contraintes

- 1 Contraintes principales et directions principales**
- 2 Ellipsoïde des contraintes**
- 3 Définition d'un état de contrainte**
- 4 Invariants scalaires du tenseur des contraintes**
- 5 Déviateur des contraintes**
- 6 Représentation plane de MOHR**

Chapitre VII Petites déformations

- 1 Déplacement et déformation**
- 2 Étude de la déformation**
- 3 Calcul de la déformation relative λ**
- 4 Tenseur des déformations**
- 5 Interprétations des composantes du tenseur des déformations**
- 6 Dilatations principales et directions principales**
- 7 Ellipsoïde des déformations**
- 8 Tri-cercle de Mohr des déformations**
- 9 Mesures extensométriques**
- 10 Invariants scalaires du tenseur des déformations**
- 11 Coefficient de dilatation cubique**
- 12 Déviateur des déformations**
- 13 Conditions de compatibilité entre déformations et déplacements**

Chapitre VIII Relations entre contraintes et déformations

- 1 Généralités**
- 2 Relations entre contraintes et déformations dans un repère quelconque**
- 3 Problèmes d'élasticité**
- 4 Etat plan de contrainte**
- 5 Etat plan de déformation**
- 6 Fonction d'Airy**

Chapitre IX Aspect macroscopique de l'état fluide

- 1 Pression**

Sommaire

- 2 Fluide parfait
- 3 Principe zéro de la thermodynamique
- 4 Température
- 5 Chaleur
- 6 Gaz parfait

Chapitre X Cinématique des fluides

- 1 Généralités
- 2 Dérivées particulières
- 3 Équation de continuité
- 4 Différents types d'écoulements
- 5 Répartition des vitesses
- 6 Écoulements irrotationnels ou à potentiel des vitesses
- 7 Écoulements rotationnels
- 8 Écoulements laminaire et turbulent
- 9 Viscosité

Chapitre XI Dynamique des fluides

- 1. Equations d'Euler
- 2. Equations de Navier Stokes
- 3. Equations de Bernoulli
- 4. Théorème des quantités de mouvement
- 5. Etude dynamique d'une particule fluide en écoulement permanent
- 6 Travail des forces de contact dans un fluide quasiment au repos
- 7 Travail des forces intérieures agissant sur une particule fluide
- 8 Équation fondamentale d'un écoulement permanent unidimensionnel
- 9 Perte de pression
- 10 Pertes de pression singulières des conduites

Livre 3

Thermodynamique

XII Premier principe de la thermodynamique

- 1 Spécificités de la thermodynamique
- 2 Energie interne
- 3 Expression du premier principe
- 4 Transformation cyclique
- 5 Équation thermodynamique générale
- 6 Expression simplifiée
- 7 Systèmes ouverts
- 8 Enthalpie
- 9 Autre forme de l'équation thermodynamique générale
- 10 Enthalpie d'arrêt

XIII Étude thermodynamique des gaz parfaits.

- 1 Expérience de Joule
- 2 Énergie interne d'un gaz parfait
- 3 Relation de Mayer
- 4 Détente et compression adiabatique réversible

XIV Deuxième principe de la thermodynamique

- 1 Postulat de Clausius**
- 2 Postulat de Thomson Kelvin**
- 3 Cycle ditherme**
- 4 Rendement thermique**
- 5 Théorème de Carnot**
- 6 Température thermodynamique**
- 7 Cycle de Carnot.**

XV L'entropie

- 1 Transformations cycliques dithermes**
- 2 Transformations cycliques échangeant de la chaleur avec une infinité de sources**
- 3 Transformations non cycliques**
- 4 Extension du second principe aux irréversibilités thermiques**
- 5 Variation d'entropie**
- 6 Entropie des systèmes isolés**

XVI Relations thermodynamiques

- 1 Généralités**
- 2 Coefficients de dilatation et de compressibilité**
- 3 Coefficients calorimétriques**
- 4 Formules de Reech**
- 5 Formules de Clapeyron**
- 6 Formule de Mayer généralisée**
- 7 Formules de Maxwell**

XVII Gaz réel

- 1 Validité de l'équation d'état des gaz parfaits**
- 2 Équations d'état sous forme du viriel**
- 3 Pression interne et covolume**
- 4 Équations d'état des gaz réels**
- 5 Capacités thermiques massiques des gaz réels**

XVIII Transition de phase

- 1 Changements d'état**
- 2 Vapeur saturante**
- 3 Point critique**
- 4 Titre**
- 5 Courbe de vaporisation**
- 6 Point triple**
- 7 Chaleur latente**
- 8 Troisième principe de la thermodynamique**

XIX Diagrammes

- 1 Généralités**
- 2 Diagramme de Clapeyron**
- 3 Diagramme entropique (T,s)**
- 4 Diagramme enthalpie-entropie (h,s)**
- 5 Diagramme entropique des corps purs**
- 6 Diagramme de Mollier**
- 7 Diagrammes utilisés par les frigoristes**

XX Anergie et exergie

- 1 Généralités
2. Expression de l'exergie
3. Rendement exergetique
4. Bilan exergetique

Livre 4 **Turbomachines**

XXI Application de la thermodynamique à la mécanique des fluides.

- 1 Etude thermodynamique des écoulements stationnaires
- 2 Célérité du son
- 3 Théorème du Capitaine Hugoniot
- 4 Calcul du débit d'un gaz parfait au col d'une tuyère convergente-divergente

XXII Généralités sur les turbomachines

- 1 Définition
- 2 Classification
- 3 Principe de fonctionnement d'une pompe centrifuge
- 4 Principe d'une turbine centripète
- 5 Turbine à vapeur mono étage
- 6 Représentation de l'écoulement

XXIII Analyse des échanges d'énergie

- 1 Application du premier principe de la thermodynamique
- 2 Application du second principe
- 3 Écoulement dans une roue de turbomachine
- 4 Travail sur l'arbre de la roue
- 5 Théorème d'Euler
- 6 Evolutions polytropiques
- 7 Travail polytropique
- 8 Représentation graphique
- 9 Rendements

XXIV Pompes centrifuges

- 1 Notations
- 2 Hauteur manométrique
- 3 Hauteur théorique
4. Rendement hydraulique
- 5 Répartition des pressions et de l'énergie cinétique
- 6 Relations entre la hauteur théorique H_{th} le débit volume q_v d'une pompe
- 7 Courbes caractéristiques
- 8 Déviation, influence du nombre des aubes
- 9 Diffuseurs
- 10 Diffuseurs lisses
- 11 Diffuseurs à aubes

XXV Pompes hélices

Sommaire

XXVI Similitude

XXVII Emploi des pompes, cavitation

XXVIII Ventilateurs et compresseurs

XXVIX Turbines

XXXI Notions sur les centrales à vapeur

Notations et symboles

Symbole	Définition	Dimension	Symbole	Définition	Dimension
A ou Ω	Surface	m ²	P	Puissance	W
a	Célérité du son	m/s	P_I	Puissance interne	W
cal	Ancienne unité de quantité de chaleur 1cal = 4,1855 J	J/kg	P_{th}	Puissance thermique	W
C	Couple	m.N	p	Pression	Pa
C_f	Coefficient de frottement	sans dimension	$\bar{p}$	Pression moyenne	Pa
C_x	Coefficient de traînée	sans dimension	Q	Quantité de chaleur	J
C_z	Coefficient de portance	sans dimension	Q	Quantité de chaleur massique	J/kg
C_p	Capacité thermique molaire à pression constante	J/mol.K	q_m	Débit massique	kg/s
C_v	Capacité thermique molaire à volume constant	J/mol;K	q_r	Débit massique d'une roue de turbomachine	kg/s
c_p	Capacité thermique massique à pression constante	J/kg.K	q_v	Débit volume	m ³ /s
c_v	Capacité thermique massique à volume constant	J/kg.K	q_f	débit de fuite dans la roue	kg/s
d	Diamètre	m	R	Constante universelle des gaz parfaits	J/mol.K
E_C	Énergie cinétique	J	r	Constante d'un gaz parfait	J/kg.K
e_c	Energie cinétique massique	J/kg	r	Rayon	m
E_P	Énergie potentielle	J	S	Entropie	J/K
e_p	Énergie potentielle massique	J/kg	s	Entropie massique	J/kg.K
$\vec{F}$	Force	N	T	Température Kelvin	K
δF	Dégradation élémentaire	J	t	Température Celsius	°C
δf	Dégradation massique élémentaire	J/kg	t	Temps	s
G	Module de Coulomb	Pa	u	Energie interne massique	J/kg
E	Module de Young	Pa	U	Energie interne	J
h	Enthalpie massique	J/kg	$\vec{u}$	Vecteur vitesse moyenne	m/s
i	Angle d'incidence	-	u^2	Vitesse quadratique moyenne	(m/s) ²
K_B	Constante de Boltzmann.	J/K	$\vec{U}$	Vitesse d'entraînement	m/s
l	Largeur	m	U	Norme de $\vec{U}$	m/s
L_v	Chaleur latente de vaporisation	J/kg	$\vec{V}$	Vitesse absolue	m/s
M	Nombre de mach	sans dimension	V	Norme de $\vec{V}$	m/s
m	Masse	kg	$\vec{V}$	Vitesse moyenne	m/s
M	Masse molaire	kg/mol	V_u	Vitesse tangentielle	m/s
N	Nombre d'Avogadro	sans dimension	V_r	Vitesse radiale	m/s
N	Vitesse de rotation	tr/min	V_z	Vitesse axiale	m/s
n	Nombre de mole	mol			

Sommaire

Symbole	Définition	Dimension	Symbole	Définition	Dimension
V	Volume	m^3	α	Coefficient de dilatation isobare	Pa^{-1}
v	Volume massique	m^3/kg	α	Angle formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$	-
V_m	Volume molaire	m^3/mol	β	Coefficient de compression isochore	Pa^{-1}
			β	Angle formé par $\vec{U}$ et $\vec{W}$	-
w_I	Travail massique interne d'une turbomachine	J/kg	β_m	Angle réel des aubages	-
w_a	Travail massique sur l'arbre d'une turbomachine	J/kg	$\vec{\gamma}$	Accélération	m/s^2
w_p	Travail massique polytropique	J/kg	γ	Rapport des capacités thermiques massiques	sans dimension
$\vec{W}$	Vitesse relative (roue)	m/s	ε	Jeu	m
W	Norme de $\vec{W}$	m/s	η	Rendement thermique d'une transformation cyclique	sans dimension
W	Travail échangé avec le milieu extérieur	J	η_g	Rendement global	sans dimension
w	Travail massique échangé avec le milieu extérieur	J/kg	$\eta_{\text{méc}}$	Rendement mécanique	sans dimension
W_i	Travail des forces intérieures	J	η_P	Rendement polytropique	sans dimension
w_i	Travail massique des forces intérieures	J/kg	η_S	Rendement isentropique	sans dimension
w_{isen}	Travail massique isentropique	J/kg	μ	Viscosité dynamique	Pa.s
W_I	Travail interne d'une turbomachine	J	θ	Angle	
Z	Nombre d'aubes	sans dimension	λ	Coefficient d'élasticité de Lamé	Pa
			λ	Coefficient de perte de charge	sans dimension
			μ	Coefficient de viscosité dynamique	Pa.s
			ν	Coefficient de viscosité cinématique	m^2/s
			ν	Coefficient de Poisson	sans dimension
			ξ	Dégradation énergétique massique interne	J/kg
			ρ	Masse volumique	kg/m^3
			σ	Contrainte normale	Pa
			τ	Contrainte tangentielle	Pa
			ϕ		
			χ	Glissement	sans dimension
			χ_t	Coefficient de compressibilité isotherme	Pa^{-1}
			$\vec{\omega}$	Vecteur rotation	rad/s
			ω	Vitesse de rotation	rad/s

***MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS ET
THERMODYNAMIQUE TECHNIQUES***

Application aux turbomachines

Cours avec exercices corrigés

Livre 1

Concepts généraux

Marcel Frelin

Sous-Directeur de laboratoire honoraire au
Conservatoire National des Arts et Métiers

TABLE DES MATIERES

Concepts généraux

Chapitre I	Notions sur l'aspect microscopique	1
1	Remarques sur la structure de la matière	1
1-1	Atome.....	1
1-2	Molécule	1
1-3	Corps purs	1
1-4	Mélange.....	1
2	Moles et nombre d'Avogadro	2
3	Masses et volumes.....	2
3-1	Volume molaire	2
3-2	Masse molaire	3
3-3	Volume massique.....	3
3-4	Masse volumique	3
4	Notions sur la théorie cinétique des gaz	4
4-1	Libre parcours moyen	4
4-2	Modèle du gaz parfait	5
4-3	Equilibre statistique	5
4-4	Pression dans un gaz parfait.....	6
4-5	Température dans un gaz parfait.....	8
Chapitre II	Analyse vectorielle	10
1	Vecteurs.....	10
2	Produit scalaire et produit vectoriel	11
3	Champ de vecteurs	12
4	Circulation du vecteur champ	12
5	Définition du flux.....	13
6	Gradient.....	13
6-1	Définition	13
6-2	Champ de gradient	14
6-3	Potentiel scalaire	14
7	Divergence	14
8	Rotationnel.....	15
9	Théorème d'Ostrogradski	15
10	Théorème de Green dans le plan.....	17
11	Théorème de Stokes	19
12	Relations générales.....	21

Chapitre I

Notions sur l'aspect microscopique

1 Remarques sur la structure de la matière

1-1 Atome

La matière est à structure discontinue et constituée d'atomes. Un atome est, étymologiquement la plus petite parcelle d'un corps donné qui reste capable de présenter les propriétés chimiques qui caractérise ce corps. L'atome lui aussi est à structure discontinue, il se compose d'un noyau autour duquel gravitent les électrons. Le noyau, également à structure discontinue, est constitué de particules élémentaires appelées nucléons ; protons et neutrons, eux-mêmes composés de particules élémentaires appelées quarks.

Le diamètre des atomes est de l'ordre de 10^{-7} mm, alors que celui du noyau n'est que de 10^{-11} mm. Il y a donc un vide relativement grand entre le noyau et les orbites des électrons. Le noyau occupe, dans l'atome, moins de place que le soleil dans le système solaire. C'est ce qui fait dire que la matière est essentiellement constituée par du vide.

1-2 Molécule

On donne le nom de molécule à la plus petite partie de matière existant à l'état libre. Les molécules sont des assemblages d'atomes.

Un corps composé constitue toujours une molécule.

Cette particularité de la molécule est traduite par la notion d'atomicité. L'hélium He, l'argon Ar sont monoatomiques. L'oxygène O_2 , l'azote N_2 , l'hydrogène H_2 sont diatomiques. Le gaz carbonique CO_2 , l'eau H_2O sont triatomiques.

1-3 Corps purs

Lorsque l'assemblage d'une molécule est constitué d'atomes identiques on dit que la matière est un corps pur simple. Si les atomes sont différents mais formant une seule structure on dit que la matière est un corps pur composé. Par exemple l'or, l'argent, l'hydrogène, l'oxygène sont des corps purs simples alors que l'eau, l'acide chlorhydrique, l'oxyde de carbone sont des corps purs composés.

1-4 Mélange

Lorsque l'assemblage est constitué d'atomes différents mais formant plusieurs structures on dit que la matière est un mélange homogène ou hétérogène.

Par exemple l'eau et le vin est un mélange homogène alors que l'eau et l'huile forment un mélange hétérogène

2 Moles et nombre d'Avogadro

Jusqu'en 1961, les chimistes avaient institué un système de proportions relatives de la masse des atomes en donnant arbitrairement à l'atome d'oxygène la valeur 16.

Les autres atomes étaient caractérisés par des nombres qui forment avec 16 un rapport de la masse réelle de ces atomes avec la masse réelle de l'atome d'oxygène.

En 1961, l'union internationale de chimie a fait adopter une base commune pour les chimistes et les physiciens, et conventionnellement, on a affecté à l'isotope le plus abondant du carbone la valeur 12.

On appelle "isotope d'un même élément" des atomes qui le différencient entre eux que par le nombre de neutrons dans le noyau. Le nombre de protons et d'électrons restent le même d'un atome à l'autre.

La mole est définie comme étant la quantité de matière d'un système contenant autant de particules élémentaires (atomes, molécules, ions, électrons ou autres particules) que 0,012 kg de carbone 12.

Cette constante, appelée nombre d'Avogadro, est désigné par N_A ou L . Sa valeur est approximativement :

$$N_A = 6,0221415 \cdot 10^{23}$$

La loi d'Avogadro précise que dans les mêmes conditions de pression et de température, un même volume de gaz parfait quelconque contient le même nombre de molécules. Par exemple c'est le nombre de molécules contenues dans une mole de gaz.

La mole, de symbole mol, est l'unité de quantité de matière du Système International.

3 Masses et volumes

3-1 Volume molaire

Le volume molaire de symbole V_m s'exprime en mètre cube par mole (m^3/mol). C'est le quotient du volume V par le nombre de moles n .

$$V_m = \frac{V}{n}$$

Dans les conditions normales de température et de pression ($T = 273,15 \text{ K}$ et $p_{at} = 101\,325 \text{ Pa}$) le volume molaire d'un gaz parfait est :

$$V_{mo} = 0,02241383 \frac{m^3}{mol}$$

À titre de comparaison le tableau ci-dessous montre les écarts avec quelques gaz réels dans les conditions normales de température et de pression.

Gaz.	Hélium.	Hydrogène.	Azote.	Oxygène.	Gaz carbonique.
Volume molaire en dm ³	22,426	22,428	22,404	22,39	22,228

*Tableau I.1 gaz réel***3-2 Masse molaire**

La masse molaire est le quotient de la masse m par le nombre de moles n . On peut également dire que la masse molaire d'un gaz est la masse qui occupe le volume molaire. Son symbole est M et s'exprime en kilogramme par mole (kg/mol).

$$M = \frac{m}{n}$$

3-3 Volume massique

Le volume massique est le quotient du volume V par la masse m . On le désigne par v et il s'exprime en mètre cube par kilogramme (m³/kg).

$$v = \frac{V}{m} = \frac{V_m}{M}$$

Exercice I.1.

En supposant que le propane C₃H₈ se comporte comme un gaz parfait, calculer son volume massique dans les conditions normales de pression et de température.

*Rappel :**La masse molaire du carbone est de 0,012 kg/mol.**La masse molaire de l'hydrogène est de 0,001 kg/mol.**Corrigé.**La masse molaire du propane est donc :*

$$M = 3 \times 0,012 + 8 \times 0,001 = 0,044 \text{ kg/mol.}$$

D'où le volume massique dans les conditions normales :

$$v = \frac{V_{m0}}{M} = \frac{0,02241383}{0,044} = 0,5094 \text{ m}^3/\text{kg}$$

3-4 Masse volumique

Le quotient de la masse m par le volume V est appelé la masse volumique. Son symbole est ρ et s'exprime en kilogramme par mètre cube (kg/m³).

$$\rho = \frac{M}{V_m} = \frac{1}{v} = \frac{m}{V}$$

4 Notions sur la théorie cinétique des gaz

4-1 Libre parcours moyen

Lorsque la matière se trouve à l'état solide, les molécules occupent une place bien déterminée en se contentant d'exécuter des oscillations autour de leur position moyenne. L'attraction des molécules entre elles est considérable.

Dans un liquide, les molécules sont également très rapprochées mais, par contre, elles sont libres de se déplacer.

Lorsque la matière se trouve à l'état gazeux, les molécules sont dans un état d'agitation continuelle et se déplacent librement. Leurs vitesses sont de l'ordre de quelques centaines de mètres par seconde. Au cours de leur mouvement, les molécules se heurtent mutuellement.

Entre deux chocs successifs une molécule décrit une trajectoire en ligne droite et la distance correspondante est appelée ; libre parcours moyen.

Désignons par σ le diamètre obtenu en traçant autour du centre de chaque molécule une sphère, bien que les molécules soient loin d'être sphériques. Cette sphère, appelée sphère de protection, ne peut jamais contenir le centre d'aucune autre molécule.

Dans les conditions normales de pression et de température, indiquons pour trois gaz la valeur du diamètre σ , du libre parcours moyen et du nombre de chocs.

Gaz	Libre parcours moyen en mm	σ en mm	Nombre de chocs d'une molécule par seconde
H ₂	1123.10^{-7}	$2,70.10^{-7}$	$15,0.10^9$
O ₂	647.10^{-7}	$2,90.10^{-7}$	$6,6.10^9$
CO ₂	397.10^{-7}	$3,24.10^{-7}$	$9,1.10^9$

Tableau I.2 Caractéristiques particules

Dans les conditions normales de pression et de température 1mm³ de gaz parfait contient :

$$\frac{N_A}{V_{m0}} = \frac{6,0221415.10^{23}}{0,02241383.10^9} = 2,687.10^{16} \text{ molécules}$$

Lorsque la pression diminue ces nombres se modifient assez rapidement.

Pour des pressions de l'ordre de 10⁻⁷mm de mercure, le nombre de molécule par centimètre cube est encore considérable, de l'ordre de trois milliards, et le libre parcours moyen devient de l'ordre de plusieurs centaines de mètres.

4-2 Modèle du gaz parfait

En utilisant des hypothèses simplificatrices, la théorie cinétique des gaz explique le comportement macroscopique d'un gaz à partir d'interprétations microscopiques. Notamment elle donne une interprétation facile de la température et de la pression.

La théorie cinétique renonce à préciser les grandeurs physiques attachées à chaque molécule, elle s'intéresse uniquement aux valeurs moyennes. Il faut alors faire les hypothèses suivantes :

- en un point d'une masse de gaz, le sens et la grandeur de la vitesse des molécules sont distribués au hasard. Toutes les directions sont également probables ; c'est l'hypothèse du chaos moléculaire.
- la distribution des vitesses autour de la valeur moyenne est la même pour toutes les parties du gaz.
- l'action qu'exercent les molécules les unes sur les autres n'est importante qu'au moment des chocs. L'action des forces à distance reste faible devant les forces de choc. Cette hypothèse caractérise l'état gazeux.
- les lois de la mécanique classique des systèmes macroscopiques s'appliquent aux molécules individuelles.

En plus des précédentes hypothèses, un gaz parfait doit avoir les propriétés suivantes :

- les dimensions des molécules sont très petites par rapport aux distances qui les séparent, si bien qu'elles sont supposées ponctuelles. Au moment d'un choc, les forces qui s'exercent entre les molécules peuvent être considérées comme appliquées en leur centre d'inertie.
- en dehors des chocs, les molécules se déplacent librement et n'exercent aucune force les unes sur les autres. Les forces d'interaction à distance entre molécules sont donc négligées.

4-3 Equilibre statistique

L'équilibre d'un gaz ne peut pas se définir à partir des lois de la mécanique classique qui exigerait l'immobilité des molécules dans un référentiel fixe.

La théorie cinétique s'intéresse aux valeurs moyennes des molécules. Un gaz est en équilibre statistique si toutes les grandeurs physiques ont une valeur moyenne au cours du temps, et si cette valeur est indépendante du temps.

Moyennes temporelles

Supposons suivre le mouvement d'une molécule et mesurer les vitesses qu'elle prend au cours du temps. Par exemple en désignant par $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_j, \dots, \vec{V}_K$ nous pourrions définir le vecteur de vitesse moyen $\vec{u}$ d'une molécule au cours du temps :

$$\vec{u} = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{K} \sum_{j=1}^{j=K} \vec{V}_j \right)$$

Dans un réservoir, $\vec{u}$ est nul si le gaz est en équilibre statistique.

Moyennes statistiques

Autour d'un point M d'une masse de gaz, considérons un volume élémentaire dV à une date t . Bien que ce volume soit petit, il contient un nombre élevé N de molécules qui à la date t , ont chacune une vitesse $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_i, \dots, \vec{V}_N$.

En équilibre statistique ces vitesses observées simultanément, à un instant quelconque pour les diverses molécules du volume dV , sont celles que prend une molécule au cours du temps.

La moyenne de ces vitesses, faite dans le volume dV , est appelée moyenne statistique. Pour un gaz isolé et en équilibre statistique, la moyenne statistique est égale à la moyenne temporelle.

Pour un gaz en équilibre statistique, le vecteur vitesse moyen : $\vec{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{V}_i$ est donc nul.

Vitesse quadratique moyenne

La vitesse quadratique moyenne u^2 est définie par la relation :

$$u^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\vec{V}_i)^2$$

Remarques

- Il ne faut pas confondre la vitesse quadratique moyenne et la vitesse moléculaire moyenne :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\vec{V}_i\|$$

- Si le gaz est en équilibre statistique, la moyenne temporelle est égale à la vitesse quadratique moyenne. Elle est indépendante de la molécule choisie, du temps et du lieu. C'est une constante pour un état d'équilibre donné.

4-4 Pression dans un gaz parfait

Au cours de leurs mouvements, les molécules rencontrent les parois du récipient qui contient le gaz. Etant donné le grand nombre de molécules, les chocs contre la paroi se succèdent très rapidement sous des incidences et des vitesses très variées.

La pression est la force moyenne exercée sur l'unité de surface de la paroi par les molécules en train de la heurter.

Considérons un réservoir contenant une masse m d'un gaz parfait. Désignons par O l'origine d'un repère galiléen pris à l'intérieur de ce récipient. Soit M_i le centre d'inertie d'une molécule de masse m_i et de vitesse :

$$\vec{V}_i = \frac{d\vec{OM}_i}{dt}$$

Calculons la dérivée seconde de $(\vec{OM}_i)^2$.

Soit :

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{OM}_i)^2 = 2 \left(\frac{d\vec{OM}_i}{dt} \right)^2 + 2\vec{OM}_i \frac{d^2\vec{OM}_i}{dt^2} = 2V_i^2 + 2\vec{OM}_i \vec{\gamma}_i$$

Puisque, par hypothèse les lois de la mécanique classique s'appliquent aux molécules individuelles, nous pouvons écrire :

$$m_i \vec{\gamma}_i = \vec{F}_i$$

La force $\vec{F}_i$ étant l'action exercée sur la molécule à l'instant considéré. Multiplions la relation ci-dessus par $\frac{m_i}{4}$, remplaçons $m_i \vec{\gamma}_i$ par $\vec{F}_i$ et sommons sur les N molécules constituant Le gaz.

$$\sum_{i=1}^{i=N} \frac{m_i}{4} \frac{d^2}{dt^2}(\vec{OM}_i)^2 = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{m_i V_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\vec{OM}_i}{2} \vec{F}_i$$

Supposons le gaz en équilibre statistique donc : $\sum_{i=1}^{i=N} \frac{m_i}{4} \frac{d^2}{dt^2}(\vec{OM}_i)^2 = 0$

D'autre part de la définition de la vitesse quadratique moyenne nous avons :

$$\sum_{i=1}^{i=N} \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{m_i}{2} \sum_{i=1}^{i=N} V_i^2 = \frac{Nm_i}{2} u^2 = \frac{mu^2}{2}$$

Il s'ensuit donc :

$$\frac{mu^2}{2} = - \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\vec{OM}_i}{2} \vec{F}_i$$

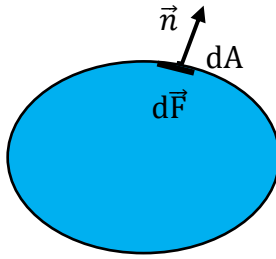
Comme il s'agit d'un gaz parfait, les forces $\vec{F}_i$ sont uniquement dues aux chocs des molécules. Notons que lorsque la molécule "a" heurte la molécule "b", nous avons :

$$\vec{OM}_a = \vec{OM}_b$$

Puisque les molécules sont supposées ponctuelles. D'autre part $\vec{F}_a = -\vec{F}_b$ en vertu de la loi de l'action et de la réaction, et par suite :

$$\vec{OM}_a \cdot \vec{F}_a + \vec{OM}_b \cdot \vec{F}_b = 0$$

Pour l'ensemble des molécules contenues dans le volume de gaz, il ne subsiste donc que les forces de pression exercées par la paroi sur le gaz.



Pour évaluer ces forces considérons un petit élément dA de la surface intérieure du récipient de volume V . Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à dA et dirigé vers l'extérieur du volume V . La force de pression exercée par cet élément dA sur le gaz est :

$$d\vec{F} = -pdA\vec{n}$$

Figure I.01 Pression

Compte tenu de ces remarques, la vitesse quadratique moyenne, s'écrit :

$$\frac{mu^2}{2} = - \iint_{M \in A} \frac{\vec{OM}}{2} (-p) dA \vec{n}$$

Comme par hypothèse la pression p conserve la même valeur en tous points de la masse de gaz, nous avons en utilisant le théorème d'Ostrogradski:

$$mu^2 = p \iint_{M \in A} \vec{OM} \cdot \vec{n} dA = p \iiint_{M \in \text{Volume}} \text{div}(\vec{OM}) dV = 3pV$$

La pression varie donc proportionnellement avec la vitesse quadratique moyenne.

Pour une mole de gaz nous aurions :

$$pV_m = \frac{Mu^2}{3}$$

4-5 Température dans un gaz parfait

Dans la théorie cinétique des gaz, la température absolue d'un gaz est définie comme étant directement proportionnelle à l'énergie cinétique d'une molécule :

$$\frac{m_i u^2}{2} = \frac{3}{2} K_B T$$

K_B est une constante universelle, dite constante de Boltzmann.

$$K_B = 1,3806503 \dots 10^{-23} \text{ J/K}$$

Le coefficient $3/2$ est introduit pour simplifier, ultérieurement, les relations.

Multiplions cette expression par le nombre d'Avogadro N_A .

$$\frac{m_i N_A u^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} = \frac{3}{2} N_A K_B T$$

De la relation obtenue ci-dessus pour une mole de gaz, nous déduisons :

$$pV_m = \frac{Mu^2}{3} = \frac{3N_A K_B T}{3} = N_A K_B T$$

En posant $N_A K_B = R$ il vient :

$$pV_m = RT$$

Cette équation fournit une relation entre la pression, le volume molaire et la température. Cette relation est appelée équation d'état des gaz parfaits.

R est la constante universelle de proportionnalité dans la loi des gaz parfaits. Elle s'exprime en Joule par mole Kelvin (J/mol.K).

$$R = 6,0221415 \cdot 10^{23} \times 1,3806503 \cdot 10^{-23} = 8,3144 \text{ J/mol. K}$$

De même, avec ce changement de variables, nous avons également :

$$Mu^2 = 3RT \text{ ou encore } u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

T est la température absolue du gaz et mesure en fait le degré d'agitation des molécules.

Dans les conditions habituelles, les vitesses u sont de l'ordre de quelques centaines de mètres par seconde.

Chapitre II

Analyse vectorielle

1 Vecteurs

Un vecteur est un être mathématique défini par sa norme, sa direction et son sens comme par exemple une force ou une vitesse. On peut dire également qu'un vecteur est un segment de droite orienté sur lequel on a choisi un sens. A et B étant les extrémités du segment on désigne un vecteur par la notation $\overrightarrow{AB}$. La droite indéfinie passant par A et B est appelée support du vecteur.

Dans cet ouvrage un vecteur sera représenté par une seule lettre et on écrira par exemple $\vec{V}$ pour une vitesse.

La norme d'un vecteur est un scalaire. Par exemple $|\vec{V}|$ est la norme de $\vec{V}$ mais nous écrirons tout simplement V.

Un scalaire est une grandeur entièrement définie par un nombre réel et une unité comme par exemple la masse ou la température.

Deux vecteurs sont dits égaux, s'ils ont même norme, même direction et même sens. Deux vecteurs sont dits opposés, s'ils ont même norme, même direction mais des sens contraires.

Un vecteur libre est une grandeur géométrique ayant une norme, une direction et un sens mais dont l'origine est arbitraire dans l'espace.

Un vecteur lié est un vecteur libre dont l'origine O est bien déterminée dans l'espace.

Un vecteur glissant est un vecteur libre ayant son support bien défini dans l'espace sans que son origine O le soit.

Rappelons quelques propriétés des vecteurs

- Commutativité de l'addition : $\vec{V} + \vec{U} = \vec{U} + \vec{V}$
- Associativité de l'addition : $\vec{V} + (\vec{U} + \vec{W}) = (\vec{V} + \vec{U}) + \vec{W}$
- Si m et n sont des scalaires nous avons :
- Distributivité : $(m + n) \vec{V} = m \vec{V} + n \vec{V}$
 $m (\vec{V} + \vec{U}) = m \vec{V} + m \vec{U}$
- Commutativité de la multiplication par un scalaire : $m \vec{V} = \vec{V} m$
- Associativité de la multiplication : $m (n \vec{V}) = (mn) \vec{V}$

2 Produit scalaire et produit vectoriel

Désignons par $\vec{V}$ un vecteur de composantes V_1, V_2, V_3 et $\vec{U}$ un vecteur de composantes U_1, U_2, U_3 .

Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{U}$ est un scalaire.

$$\vec{V} \cdot \vec{U} = V_1 U_1 + V_2 U_2 + V_3 U_3$$

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{U}$ se définit également comme étant le produit des modules de $\vec{V}$ et $\vec{U}$ par le cosinus de l'angle α qu'ils forment entre eux.

$$\vec{V} \cdot \vec{U} = VU \cos \alpha \quad \text{avec } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{U}$ est un vecteur $\vec{W}$ de composantes :

$$\vec{V} \wedge \vec{U} = \vec{W}$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 U_3 - V_3 U_2 \\ V_3 U_1 - V_1 U_3 \\ V_1 U_2 - V_2 U_1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\vec{W}$ est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{U}$.

La norme W du vecteur $\vec{W}$ est égale à l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{U}$. En désignant par α l'angle formé par $\vec{V}$ et $\vec{U}$, nous avons donc :

$$W = V U \sin \alpha \quad (\text{II.01})$$

Si $\vec{V} \wedge \vec{U} = \vec{0}$ et si $\vec{V}$ et $\vec{U}$ sont des vecteurs non nuls ; alors $\vec{V}$ et $\vec{U}$ sont parallèles.

Le produit scalaire est commutatif mais ce n'est pas le cas pour le produit vectoriel.

$$\vec{V} \cdot \vec{U} = \vec{U} \cdot \vec{V} \quad \vec{V} \wedge \vec{U} = - \vec{U} \wedge \vec{V}$$

La combinaison des produits scalaires et vectoriels donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned} (\vec{V} \cdot \vec{U}) W &\neq V (\vec{U} \cdot \vec{W}) \\ \vec{V} \cdot (\vec{U} \wedge \vec{W}) &= \vec{W} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{U}) = \vec{U} \cdot (\vec{W} \wedge \vec{V}) \\ \vec{V} \cdot (\vec{U} \wedge \vec{W}) &= \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix} \\ \vec{V} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{W}) &\neq (\vec{V} \wedge \vec{U}) \wedge \vec{W} \\ \vec{V} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{W}) &= (\vec{V} \cdot \vec{W}) \vec{U} - (\vec{V} \cdot \vec{U}) \vec{W} \\ (\vec{V} \wedge \vec{U}) \wedge \vec{W} &= (\vec{V} \cdot \vec{W}) \vec{U} - (\vec{U} \cdot \vec{W}) \vec{V} \end{aligned} \quad (\text{II.02})$$

Le produit $\vec{V} \cdot (\vec{U} \wedge \vec{W})$ s'appelle le produit mixte.

Le produit $\vec{V} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{W})$ s'appelle le double produit vectoriel.

3 Champ de vecteurs

Nous dirons, tout simplement, qu'un champ de vecteurs (ou champ vectoriel) est une fonction qui associe un vecteur à chaque point M de l'espace euclidien. Si nous travaillions dans le repère défini par la figure (II.01) nous aurions :

$$\vec{V} = V_1(x, y, z) \vec{e}_1 + V_2(x, y, z) \vec{e}_2 + V_3(x, y, z) \vec{e}_3$$

Les lignes de champ sont les courbes telles qu'en tout point de l'une d'elles le vecteur champ, en ce point, lui soit tangent. En mécanique des fluides nous les appellerons ligne de courant à l'instant t_0 .

Analytiquement les lignes de champ sont définies par les relations différentielles :

$$\frac{dx}{V_1(x, y, z)} = \frac{dy}{V_2(x, y, z)} = \frac{dz}{V_3(x, y, z)} \quad (\text{II.03})$$

4 Circulation du vecteur champ

Soit $\vec{V}(M)$ le vecteur champ au point M et $d\vec{M}$ un déplacement élémentaire quelconque de M. Par définition on appelle circulation élémentaire de $\vec{V}(M)$ l'expression suivante :

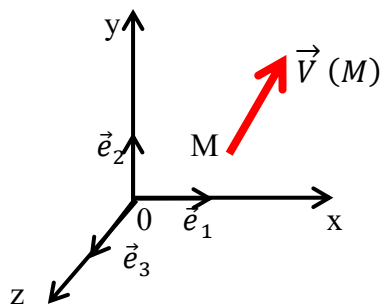


Figure II. 01 Circulation élémentaire

$$d\Gamma = \vec{V}(M) d\vec{M}$$

Puisque nous avons :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$d\vec{M} = dx\vec{e}_1 + dy\vec{e}_2 + dz\vec{e}_3$$

L'expression de la circulation élémentaire en coordonnées cartésiennes est la suivante :

$$d\Gamma = V_1(x, y, z) dx + V_2(x, y, z) dy + V_3(x, y, z) dz$$

Supposons que le point M se déplace de A à B sur une courbe "C" et que le vecteur champ $\vec{V}(M)$ soit défini en tous point de "C".

On appellera alors circulation de $\vec{V}(M)$ sur la courbe (C) l'intégrale curviligne :

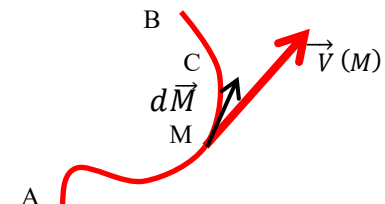
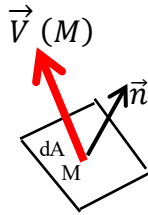


Figure II. 02 Circulation

$$\Gamma = \int_C \vec{V}(M) d\vec{M} \quad (\text{II.04})$$

5 Définition du flux

Soit un vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à un élément de surface dA . Considérons un champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ défini dans un domaine contenant la surface A .

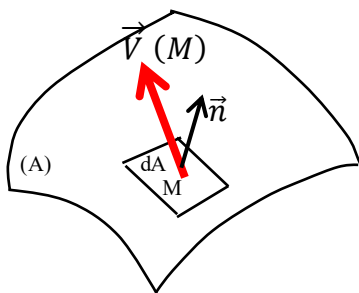


Le flux du vecteur $\vec{V}(M)$ à travers l'élément dA , orienté par $\vec{n}$, est par définition :

$$d\Phi = \vec{V}(M) \cdot \vec{n} dA$$

$d\Phi$ est un scalaire dont le signe dépend du choix fait pour le vecteur normal.

Figure II. 03 Flux élémentaire



Si $\vec{V}(M)$ est continu sur A , on définit le flux du champ des vecteurs à travers la surface A de la façon suivante :

$$\Phi = \iint_A \vec{V}(M) \cdot \vec{n} dA$$

Figure II. 04 Flux à travers une surface

6 Gradient

6-1 Définition

Soit un repère orthonormé $(e) = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $f(x, y, z)$ une fonction scalaire des trois variables x, y, z . La différentielle df de cette fonction représente sa variation élémentaire lorsqu'on passe du point $M(x, y, z)$ au point infiniment voisin $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$. Le vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$, que l'on note tout simplement $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dM}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{dM} = dx \vec{e}_1 + dy \vec{e}_2 + dz \vec{e}_3$$

Et la différentielle df :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Remarquons que si l'on pose :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_3$$

La différentielle df est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}} f$ et $\overrightarrow{dM}$

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dM}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est appelé le gradient du scalaire $f(x, y, z)$.

En coordonnées cylindriques, il s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right]$$

6-2 Champ de gradient

Un champ de vecteur $\vec{V}$ est un champ de gradient s'il existe une fonction $f(x, y, z)$ telle que l'on peut écrire $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z)$ en tout point.

Les surfaces d'équation $f(x, y, z) = \text{Constante}$ sont dites "surfaces équipotentiellles" (ou surfaces de niveau) du champ $\vec{V}$. Sur cette surface, pour tout déplacement élémentaire $d\vec{M}$, la variation de $f(x, y, z)$ est donc nulle. Il s'ensuit que :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{M} = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est donc normal aux surfaces équipotentiellles.

En mécanique des fluides, on s'intéressera aux écoulements où le vecteur vitesse $\vec{V}$ est un gradient $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$

6-3 Potentiel scalaire

On désigne par potentiel scalaire, dont dérive le champ de gradient $\vec{V}$, toute fonction scalaire U telle que :

$$\vec{V} = - \overrightarrow{\text{grad}} U$$

7 Divergence

Soit un vecteur $\vec{V} = V_1(x, y, z) \vec{e}_1 + V_2(x, y, z) \vec{e}_2 + V_3(x, y, z) \vec{e}_3$.

La divergence de ce vecteur est la somme de ses dérivées partielles prise par rapport à la coordonnée correspondante :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

Ainsi on passe d'un vecteur $\vec{V}$ à un scalaire. On montre que ce scalaire est un invariant par rapport à tout changement de trièdre.

Parfois on utilise l'opérateur "nabla" ∇ pour définir la divergence

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_3$$

On écrit :

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V}$$

Le résultat est bien un scalaire.

En coordonnées cylindriques la divergence d'un vecteur $\vec{V}$, s'écrit :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(rV_z)}{\partial z} \right]$$

8 Rotationnel

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{V} = V_1(x, y, z) \vec{e}_1 + V_2(x, y, z) \vec{e}_2 + V_3(x, y, z) \vec{e}_3$ est le vecteur :

$$\text{rot} \vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \vec{e}_3$$

Il est également intéressant d'utiliser l'opérateur nabla pour déterminer avec méthode le rotationnel :

$$\text{rot} \vec{V} = \nabla \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_3 \right) \wedge (V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3)$$

$$\text{rot} \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

Développons ce déterminant :

$$\text{rot} \vec{V} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}$$

Soit le résultat indiqué précédemment :

$$\text{rot} \vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \vec{e}_3$$

En coordonnées cylindriques le rotationnel d'un vecteur $\vec{V}$, s'écrit :

$$\text{rot} \vec{V} = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial z} \right), \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \right]$$

9 Théorème d'Ostrogradski

Dans un repère orthonormé $(e) = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ associé à un système de coordonnées cartésiennes, considérons quatre points de coordonnées :

$$M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad N \begin{vmatrix} x + dx \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad P \begin{vmatrix} x \\ y + dy \\ z \end{vmatrix} \quad Q \begin{vmatrix} x \\ y \\ z + dz \end{vmatrix}$$

Construisons le parallélépipède rectangle dont les quatre sommets sont M, N, P et Q. Sur chaque face orientons le vecteur normal vers l'extérieur du parallélépipède rectangle.

Désignons par :

$\vec{V}(M) = \vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z) \vec{e}_1 + V_2(x, y, z) \vec{e}_2 + V_3(x, y, z) \vec{e}_3$ le vecteur champ au voisinage du point M.

Le flux sortant par les faces d'abscisses x et $x+dx$ est :

$$d\Phi_1 = \vec{V}(N) \cdot \vec{e}_1 dydz + \vec{V}(M) \cdot (-\vec{e}_1) dydz = [V_1(x+dx, y, z) - V_1(x, y, z)] dydz$$

Soit encore :

$$d\Phi_1 = \frac{\partial V_1(x, y, z)}{\partial x} dx dydz = \frac{\partial V_1(x, y, z)}{\partial x} dV$$

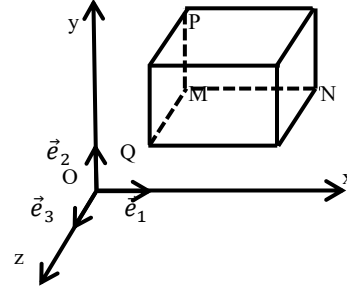


Figure II. 05 Flux élémentaire sortant

Désignons par dV le volume élémentaire $dx dy dz$.

En procédant de la même façon pour les faces d'abscisses $y, y+dy, z, z+dz$ nous obtenons :

$$d\Phi_2 = \frac{\partial V_2(x, y, z)}{\partial y} dV$$

$$d\Phi_3 = \frac{\partial V_3(x, y, z)}{\partial z} dV$$

Le flux de $\vec{V}(x, y, z)$ sortant du volume dV est donc :

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3$$

Soit encore :

$$d\Phi = \left(\frac{\partial V_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial V_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial V_3(x, y, z)}{\partial z} \right) dV$$

$$d\Phi = \text{div} \vec{V}(M) dV$$

Supposons que le champ de vecteurs $\vec{V}(P)$ soit également défini en tout point de la surface A et du volume V . Désignons par $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à l'élément de surface dA entourant le point P .

Le flux traversant la surface A est donc :

$$\Phi = \iint_A \vec{V}(P) \cdot \vec{n} dA$$

Intéressons-nous à l'ensemble du volume V et décomposons-le en parallélépipèdes élémentaires, conformément à la figure II. 06.

Pour deux parallélépipèdes en contact, le flux sortant de leur face commune est égal mais de signe contraire, leur somme est donc nulle.

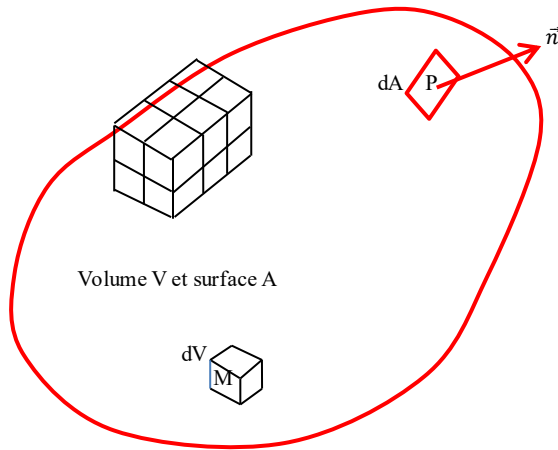


Figure II. 06 Flux élémentaire sortant du volume V

Évidemment, il en est de même pour tous les parallélépipèdes élémentaires à l'intérieur du volume V . Seuls restent en compte les flux sur les faces des parallélépipèdes appartenant à la surface extérieure A .

Compte tenu du résultat précédemment établi, on déduit :

$$\Phi = \iiint_V d\Phi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{V}(M) dV$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\Phi = \iint_A \vec{V}(P) \cdot \vec{n} dA = \iiint_V \operatorname{div} \vec{V}(M) dV \quad (\text{II.05})$$

Ce résultat constitue le théorème d'Ostrogradski qui s'énonce :

Si un champ de vecteurs est défini sur un domaine D , le flux sortant de toute surface A dont l'intérieur est inclus dans D est égal à l'intégrale de la divergence du champ sur le volume V limité par la surface A .

Soit m soit un scalaire et posons $\vec{V} = m\vec{e}_1$, $\vec{n} = \alpha\vec{e}_1$. De la relation ci-dessus on déduit :

$$\iint_A m \alpha dA = \iiint_V \frac{\partial m}{\partial x} dV$$

Si nous posons également $\vec{V} = m\vec{e}_2$, $\vec{n} = \beta\vec{e}_2$ puis ensuite $\vec{V} = m\vec{e}_3$, $\vec{n} = \gamma\vec{e}_3$ nous obtenons de la même façon :

$$\iint_A m \beta dA = \iiint_V \frac{\partial m}{\partial y} dV$$

$$\iint_A m \gamma dA = \iiint_V \frac{\partial m}{\partial z} dV$$

Ce qui s'écrit sous forme vectorielle :

$$\iint_A m \vec{n} dA = \iiint_V \overrightarrow{\operatorname{grad} m} dV \quad (\text{II.06})$$

10 Théorème de Green dans le plan

Le théorème de Green dans le plan donne la relation entre une intégrale curviligne le long d'une courbe simple fermée C et l'intégrale double sur la région du plan D délimité par C .

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

P et Q sont des fonctions continues de x et y et ont des dérivées continues dans D.

La courbe C, est parcourue dans le sens positif c'est-à-dire dans le sens trigonométrique.

La courbe C possède la propriété suivante : toute droite parallèle aux axes de coordonnées rencontre, au plus, la courbe C en deux points.

L'équation de la courbe ABC est $y_1 = F_1(x)$ et celle de la courbe ADC est $y_2 = F_2(x)$.

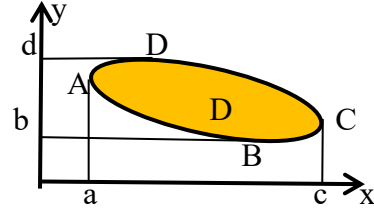


Figure II. 07 Domaine D

Calculons l'intégrale double : $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dy$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_{x=a}^{x=c} \left(\int_{F_1(x)}^{F_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_{x=a}^{x=c} \left(P(x, F_2(x)) - P(x, F_1(x)) \right) dx$$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = - \int_{x=a}^{x=c} P(x, F_1(x)) dx - \int_{x=c}^{x=a} P(x, F_2(x)) dx = - \int_C P dx$$

Soit encore :

$$\int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \quad (\text{II.07})$$

Tenons le même raisonnement que précédemment en exprimant, cette fois x en fonction de y. Posons $x_1 = f_1(y)$ pour la courbe BAD et pour celle de la courbe DCB $x_2 = f_2(y)$.

Donc de façon analogue, calculons l'intégrale double : $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dy dx = \int_{y=b}^{y=d} \left(\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y=b}^{y=d} \left(Q(y, f_2(y)) - Q(y, f_1(y)) \right) dy$$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dy dx = \int_{y=b}^{y=d} Q(y, f_2(y)) dy + \int_{y=d}^{y=b} Q(y, f_1(y)) dy = \int_C Q dx$$

Donc :

$$\int_C Q dx = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dy dx \quad (\text{II.08})$$

En additionnant (II.07) plus (II.08) on obtient la relation de Green dans le plan :

$$\int_C P dx + Q dx = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx \quad (\text{II.09})$$

11 Théorème de Stokes

La circulation d'un vecteur $\vec{V}$ le long d'un contour fermé C est égal au flux du rotationnel de ce vecteur à travers une surface A admettant C comme frontière.

$$\int_C \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \iint_A \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

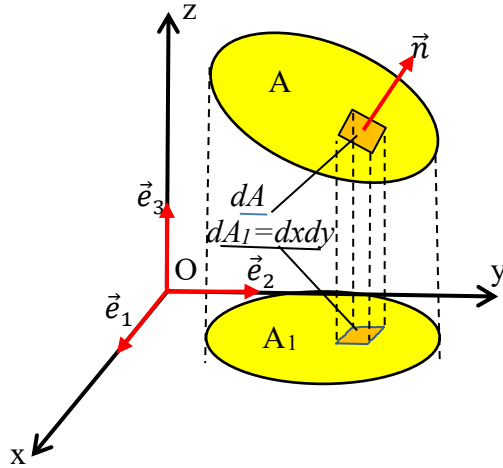


Figure II. 08 Projection de la surface A

Considérons une surface A telle que ces projections sur les plans Oxy , Oyz et Oxz soient des courbes simples fermées, conformément à la figure (II.08).

Admettons que la surface A est pour représentation $z=f(x, y)$ ou $x=g(y, z)$ ou encore $y=h(x, z)$ où $f(x, y)$, $g(y, z)$, $h(x, z)$ sont des fonctions continues, différentiables.

Posons :

$$\vec{V} = V_1(x, y, z) \vec{e}_1 + V_2(x, y, z) \vec{e}_2 + V_3(x, y, z) \vec{e}_3$$

Soit :

$$\iint_A \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \iint_A \overrightarrow{\text{rot}} (V_1(x, y, z) \vec{e}_1 + V_2(x, y, z) \vec{e}_2 + V_3(x, y, z) \vec{e}_3) \cdot \vec{n} dA$$

Intéressons-nous tout d'abord au terme :

$$\iint_A \overrightarrow{\text{rot}} (V_1(x, y, z) \vec{e}_1) \cdot \vec{n} dA$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} (V_1(x, y, z) \vec{e}_1) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial V_1}{\partial z} \vec{e}_2 - \frac{\partial V_1}{\partial y} \vec{e}_3$$

Et :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (V_1(x, y, z) \vec{e}_1) \cdot \vec{n} dA = \frac{\partial V_1}{\partial z} \vec{e}_2 \cdot \vec{n} dA - \frac{\partial V_1}{\partial y} \vec{e}_3 \cdot \vec{n} dA \quad (\text{II.10})$$

En prenant $z=f(x, y)$ comme équation de la surface A nous avons pour tout point $N \in A$:

$$\overrightarrow{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + f(x, y)\vec{e}_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \overrightarrow{ON}}{\partial y} = \vec{e}_2 + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \vec{e}_3$$

On peut donc déduire que le vecteur $\frac{\partial \vec{ON}}{\partial y}$ est tangent à la surface A, il s'ensuit donc :

$$\frac{\partial \vec{ON}}{\partial y} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{n} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \vec{e}_3 \cdot \vec{n} = -\frac{\partial z}{\partial y} \vec{e}_3 \cdot \vec{n}$$

Et par suite :

$$\overrightarrow{rot}(V_1(x, y, z) \vec{e}_1) \cdot \vec{n} dA = -\left(\frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) \vec{e}_3 \cdot \vec{n} dA \quad (\text{II.11})$$

Or sur la surface A, nous pouvons écrire :

$$V_1(x, y, z) = V_1(x, y, f(x, y)) = P(x, y)$$

La relation (II.11) devient :

$$\overrightarrow{rot}(V_1(x, y, z) \vec{e}_1) \cdot \vec{n} dA = -\frac{dP}{dx} \vec{e}_3 \cdot \vec{n} dA \quad (\text{II.12})$$

Désignons par A_1 la projection de la surface A sur le plan au Oxy et par C_1 la frontière de A_1 .

$$\iint_A \overrightarrow{rot}(V_1(x, y, z) \vec{e}_1) \cdot \vec{n} dA = -\iint_{A_1} \frac{dP}{dx} dx dy \quad (\text{II.13})$$

Puisque $\vec{e}_3 \cdot \vec{n} dA = dx dy$

En vertu du théorème de Green nous avons :

$$\int_{C_1} P dx = -\iint_{A_1} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

Notons qu'en chaque point (x, y) de C_1 , la valeur de P est la même que celle de $V_1(x, y, z)$ en tout point (x, y, z) de C. Comme dx est le même pour les deux courbes nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_{C_1} P dx &= \int_C V_1(x, y, z) dx \\ \iint_A \overrightarrow{rot}(V_1(x, y, z) \vec{e}_1) \cdot \vec{n} dA &= \int_C V_1(x, y, z) dx \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

En tenant le même raisonnement pour les plans de projection Oyz et Oxz, on déduit :

$$\iint_A \overrightarrow{rot}(V_2(x, y, z) \vec{e}_2) \cdot \vec{n} dA = \int_C V_2(x, y, z) dy \quad (\text{II.15})$$

$$\iint_A \overrightarrow{rot}(V_3(x, y, z) \vec{e}_3) \cdot \vec{n} dA = \int_C V_3(x, y, z) dz \quad (\text{II.16})$$

En additionnant les relations (II.14), (II.15) et (II.16), on obtient la relation de Stokes :

$$\int_C \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \iint_A \overrightarrow{rot} \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

12 Relations générales

$\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont des champs vectoriels et f et g sont des champs scalaires

$$\overrightarrow{grad}(fh) = f\overrightarrow{grad}h + h\overrightarrow{grad}f \quad (\text{II.18})$$

$$\overrightarrow{rot}(f\vec{V}) = f\overrightarrow{rot}(\vec{V}) - \vec{V} \wedge \overrightarrow{grad}f \quad (\text{II.19})$$

$$div(f\vec{V}) = fdiv(\vec{V}) + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}f \quad (\text{II.20})$$

$$div(\vec{V} \wedge \vec{W}) = \vec{W} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{V}) - \overrightarrow{rot}(\vec{W}) \cdot \vec{V} \quad (\text{II.21})$$

***MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS ET
THERMODYNAMIQUE TECHNIQUES***

Application aux turbomachines

Cours avec exercices corrigés

Livre 2

Mécanique des milieux continus

Marcel Frelin

Sous-Directeur de laboratoire honoraire au
Conservatoire National des Arts et Métiers

TABLE DES MATIERES

Mécanique des milieux continus

Chapitre III	Cinématique du solide.....	1
1	Référentiel et repère	1
2	Notions de torseur.....	2
2-1	Torseur des efforts extérieurs	3
2-2	Principe fondamental de la statique du solide.....	4
3	Vecteur rotation	4
4	Torseur cinématique	5
5	Rotation d'un solide autour d'un axe fixe	5
6	Mouvement d'un repère	6
7	Dérivation des vecteurs	7
8	Composition des vitesses.....	8
9	Composition des accélérations	9
10	Coordonnées intrinsèques.....	10
Chapitre IV	11 Cinétique et dynamique du solide.....	11
1	Notion de masse	11
2	Centre de masse.....	11
3	Moment cinétique.....	12
4	Torseur cinétique	12
5	Torseur dynamique.....	12
6	Relation entre moment cinétique et moment dynamique	13
7	Moment d'inertie	13
8	Dynamique	15
9	Principe fondamental de la mécanique	15
10	Travail et puissance d'une force qui s'exerce sur un point matériel	15
11	Travail et puissance d'une force qui s'exerce sur un solide	16
12	Energie cinétique	17
13	Théorème de Kœnigs.....	18
14	Théorème de l'énergie cinétique pour un système de particules	19
15	Energie cinétique dans le repère central	20
Chapitre V	Contraintes	22
1	Définition d'une contrainte	22
2	Faisceau des contraintes	25
3	Équations d'équilibre	28
3-1	Résultante.....	29

3-2 Moment.....	30
4 Tenseur des contraintes	30
Chapitre VI Tenseur des contraintes.....	37
1 Contraintes principales et directions principales.....	37
2 Ellipsoïde des contraintes	38
3 Définition d'un état de contrainte.....	41
3-1 Etat de contrainte triple	41
3-2 État de contrainte double.....	41
3-3 Etat de contrainte simple.....	41
4 Invariants scalaires du tenseur des contraintes.....	42
5 Déviateur des contraintes	42
6 Représentation plane de MOHR.....	43
Chapitre VII Petites déformations.....	49
1 Déplacement et déformation.....	49
2 Étude de la déformation.....	49
3 Calcul de la déformation relative λ	51
4 Tenseur des déformations.....	52
5 Interprétations des composantes du tenseur des déformations.....	54
5.1 Dilatations linéiques	54
5.2 déformation angulaire.....	54
6 Dilatations principales et directions principales.....	56
7 Ellipsoïde des déformations	56
8 Tri-cercle de Mohr des déformations	57
9 Mesures extensométriques.....	58
10 Invariants scalaires du tenseur des déformations	61
11 Coefficient de dilatation cubique.....	61
12 Déviateur des déformations.....	62
13 Conditions de compatibilité entre déformations et déplacements.....	63
Chapitre VIII Relations entre contraintes et déformations	64
1 Généralités.....	64
2 Relations entre contraintes et déformations dans un repère quelconque.....	66
3 Problèmes d'élasticité	69
4 Etat plan de contrainte.....	74
5 Etat plan de déformation	76
6 Fonction d'Airy.....	77
6-1 $\mathbf{X} = \mathbf{0}$	77
6-2 $\mathbf{X}$ dérive d'une fonction de force U	78

Chapitre IX	Aspect macroscopique de l'état fluide	81
1 Pression.....		81
2 Fluide parfait		81
3 Principe zéro de la thermodynamique		82
4 Température.....		82
4-1 Température centésimale		83
4-2 Température Kelvin		83
4-3 Température Celsius.....		85
5 Chaleur		86
5-1 Équation calorimétrique		86
5-2 Quantité de chaleur		87
5-3 Capacité thermique massique.....		89
5-4 Source de chaleur		90
6 Gaz parfait		90
6-1 Équation d'état des gaz parfaits.....		90
6-2 Mélange de gaz parfaits		93
6-3 Loi de Dalton.....		94
Chapitre X	Cinématique des fluides	97
1 Généralités		97
1-1 Particule fluide		97
1-2 Variables de Lagrange.....		98
1-3 Variables d'Euler		98
1-4 Écoulement permanent		99
2 Dérivées particulières		99
2-1 Dérivée particulière d'une fonction scalaire		99
2-2 Dérivée particulière d'une intégrale de volume.....		100
3 Équation de continuité		101
4 Différents types d'écoulements		103
5 Répartition des vitesses		104
6 Écoulements irrotationnels ou à potentiel des vitesses.....		105
7 Écoulements rotationnels.....		107
8 Écoulements laminaire et turbulent		108
9 Viscosité		109
Chapitre XI	Dynamique des fluides.....	112
1. Equations d'Euler.....		112
2. Equations de Navier Stokes.....		113
3. Equations de Bernoulli		114

4. Théorème des quantités de mouvement	121
4.1 Résultante	121
4.2 Moment.....	122
5. Etude dynamique d'une particule fluide en écoulement permanent	123
6 Travail des forces de contact dans un fluide quasiment au repos.....	124
7 Travail des forces intérieures agissant sur une particule fluide	125
8 Équation fondamentale d'un écoulement permanent unidimensionnel	125
9 Perte de pression.....	127
10 Pertes de pression singulières des conduites	128
10. 1. Élargissement brusque.....	128
10. 2. Rétrécissement brusque.....	130

Chapitre III

Cinématique du solide

La cinématique est l'étude des mouvements indépendamment des causes qui les provoquent.

En mécanique, dite rationnelle, on considère le corps solide comme un système de points matériels qui restent fixes les uns par rapport aux autres.

Cette notion du corps solide indéformable est théorique mais suffisante pour étudier son mouvement sous l'action d'un système de forces. Dans ces conditions on le désigne souvent par solide théorique.

1 Référentiel et repère

Pour étudier un solide, il faut se fixer un référentiel pour déterminer à tout instant sa situation. L'association d'un repère d'espace à trois dimensions $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et du repère de temps à une dimension constitue un référentiel.

Un repère d'espace différent $(O_1, \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ et du repère de temps définit un autre référentiel.

Habituellement, nous utiliserons un référentiel absolu ou Galiléen que nous noterons R_g . Dans la partie " dynamique du solide " il sera précisé qu'un repère Galiléen est défini par la première loi de Newton.

Le repère de Copernic est une bonne approximation du référentiel galiléen. Son origine est le centre du soleil et ses trois axes sont définis par des étoiles fixes.

Dans un repère d'espace, le système d'axes de coordonnées peut être quelconque mais par simplification nous n'utiliserons que des systèmes d'axes orthonormés directs.

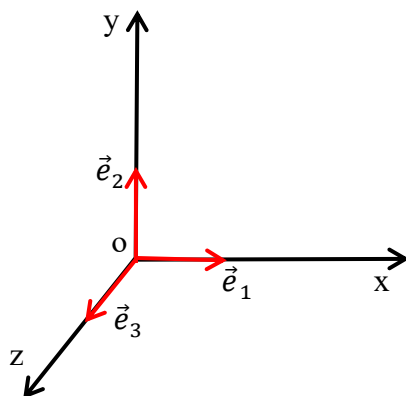


Figure III.01 Repère cartésien

De surcroît, nous utiliserons un système de coordonnées cartésiennes $oxyz$ comportant trois vecteurs unitaires $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Ces vecteurs sont de même direction et de même sens que les trois axes du repère conformément à la figure III.01.

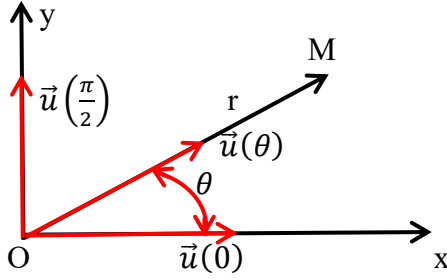
Dans ce repère, un vecteur unitaire $\vec{n}$ de composantes α, β et γ s'écrit :

$$\vec{n} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$$

$$\text{avec } (\vec{n})^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Dans la partie spécifique aux turbomachines, il sera souvent utilisé un repère cylindrique où un point M aura comme coordonné :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}(\theta) + z \vec{e}_3 \quad (\text{III.01})$$



Avec :

$$r \vec{u}(\theta) = r \left(\cos \theta \vec{u}(0) + \sin \theta \vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

En ayant posé :

$$\vec{e}_1 = \vec{u}(0) \text{ et } \vec{e}_2 = \vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Figure III.02 Projection dans un repère cylindrique

2 Notions de torseur

On appelle torseur $[\Gamma]$ l'ensemble des deux champs de vecteurs suivants :

L'un est le vecteur libre que l'on appelle somme du torseur.

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{A_i M_i} = \overrightarrow{A_1 M_1} + \overrightarrow{A_2 M_2} + \dots + \overrightarrow{A_i M_i} + \dots + \overrightarrow{A_n M_n}$$

L'autre est désigné par moment en O du torseur $[\Gamma]$.

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_i M_i} = \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{A_1 M_1} + \dots + \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_i M_i} + \dots + \overrightarrow{OA_n} \wedge \overrightarrow{A_n M_n}$$

Ces deux vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{M}_O$ sont les éléments de réduction du torseur $[\Gamma]$ au point O.

La théorie de l'algèbre des torseurs sort du cadre de cet ouvrage, mais néanmoins rappelons quelques-unes de leurs propriétés.

La somme de deux torseurs $[\Gamma_1]$ et $[\Gamma_2]$ de résultantes $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$ et de moments $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ est le torseur $[\Gamma]$ de résultante $\vec{S}_1 + \vec{S}_2$ et de moment $\vec{M}_1 + \vec{M}_2$.

Considérons un torseur $[\Gamma]$ de résultante $\vec{S}$ et de moments $\vec{M}_O$ en un point O et un torseur $[\Gamma']$ de résultante $\vec{S}$ et de moment $\vec{M}_p$ en un point p.

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_i M_i}$$

$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{PA_i} \wedge \overrightarrow{A_i M_i}$$

De la relation de Chasles on déduit :

$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^{i=n} (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_i}) \wedge \overrightarrow{A_i M_i} = \overrightarrow{PO} \wedge \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{A_i M_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_i M_i}$$

Soit en définitive :

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{S} \quad (\text{III.02})$$

Cette dernière relation est parfois désignée par formule du changement de l'origine des moments.

La résultante $\vec{S}$, constituant un champ de vecteurs uniforme, est un invariant. Le produit scalaire des éléments de réduction d'un torseur ne dépend pas du point où il est calculé.

Pour le monter comparons alors les deux scalaires : $I = \vec{S} \cdot \vec{M}_O$ et $I' = \vec{S} \cdot \vec{M}_P$

$$I' = \vec{S} \cdot \vec{M}_P = \vec{S} \cdot (\vec{M}_O + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{S}) = \vec{S} \cdot \vec{M}_O + \underbrace{\vec{S} \cdot (\overrightarrow{PO} \wedge \vec{S})}_0 = I$$

$$I = \vec{S} \cdot \vec{M}_O \quad (\text{III.03})$$

L'expression (III.03) est donc indépendante du choix de O, c'est un deuxième invariant.

L'utilisation des torseurs simplifie les mises en équations des systèmes mécaniques. En effet une égalité de torseurs remplace deux égalités vectorielles et six égalités scalaires.

2-1 Torseur des efforts extérieurs

Les efforts extérieurs s'exerçant sur un corps solide se décomposent en deux grandes familles

- les forces de contact qui agissent sur sa surface extérieure.
- les forces à distance qui s'exercent sur sa masse comme par exemple le poids ou les forces d'inertie.

Soit $\sum_i \vec{F}_i$ l'ensemble des efforts extérieurs exercés sur le solide (S) en leurs points d'application M_i . La résultante est :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{R}(\text{forces} \rightarrow \text{surface}) + \vec{R}(\text{forces à distance} \rightarrow \text{solide})$$

Et le moment en un point quelconque P est :

$$\vec{M}_p = \sum_i (\vec{PM}_i \wedge \vec{F}_i) = \vec{M}_p(\text{forces} \rightarrow \text{surface}) + \vec{M}_p(\text{forces à distance} \rightarrow \text{solide})$$

Ces deux vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{M}_p$ sont les éléments de réduction du torseur des efforts extérieurs $[\Gamma_{\text{efforts extérieurs}}]$ au point P.

$$[\Gamma_{\text{efforts extérieurs}}] \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_p \end{array} \right. \quad (\text{III.04})$$

2-2 Principe fondamental de la statique du solide

Pour qu'un solide soit en équilibre, il faut que le torseur des efforts extérieurs, en un point P quelconque, soit égal à un torseur nul.

$$[\Gamma_{\text{efforts extérieurs}}] = [\Gamma(0)] \quad (\text{III.05})$$

Et sous forme vectorielle, le principe fondamental de la statique du solide s'écrit :

$$\vec{R}(\text{forces} \rightarrow \text{surface}) + \vec{R}(\text{forces à distance} \rightarrow \text{solide}) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_p(\text{forces} \rightarrow \text{surface}) + \vec{M}_p(\text{forces à distance} \rightarrow \text{solide}) = \vec{0}$$

3 Vecteur rotation

Dans un repère orthonormé R considérons deux points M et P d'un solide indéformable. Nous pouvons donc écrire :

$$(\overrightarrow{MP})^2 = \text{constante}$$

En dérivant par rapport au temps t on a :

$$2 \overrightarrow{MP} \left(\frac{d \overrightarrow{MP}}{dt} \right)_R = 0$$

Et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\overrightarrow{MP} \frac{d \overrightarrow{MP}}{dt} = \overrightarrow{MP} \left(\frac{d}{dt} (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP}) \right) = -\overrightarrow{MP} \cdot \vec{V}(M/R) + \overrightarrow{MP} \cdot \vec{V}(P/R) = 0$$

Soit en définitive :

$$\overrightarrow{MP} \cdot \vec{V}(M/R) = \overrightarrow{MP} \cdot \vec{V}(P/R) \quad (\text{III.06})$$

La relation (III.06) est à rapprocher des relations (III.03) et (III.02), elle caractérise un torseur.

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\vec{V}(P/R) = \vec{V}(M/R) + \overrightarrow{PM} \wedge \vec{\omega} \quad (\text{III.07})$$

Le vecteur $\vec{\omega}$ est appelé vecteur rotation.

Remarque :

Désignons par O l'origine du repère R et supposons que la vitesse $\vec{V}(O/R)$ soit nulle.

La relation (III.07) s'écrit donc : $\vec{V}(O/R) = \vec{V}(M/R) + \vec{OM} \wedge \vec{\omega} = \vec{0}$. Il s'ensuit donc :

$$\vec{V}(M/R) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

Posons : $\vec{V}(M/R) = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3$ et $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3$

Sachant que dans le repère R, le point M a pour coordonnées x, y, z, nous pouvons écrire :

$$\begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = \begin{matrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{matrix}$$

Or on peut remarquer que si nous faisons le calcul de $\frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{V}(M/R)$ nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{V}(M/R) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \omega_2 z - \omega_3 y \\ \frac{\partial}{\partial y} & \omega_3 x - \omega_1 z \\ \frac{\partial}{\partial z} & \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_1 - (-\omega_1) \\ \omega_2 - (-\omega_2) \\ \omega_3 - (-\omega_3) \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{V}(M/R) = \vec{\omega} \quad \text{(III.08)}$$

4 Torseur cinématique

On appelle torseur cinématique, le torseur où la vitesse $\vec{V}$ est le moment et $\vec{\omega}$ la résultante. Les éléments de réduction de ce torseur en P sont $\vec{\omega}$ et $\vec{V}(P/R)$ en M ils seraient $\vec{\omega}$ et $\vec{V}(M/R)$.

$$[\Gamma_{cinématique}] \left\{ \begin{matrix} \vec{\omega} \\ \vec{V} \end{matrix} \right.$$

5 Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Considérons la rotation d'un solide (s) autour de l'axe OZ dans le repère R.

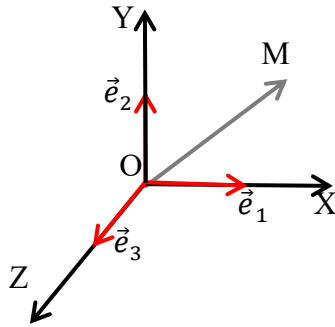


Figure III.03 Rotation autour de OZ

Dans ce repère un point $M \in \mathcal{A}(s)$ aura comme coordonnées :

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3$$

Pour ce solide en rotation autour de OZ le vecteur rotation sera :

$$\vec{\omega} = \omega\vec{e}_3$$

Dans ces conditions la relation (III.07) peut s'écrire :

$$\vec{V}(O/R) = \vec{V}(M/R) + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}$$

La vitesse de tous les points appartenant à l'axe Oz est nulle donc $\vec{V}(O/R) = \vec{0}$

Mais puisque $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega} = Y\omega\vec{e}_1 - X\omega\vec{e}_2$

Il s'ensuit que $\vec{V}(M/R) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = (-Y\vec{e}_1 + X\vec{e}_2) \omega$

Remarque :

Ce résultat est immédiatement obtenu en travaillant avec le repère cylindrique représenté sur la figure III.02. Dérivons la relation (III.01) par rapport au temps t :

$$\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} \right)_R = r \frac{d\theta}{dt} \vec{u} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

Et puisque : $\vec{u} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2$ $X = r \cos \theta$ $Y = r \sin \theta$

Nous retrouvons le résultat de la relation précédente :

$$\vec{V}(M/R) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = (-Y\vec{e}_1 + X\vec{e}_2) \omega$$

Pour un solide tournant autour d'un axe fixe, nous pouvons écrire :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (\text{III.09})$$

On appelle ω la vitesse de rotation (ou vitesse angulaire) d'un système en rotation. Ce scalaire ω , désigne également la pulsation (ou fréquence angulaire) d'un phénomène périodique.

Pour ω , l'unité est le radian par seconde (rad/s). Dans le monde industriel, notamment dans celui des turbomachines, on exprimera ω en tours par minute (tr/min).

6 Mouvement d'un repère

Soit (R) un repère orthonormé $O, \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ en mouvement par rapport à un repère (g) fixe $o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ conformément à la figure III.04.

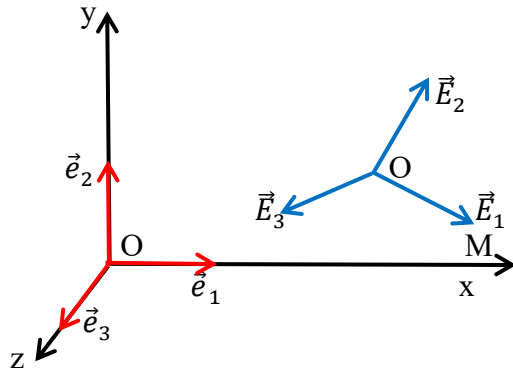
Pour une raison pédagogique posons $\vec{E}_1 = \overrightarrow{OM}$ et utilisons la relation (III.07)

$$\vec{V}(O/g) = \vec{V}(M/g) + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/g) - \vec{V}(O/g) + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega} &= \vec{0} \\ \underbrace{\left(\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} \right)_g - \left(\frac{d(\overrightarrow{OO})}{dt} \right)_g + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}}_{\left(\frac{d(-\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OO})}{dt} \right)_g = \left(\frac{d\vec{E}_1}{dt} \right)_g} &= \vec{0} \end{aligned}$$

En tenant le même raisonnement sur $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_3$ on obtient, en définitive, les résultats suivants :



$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{E}_1}{dt} \right)_g &= \vec{\omega} \wedge \vec{E}_1 \\ \left(\frac{d\vec{E}_2}{dt} \right)_g &= \vec{\omega} \wedge \vec{E}_2 \\ \left(\frac{d\vec{E}_3}{dt} \right)_g &= \vec{\omega} \wedge \vec{E}_3 \end{aligned} \quad (III.10)$$

Figure III.04 Mouvement du repère (R)

7 Dérivation des vecteurs

Supposons connues les composantes d'un vecteur $\vec{L}$ dans les repères (g) et (R) définis précédemment.

C'est à dire dans le repère (g) : $\vec{L} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$

Et dans le repère (R) : $\vec{L} = A\vec{E}_1 + B\vec{E}_2 + C\vec{E}_3$

Dérivons, par rapport au temps, $\vec{L}$ dans les repères (g) et (R)

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_g = \frac{da}{dt} \vec{e}_1 + \frac{db}{dt} \vec{e}_2 + \frac{dc}{dt} \vec{e}_3$$

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_R = \frac{dA}{dt} \vec{E}_1 + \frac{dB}{dt} \vec{E}_2 + \frac{dC}{dt} \vec{E}_3$$

Si $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ et $\vec{E}_3$ sont des fonctions du temps nous avons :

$$\left(\frac{\vec{dL}}{dt}\right)_g = \frac{dA}{dt}\vec{E}_1 + \frac{dB}{dt}\vec{E}_2 + \frac{dC}{dt}\vec{E}_3 + A\frac{d\vec{E}_1}{dt} + B\frac{d\vec{E}_2}{dt} + C\frac{d\vec{E}_3}{dt}$$

Compte tenu des relations (III.10) nous avons :

$$\left(\frac{\vec{dL}}{dt}\right)_g = \left(\frac{\vec{dL}}{dt}\right)_R + A\vec{\omega} \wedge \vec{E}_1 + B\vec{\omega} \wedge \vec{E}_2 + C\vec{\omega} \wedge \vec{E}_3 = \left(\frac{\vec{dL}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \wedge (A\vec{E}_1 + B\vec{E}_2 + C\vec{E}_3)$$

Soit en définitive :

$$\left(\frac{\vec{dL}}{dt}\right)_g = \left(\frac{\vec{dL}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \wedge \vec{L} \quad (\text{III.11})$$

8 Composition des vitesses

Conservons les notations d'un paragraphe précédent, c'est à dire un repère (R) en mouvement par rapport à un repère (g) fixe conformément à la figure III.04.

Dans le repère (g) un point M aura comme coordonnées :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Et dans le repère (R) :

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{E}_1 + Y\vec{E}_2 + Z\vec{E}_3$$

Le vecteur vitesse du point M, dans le repère (g) est :

$$\vec{V}(M/g) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_g = \frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz}{dt}\vec{e}_3$$

Dans le repère (R) la vitesse de M est :

$$\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \frac{dX}{dt}\vec{E}_1 + \frac{dY}{dt}\vec{E}_2 + \frac{dZ}{dt}\vec{E}_3$$

Mais :

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/g) &= \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_g = \left(\frac{d(\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OM})}{dt}\right)_R \\ \vec{V}(M/R) &= \left(\frac{d\overrightarrow{OO}}{dt}\right)_g + \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_g \\ \vec{V}(M/g) &= \vec{V}(O/g) + \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_g \end{aligned}$$

Compte tenu de la relation (III.11), en posant $\vec{L} = \overrightarrow{OM}$ on obtient

$$\vec{V}(M/g) = \vec{V}(O/g) + \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R + \vec{\omega} \wedge \vec{OM} \quad (\text{III.12})$$

Le vecteur $\vec{\omega}$ est la rotation d'entraînement de (R) par rapport à (g) que l'on notera $\vec{\omega}(R/g)$.

Le vecteur $\vec{V}_e\left(\frac{M}{g}\right) = \vec{V}\left(\frac{O}{g}\right) + \vec{\omega}\left(\frac{R}{g}\right) \wedge \vec{OM}$ est appelé vitesse d'entraînement du point M

Le vecteur $\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R$ est la vitesse du point M par rapport à (R).

On la désigne souvent par vitesse relative.

$$\vec{V}(M/g) = \vec{V}_e(M/g) + \vec{V}(M/R) \quad (\text{III.13})$$

9 Composition des accélérations

Dans le repère (g) dérivons, par rapport au temps la relation (III.12) pour décomposer l'accélération de M dans le repère (g).

$$\vec{\gamma}(M/g) = \left(\frac{d\vec{V}(M/g)}{dt} \right)_g = \underbrace{\left(\frac{d\vec{V}(O/g)}{dt} \right)_g}_{\vec{\gamma}(O/g)} + \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R \right)_g + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_g \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_g$$

Utilisons la relation (III.11) pour ces termes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R \right)_g &= \left(\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right)_g = \left(\frac{d^2\vec{V}(M/R)}{dt^2} \right)_R + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M/R) \\ &= \vec{\gamma}(M/R) + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M/R) \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_g = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_R + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_R$$

Et pour le dernier terme :

$$\vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_g = \vec{\omega} \wedge \left(\left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R + \vec{\omega} \wedge \vec{OM} \right) = \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M/R) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

D'où l'expression du vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(M/g) = \vec{\gamma}(O/g) + \vec{\gamma}(M/R) + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M/R) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_g \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M/R) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

Soit en ordonnant :

$$\vec{\gamma}(M/g) = \underbrace{\vec{\gamma}(O/g) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_R \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})}_{\vec{\gamma}_e(M)} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{V}(M/R)}_{\vec{\gamma}_C(M)} + \vec{\gamma}(M/R) \quad (\text{III.14})$$

$\vec{\gamma}_e(M)$ est par définition le vecteur accélération du point M.

$\vec{\gamma}_C(M)$ est le vecteur accélération de Coriolis.

$$\vec{\gamma}(M/g) = \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_C(M) + \vec{\gamma}(M/R) \quad (\text{III.15})$$

10 Coordonnées intrinsèques

Soit (C) la trajectoire décrite par un point M animé d'une vitesse $\vec{V}(M)$. Désignons par $ds = MM_1$ le déplacement élémentaire du point M pendant l'intervalle de temps dt .

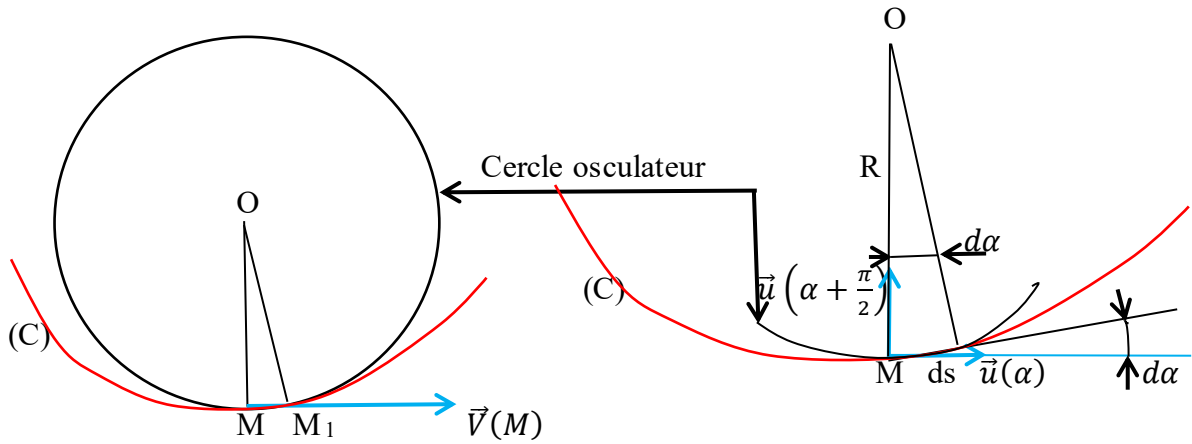


Figure III.05 Plan osculateur M, $\vec{u}(\alpha)$, $\vec{u}(\alpha + \frac{\pi}{2})$

Posons : $OM = R$ et $\vec{V}(M) = V \vec{u}(\alpha)$

Par ailleurs nous avons : $ds = R d\alpha$ et $V = \frac{ds}{dt}$

L'accélération du point M dans ce repère est donc :

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} = \frac{dV}{dt} \vec{u}(\alpha) + V \frac{d\alpha}{dt} \vec{u}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{mais } \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} V$$

D'où l'expression de l'accélération :

$$\vec{\gamma}(M) = \underbrace{\frac{dV}{dt} \vec{u}(\alpha)}_{\text{accélération tangentielle}} + \underbrace{\frac{V^2}{R} \vec{u}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{accélération normale}} \quad (\text{III.16})$$

Chapitre IV

Cinétique et dynamique du solide

La cinétique est l'étude du mouvement des corps en utilisant les notions de longueur, de temps et de masse.

1 Notion de masse

La masse d'un solide est un nombre plus grand que zéro vérifiant les axiomes suivants :

- conservatrice dans le temps, c'est-à-dire constante.
- grandeur mesurable

La masse caractérise une quantité de matière.

2 Centre de masse

Le centre de masse d'un solide, est le point où l'on applique les effets d'inertie, on l'appelle donc également centre d'inertie.

On définit le centre de masse G, ou centre d'inertie, par la relation suivante :

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} dm = \vec{0} \quad (\text{IV.01})$$

Où M désigne un point d'un solide (S) de masse m.

Pour déterminer le centre de masse, considérons un point O quelconque (l'origine du repère par exemple) et appliquons la relation de Chasles.

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} dm = \underbrace{\int_{M \in S} \overrightarrow{GO} dm}_{\overrightarrow{GO} \int_{M \in S} dm = \overrightarrow{GO} m} + \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} dm = \vec{0}$$

Soit en définitive :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} dm \quad (\text{IV.02})$$

Le centre de masse d'un solide ne doit pas être confondu avec le centre de gravité d'un solide qui est le point d'application de la résultante des forces de pesanteur.

Remarques :

Dans un repère orthonormé (R) d'origine O, on obtient en dérivant, par rapport au temps, la relation (IV.02) :

- Pour la vitesse :

$$m\vec{V}(G/R) = \int_{M \in S} \vec{V}(M/R) dm \quad (\text{IV.03})$$

- Pour l'accélération :

$$m\vec{\gamma}(G/R) = \int_{M \in S} \vec{\gamma}(M/R) dm \quad (\text{IV.04})$$

3 Moment cinétique

Le moment cinétique en un point A, d'un solide (S) dans son mouvement par rapport à un repère (R) est par définition :

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \int_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R) dm \quad (\text{IV.05})$$

4 Torseur cinétique

Le torseur cinétique d'un solide (S) dans son mouvement par rapport à un espace (R) est défini par les relations (IV.03) et (IV.05). Soit :

Résultante cinétique :

$$m\vec{V}(G/R) = \int_{M \in S} \vec{V}(M/R) dm$$

Moment cinétique en A :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(A, S/R) &= \int_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R) dm \\ [I_{cinétique}] &\left\{ \begin{array}{l} \int_{M \in S} \vec{V}(M/R) dm \\ \vec{\sigma}(A, S/R) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Remarque :

En un autre point B, le moment cinétique s'écrirait :

$$\vec{\sigma}(B, S/R) = \int_{M \in S} \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}(M/R) dm$$

Et de la relation (III.02) nous déduisons immédiatement :

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \vec{\sigma}(B, S/R) + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{V}(G/R) \quad (\text{IV.06})$$

5 Torseur dynamique

La résultante dynamique est définie par la relation (IV.04) : $m\vec{\gamma}(G/R) = \int_{M \in S} \vec{\gamma}(M/R) dm$

Le moment dynamique en un point A, d'un solide (S) dans son mouvement par rapport à un repère (R) est par définition :

$$\vec{\delta}(A, S/R) = \int_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M/R) dm \quad (\text{IV.07})$$

D'où l'expression du tenseur dynamique :

$$[\Gamma_{\text{dynamique}}] \begin{cases} m\vec{\gamma}(G/R) \\ \vec{\delta}(A, S/R) \end{cases} \quad (\text{IV.08})$$

6 Relation entre moment cinétique et moment dynamique

Dérivons dans R le moment cinétique, relation (IV.05)

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(A, S/R) = \int_{M \in S} \underbrace{\frac{d}{dt} \overrightarrow{AM}}_{\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) = -\vec{V}(A/R) + \vec{V}(M/R)} \wedge \vec{V}(M/R) dm + \int_{M \in S} \underbrace{\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M/R)}_{\vec{\delta}(A, S/R)} dm$$

En tenant compte de la relation (IV.03) on obtient l'importante égalité :

$$\vec{\delta}(A, S/R) = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}(A, S/R) + m \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/R) \quad (\text{IV.09})$$

Remarque :

En considérant le centre de masse G et en appliquant la relation (III.02) on obtient les théorèmes de Kœnigs pour le moment cinétique et pour le moment dynamique.

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(A, S/R) &= \vec{\sigma}(G, S/R) + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}(G/R) \\ \vec{\delta}(A, S/R) &= \vec{\delta}(G, S/R) + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{\gamma}(G/R) \end{aligned}$$

7 Moment d'inertie

Le moment d'inertie est une grandeur physique qui caractérise la géométrie des masses d'un solide.

Considérons un solide (S) en rotation autour de O dans un repère orthonormé (R). Le moment cinétique en O, d'un solide (S) est (relation IV.05) :

$$\vec{\sigma}(O, S/R) = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R) dm$$

En utilisant la relation (III.08) nous pouvons écrire :

$$\vec{\sigma}(O, S/R) = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) dm \quad (\text{IV.10})$$

Dans ce repère posons :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\vec{\omega} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

En effectuant le double produit vectoriel : $\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$

On obtient :

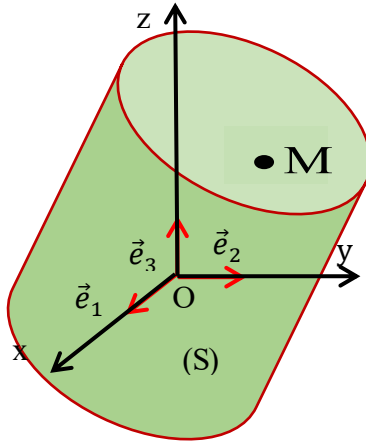


Figure IV.01 Rotation autour de O

$$\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = \begin{cases} a(y^2 + z^2) - bxy - cxz \\ b(z^2 + x^2) - cyz - axy \\ c(x^2 + y^2) - axz - byz \end{cases}$$

Et par suite la relation (IV.09) devient :

$$\vec{\sigma}(O, S/R) = \begin{cases} a \int_S (y^2 + z^2) dm - b \int_S xy dm - c \int_S xz dm \\ b \int_S (z^2 + x^2) dm - c \int_S yz dm - a \int_S xy dm \\ c \int_S (x^2 + y^2) dm - a \int_S xz dm - b \int_S yz dm \end{cases}$$

L'expression $I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2) dm$ est appelée moment d'inertie par rapport à l'axe x.

De même $I_{yy} = \int_S (z^2 + x^2) dm$ et $I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm$ sont respectivement les moments d'inertie par rapport aux axes y et z.

Les termes $\int_S xy dm$, $\int_S xz dm$, $\int_S yz dm$ sont les produits d'inertie et respectivement notés I_{xy} , I_{xz} , I_{yz} .

Compte tenu de ces notations le moment cinétique peut s'écrire :

$$\vec{\sigma}(O, S/R) = \begin{cases} aI_{xx} - bI_{xy} - cI_{xz} \\ bI_{yy} - cI_{yz} - aI_{xy} \\ cI_{zz} - aI_{xz} - bI_{yz} \end{cases} = \begin{cases} aI_{xx} - bI_{xy} - cI_{xz} \\ -aI_{xy} + bI_{yy} - cI_{yz} \\ -aI_{xz} - bI_{yz} + cI_{zz} \end{cases}$$

Ou sous forme matricielle :

$$\vec{\sigma}(O, S/R) = \begin{bmatrix} I_{xx} - I_{xy} - I_{xz} \\ -I_{xy} + I_{yy} - I_{yz} \\ -I_{xz} - I_{yz} + I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

La matrice $J_o = \begin{bmatrix} I_{xx} - I_{xy} - I_{xz} \\ -I_{xy} + I_{yy} - I_{yz} \\ -I_{xz} - I_{yz} + I_{zz} \end{bmatrix}$ est appelée matrice d'inertie en O du solide S.

Soit en notation plus condensée :

$$\vec{\sigma}(O, S/R) = J_o \vec{\omega} \quad (IV.11)$$

En vertu de la relation (IV.09) on peut écrire :

$$\vec{\delta}(O, S/R) = J_o \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (IV.12)$$

8 Dynamique

La dynamique est la partie de la mécanique qui s'occupe des relations entre les forces et les mouvements qu'elles provoquent.

Pour cela, la dynamique introduit le distinguo entre les divers efforts qui s'exercent sur un corps solide. On est ainsi amené à marquer la différence entre les efforts extérieurs et les efforts intérieurs.

Les forces extérieures s'exerçant sur un corps solide se décomposent également en deux grandes familles. D'une part, les forces qui s'appliquent sur la surface du corps et d'autre part les forces à distance qui s'exercent dans le volume du corps, comme par exemple le poids ou les forces d'inertie.

Les efforts intérieurs, qu'il ne faut surtout pas confondre avec les forces à distance, proviennent des particules intérieures au système qui exercent des actions les unes sur les autres. Les forces intérieures sont égales et opposées deux à deux. Il s'ensuit que le torseur des efforts intérieurs est nul. Cette notion de forces intérieures sera développée dans un prochain paragraphe.

Dans l'énoncé du principe fondamental de la mécanique, il n'y a que les efforts extérieurs qui interviennent.

9 Principe fondamental de la mécanique

Dans tout espace-temps galiléen (g) et pour tout système matériel le torseur dynamique (IV.08) est constamment égal au torseur des efforts extérieurs (III.04).

$$\begin{aligned}\vec{R} &= m\vec{\gamma}(G/g) \\ \vec{M}_A &= \vec{\delta}(A, S/g)\end{aligned}\tag{IV.13}$$

Pour un point matériel et dans tout espace-temps galiléen (g) la relation (IV.13) devient :

$$\vec{R} = m\vec{\gamma}(M/g)\tag{IV.14}$$

10 Travail et puissance d'une force qui s'exerce sur un point matériel

Soit un point matériel M décrivant une courbe C dans un repère orthonormé $(e) = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et une force $\vec{F}$ appliquée en M.

Par définition le travail élémentaire effectué par la force $\vec{F}$, lorsque son point d'application se déplace de $d\vec{OM}$ est égal au produit scalaire :

$$\begin{aligned}dW &= \vec{F} \cdot d\vec{OM} = X dx + Y dy + Z dz \\ dW &= \vec{F} \cdot \vec{V} dt\end{aligned}\tag{IV.15}$$

Puisque la vitesse du point M dans le repère (e) est : $\vec{V} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)$

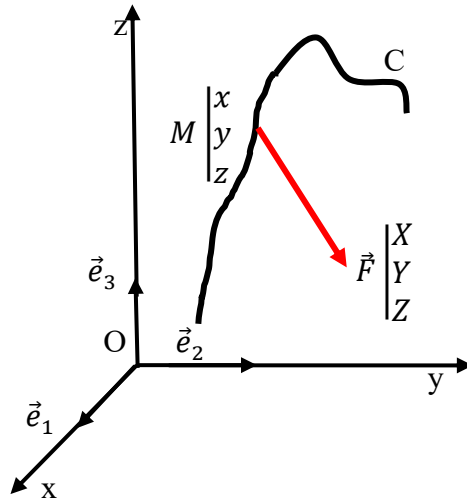


Figure IV.02 Travail d'une force

La puissance développée par cette force est :

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

Le travail et la puissance d'une force dépendent du repère dans lequel ils sont évalués.

Pour aller d'un état initial "i" à un état final "f" la force $\vec{F}$ peut se déplacer sur des courbes différentes. Le travail correspondant aura des valeurs différentes suivant le chemin emprunté.

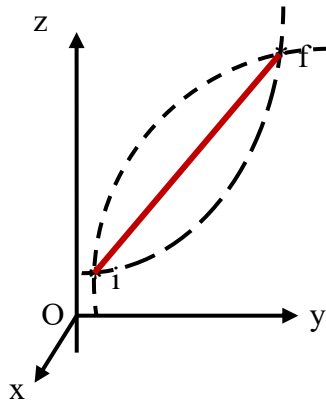


Figure IV.03 Chemins utilisés pour aller de i à f

Si tel n'est pas le cas, on dira que la force $\vec{F}$ dérive de la fonction de force Φ ou du potentiel $V = -\Phi$. Nous aurons alors nécessairement :

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

Soit :

$$dW = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = \overrightarrow{\text{grad} F} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

Le travail ainsi produit au cours d'un déplacement élémentaire sera une différentielle totale exacte. Dans ces conditions :

$$W = \int_i^f d\Phi = \Phi_f - \Phi_i$$

Et ceci quel que soit le chemin parcouru.

11 Travail et puissance d'une force qui s'exerce sur un solide

Soit (R) un repère orthonormé $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et un solide (S). Considérons un point M_i de ce solide sur lequel est appliquée une force $\vec{F}_i$.

Compte tenu de la relation (IV.15), le travail élémentaire de la force $\vec{F}_i$ pour un déplacement $\overrightarrow{dOM_i}$ du point M_i est :

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{dOM_i}$$

Pour n forces appliquées à un solide :

$$dW = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{dOM_i} \quad (\text{IV.16})$$

En un point P, quelconque, du solide la relation (III.07) permet d'écrire :

$$\vec{V}(M_i/R) = \vec{V}(P/R) + \overrightarrow{M_iP} \wedge \vec{\omega}$$

Pour un petit déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dOM_i} = \overrightarrow{dOP} + \overrightarrow{M_iP} \wedge \vec{\omega} dt$$

En portant $\overrightarrow{dOM_i}$ dans la relation (IV.16) nous obtenons pour le solide :

$$dW = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{dOP} + \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \cdot (\overrightarrow{M_iP} \wedge \vec{\omega} dt)$$

Les propriétés du produit mixte permettent d'écrire :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \cdot (\overrightarrow{M_iP} \wedge \vec{\omega} dt) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{\omega} dt \cdot (\vec{F}_i \wedge \overrightarrow{M_iP})$$

Remarquons que le torseur des efforts extérieurs est :

$$[\Gamma_{\text{efforts extérieurs}}] \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \\ \vec{M}_P = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{PM_i} \wedge \vec{F}_i \end{array} \right.$$

Le travail élémentaire peut donc s'écrire :

$$dW = \vec{R} \cdot \overrightarrow{dOP} + \vec{M}_P \cdot \vec{\omega} dt$$

En divisant par dt on obtient l'expression de la puissance pour un corps solide.

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{R} \cdot \vec{V}(P/R) + \vec{M}_P \cdot \vec{\omega}$$

C'est-à-dire égal au produit scalaire du torseur cinématique par le torseur dynamique.

12 Energie cinétique

En désignant par G le centre de masse et par M un point d'un solide (S) de masse m, nous avons en utilisant la relation (III.07) :

$$\vec{V}(M/R) = \vec{V}(G/R) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}$$

Par définition, l'énergie cinétique d'un solide (S) dans son mouvement par rapport à (R) est :

$$E_C = \frac{1}{2} \int_{M \in S} \vec{V}^2(M/R) dm \quad (IV.17)$$

Et par suite :

$$\vec{V}^2(M/R) = \vec{V}^2(G/R) + (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}) \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}) + 2\vec{V}(G/R) \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM})$$

D'après les propriétés du produit mixte, le deuxième terme du second membre peut s'écrire :

$$(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}) \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}) = \vec{\omega} \cdot (\overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}))$$

Soit :

$$2E_C = mV^2(G/R) + \underbrace{\vec{\omega} \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}) dm}_{\vec{\sigma}(G/R) = J_G \vec{\omega}} + 2\vec{V}(G/R) \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \underbrace{\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} dm}_0 \right)$$

D'où la relation :

$$2E_C = mV^2(G/R) + \vec{\omega} J_G \vec{\omega} \quad (IV.18)$$

Remarque :

Pour un solide tournant autour d'un axe, par exemple l'axe Oz, nous aurions : $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$. Si de surcroît le centre de masse G est sur l'axe Oz nous aurons $V(G/R) = 0$.

Dans ces conditions : $E_C = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2$

On désigne souvent par I_o le moment d'inertie par rapport à un axe donc :

$$E_C = \frac{1}{2} I_o \omega^2 \quad (IV.19)$$

Parfois on appelle "r" le rayon de giration du solide autour de l'axe telle que : $I_o = mr^2$

13 Théorème de Kœnigs

Soit G le centre d'inertie d'un système matériel (S) de masse m et désignons par :

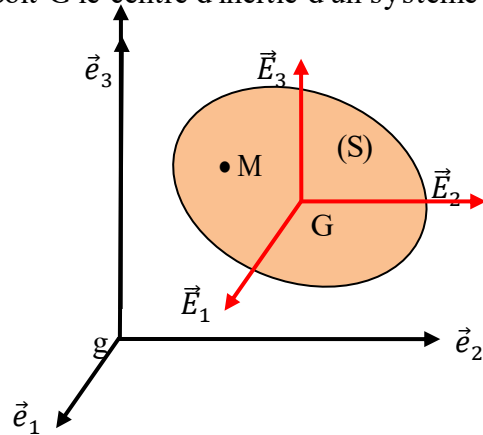


Figure IV.04 Mouvement autour de G

(g) = (g, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) un repère d'espace.

(R) = (G, $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$) le repère central en translation par rapport à (g).

M un point quelconque de (S).

Puisque R est en translation par rapport à g, la relation (III.12) devient :

$$\vec{V}(M/g) = \vec{V}(G/g) + \left(\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt} \right)_R = \vec{V}(G/g) + \vec{V}(M/R)$$

En formant le carré scalaire des deux membres et en intégrant par rapport à la masse, on obtient :

$$2 E_c = mV^2(G/g) + \int_{M \in S} V^2(M/R) dm + 2\vec{V}(G/g) \underbrace{\int_{M \in S} \vec{V}(M/R) dm}_{\vec{0}}$$

L'énergie cinétique d'un système matériel (S) est égale à la somme de l'énergie cinétique de son centre d'inertie G, affecté de la masse totale m de (S), et de l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement autour de G.

$$2 E_c = mV^2(G/g) + \int_{M \in S} V^2(M/R) dm \quad (\text{IV.20})$$

14 Théorème de l'énergie cinétique pour un système de particules

Le travail élémentaire d'une force qui s'exerce sur un point matériel est de la relation (IV.15) :

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dOM} = \vec{F} \cdot \vec{V} dt$$

Et pour un système de n particules de masse m_i , cette relation devient :

$$dW = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \cdot \vec{V}_i dt \quad (\text{IV.21})$$

$\vec{F}_i$ est la force exercée sur la particule P_i par ses voisines et d'éventuelles actions extérieures.

Pour l'ensemble du système de particules on distingue le travail provenant des forces extérieures avec celui consécutif à l'action des particules les unes sur les autres.

Il est noté dW_e et dW_i et appelé respectivement travail des forces extérieures et travail des forces intérieures.

Le travail des forces intérieures n'est pas nul puisque le déplacement élémentaire de chaque particule est, en principe, différent. Ce n'est pas le cas pour la résultante des forces intérieures qui s'annulent deux à deux.

$$dW = dW_i + dW_e$$

Par ailleurs, en vertu de la relation (IV.14) et simplifiant les écritures nous avons :

$$\vec{F}_i = m_i \vec{\gamma}_i = m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$dW = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{V}_i \cdot d\vec{V}_i = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{dV_i^2}{2} = dE_c$$

Au cours des déplacements élémentaires des particules pendant la durée dt , le travail de toutes les forces, intérieures et extérieures, est égal à la variation d'énergie cinétique du système.

$$dE_C = dW_i + dW_e \quad (IV.22)$$

Compte tenu des relations (IV.21) et (IV.22) nous pouvons encore écrire :

$$dE_C = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \cdot \vec{V}_i dt$$

Et entre deux instants t_1 et t_2 :

$$E_C(t_2) - E_C(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \cdot \vec{V}_i dt$$

Sous une forme plus abrégée :

$$\Delta E_C = W_i + W_e \quad (IV.23)$$

La variation d'énergie cinétique d'un système de particules, entre les instants t_1 et t_2 , est égal au travail de toutes les forces, intérieures et extérieures, appliquées au système pendant cette durée.

Remarque :

Rappelons qu'en mécanique, dite rationnelle, on considère le corps solide comme indéformable. Donc, dans un repère lié au solide, les déplacements de ses particules, sont nuls, il en est donc de même pour le travail des forces intérieures.

$$\Delta E_C = W_e$$

15 Energie cinétique dans le repère central

Conservons les mêmes notations et ajoutons un indice astérisque * pour les grandeurs évaluées dans (R). Ainsi la relation (IV.20) s'écrit :

$$E_C = \frac{mV^2(G/g)}{2} + E_C^*$$

Le travail étant un produit scalaire, il est donc distributif par rapport à l'addition. Le travail des forces extérieures agissant sur le système peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$W_e = W_G + W_e^*$$

Et de la relation (IV.23) :

$$\underbrace{W_G + W_e^*}_{W_e} + W_i = \underbrace{m \frac{\Delta V^2(G/g)}{2} + \Delta E_C^*}_{\Delta E_C}$$

Or $W_G = m \frac{\Delta V^2(G/g)}{2}$ et par conséquent la relation ci-dessus devient

$$W_e^* + W_i = \Delta E_C^* \quad (IV.24)$$

Le travail des forces intérieures est indépendant du repère : $W_i = W_i^*$

Soit en définitive la même forme d'équation :

$$W^* + W_i^* = \Delta \sum_i^f E_c^*$$

Chapitre V

Contraintes

Un solide se déforme lorsque des forces s'exercent sur lui. Dans un état de référence, désignons par l la longueur d'une chaîne de particules, prise au sein du solide. Sous l'action des efforts exercés, cette distance devient $l + dl$ mais la variation relative : dl/l reste petite devant l'unité.

Ainsi on conçoit facilement que, pour transmettre des efforts d'un point à un autre, l'intérieur du solide doit être contraint. On désigne par solides réels de tels corps.

On appelle milieu continu solide tout domaine de l'espace occupé par un solide réel dont ses propriétés physiques attachées à la distribution de matière (masse volumique, capacité thermique massique etc.) sont des fonctions continues et différentiables des coordonnées d'un point M appartenant au solide.

Le but essentiel, de la théorie de l'élasticité, est de pouvoir déterminer les contraintes et les déformations en tous points d'un solide réel soumis à un chargement extérieur.

Ce chapitre se limitera à l'étude de solides réels isotropes, homogènes et à température uniforme et constante (équilibre thermique).

1 Définition d'une contrainte

Considérons un solide réel S en équilibre sous l'action de forces extérieures.

Nous supposons que l'action des forces extérieures s'effectue très lentement afin de pouvoir appliquer le principe fondamental de la statique, relation (III. 05).

$$[A, \vec{F}_{ext} \rightarrow S] = [0]$$

En chaque point du solide il existe des forces intérieures.

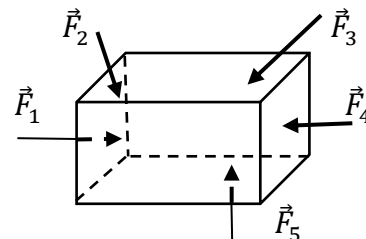


Figure V.01 Solide S

Coupons fictivement le solide en deux parties, absolument quelconques, G (gauche) et D (droite) et désignons par Ω la surface de séparation des deux parties G et D.

La partie gauche, par exemple, pourra être considérée comme étant en équilibre sous l'action des forces extérieures ($\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$) qui s'exercent sur elle, et sous l'action des forces intérieures appliquées par la partie droite D sur la partie gauche G.

Les forces intérieures appliquées, par la partie D sur la partie G, s'exercent en chacun des points de la surface Ω . Cette action de D sur G est une action de proche en proche, c'est-à-dire que chaque petit élément de la partie D, placé sur la surface Ω , exerce une action de proche en proche sur l'élément de G situé exactement en regard.

Ces deux parties fictives G et D doivent rester en équilibre.

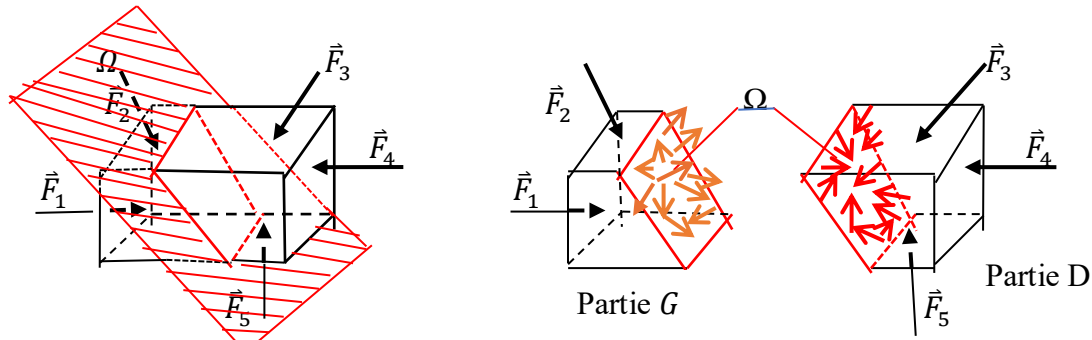


Figure V.02 Coupure fictive d'un solide soumis à des forces

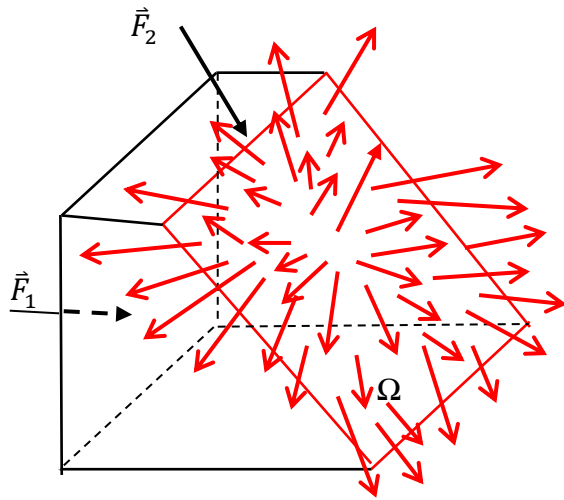
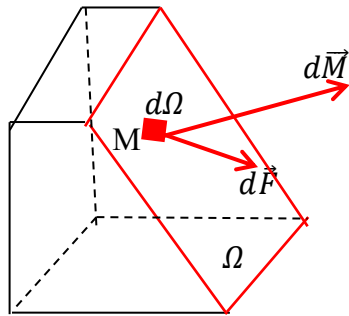


Figure V.03 Équilibre de la partie G

La partie G sera en équilibre sous l'action des efforts extérieurs que l'on peut décomposer en deux catégories :

- ceux qui s'exercent sur sa surface fictive Ω et qui caractérisent l'action de D sur G.
- ceux qui agissent sur la surface réelle de G, et sur son volume comme son poids, par exemple. Ils seront désignés par F_G



Écrivons l'équilibre de la partie G en un point quelconque A :

$$\{A, F_G \rightarrow G\} + \{A, D \rightarrow G\} = \{0\} \quad (V.01)$$

En résistance des matériaux, c'est à dire la théorie des poutres, cette relation est fondamentale. A est, alors, le centre géométrique d'une section droite.

Figure V.04 Facette

Intéressons-nous au terme $\{A, D \rightarrow G\}$.

Pour cela considérons, sur la surface fictive Ω , une aire élémentaire $d\Omega$ contenant le point M.

L'action exercée par l'élément infiniment petit, de la partie D, placé immédiatement en regard de $d\Omega$ se manifeste en M par une résultante $d\vec{F}$ et un moment $d\vec{M}$.

Le moment $d\vec{M}$ est du second ordre et est négligé devant $d\vec{F}$.

La force élémentaire $d\vec{F}$ sera supposée proportionnelle à l'aire géométrique $d\Omega$, soit :

$$d\vec{F} = \vec{c} d\Omega$$

$\vec{c}$ est le vecteur contrainte en M, relatif à l'élément de surface $d\Omega$.

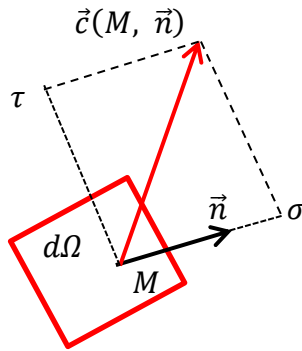
Le petit élément de surface $d\Omega$ est appelé facette. Une facette est définie par sa normale extérieure unitaire $\vec{n}$.

Le vecteur "contrainte" est projeté dans la direction de $\vec{n}$ et dans le plan de la facette.

Vectoriellement, nous pouvons écrire :

$$\vec{c} = \underbrace{(\vec{c} \cdot \vec{n})\vec{n}}_{\vec{\sigma}} + \underbrace{\vec{n} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{n})}_{\vec{\tau}} \quad (\text{V.02})$$

La composante normale suivant $\vec{n}$ est désignée par σ et on pose $\vec{\sigma} = \sigma \vec{n}$



Si dans un solide nous avons :

$\sigma > 0$ la contrainte normale est une traction ou une tension.

$\sigma < 0$ la contrainte normale est une compression

$\sigma = 0$ et $\vec{c} \neq 0$ il y a cisaillement pur, puisque $\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0$

Dans le plan de la facette la composante tangentielle est τ .

Figure V.05 Projection suivant $\vec{n}$

La grandeur scalaire τ , attachée au vecteur $\vec{\tau}$, s'appelle la contrainte tangentielle ou encore cission et parfois contrainte de cisaillement.

Dans un repère orthonormé $(e) = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ associé à un système de coordonnées cartésiennes Mxyz, le vecteur $\vec{\tau}$ est projeté sur deux axes rectangulaires appartenant à la facette $d\Omega$.

Pour décomposer le vecteur contrainte, dans ce système de coordonnées, on adopte les notations suivantes :

- Le premier indice caractérise la direction de la normale extérieure.
- Le deuxième indice indique sur quel axe a été projeté le vecteur contrainte correspondant.

La figure V.06 représente une facette passant par M et définie par $\vec{n} = \vec{e}_1$. Pour cette facette le vecteur contrainte s'écrit :

$$\vec{c} = \vec{c}(M, \vec{e}_1) = \sigma_{xx} \vec{e}_1 + \tau_{xy} \vec{e}_2 + \tau_{xz} \vec{e}_3$$

Pour décomposer le vecteur contrainte, dans ce système de coordonnées, on adopte les notations suivantes :

- Le premier indice caractérise la direction de la normale extérieure.
- Le deuxième indice indique sur quel axe a été projeté le vecteur contrainte correspondant.

La figure V.06 représente une facette passant par M et définie par $\vec{n} = \vec{e}_1$. Pour cette facette le vecteur contrainte s'écrirait :

$$\vec{c} = \vec{c}(M, \vec{e}_1) = \sigma_{xx}\vec{e}_1 + \tau_{xy}\vec{e}_2 + \tau_{xz}\vec{e}_3$$

Pour la facette définie par $\vec{n} = \vec{e}_2$ nous aurions :

$$\vec{c} = \vec{c}(M, \vec{e}_2) = \tau_{yx}\vec{e}_1 + \sigma_{yy}\vec{e}_2 + \tau_{yz}\vec{e}_3$$

Et pour la facette définie par $\vec{n} = \vec{e}_3$ nous aurions :

$$\vec{c} = \vec{c}(M, \vec{e}_3) = \tau_{zx}\vec{e}_1 + \tau_{zy}\vec{e}_2 + \sigma_{zz}\vec{e}_3$$

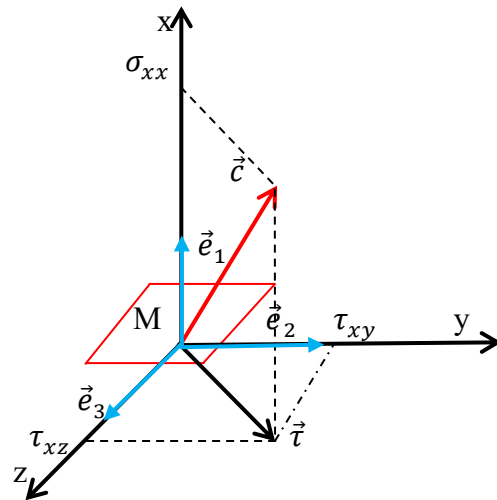


Figure V.06 Convention d'indices

En un point M, il y a une infinité de facettes. Le vecteur contrainte varie en grandeur et direction lorsque $\vec{n}$ tourne autour de M.

Dans un souci de précision, on notera désormais pour le vecteur contrainte :

$$\vec{c}(M, \vec{n})$$

Ce qui signifie que le vecteur contrainte agit en M sur une facette définie par $\vec{n}$.

On nomme faisceau de contraintes en un point d'un corps, l'ensemble des contraintes relatives à toutes les facettes passant par ce point.

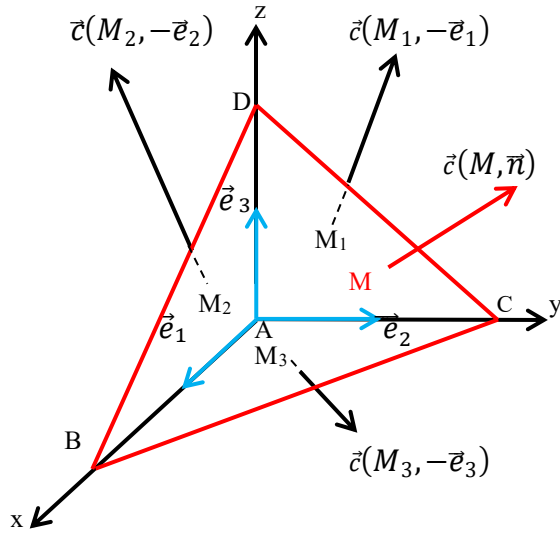
On appelle champ de contraintes dans un volume, l'ensemble des faisceaux de contraintes relatif à chaque point.

2 Faisceau des contraintes

Considérons l'élément de volume tétraédrique infiniment petit ABCD. Supposons connues les contraintes agissant sur les trois facettes définies par $-\vec{e}_1, -\vec{e}_2$ et $-\vec{e}_3$.

Nous nous proposons de déterminer les composantes du vecteur contrainte $\vec{c}(M, \vec{n})$ en fonction des grandeurs connues.

Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface BCD et de composante α, β, γ dans le repère A,x,y,z.



Désignons par :

$\vec{c}(M_1, -\vec{e}_1)$ le vecteur agissant en M_1 sur la surface ADC notée dS_x .

$\vec{c}(M_2, -\vec{e}_2)$ le vecteur agissant en M_2 sur la surface ABD notée dS_y .

$\vec{c}(M_3, -\vec{e}_3)$ le vecteur agissant en M_3 sur la surface ABC notée dS_z .

$\vec{c}(M, \vec{n})$ le vecteur agissant en M sur la surface BCD notée dS .

Figure V.07 Faisceau des contraintes

En vertu de la loi de l'action et de la réaction nous avons :

$$\vec{c}(M_1, -\vec{e}_1) = -\vec{c}(M_1, \vec{e}_1)$$

$$\vec{c}(M_2, -\vec{e}_2) = -\vec{c}(M_2, \vec{e}_2)$$

$$\vec{c}(M_3, -\vec{e}_3) = -\vec{c}(M_3, \vec{e}_3)$$

Appelons $\vec{\omega} dV$ les forces de volume agissant sur le tétraèdre ABCD.

Pour ce petit élément de volume, appliquons le principe fondamental de la statique :

$$-\vec{c}(M_1, -\vec{e}_1)dS_x - \vec{c}(M_2, \vec{e}_2)dS_y - \vec{c}(M_3, -\vec{e}_3)dS_z + \vec{c}(M, \vec{n}) + \vec{\omega}dV = \vec{0}$$

Du cours de géométrie analytique nous savons que :

$$dS_x = \alpha dS$$

$$dS_y = \beta dS$$

$$dS_z = \gamma dS$$

Rappel :

Soient les points M et M_0 appartenant au plan BCD et posons :

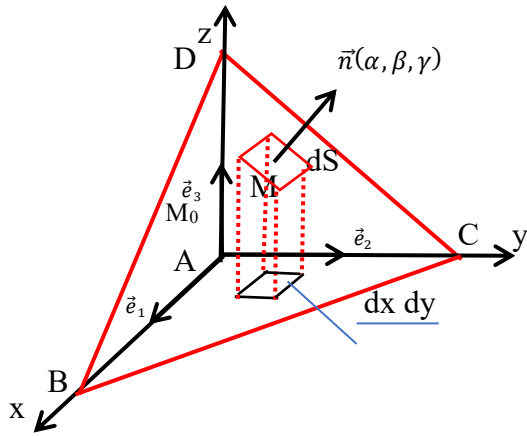
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{OM_0} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3$$

L'équation du plan est : $\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{n} = 0$ soit $(x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta + (z - z_0)\gamma = 0$

Soit encore :

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = c \text{ (constante)} \quad \text{d'où} \quad z = \frac{c - x\alpha - y\beta}{\gamma}$$



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + \frac{c - x\alpha - y\beta}{\gamma} \vec{e}_3 = \vec{E}(x, y)$$

$$dS = [\vec{E}'_x \wedge \vec{E}'_y] dx dy$$

$$\text{avec } \vec{E}'_x = \vec{e}_1 - \frac{\alpha}{\gamma} \vec{e}_3 \quad \vec{E}'_y = \vec{e}_2 - \frac{\beta}{\gamma} \vec{e}_3$$

$$\vec{E}'_x \wedge \vec{E}'_y = \frac{\alpha}{\gamma} \vec{e}_1 + \frac{\beta}{\gamma} \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$(\vec{E}'_x \wedge \vec{E}'_y)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2}$$

Et par suite : $dS = \frac{dx dy}{\gamma}$ ce qui nous autorise à écrire :

$$dx dy = dS_z = \gamma dS$$

Si bien que la résultante des forces appliquées s'écrit en divisant par dS :

$$-\vec{c}(M_1, \vec{e}_1)\alpha - \vec{c}(M_2, \vec{e}_2)\beta - \vec{c}(M_3, \vec{e}_3)\gamma + \vec{c}(M, \vec{n}) + \vec{\omega} \frac{dV}{dS} = \vec{0} \quad (\text{V.03})$$

Faisons tendre B, D et C vers A tout en déplaçant le plan BCD parallèlement à lui-même.

Dans ces conditions le terme $\frac{dV}{dS} \rightarrow 0$ et les points M, M₁, M₂ et M₃ sont confondus.

La relation (V.03) devient :

$$\vec{c}(M, \vec{n}) = \vec{c}(M_1, \vec{e}_1)\alpha + \vec{c}(M_2, \vec{e}_2)\beta + \vec{c}(M_3, \vec{e}_3)\gamma$$

En posant $\vec{c}(M, \vec{n}) = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3$ il vient :

$$X = \sigma_x \alpha + \tau_{yx} \beta + \tau_{zx} \gamma$$

$$Y = \tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{zy} \gamma$$

$$Z = \tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \gamma$$

Ce sont les formules de CAUCHY, elles définissent les trois composantes X, Y, et Z du vecteur contrainte $\vec{c}(M, \vec{n})$ connaissant la direction $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Sous forme matricielle cette relation d'équilibre s'écrit :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{V.04})$$

Soit encore sous forme abrégée :

$$[\vec{c}(M, \vec{n})] = [L] [\vec{n}]$$

Il est tout à fait évident que le vecteur contrainte $\vec{c}(M, \vec{n})$ ne dépend pas de l'orientation des axes x, y, z . Si l'on change l'orientation des axes, l'état de contrainte en un point reste invariable, il sera, évidemment, déterminé par d'autres valeurs de $\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}$, etc ... et donc par une autre matrice $[L]$.

L'état de contrainte en un point varie seulement lorsque la charge extérieure s'exerçant sur le corps considéré est modifiée.

Nous pouvons donc dire qu'en tout point M , nous associons un vecteur contrainte $\vec{c}(M, \vec{n})$ à une direction donnée $\vec{n}$, et ceci quel que soit le repère dans lequel nous travaillons.

$$\vec{c}(M, \vec{n}) = L(\vec{n})$$

" L " est un opérateur linéaire et les mathématiciens disent que l'être " L " a une structure tensorielle.

3 Équations d'équilibre

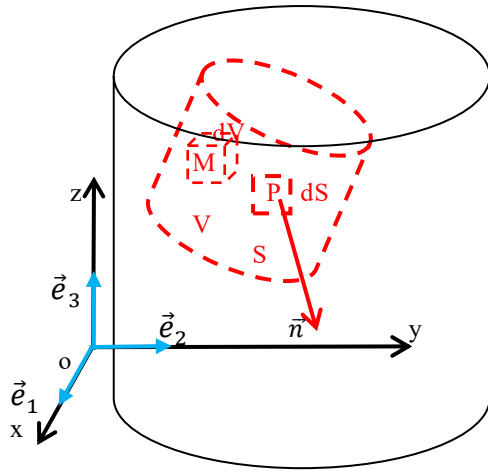


Figure V.08 Volume V

A priori l'état de contrainte en un point est défini par les neuf grandeurs suivantes :

$$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z.$$

En écrivant les équations de l'équilibre on montre qu'il suffit de six grandeurs pour caractériser l'état de contrainte en un point. Considérons un volume V contenu dans le volume du solide réel étudié. Ce volume V est délimité par une surface S pouvant être en partie fictive et en partie réelle, ou tout aussi bien purement fictive.

Désignons par :

- M un point quelconque à l'intérieur de V et dV le volume élémentaire contenant M .
- P un point quelconque situé sur la face S et dS la surface élémentaire contenant P .
- $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal et extérieur à l'élément de surface dS .
- ρ la masse volumique du solide.
- $\vec{X}$ la force par unité de masse et de composante X_x, X_y, X_z dans le repère $0, x, y, z$.

Les forces extérieures agissant sur le volume V sont de deux natures ; les forces de volume et les forces de surface. Pour le volume élémentaire nous aurons :

$$\vec{dF}_V = \rho \vec{X} dV$$

Les forces de surface, agissant en tous points de la surface S sont caractérisées par le vecteur contrainte $\vec{c}(P, \vec{n})$. La force élémentaire agissant sur le petit élément de surface dS sera :

$$\vec{dF}_S = \vec{c}(P, \vec{n}) dS$$

3-1 Résultante

Écrivons que la somme de toutes les forces extérieures, agissant sur le volume V , doivent être nulles :

$$\iint_V \rho \vec{X} dV + \iint_S \vec{c}(P, \vec{n}) dS = \vec{0} \quad (V.05)$$

Projetons cette relation sur l'axe des x :

$$\iint_V \rho X_x dV + \iint_S (\sigma_x \alpha + \tau_{yx} \beta + \tau_{zx} \gamma) dS = 0$$

Introduisons un champ vectoriel auxiliaire $\vec{W}$, dans le repère 0, x, y; z tel que :

$$\vec{W} = \sigma_x \vec{e}_1 + \tau_{yx} \vec{e}_2 + \tau_{zx} \vec{e}_3$$

Moyennant quoi :

$$\iint_S (\sigma_x \alpha + \tau_{yx} \beta + \tau_{zx} \gamma) dS = \iint_S \vec{W} \cdot \vec{n} dS$$

L'intégrale représente le flux du vecteur $\vec{W}$ sortant à travers la surface S. La formule d'Ostrogradsky, relation (II.05) permet d'écrire :

$$\iint_S \vec{W} \cdot \vec{n} dS = \iint_V \text{div} \vec{W} dV = \iint_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV$$

La projection de la résultante sur l'axe des x devient donc :

$$\iint_V \left(\rho X_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV = 0$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit le volume pris à l'intérieur du solide réel. Ce qui signifie que la fonction figurant sous le signe intégral doit être nulle en tous les points du solide.

En projetant également la relation (V.05) sur les axes y et z, nous obtenons les trois relations ci-dessous :

$$\begin{aligned} \rho X_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \rho X_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \rho X_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (V.06)$$

Ces relations sont appelées équations différentielles de l'équilibre

3-2 Moment

D'une façon analogue à la résultante, écrivons que la somme des moments des forces extérieures, agissant sur le volume V , doit être nulle :

$$\iint_V \vec{OM} \wedge \rho \vec{X} dV + \iint_S \vec{OM} \wedge \vec{c}(P, \vec{n}) dS = \vec{0}$$

Comme précédemment pour la résultante, en projetant sur l'axe des x on obtient tous calculs effectués :

$$\iint_V \left(\left(\rho X_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) y - \left(\rho X_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \right) z + \tau_{yz} - \tau_{zy} \right) dV = 0$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit le volume pris à l'intérieur du solide réel. Ce qui signifie que la fonction figurant sous le signe intégral doit être nulle en tous les points du solide.

En vertu des relations (V.06) il ne subsiste que :

$$\tau_{yz} - \tau_{zy} = 0 \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

De même en projetant sur l'axe des y et z nous obtenons :

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Ceci constitue la loi de réciprocité des contraintes tangentielles.

4 Tenseur des contraintes

Compte tenu de la réciprocité des contraintes tangentielles, l'état de contrainte en un point est déterminé par six grandeurs scalaires :

$$[L] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (V.07)$$

Nous connaissons la notion de vecteur déterminé par trois nombres en tant que grandeur. L'état de contrainte se détermine par six nombres et constitue ce qu'on appelle un tenseur.

L'interprétation physique du tenseur des contraintes est facile en considérant les trois facettes définies par : $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.

Pour le vecteur contrainte défini par $\vec{e}_1$:

$$\vec{c}(M, \vec{e}_1) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

De même :

$$\vec{c}(M, \vec{e}_2) = \tau_{xy}\vec{e}_1 + \sigma_y\vec{e}_2 + \tau_{yz}\vec{e}_3$$

$$\vec{c}(M, \vec{e}_3) = \tau_{xz}\vec{e}_1 + \tau_{yz}\vec{e}_2 + \sigma_z\vec{e}_3$$

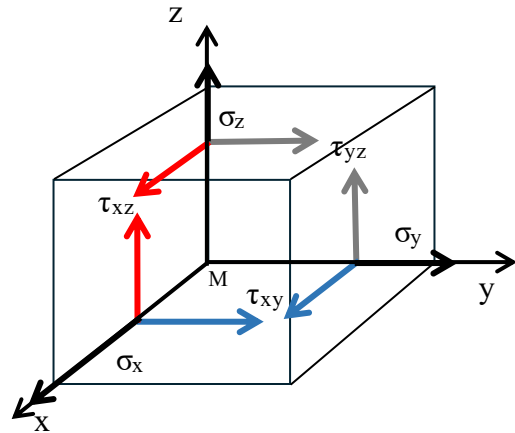


Figure V.09 Interprétation du tenseur des contraintes

Exercice

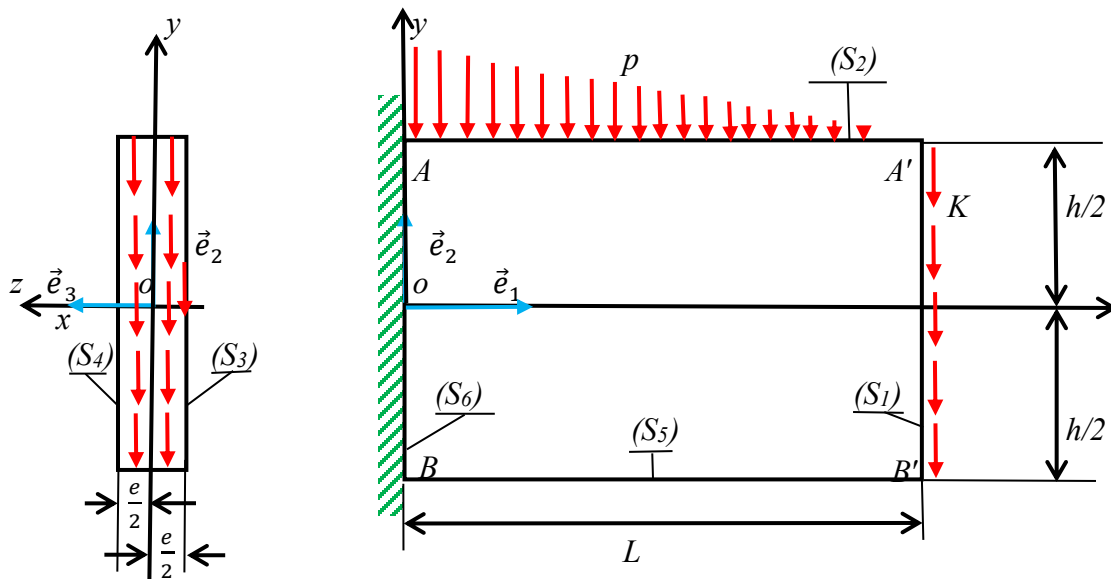
Conformément à la figure ci-dessous, une plaque d'épaisseur e , de longueur l et de hauteur h est encastée à l'une de ses extrémités AB . A son autre extrémité $A'B'$, elle est soumise à un chargement qui provoque une contrainte tangentielle constante, sur toute sa surface (S_1) .

$$\vec{K} = -K\vec{e}_2$$

Elle supporte également sur sa partie supérieure AA' un chargement vertical qui se manifeste par une pression p , linéairement décroissante de p_0 à 0 , sur toute la longueur de sa surface (S_2) . Soit pour un petit élément de surface dS_2 :

$$d\vec{F} = -pdS_2\vec{e}_2 \text{ avec } p = \frac{p_0}{L}(L-x)$$

On négligera l'action de la pesanteur sur la plaque, et on précise que les surfaces (S_3) , (S_4) et (S_5) ne sont pas chargées.



1. Écrire les conditions aux limites, en contraintes, pour la surface (S_1) .
2. Même question pour (S_2) .

3. Même question pour (S_3) .

4. Déterminer le torseur en o des forces de liaisons dûes à l'encastrement de la face AB.

Corrigé

1. Pour $M \in (S_1)$ nous avons : $x = L$ et $\vec{c}(M, \vec{e}_1) = -K\vec{e}_2$

$$\vec{c}(M, \vec{e}_1) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \tau_{xy} = -K \\ \tau_{xz} = 0 \end{cases}$$

2. Pour $M \in (S_2)$ nous avons : $y = \frac{h}{2}$ et $\vec{c}(M, \vec{e}_2) = -\frac{p_0}{L}(L-x)\vec{e}_2$

$$\vec{c}(M, \vec{e}_2) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{xy} = 0 \\ \sigma_y = -\frac{p_0}{L}(L-x) \\ \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

3. Pour $M \in (S_3)$ nous avons : $z = \frac{e}{2}$ et $\vec{c}(M, -\vec{e}_3) = \vec{0}$

$$\vec{c}(M, -\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

4. Il faut écrire l'équilibre de la plaque.

4-1 Pour la résultante $\vec{R}$:

$$\vec{0} = \iint_{S_1} \vec{c}(M, \vec{e}_1) ds_1 + \iint_{S_2} \vec{c}(M, \vec{e}_2) ds_2 + \iint_{S_6} \vec{c}(M, -\vec{e}_1) ds_6$$

Avec :

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{c}(M, \vec{e}_1) ds_1 &= \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -K\vec{e}_2 dydz = -Keh\vec{e}_2 \\ \iint_{S_2} \vec{c}(M, \vec{e}_2) ds_2 &= \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \int_0^L -\frac{p_0}{L}(L-x)\vec{e}_2 dx dz = -\frac{p_0 e L}{2} \vec{e}_2 \end{aligned}$$

D'où l'expression de la résultante $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \iint_{S_6} \vec{c}(M, -\vec{e}_1) ds_6 = \left(Keh + \frac{p_0 e L}{2} \right) \vec{e}_2$$

4-2 Pour le moment $\vec{M}_o$:

$$\vec{0} = \iint_{M_1 \in S_1} \vec{OM}_1 \wedge \vec{c}(M_1, \vec{e}_1) ds_1 + \iint_{M_2 \in S_2} \vec{OM}_2 \wedge \vec{c}(M_2, \vec{e}_2) ds_2 + \iint_{M_6 \in S_6} \vec{OM}_6 \wedge \vec{c}(M_6, -\vec{e}_1) ds_6$$

$$\text{Avec : } \vec{OM}_1 \wedge \vec{c}(M_1, \vec{e}_1) = \begin{vmatrix} L \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -K \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} zK \\ 0 \\ -LK \end{vmatrix}$$

Il vient :

$$\iint_{M_1 \in S_1} \vec{OM}_1 \wedge \vec{c}(M_1, \vec{e}_1) ds_1 = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (zK\vec{e}_1 - LK\vec{e}_3) dydz = -KLeh\vec{e}_3$$

$$\text{De même : } \vec{OM}_2 \wedge \vec{c}(M_2, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} x \\ \frac{h}{2} \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{p_0}{L}(L-x) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{p_0}{L}(L-x)z \\ 0 \\ -\frac{p_0}{L}(L-x)x \end{vmatrix}$$

Il s'ensuit :

$$\iint_{M_2 \in S_2} \vec{OM}_2 \wedge \vec{c}(M_2, \vec{e}_2) ds_2 = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \int_0^L z \frac{p_0}{L} (L-x) \vec{e}_1 dx dz - \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \int_0^L \frac{p_0}{L} (Lx - x^2) \vec{e}_3 dx dz$$

$$\iint_{M_2 \in S_2} \vec{OM}_2 \wedge \vec{c}(M_2, \vec{e}_2) ds_2 = \frac{p_0 L^2 e}{6} \vec{e}_3$$

Et en définitive :

$$\vec{M}_o = \iint_{M_6 \in S_6} \vec{OM}_6 \wedge \vec{c}(M_6, -\vec{e}_1) ds_6 = Le \left(Kh + \frac{pL}{6} \right) \vec{e}_3$$

Chapitre VI

Tenseur des contraintes

1 Contraintes principales et directions principales

Le tenseur $[L]$ étant symétrique, il existe en chaque point M du solide un repère orthonormé MXYZ dans lequel la matrice $|L|$ est diagonale.

Les valeurs propres de $|L|$ se nomment contraintes principales en M et sont notées $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Elles s'obtiennent en résolvant l'équation :

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{VI.01})$$

Les directions propres MX, MY, MZ sont appelées directions principales, et les trois facettes formées par ces trois directions sont les facettes principales. Par exemple. Pour la direction principale MX définie, dans le repère MXYZ, par le vecteur unité : $\vec{n} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \beta_1 \vec{e}_2 + \gamma_1 \vec{e}_3$ Nous avons donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \sigma_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

Dans le repère principal MXYZ, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[L] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

En particulier, dans ce repère, le vecteur contrainte $\vec{c}(M, \vec{E}_1)$ a pour expression :

$$\vec{c}(M, \vec{E}_1) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_1 \vec{E}_1$$

le vecteur $\vec{E}_1$ est porté par l'axe MX.

Les vecteurs contraintes agissant sur les facettes principales sont perpendiculaires à ces facettes, et n'ont pas de contraintes tangentielles.

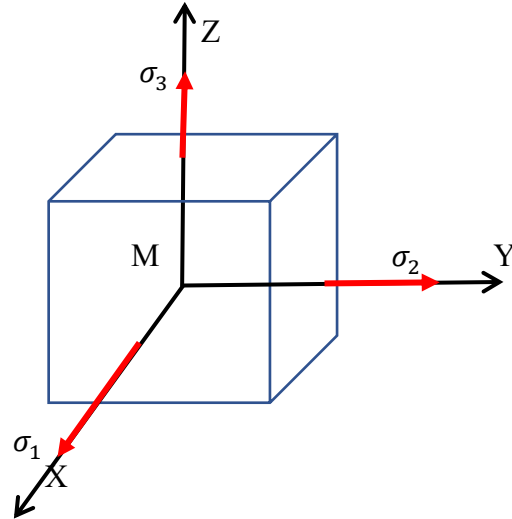


Figure VI.01 Contraintes principales

2 Ellipsoïde des contraintes

Le vecteur contrainte, en un point M dans une direction $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$, s'écrit dans le repère principal :

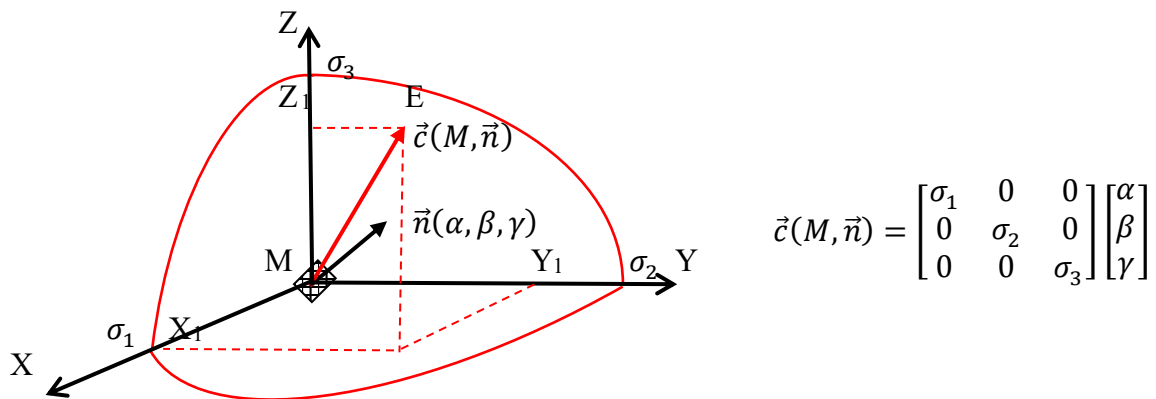


Figure VI.02 Ellipsoïde des contraintes

Désignons par X_1, Y_1, Z_1 les composantes du vecteur contrainte, soit :

$$X_1 = \sigma_1 \alpha \quad Y_1 = \sigma_2 \beta \quad Z_1 = \sigma_3 \gamma$$

Et comme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, il s'ensuit que :

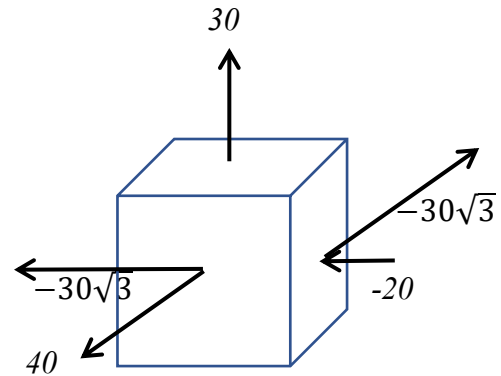
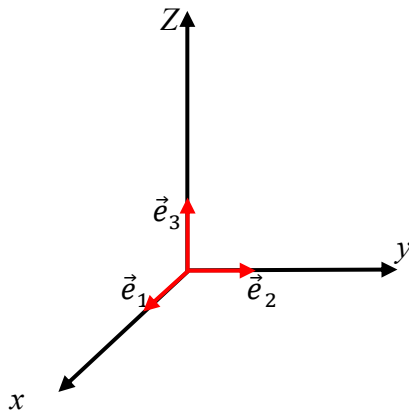
$$\frac{X_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{Y_1^2}{\sigma_2^2} + \frac{Z_1^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (\text{VI. 02})$$

Le lieu de l'extrémité "E" du vecteur contrainte $\vec{c}(M, \vec{n})$ décrit un ellipsoïde lorsque $\vec{n}$ varie. C'est l'ellipsoïde de Lamé.

Exercice VI.1

Dans un repère orthonormé $e = (o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la matrice du tenseur des contraintes en un point M d'un solide, a pour expression :

$$L = \begin{bmatrix} 40 & -30\sqrt{3} & 0 \\ -30\sqrt{3} & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \text{ Valeurs en } N/mm^2.$$



4. Calculer dans ce repère les composants du vecteur contrainte défini par sa normale extérieure :

$$\vec{n} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{e}_1 + \frac{3}{4}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3$$

2. Calculer les contraintes principales.
3. Déterminer les directions principales.
4. Indiquer l'équation de l'ellipsoïde des contraintes.

Corrigé

4. Le vecteur contrainte s'écrit :

$$\vec{c}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} 40 & -30\sqrt{3} & 0 \\ -30\sqrt{3} & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/4 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} -40\frac{\sqrt{3}}{4} - 90\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-90}{4} - \frac{60}{4} \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32,5\sqrt{3} \\ 7,5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

2. Pour calculer les contraintes principales nous devons satisfaire la relation suivante :

$$[Lc][\vec{n}_i] = \sigma_i[\vec{n}_i]$$

Donc :

$$[Lc][\vec{n}_i] - \sigma_i[\vec{n}_i] = [0]$$

$$\begin{vmatrix} 40 - \sigma & -30\sqrt{3} & 0 \\ -30\sqrt{3} & -20 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 30 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$(30 - \sigma)(\sigma^2 - 20\sigma - 3500) = 0$$

Les racines de cette équation sont les contraintes principales soit :

$$\sigma_1 = 70 \quad \sigma_2 = -50 \quad \sigma_3 = 30$$

Remarquons que sans faire de calcul on s'aperçoit que l'axe z est une direction principale à laquelle on peut associer la contrainte principale :

$$\sigma_z = \sigma_3 = 30$$

3. Cherchons la direction de X :

$$[Lc][\vec{n}_1] = \sigma_1[\vec{n}_1] \quad \text{avec} \quad \sigma_1 = 70 \quad \text{et} \quad \vec{n}_1 = \alpha_1 \vec{e}_1 + \beta_1 \vec{e}_2 + \gamma_1 \vec{e}_3$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} 40 & -30\sqrt{3} & 0 \\ -30\sqrt{3} & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{cases} 40\alpha_1 - 30\sqrt{3}\beta_1 = 70\alpha_1 \\ -30\sqrt{3}\alpha_1 - 20\beta_1 = 70\beta_1 \\ 30\gamma_1 = 70\gamma_1 \end{cases}$$

En résolvant ce système d'équation, on obtient :

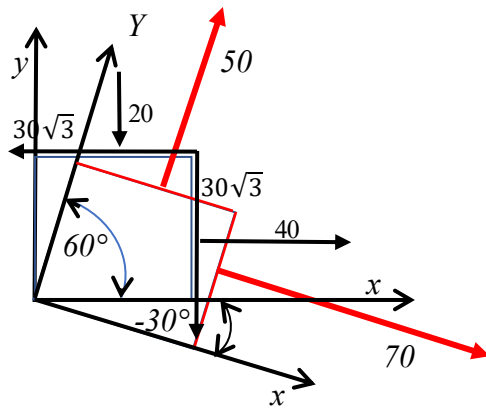
$$\vec{n}_1 = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(-30) \\ \beta_1 = -\frac{1}{2} = \sin(-30) \\ \gamma_1 = 0 \end{cases} \theta = -30^\circ$$

De même pour la direction de Y on a :

$$[Lc][\vec{n}_2] = \sigma_2[\vec{n}_2] \quad \text{avec} \quad \sigma_2 = 50 \quad \text{et} \quad \vec{n}_2 = \alpha_2 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \gamma_2 \vec{e}_3$$

D'où :

$$\begin{aligned} 40\alpha_2 - 30\sqrt{3}\beta_2 &= 50\alpha_2 \\ -30\sqrt{3}\alpha_2 - 20\beta_2 &= 50\beta_2 \\ 30\gamma_2 &= 50\gamma_2 \end{aligned} \quad \text{et on déduit :} \quad \vec{n}_2 \begin{cases} \alpha_2 = \cos 60 \\ \beta_2 = \sin 60 \\ \gamma_2 = 0 \end{cases} \theta_2 = 60^\circ$$



Remarquons qu'il était inutile de calculer le vecteur propre correspondant à σ_2 puisque les directions principales sont orthogonales.

4. Equation de l'ellipsoïde de Lamé :

$$\frac{X^2}{70^2} + \frac{Y^2}{50^2} + \frac{Z^2}{30^2} = 1$$

3 Définition d'un état de contrainte

3-1 Etat de contrainte triple

Si les trois contraintes principales sont différentes de zéro, on dit que l'état de contrainte est triple. La contrainte sur n'importe quelle facette d'un point M est alors différente de zéro.

3-2 État de contrainte double

On dit que l'état de contrainte est double en un point lorsque que l'une des contraintes principales est nulle en ce point. L'ellipsoïde des contraintes dégénère alors en la surface d'une ellipse, tous les vecteurs contraintes ont alors leur origine et leur extrémité dans un même plan appelé plan de contrainte double ou, plus simplement, plan de contrainte.

Lorsque sur trois facettes quelconques formant trièdre, les contraintes sont parallèles à un même plan (P), l'état de contrainte est double et admet ce plan comme plan (P) de contrainte.

3-3 Etat de contrainte simple

On dit qu'en un point l'état de contrainte est simple lorsque que deux des contraintes principales sont nulles en ce point. L'ellipsoïde des contraintes dégénère alors en un segment de droite. Toutes les contraintes sont alors parallèles à une même droite dite "direction des contraintes".
Exemple : une poutre droite soumise à de la traction.

4 Invariants scalaires du tenseur des contraintes

En développant les calculs de la relation (VI.01), c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

On obtient :

$$\begin{aligned} & -\sigma^3 + \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \sigma(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) \\ & + \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \tau_{xz}^2\sigma_y - \tau_{yz}^2\sigma_x - \tau_{xy}^2\sigma_z = 0 \end{aligned}$$

Soit à résoudre une équation de la forme :

$$-\sigma^3 + A\sigma^2 - B\sigma + C = 0$$

Dont les racines $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les contraintes principales.

Or l'état de contrainte en un point d'un corps ne dépend que du chargement auquel il est soumis. Lors d'un changement de repère cette équation reste invariable et il en est donc de même pour ses racines $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Par conséquent les quantités A, B et C sont constantes. Pour les calculer il est évidemment plus simple de les calculer dans le repère principal puisque les contraintes tangentielles sont nulles.

$$A = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$B = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$C = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (\text{VI.03})$$

A, B et C sont appelés les invariants scalaires du tenseur des contraintes.

On appelle contrainte moyenne σ_m la grandeur obtenue en divisant l'invariant scalaire A par trois.

5 Déviateur des contraintes

On décompose le tenseur des contraintes en deux tenseurs symétriques :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}}^{[L]} = \overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}}^{[A_1]} + \overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}}^{[A_2]} \quad (\text{VI.04})$$

$[A_1]$ est le déviateur des contraintes, sa trace est nulle. Les directions principales sont les mêmes que celles de $[L]$ et ses valeurs propres sont :

$$\sigma_1 - \sigma_m, \quad \sigma_2 - \sigma_m, \quad \sigma_3 - \sigma_m$$

$[A_2]$ est le tenseur isotrope ou encore le tenseur sphérique et l'ellipsoïde devient une sphère. Dans un fluide au repos, une seule grandeur caractérise l'état de contrainte : la pression p .

$$\text{Soit : } [L] = [A_2] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

6 Représentation plane de MOHR

Nous avons vu que l'extrémité du vecteur contrainte en un point M décrivait un ellipsoïde lorsque $\vec{n}$ variait.

La représentation plane de MOHR concerne également le faisceau des contraintes, mais elle est obtenue en partant la projection du vecteur contrainte suivant la normale et dans le plan de la facette ; ce sont les grandeurs σ et τ que nous avons précédemment définies (relation (V.02)).

$$\vec{c}(M, \vec{n}) = \underbrace{(\vec{c}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}) \vec{n}}_{\vec{\sigma}} + \underbrace{\vec{n} \wedge (\vec{c}(M, \vec{n}) \wedge \vec{n})}_{\vec{\tau}}$$

Considérons en M le repère principal et un axe Δ issu de M et du vecteur unitaire $\vec{n}$.

Par construction portons :

$$\overrightarrow{MA_1} = \sigma_1 \vec{n}$$

$$\overrightarrow{MA_2} = \sigma_2 \vec{n}$$

$$\overrightarrow{MA_3} = \sigma_3 \vec{n}$$

et supposons que :

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

En désignant par E l'extrémité du vecteur contrainte $\vec{c}(M, \vec{n})$ nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{EA_1} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MA_1} = -\vec{c}(M, \vec{n}) + \overrightarrow{MA_1}$$

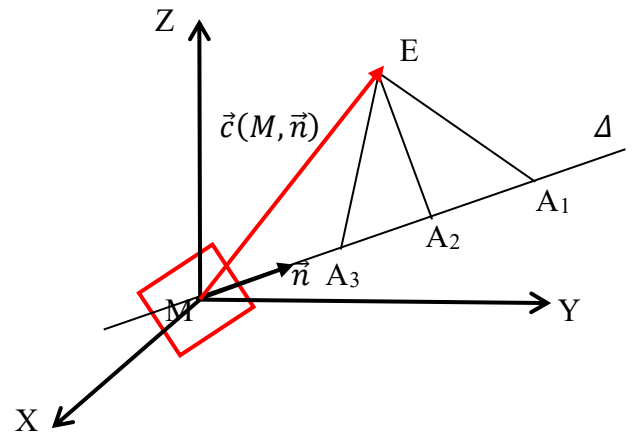


Figure VI.03 Construction de MOHR

Soit :

$$\overrightarrow{EA_1} = - \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 \alpha \\ \sigma_1 \beta \\ \sigma_1 \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\sigma_1 - \sigma_2) \beta \\ (\sigma_1 - \sigma_3) \gamma \end{bmatrix}$$

En tenant le même raisonnement pour $\overrightarrow{EA_2}$ et $\overrightarrow{EA_3}$ nous obtenons :

$$\overrightarrow{EA_2} = \begin{bmatrix} (\sigma_2 - \sigma_1) \alpha \\ 0 \\ (\sigma_2 - \sigma_3) \gamma \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EA_3} = \begin{bmatrix} (\sigma_3 - \sigma_1) \alpha \\ (\sigma_3 - \sigma_2) \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Formons les produits scalaires :

$$\overrightarrow{EA_1} \cdot \overrightarrow{EA_2} = (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) \gamma^2 \geq 0$$

$$\vec{EA}_2 \cdot \vec{EA}_3 = (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)\alpha^2 \geq 0$$

$$\vec{EA}_3 \cdot \vec{EA}_2 = (\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)\beta^2 \leq 0$$

Remarquons que l'axe Δ et $\vec{c}(M, \vec{n})$ définissent un plan (π) pour une valeur donnée de $\vec{n}$. Choisissons un plan fixe (π_0) défini par un repère orthonormé $o\sigma$ et $o\tau$. Superposons (π) et (π_0) en amenant Δ sur $o\sigma$, $M \equiv o$.

Le point E devient P et A_1, A_2, A_3 deviennent respectivement P_1, P_2 et P_3 .

Les inégalités ci-dessus s'écrivent :

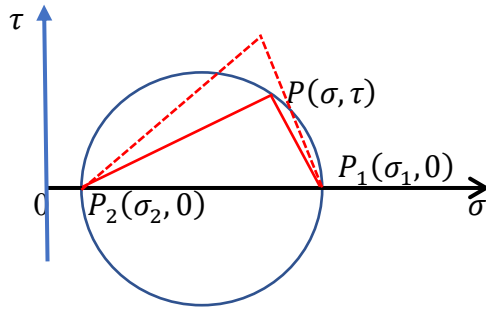
$$\vec{PP}_1 \cdot \vec{PP}_2 \geq 0$$

$$\vec{PP}_2 \cdot \vec{PP}_3 \geq 0$$

$$\vec{PP}_3 \cdot \vec{PP}_2 \leq 0$$

Il va de soi que si nous avons $\vec{PP}_1 \cdot \vec{PP}_2 = 0$, le point P se trouverait sur un cercle de diamètre :

$$\varnothing = \|\vec{P_1P_2}\| = \sigma_1 - \sigma_2$$



Ce serait notamment le cas si :

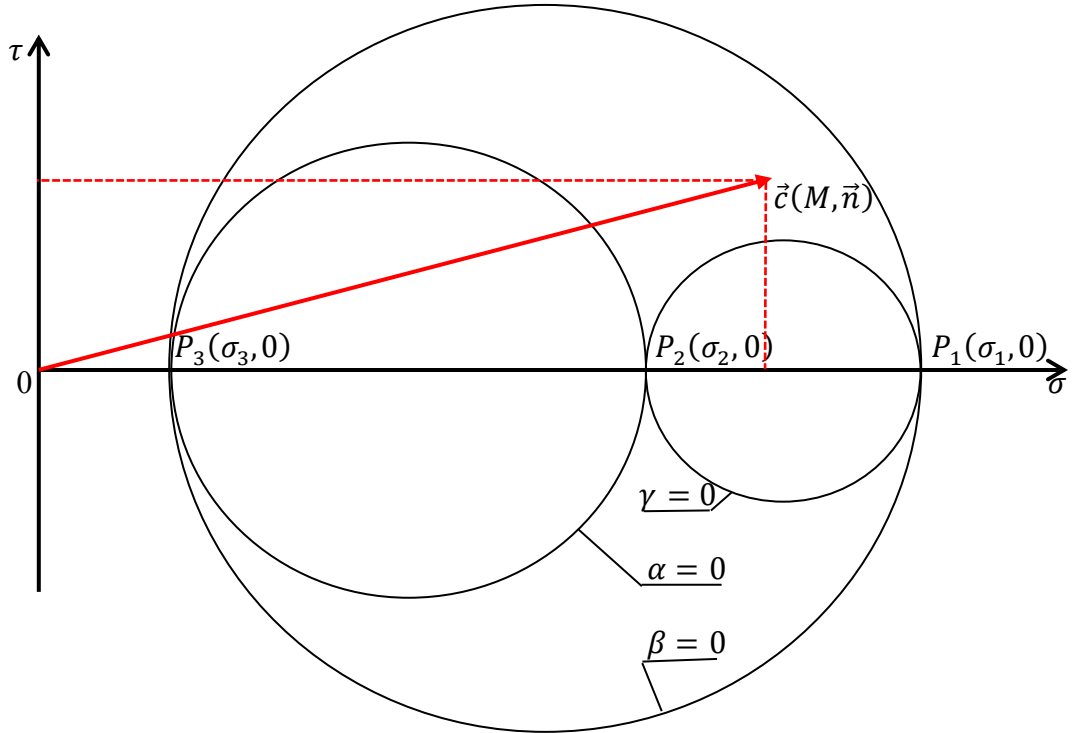
$$\vec{n} = \alpha \vec{E}_1 + \beta \vec{E}_2 + 0 \vec{E}_3$$

L'inégalité $\vec{PP}_1 \cdot \vec{PP}_2 > 0$ traduit le fait que l'angle $\hat{P}$ doit être obtus donc le point se trouve à l'extérieur de ce cercle.

Il en serait de même pour : $\vec{PP}_2 \cdot \vec{PP}_3 > 0$.

Figure VI.04 Cercle de MOHR

Par contre l'inégalité $\vec{PP}_3 \cdot \vec{PP}_2 \leq 0$ signifie que le point p doit être à l'intérieur du cercle de diamètre : $\varnothing = \|\vec{P_1P_3}\| = \sigma_1 - \sigma_3$, comme le montre la figure VI.05.

**Figure VI.05** Tri cercle de MOHR

Cas particulier important :

Imposons à $\vec{n}$ de rester constamment dans le plan principal MXY. Dans le repère principal nous aurions : $\vec{n} = \alpha \vec{E}_1 + \beta \vec{E}_2 + 0 \vec{E}_3$ et en posant $\alpha = \cos \theta$ et $\beta = \sin \theta$ nous avons : $\vec{n} = \vec{u}(\theta)$. Dans ces conditions :

$$\vec{c}(M, \vec{n}) = \vec{c}(M, \vec{u}(\theta)) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos \theta \\ \sigma_2 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Or de la relation (V.02) nous avons :

$$\vec{c}(M, \vec{u}(\theta)) = \underbrace{(\vec{c}(M, \vec{u}(\theta)) \cdot \vec{u}(\theta)) \vec{u}(\theta)}_{\vec{\sigma}_\theta} + \underbrace{\vec{u}(\theta) \wedge (\vec{c}(M, \vec{u}(\theta)) \wedge \vec{u}(\theta))}_{\vec{\tau}_\theta}$$

Calculons tout d'abord σ_θ

$$\sigma_\theta = \sigma_1 \cos^2(\theta) + \sigma_2 \sin^2(\theta) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta$$

Pour $\vec{\tau}_\theta$ nous avons :

$$\vec{\tau}_\theta = \underbrace{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta}_{\tau_\theta} \vec{u}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Les composantes du vecteur $\vec{c}(M, \vec{u}(\theta))$ sont donc :

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta$$

C'est-à-dire les équations paramétriques d'un cercle de centre $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ et de rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

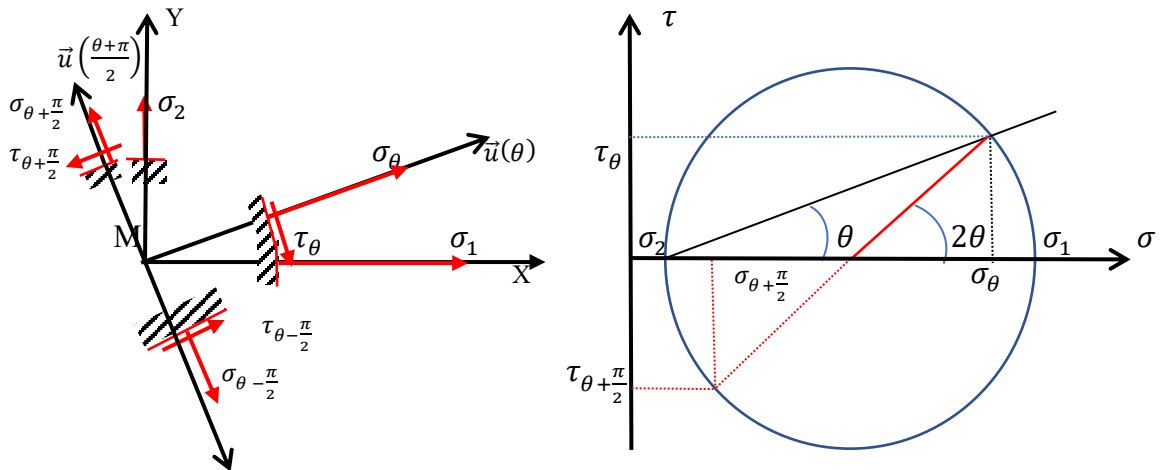


Figure VI.06 Contraintes et cercle de MOHR

Exercice VI.2

Dans un repère orthonormée $= (o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ le tenseur des contraintes en un point d'un solide a pour expression :

$$L = \begin{bmatrix} -120 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 30 \\ 0 & 30 & 40 \end{bmatrix} \text{valeurs en } N/mm^2$$

1. Calculer les contraintes principales.
2. Déterminer les directions principales.
3. Représenter sur un croquis l'état de contrainte donné ainsi que les contraintes et directions principales.
4. Construire le tri-cercle de Mohr et retrouver les résultats précédemment établis.
5. De la question précédente, déduire la valeur de la plus grande contrainte tangentielle. Préciser la facette correspondante en faisant un croquis.

Corrigé

1.

$$0 = \begin{vmatrix} -120 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 80 - \sigma & 30 \\ 0 & 30 & 40 - \sigma \end{vmatrix} = -(120 + \sigma)((80 - \sigma)(40 - \sigma) - 900)$$

Nous déduisons immédiatement de cette relation les contraintes principales :

$$\sigma_1 = 120 \quad \sigma_2 = 96,055 \dots \quad \sigma_3 = 23,94 \dots$$

2. $x=x_1$ est une direction principale puisque les contraintes tangentielles τ_{xy} et τ_{xz} sont nulles.

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} -120 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 30 \\ 0 & 30 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = 96,055 \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$\alpha_2 = 0$ puisque $-120\alpha_2 = 96,055\alpha_2$, il s'ensuit donc :

$$80\beta_2 + 30\gamma_2 = 96,055\beta_2$$

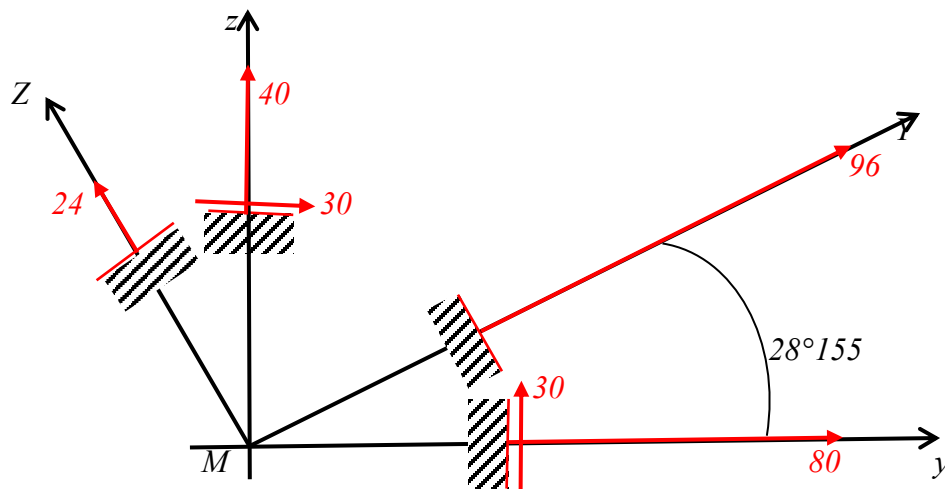
$$30\beta_2 + 40\gamma_2 = 96,055\gamma_2$$

En posant $\beta_2 = \cos\theta_2$ et $\gamma_2 = \sin\theta_2$ nous obtenons :

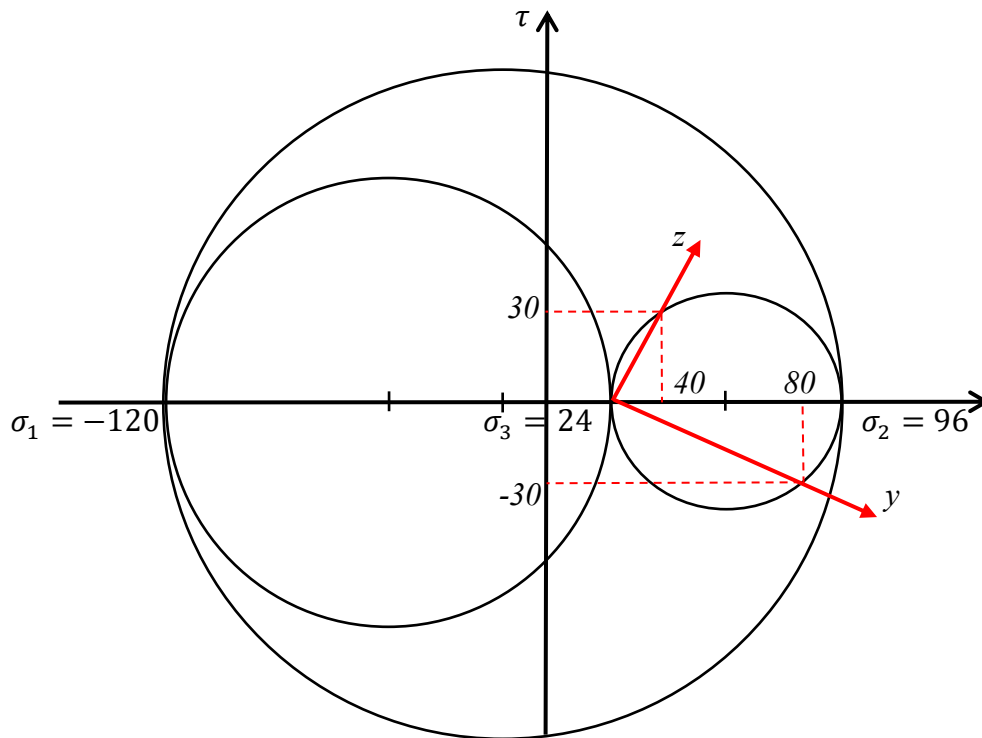
$$\theta_2 = 28^\circ 15' \dots$$

Les autres directions sont orthogonales.

3. Pour simplifier on arrondit $\sigma_2 = 96$ et $\sigma_3 = 24$



4.

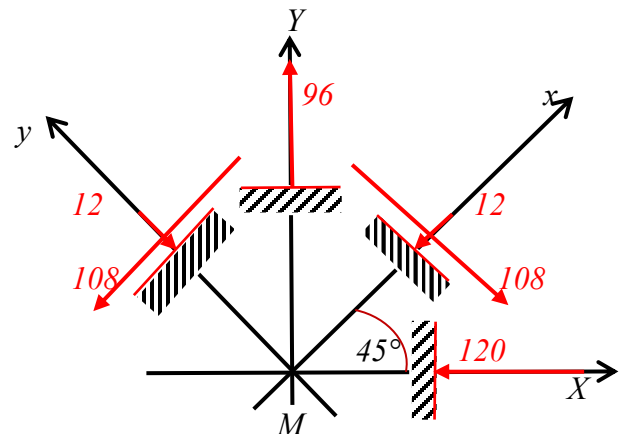


5. La plus grande contrainte tangentielle est évidemment obtenue pour :

$$\frac{120 + 96}{2} = 108$$

C'est-à-dire pour une facette définie dans le repère principale par :

$$\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{E}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{E}_2 + \vec{0}$$



Dans le repère $M x y z$, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$L = \begin{bmatrix} -12 & -108 & 0 \\ -108 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Chapitre VII

Petites déformations

1 Déplacement et déformation

Le concept de contrainte est en fait une abstraction, car on ne peut ni la voir ni la mesurer directement. Expérimentalement c'est la mesure des déformations du corps étudié qui permet de déterminer l'état de contrainte du solide.

Sous l'action d'efforts les corps solides changent de forme. Cette variation résulte du déplacement de ses points.

La distance entre les positions d'un point M avant et après changement de la forme du solide est appelée déplacement.

On désignera par $\vec{u}(M)$ le vecteur déplacement et dans un repère orthonormé $(e) = (o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ce vecteur s'écrira : $\vec{u}(M) = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{e}_3$

Comme $\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ il s'ensuit que $\vec{u}(M) = u(x, y, z)\vec{e}_1 + v(x, y, z)\vec{e}_2 + w(x, y, z)\vec{e}_3$

Considérons alors un point P infiniment voisin du point M tel que :

$$\left. \begin{aligned} \vec{MP} = \vec{ds} = dx\vec{e}_1 + dy\vec{e}_2 + dz\vec{e}_3 \\ \vec{MP} = \vec{n}ds = (\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3)ds \\ \text{avec } (\vec{n})^2 = 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} dx &= \alpha ds \\ dy &= \beta ds \\ dz &= \gamma ds \end{aligned}$$

Désignons par M' la position du point M après déformation, soit l'extrémité du vecteur $\vec{u}(M)$.

De même, désignons par P' la position du point P après déformation et posons :

$$\vec{ds}' = \vec{M'P'} \text{ et } \|\vec{ds}'\| = ds'$$

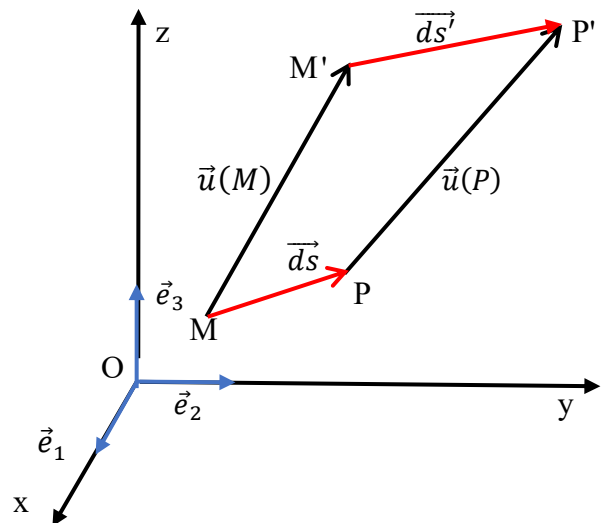


Figure VII.01 Déplacement et déformation

Si quel que soit $M \in$ solide et pour une orientation $\vec{n}$ absolument quelconque nous avons : $ds = ds'$ nous dirons que le solide a subi un déplacement d'ensemble sans déformation. Dans le cas contraire $ds \neq ds'$ il y aura déplacement avec déformation.

2 Étude de la déformation

Pour évaluer la déformation on a coutume de considérer le rapport :

$$\frac{dS' - dS}{dS}$$

C'est-à-dire la déformation relative-dans une direction donnée.

Pour déterminer ce rapport écrivons (relations de Chasles) :

$$\begin{aligned}\vec{M'P'} &= \vec{M'M} + \vec{MP} + \vec{PP'} \\ \vec{dS'} &= -\vec{u}(M) + \vec{dS} + \vec{u}(P)\end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \vec{u}(P) - \vec{u}(M) = \vec{dS'} - \vec{dS}$$

$$\text{Notons que : } \vec{u}(P) - \vec{u}(M) = \vec{u}(x + dx, y + dy, z + dz) - \vec{u}(x, y, z) = \vec{du}(M)$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\vec{dS} + \vec{du}(M) &= \vec{dS'} \\ (dS)^2 + (\vec{du}(M))^2 + 2 \vec{dS} \cdot \vec{du}(M) &= (dS')^2\end{aligned}$$

Dans l'hypothèse des petites déformations, nous considérons toujours que $(\vec{du}(M))^2$ est négligeable devant $(dS)^2$.

Nous écrivons donc :

$$(dS')^2 = (dS)^2 + 2 \vec{dS} \cdot d\vec{u}(M) \quad (\text{VII.01})$$

Effectuons le calcul de $d(\vec{u}(M))$:

$$d(\vec{u}(M)) \begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases}$$

En tenant compte que $dx = \alpha dS$, $dy = \beta dS$, $dz = \gamma dS$, nous pouvons écrire sous forme matricielle cette expression :

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} dS \quad (\text{VII.02})$$

$$\text{Sous forme abrégée : } [d(\vec{u}(M))] = [M][\vec{n}][dS]$$

En désignant :

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Il vient pour le produit scalaire :

$$\overrightarrow{dS} \cdot d\vec{u}(M) = [\vec{n}][M][\vec{n}]dS^2$$

Et pour simplifier les écritures, posons :

$$\lambda = [\vec{n}][M][\vec{n}] \quad (\text{VII.03})$$

Si bien que de l'expression (VII. 01) devient :

$$(dS')^2 = (1 + 2\lambda)(dS)^2 \Rightarrow dS' = \sqrt{(1 + 2\lambda)}dS$$

L'hypothèse des petites déformations qui consiste à négliger $(d\vec{u}(M))^2$ devant $(dS)^2$ conduit également à dire que les neuf composantes de la matrice $[M]$ sont petites devant l'unité, il en est donc de même pour λ .

Nous sommes donc en droit d'écrire que :

$$dS' = (1 + \lambda)dS$$

Puisque : $(1 + \lambda)^2 = 1 + \lambda^2 + 2\lambda \cong 1 + 2\lambda$

Il s'ensuit que le rapport caractérisant la déformation relative du point M peut s'écrire :

$$\frac{dS' - dS}{dS} = \frac{(1 + \lambda)dS - dS}{dS} = \lambda \quad (\text{VII. 04})$$

3 Calcul de la déformation relative λ

$$\lambda = [\vec{n}][M][\vec{n}] = [\alpha, \beta, \gamma] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{\partial u}{\partial x} \alpha^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \beta^2 + \frac{\partial w}{\partial z} \gamma^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \alpha \beta + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \beta \gamma + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \gamma \alpha$$

On pose généralement :

$$\begin{aligned}
e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & 2g_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & 2g_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\
e_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & 2g_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}$$

Si bien que λ s'écrit :

$$\lambda = e_x \alpha^2 + e_y \beta^2 + e_z \gamma^2 + 2g_{xy} \alpha \beta + 2g_{xz} \alpha \gamma + 2g_{yz} \beta \gamma$$

En posant $[L_d] = \begin{bmatrix} e_x & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & e_y & g_{yz} \\ g_{xz} & g_{yz} & e_z \end{bmatrix}$ on remarquera que λ peut également s'écrire :

$$\lambda = [\vec{n}][L_d][\vec{n}] \quad (\text{VII.05})$$

4 Tenseur des déformations

Décomposons la matrice $[M] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$ en une matrice symétrique $[M_1]$ et une matrice anti symétrique $[M_2]$ soit :

$$[M] = [M_1] + [M_2]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}}_{[M_1]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}}_{[M_2]}$$

Nous remarquons que la matrice $[M_1]$ est égale à la matrice $[L_d]$: $[M_1] = [L_d]$

Pour avoir une signification physique de la matrice $[M_2]$ supposons que notre solide soit indéformable (solide théorique).

Donc, en considérant un petit déplacement, nous avons :

$$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2} \text{rot}(\overrightarrow{MM'}) \wedge \overrightarrow{OM}$$

De même :

$$\overrightarrow{PP'} = \frac{1}{2} \text{rot}(\overrightarrow{PP'}) \wedge \overrightarrow{OP}$$

Puisque O est un point fixe nous avons :

$$\vec{\omega} dt = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{MM'}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{PP'})$$

Formons la différence :

$$\overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{MM'}) \wedge (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM})$$

Il s'ensuit que pour un solide indéformable :

$$d\vec{u}(M) = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\vec{u}(M)) \wedge \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\vec{u}(M)) \wedge \vec{n} dS$$

En développant les calculs, on obtient :

$$\left[\frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\vec{u}(M)) \wedge \vec{n} dS \right] = [M_2][\vec{n}][dS]$$

La différence avec un solide déformable est donc :

$$[L_d][\vec{n}][dS]$$

En résumé pour un solide quelconque, nous pouvons écrire :

$$d\vec{u}(M) = \underbrace{[M_2][\vec{n}][dS]}_{\substack{\text{Rotation élémentaire} \\ \text{n'altère pas le matériau.}}} + \underbrace{[L_d][\vec{n}][dS]}_{\text{Déformation}} \quad (\text{VII.06})$$

On pose :

$$\vec{d}(M, \vec{n}) = [L_d][\vec{n}][dS]$$

C'est le vecteur déformation en M dans la direction de $\vec{n}$.

$[L_d]$ qui a une structure tensorielle est appelé le tenseur des déformations.

$$[L_d] = \begin{bmatrix} e_x & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & e_y & g_{yz} \\ g_{xz} & g_{yz} & e_z \end{bmatrix}$$

Exercice VII.1

Un corps élastique constitué par un matériau homogène et isotrope est soumis à des sollicitations extérieures qui provoquent, dans un repère orthonormé $(e) = (o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ le champ des déplacements suivants :

$$u = 2ayx \quad v = \frac{a}{2}y^2 - bx^2 \quad w = 0$$

a et b étant deux constantes très petites. Déterminer le tenseur des déformations.

Corrigé

Nous avons :

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 2ay \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y} = ay \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$g_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = (a-b)x \quad g_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad g_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

L'expression du tenseur des déformations est donc :

$$[L_d] = \begin{bmatrix} 2ay & (a-b)x & 0 \\ (a-b)x & ay & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5 Interprétations des composantes du tenseur des déformations

5.1 Dilatations linéiques

Précédemment (relations (VII.04) et (VII.05)), nous avons vu que la grandeur λ caractérisait la déformation et avait pour expression :

$$\lambda = \frac{dS' - dS}{dS} = \lambda = [\vec{n}][L_d][\vec{n}]$$

Dans le cas particulier où $\vec{e}_1 = \vec{n}$ nous aurions :

$$\lambda_1 = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} e_x & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & e_y & g_{yz} \\ g_{xz} & g_{yz} & e_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = e_x$$

De même si :

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 = \vec{n} &\Rightarrow \lambda_2 = e_y \\ \vec{e}_3 = \vec{n} &\Rightarrow \lambda_3 = e_z \end{aligned}$$

Nous voyons ainsi que e_x, e_y et e_z sont les dilatations linéiques suivant les axes du repère choisi.

5.2 déformation angulaire

L'interprétation faite ci-dessus exclut totalement les termes en g_{ij} .

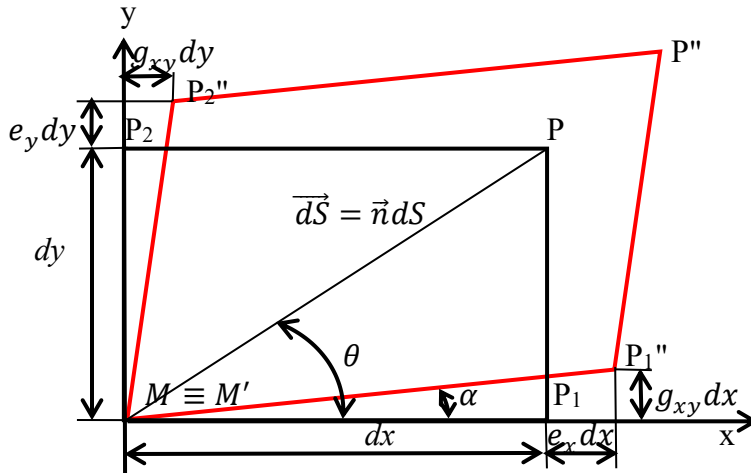


Figure VII.02 Déformation angulaire

La figure VII.02 donne une signification physique à ces termes en considérant uniquement la déformation. Pour simplifier, raisonnons dans le plan Mxy en superposant les points M et M'.

S'il n'y avait pas de déformation, nous aurions : $P \equiv P''$

Tout d'abord calculons :

$$\vec{d}(M, \vec{e}_1) = [L_d][\vec{e}_1]dx = \begin{bmatrix} e_x & g_{xy} \\ g_{xy} & e_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} e_x dx \\ g_{xy} dx \end{bmatrix}$$

$$\vec{d}(M, \vec{e}_2) = [L_d][\vec{e}_2]dy = \begin{bmatrix} e_x & g_{xy} \\ g_{xy} & e_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dy = \begin{bmatrix} g_{xy} dy \\ e_y dy \end{bmatrix}$$

Après déformation le point P_1 se trouve en P_1'' et P_2 en P_2'' . Il en sera de même pour le point P qui deviendra P'' , mais pour connaître cette déformation il nous faut calculer : $\vec{d}(M, \vec{n})$.

$$\vec{d}(M, \vec{n}) = [L_d][\vec{n}]dS = \begin{bmatrix} e_x & g_{xy} \\ g_{xy} & e_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} dS = \begin{bmatrix} e_x \cos \theta dS + g_{xy} \sin \theta dS \\ g_{xy} \cos \theta dS + e_y \sin \theta dS \end{bmatrix}$$

Et comme $dx = \cos \theta dS$ et $dy = \sin \theta dS$ nous avons :

$$\vec{d}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} e_x dx \\ g_{xy} dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{xy} dy \\ e_y dy \end{bmatrix} = \vec{d}(M, \vec{e}_1) + \vec{d}(M, \vec{e}_2)$$

Désignons par α l'angle $\widehat{P_1''MP_1}$ qui a pour valeur : $\tan \alpha = \frac{g_{xy}}{1+e_x}$

Comme il s'agit de petites déformations $\vec{e}_x$ et g_{xy} sont très petits devant 1, il s'ensuit donc :

$$\tan \alpha \approx g_{xy} \approx \alpha$$

Il en serait de même pour l'angle $\widehat{P_2''MP_2}$.

Ainsi la variation de l'angle droit $\widehat{P_1MP_2}$ s'écrit :

$$\frac{\pi}{2} - \widehat{P_1''MP_2''} = 2g_{xy}$$

Cette déformation angulaire que l'on note $\gamma_{xy} = 2g_{xy}$ se nomme le glissement.

6 Dilatations principales et directions principales

Il s'agit des directes actions propres et des valeurs propres de la matrice $\|L_d\|$. Comme cette matrice est symétrique il existe un repère orthonormé MXYZ qui la diagonalise.

$[L_d]$ prend donc la forme suivante :

$$[L_d] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

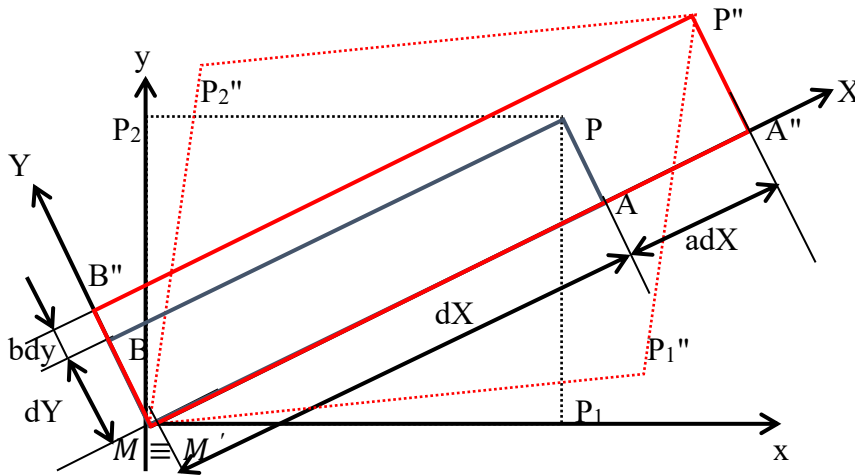


Figure VII.03 Déformation dans repère principal

a, b et c sont les dilatations principales et MX, MY, MZ sont les directions principales.

Pour les directions principales, le glissement est nul et l'interprétation physique est très simple, comme le montre la figure VII.03.

Un parallélépipède rectangle dont les faces sont parallèles aux plans principaux restent après déformation un parallélépipède rectangle.

7 Ellipsoïde des déformations

Le point M étant fixé, cherchons le lieu des points P, lorsque $\vec{n}$ varie, c'est-à-dire l'extrémité du vecteur $\vec{d}(M, \vec{n})$.

Pour une question de commodité, on préfère considérer une grandeur relative en cherchant le lieu de l'extrémité du vecteur :

$$\frac{\vec{d}(M, \vec{n})}{dS} = [L_d][\vec{n}]$$

Travaillons dans le repère principal MXYZ.

$$\frac{\vec{d}(M, \vec{n})}{dS} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha_1 \\ b\beta_1 \\ c\gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

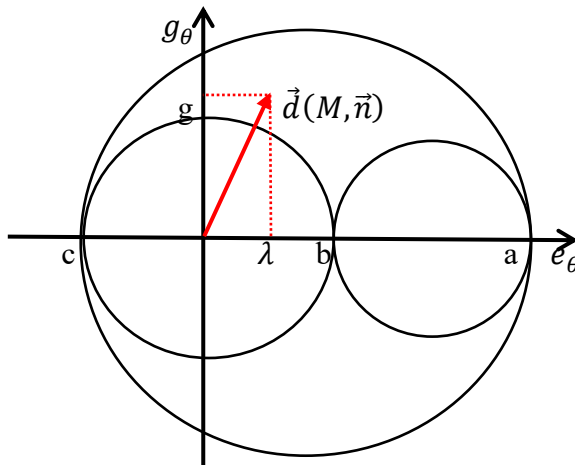
Puisque $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, il s'ensuit que :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{Y_1^2}{b^2} + \frac{Z_1^2}{c^2} = 1$$

C'est l'équation de l'ellipsoïde de lamé de la déformation. Ces axes coïncident avec les directions principales de la déformation.

8 Tri-cercle de Mohr des déformations

Un raisonnement calqué sur le tri-cercle de Mohr des contraintes, nous conduit au tri-cercle des déformations.



La construction du tri-cercle de Mohr des déformations rend évidentes les propriétés suivantes :

- Dans chaque plan principal, le plus grand glissement a lieu suivant la bissectrice des axes principaux et a pour valeur la demi-différence des deux dilatations principales correspondantes.
- La plus grande valeur du glissement a lieu dans le plan défini par les dilatations principales extrêmes.

Figure VII.04 Tri-cercle des déformations

Un cas particulier important est celui où $\vec{n}$ peut prendre toutes les directions dans un plan principal. Par exemple supposons que $\vec{n} = \vec{u}(\theta)$

Dans le repère principal MX, MY nous aurions :

$$\frac{\vec{d}(M, \vec{u}(\theta))}{dS} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{bmatrix}$$

Projetons ce vecteur suivant $\vec{u}(\theta)$ et dans le plan perpendiculaire à $\vec{u}(\theta)$:

$$\frac{\vec{d}(M, \vec{u}(\theta))}{dS} = \underbrace{\left(\frac{\vec{d}(M, \vec{u}(\theta))}{dS} \cdot \vec{u}(\theta) \right) \vec{u}(\theta)}_{\lambda_\theta \vec{u}(\theta)} + \underbrace{\vec{u}(\theta) \wedge \left(\frac{\vec{d}(M, \vec{u}(\theta))}{dS} \wedge \vec{u}(\theta) \right)}_{g_\theta \vec{u}(\theta - \frac{\pi}{2})} \quad (\text{VII.07})$$

Par analogie aux résultats obtenus pour les contraintes, nous poserons : $\lambda_\theta = e_\theta$

Nous avons donc :

$$\left. \begin{aligned} e_\theta &= a \cos^2(\theta) + b \sin^2(\theta) = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\theta \\ g_\theta &= (a - b) \cos \theta \sin \theta = \frac{a-b}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.08})$$

C'est-à-dire les équations paramétriques d'un cercle de centre $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{a-b}{2}$

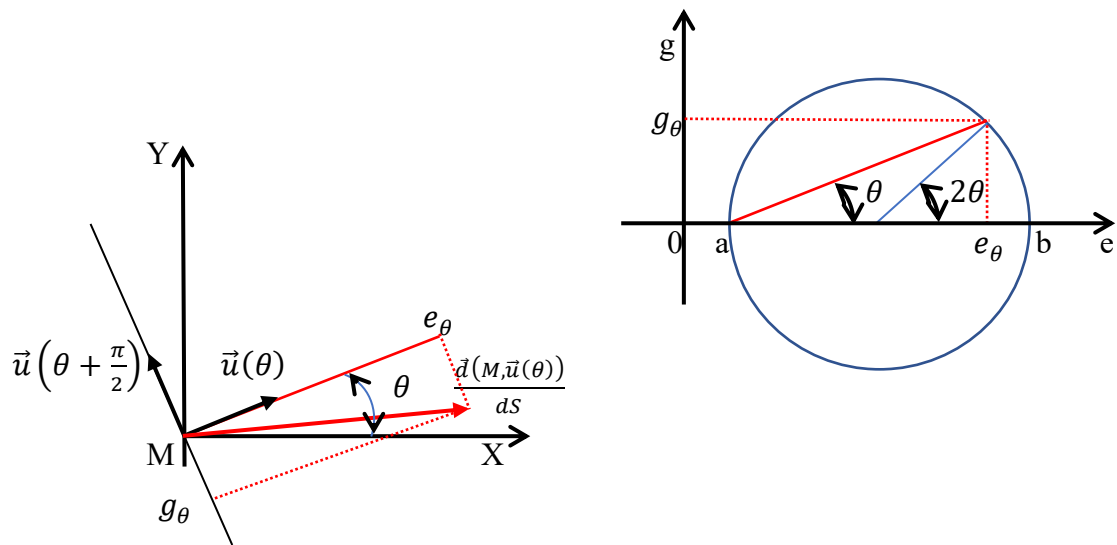
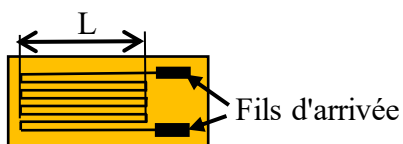


Figure VII.05 Cercle de Mohr des déformations

9 Mesures extensométriques

L'extensométrie a pour objet de mesurer à la surface des corps, les déformations longitudinales en certains points, au moyen d'appareils appelés extensomètres.

Les plus utilisés sont les extensomètres à fils résistants, qui sont constitués par un fil en constantan de 0,015 à 0,020 mm de diamètre collé en zigzag entre deux bandes de papier ou sur un support très mince en résine époxyde.



L'extensomètre, ou jauge à fils résistants, est collé sur la surface de la pièce à étudier de telle sorte que la direction des fils coïncide avec la direction de la dilatation que l'on souhaite mesurer.

Figure VII.06 Extensomètre

Nous savons qu'en un point de la surface où il n'y a pas de force directement appliquée, la contrainte sur le plan tangent à la surface est nulle et, par suite, il y a un état plan de contraintes en ce point.

Pour déterminer les dilatations principales a et b il faut mesurer les déformations longitudinales suivant trois directions.

Dans une direction donnée l'expérience montre que la variation relative de résistance $\frac{\Delta R}{R}$ et l'allongement linéique $\frac{\Delta l}{l}$ sont liés par la relation :

$$\frac{\Delta R}{R} = K \frac{\Delta l}{l}$$

Pour des déformations inférieures à 5/1000 le coefficient de jauge K est généralement égal à 2.

Il existe dans le commerce des jauges électriques spéciales, dites rosettes dans lesquelles les directions des jauges sont bien déterminées.



Figure VII.07 Jauges extensométriques

À titre d'exemple traitons le cas d'une rosette à 90°. Pour cela, désignons par θ l'angle formé par l'axe Mx avec la direction principale MX. Compte tenu de la relation (VII.08) exprimons les grandeurs mesurées e_x , e_u et e_y par :

$$\begin{aligned} e_x = e_\theta &= \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\theta \\ e_u = e_{\theta+\frac{\pi}{4}} &= \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \sin 2\theta \\ e_y = e_{\theta+\frac{\pi}{2}} &= \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \cos 2\theta \end{aligned}$$

et pour le glissement nous obtenons :

$$\begin{aligned} g_\theta &= \frac{a-b}{2} \sin 2\theta \\ g_{\theta+\frac{\pi}{4}} &= \frac{a-b}{2} \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a-b}{2} \cos 2\theta \\ g_{\theta+\frac{\pi}{2}} &= \frac{a-b}{2} \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{a-b}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

De ces relations nous déduisons :

$$\begin{aligned} \frac{e_x + e_y}{2} &= \frac{a+b}{2} \\ \frac{e_x - e_y}{2} &= \frac{a-b}{2} \cos 2\theta = g_{\theta+\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Soit les éléments qui nous permettent de construire le cercle de Mohr, puisque dans le repère (e, g) nous avons :

-les coordonnées du centre du cercle : $\overrightarrow{OO'} = \left(\frac{a+b}{2}; 0\right)$

-les coordonnées d'un point P du cercle : $\overrightarrow{OP} = \left(e_{\theta+\frac{\pi}{4}} = e_u; g_{\theta+\frac{\pi}{4}} = \frac{e_x - e_y}{2}\right)$

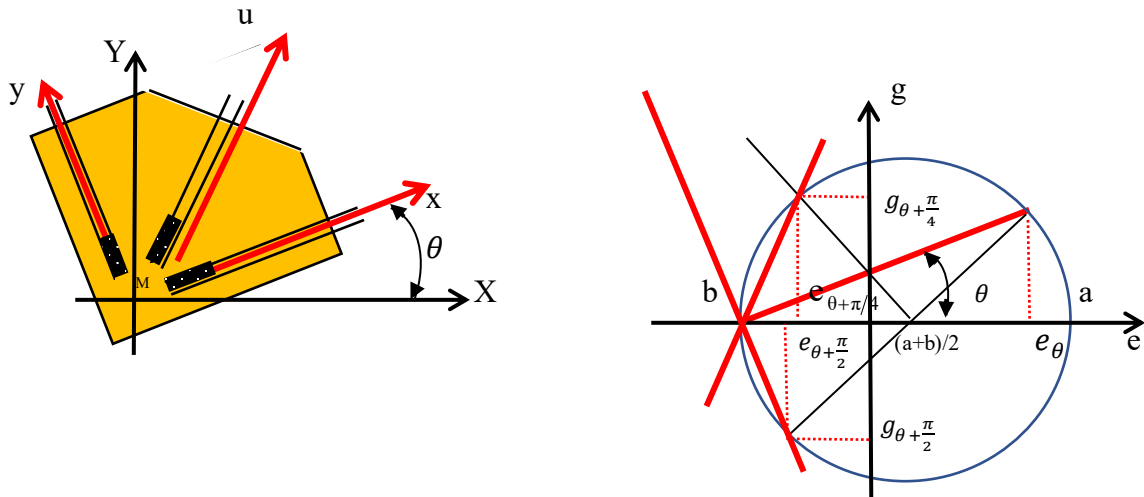


Figure VII.08 Construction du cercle de Mohr

Exercice VII.2

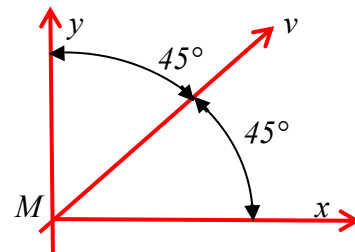
En un point M d'une structure en acier, on a mesuré, à l'aide de jauges extensométriques les dilatations suivantes :

$$e_x = 28,5 \cdot 10^{-5} \quad e_y = 5,5 \cdot 10^{-5} \quad e_v = 36,92 \cdot 10^{-5}$$

suivant trois directions Mx , Mv , My faisant entre elles des angles de 45° (rosette à 90°).

Déterminer :

1. Les dilatations principales.
2. Les directions principales.



Corrigé

1. Nous avons :

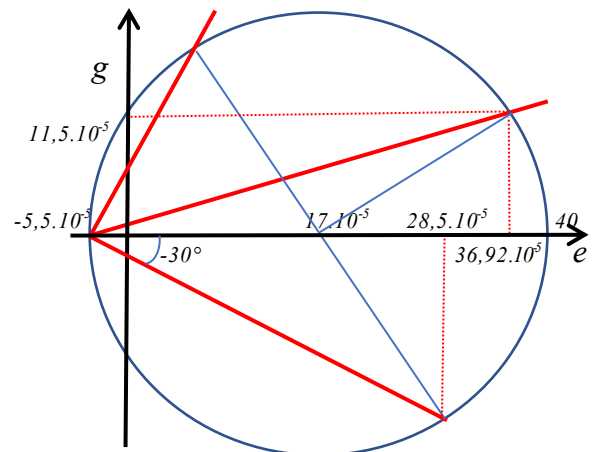
$$\frac{a+b}{2} = \frac{28,5 + 5,5}{2} \cdot 10^{-5} = 17 \cdot 10^{-5}$$

$$g_{\theta+\frac{\pi}{4}} = \frac{28,5 - 5,5}{2} \cdot 10^{-5} = 11,5 \cdot 10^{-5}$$

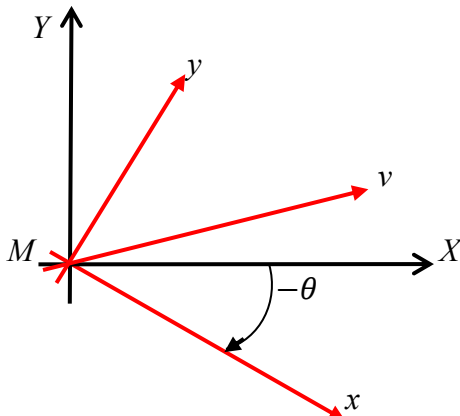
Nous disposons ainsi de tous les éléments pour construire le cercle de Mohr.

Nous lisons :

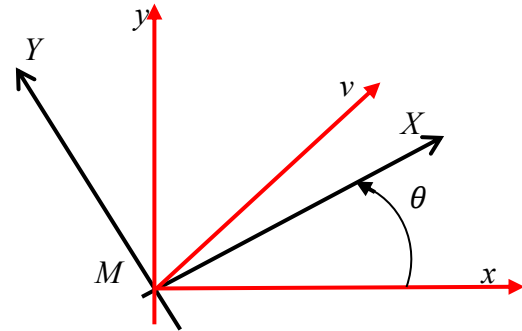
$$a = 40 \cdot 10^{-5} \text{ et } b = -5,5 \cdot 10^{-5}$$



2. Par lecture nous lisons : $\theta = -30^\circ$



Interprétation dans le repère principal.



Interprétation dans le repère initial.

10 Invariants scalaires du tenseur des déformations

Les trois invariants scalaires du tenseur des déformations se définissent de façon analogue à ceux du tenseur des contraintes.

L'équation caractéristique associée au tenseur L est évidemment indépendante de la base choisie, et s'écrit :

$$\begin{vmatrix} e_x - e & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & e_y - e & g_{yz} \\ g_{xz} & g_{yz} & e_z - e \end{vmatrix} = 0$$

Soit à résoudre une équation de la forme :

$$-e^3 + A_d e^2 - B_d e + C_d = 0$$

Dont les racines a, b, et c sont les dilatations principales.

A_d , B_d et C_d sont les invariants scalaires du tenseur des déformations. Dans le repère principal leurs expressions sont très simples, et s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_d &= a + b + c = e_x + e_y + e_z \\ B_d &= a.b + b.c + c.a \\ C_d &= a.b.c \end{aligned} \quad (\text{VII.09})$$

11 Coefficient de dilatation cubique

Pour un point M appartenant au solide étudié, considérons dans le repère principal MXYZ un parallélépipède de volume $dX dY dZ$ avant déformation.

Après déformation le volume de ce parallélépipède devient :

$$(dX+adX) (dY+bdY) + (dZ+cdZ)$$

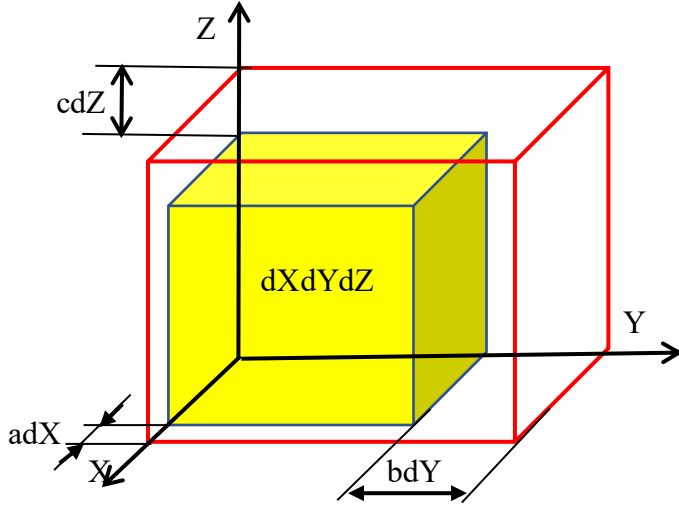


Figure VII.09 Dilatation cubique

On pose souvent :

$$\frac{dV}{V} = 3e_m = A_d = e_x + e_y + e_z \quad (\text{VII.10})$$

V est le volume avant déformation.

e_m représente une déformation linéique moyenne, puisque :

$$e_m = \frac{a + b + c}{3} = \frac{e_x + e_y + e_z}{3}$$

$3 e_m$ ou A_d est appelé le coefficient de dilatation volumique relative, ou coefficient de dilatation cubique.

12 Déviateur des déformations

D'une façon tout à fait analogue au tenseur des contraintes, nous décomposons le tenseur $[L_d]$ en deux tenseurs symétriques :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e_x & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & e_y & g_{yz} \\ g_{xz} & g_{yz} & e_z \end{bmatrix}}_{[L_d]} = \underbrace{\begin{bmatrix} e_x - e_m & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & e_y - e_m & g_{yz} \\ g_{xz} & g_{yz} & e_z - e_m \end{bmatrix}}_{[B_1]} + \underbrace{\begin{bmatrix} e_m & 0 & 0 \\ 0 & e_m & 0 \\ 0 & 0 & e_m \end{bmatrix}}_{[B_2]} \quad (\text{VII.11})$$

$[B_1]$ est le déviateur de la déformation, de trace nulle, il y a comme valeurs propres :

$$a - e_m, b - e_m, c - e_m,$$

et mêmes directions principales que $[L_d]$

Remarquons que lorsque le déviateur $[B_1]$ est égal au tenseur des déformations $[L_d]$ nous avons $e_m = 0$. Dans ces conditions, le coefficient de dilatation volumique relative est nulle : $\frac{dV}{V} = 0$.

$[B_2]$ est appelé le tenseur isotrope.

13 Conditions de compatibilité entre déformations et déplacements

Pour résoudre des problèmes d'élasticité on se fixe souvent, a priori, le champ des contraintes ou le champ des déformations.

Comme nous le verrons dans le prochain chapitre, les contraintes et les déformations sont liées par des relations linéaires, ce qui n'est pas le cas pour les déplacements et déformations, puisque nous avons :

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & 2g_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & 2g_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ e_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & 2g_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

Il faut que le champ des déformations (ou des contraintes) satisfasse au champ des déplacements. Pour cela on montre qu'en éliminant dans les six relations ci-dessus u , v , w on marque nécessairement les conditions que doit satisfaire le champ des déformations.

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial g_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial g_{yz}}{\partial x} \right) & \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial g_{xz}}{\partial y} \right) & \frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 g_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial g_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial g_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial g_{xy}}{\partial z} \right) & \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 g_{xz}}{\partial x \partial z} \end{aligned} \quad (\text{VII.12})$$

Chapitre VIII

Relations entre contraintes et déformations

1 Généralités

Compte tenu de l'expérience, nous nous proposons d'établir les relations qui existent en un point entre les composantes du tenseur des contraintes et les composantes du tenseur des déformations.

D'une façon générale ces diverses composantes peuvent être fonction du temps et la température peut varier d'un point à un autre.

Dans ces notions d'élasticité nous faisons un certain nombre d'hypothèses simplificatrices :

- Température uniforme (équilibre thermodynamique).
- Le temps n'intervient pas dans les équations.
- Le matériau est homogène et isotrope.
- Les déformations sont petites.
- Relations linéaires entre les déformations et contraintes.

Cette dernière hypothèse nous conduit à écrire sous forme matricielle.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ g_{xy} \\ g_{xz} \\ g_{yz} \end{bmatrix}$$

Considérons en un point du corps son état de contrainte caractérisé par son tenseur des contraintes et son ellipsoïde des contraintes (C).

En ce même point, considérons le tenseur des déformations et l'ellipsoïde des déformations (D).

Un plan principal de (C) constitue évidemment un plan de symétrie pour les contraintes.

L'hypothèse d'isotropie du corps exige que ce plan soit également plan de symétrie pour la déformation. L'expérience le confirme.

Donc en chaque point d'un corps homogène isotrope, l'ellipsoïde des contraintes et l'ellipsoïde des déformations ont mêmes axes.

D'où la propriété fondamentale suivante :

Les deux tenseurs ont les mêmes plans de symétrie et par conséquent les mêmes directions principales.

Dans le repère principal MXYZ nous avons :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = b_{11}a + b_{12}b + b_{13}c \\ \sigma_2 = b_{21}a + b_{22}b + b_{23}c \\ \sigma_3 = b_{31}a + b_{32}b + b_{33}c \end{cases}$$

Notons que cette matrice caractérise une relation linéaire entre les contraintes et les déformations principales, mais elle n'est pas fonction du chargement.

Considérons des chargements conformes à la figure VIII.01, définissant des états obtenus par diverses permutation.

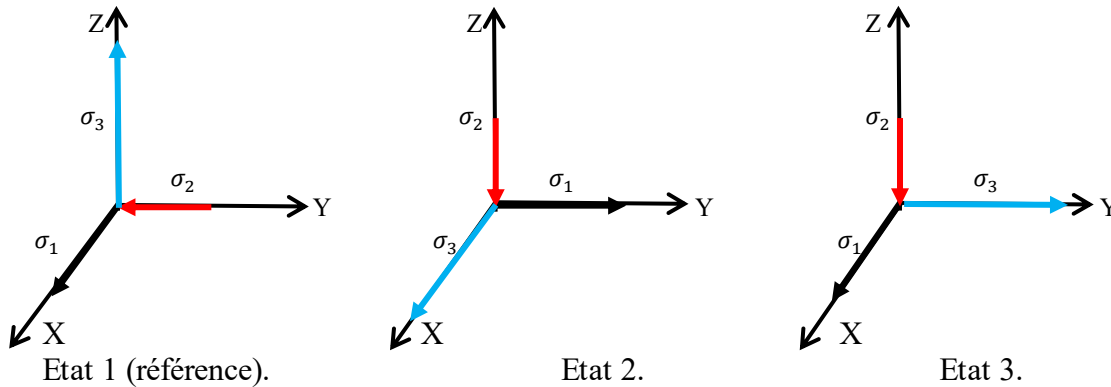


Figure VIII.01 Chargements

Les lois des contraintes en fonction des déformations n'ont pas changé sur les axes ; on peut donc écrire :

Etat 2

$$\begin{bmatrix} \sigma_3 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_3 = b_{11}c + b_{12}a + b_{13}b \\ \sigma_1 = b_{21}c + b_{22}a + b_{23}b \\ \sigma_2 = b_{31}c + b_{32}a + b_{33}b \end{cases}$$

Etat 3

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = b_{11}a + b_{12}c + b_{13}b \\ \sigma_3 = b_{21}a + b_{22}c + b_{23}b \\ \sigma_2 = b_{31}a + b_{32}c + b_{33}b \end{cases}$$

En identifiant pour ces trois états les termes en σ_1 , σ_2 et σ_3 nous obtenons les résultats :

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_{22} = b_{33} \\ b_{12} &= b_{13} = b_{21} = b_{23} = b_{31} = b_{32} \end{aligned}$$

Soit en remplaçant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{12} \\ b_{12} & b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{12} & b_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = b_{11}a + b_{12}(b + c) \\ \sigma_2 = b_{11}b + b_{12}(a + c) \\ \sigma_3 = b_{11}c + b_{12}(a + b) \end{cases}$$

Que l'on peut écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (b_{11} - b_{12})a + b_{12}(a + b + c) \\ \sigma_2 &= (b_{11} - b_{12})b + b_{12}(a + b + c) \\ \sigma_3 &= (b_{11} - b_{12})c + b_{12}(a + b + c) \end{aligned}$$

On pose :

$$b_{11} - b_{12} = 2G \quad \text{et} \quad b_{12} = \lambda$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2Ga + \lambda(a + b + c) \\ \sigma_2 &= 2Gb + \lambda(a + b + c) \\ \sigma_3 &= 2Gc + \lambda(a + b + c) \end{aligned} \quad (\text{VIII. 01})$$

G et λ sont les coefficients d'élasticité de Lamé, ils ont la dimension d'une contrainte.

G est encore appelé le module de Coulomb ou module de glissement ou module de torsion et souvent module d'élasticité transversal.

En résolvant ce système par rapport aux dilatations principales a , b et c , on obtient :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\lambda + G}{G(3\lambda + 2G)} \left(\sigma_1 - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}(\sigma_2 + \sigma_3) \right) \\ b &= \frac{\lambda + G}{G(3\lambda + 2G)} \left(\sigma_2 - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}(\sigma_1 + \sigma_3) \right) \\ c &= \frac{\lambda + G}{G(3\lambda + 2G)} \left(\sigma_3 - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}(\sigma_1 + \sigma_2) \right) \end{aligned} \quad (\text{VIII. 02})$$

2 Relations entre contraintes et déformations dans un repère quelconque

Ajoutons membre à membre les termes de la relation (VIII.01)

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= 3\sigma_m = 2G(a + b + c) + 3\lambda(a + b + c) \\ \sigma_m &= (2G + 3\lambda)e_m \end{aligned} \quad (\text{VIII.03})$$

Des relations (VIII.01) et (VIII.03) nous déduisons :

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_m &= 2G(a - e_m) \\ \sigma_2 - \sigma_m &= 2G(b - e_m) \\ \sigma_3 - \sigma_m &= 2G(c - e_m) \end{aligned}$$

Compte tenu du déviateur des contraintes (VI.04) et du déviateur des déformations (VII.11), tous deux, écrits dans le repère principal, nous avons :

$$[A_1] = 2G[B_1] \quad (\text{VIII.04})$$

Cette relation matricielle est indépendante du repère choisi. Dans un repère quelconque nous avons :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} e_x - e_m & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & e_y - e_m & g_{yz} \\ g_{xz} & g_{yz} & e_z - e_m \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.05})$$

Des relations (VII.10), (VIII.03), (VIII.05) on déduit facilement :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Ge_x + \lambda(e_x + e_y + e_z) & \tau_{xy} &= 2Gg_{xy} \\ \sigma_y &= 2Ge_y + \lambda(e_x + e_y + e_z) & \tau_{xz} &= 2Gg_{xz} \\ \sigma_z &= 2Ge_z + \lambda(e_x + e_y + e_z) & \tau_{yz} &= 2Gg_{yz} \end{aligned} \quad (\text{VIII.06})$$

En résolvant (VIII.06) par rapport e_x , e_y , e_z on obtient :

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\lambda + G}{G(3\lambda + 2G)} \left(\sigma_x - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} (\sigma_y + \sigma_z) \right) \\ e_y &= \frac{\lambda + G}{G(3\lambda + 2G)} \left(\sigma_y - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} (\sigma_x + \sigma_z) \right) \\ e_z &= \frac{\lambda + G}{G(3\lambda + 2G)} \left(\sigma_z - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} (\sigma_y + \sigma_x) \right) \end{aligned}$$

On pose :

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \quad \text{et :} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$$

E est le module d'élasticité longitudinal ou encore module de Young.

ν est le coefficient de Poisson.

Les relations ci-dessus deviennent :

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ e_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \\ e_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)) \end{aligned} \right\} \text{et dans le repère principal} \begin{cases} a = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ b = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)) \\ c = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu(\sigma_2 + \sigma_1)) \end{cases} \quad \text{VIII.07}$$

Prenons l'exemple simple d'une poutre cylindrique, de longueur L et de diamètre D , soumise à de la traction. L'équilibre de la poutre, relation (III.05), exige :

$$\vec{F}_G + \vec{F}_D = \vec{0}$$

Conformément aux conventions de la résistance des matériaux (relation VI.01), l'équilibre de la partie gauche G de la poutre, s'écrit :

$$\vec{R}(F_G \rightarrow G) + \vec{R}(D \rightarrow G) = \vec{0}$$

Soit tout simplement : $-F_G + \sigma_1 \Omega = 0$ puisque : $\vec{c}(M \in \Omega, \vec{E}_1) = \sigma_1 \vec{E}_1$.

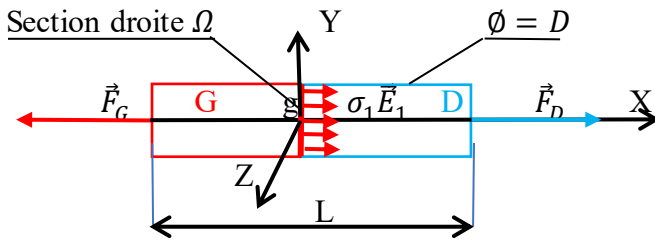


Figure VIII.02 Poutre droite

Dans le repère principal gXYZ, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Compte tenu de la relation VII.07 le tenseur des déformations devient :

$$[L_d] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_1}{E} \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.08})$$

Or $\sigma_1 = \frac{F}{\Omega}$, $a = \frac{\Delta L}{L}$, $b = c = \frac{\Delta D}{D}$ si bien que de la relation (VII.08) on déduit :

$$\frac{F}{\Omega} = E \frac{\Delta L}{L}, \quad \nu \frac{F}{\Omega} = -E \frac{\Delta D}{D}$$

La force F provoque dans la barre un allongement $\frac{\Delta L}{L}$ et une contraction transversale $\frac{\Delta D}{D}$. Ce qui permet de déduire expérimentalement E et ν .

Ainsi on peut obtenir :

$$G = \frac{E}{2(\nu + 1)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Valeurs de λ , E , et G exprimées en daN/mm ²				
Désignation	$\lambda \cdot 10^{-3}$	$E \cdot 10^{-3}$	$G \cdot 10^{-3}$	ν
Acier	9-13	20-22	7,9-8,4	0,27-0,31
Laiton	8,5	11	4,1	0,33
Cuivre	9-14	13	4,8	0,33-0,38
Plomb	3,5	1,6	0,56	0,43
Verre	2,7-3	6	2,38	0,26

Tableau VIII.1 Constantes pour quelques matériaux usuels

3 Problèmes d'élasticité

L'étude du comportement d'un solide nous conduit à considérer quinze fonctions inconnues :

- Déplacement : u, v, w
- Composantes du tenseur des déformations : $e_x, e_y, e_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz}$
- Composantes du tenseur des contraintes : $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$

On dispose pour résoudre ce problème de quinze équations.

- Six équations géométriques :

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & g_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & g_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ e_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & g_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

- Six relations entre les contraintes et les déformations :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Ge_x + 3\lambda e & \tau_{xy} &= 2Gg_{xy} \\ \sigma_y &= 2Ge_y + 3\lambda e & \tau_{xz} &= 2Gg_{xz} \\ \sigma_z &= 2Ge_z + 3\lambda e & \tau_{yz} &= 2Gg_{yz} \end{aligned}$$

- Trois équations différentielles de l'équilibre :

$$\begin{aligned} \rho X_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \rho X_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \rho X_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

La résolution d'un problème d'élasticité exige d'intégrer ce système d'équation aux dérivées partielles, en tenant compte des conditions aux limites (chargements, déplacement).

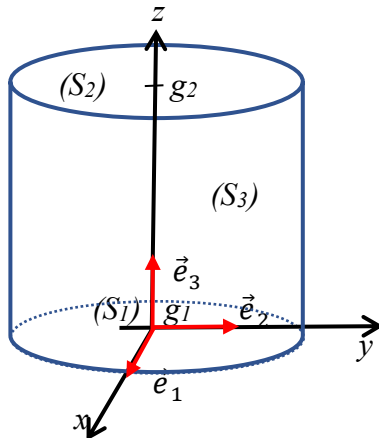
La solution exacte "mathématique" n'est connue que dans des cas particuliers, mais des méthodes de calcul telles que les éléments finis permettent de résoudre numériquement les problèmes d'élasticité.

Pour résoudre analytiquement, on peut utiliser une méthode dite semi inverse qui consiste à se fixer a priori les composantes du déplacement u, v, w ou à se donner le champ des contraintes ou des déformations.

Dans ce dernier cas, par exemple, il faudrait que les six fonctions données $(e_x, e_y, e_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz})$ soient continues et admettent des dérivées partielles du premier ordre et qu'elles satisfassent aux équations d'équilibre ainsi qu'aux conditions de compatibilité entre déplacements et déformations.

Exercice VIII.1

Sachant que dans son utilisation courante la pièce représentée ci-dessous, doit être parfaitement cylindrique lorsqu'elle est soustraite au champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$.



Comment doit-on l'usiner sur terre et contrôler ses cotes lorsqu'elle est posée verticalement sur une table horizontale suivant (S_1) .

Le cylindre a un rayon r et est limité par deux sections droites (S_1) et (S_2) de centre g_1 et g_2 et distantes de :

$$h = |\overrightarrow{g_1 g_2}|.$$

On précise que seule la pesanteur exerce une action sur ce cylindre.

La surface latérale sera désignée par (S_3) .

1. Écrire les conditions aux limites sur la face (S_1) .
2. Conditions aux limites sur la face (S_2) .
3. Conditions aux limites sur la face (S_3) .
4. Dédire des questions précédentes une forme très simple du champ des contraintes. Il faudra s'assurer que ce champ vérifie bien les équations de l'équilibre et les équations de compatibilité.
5. Déterminer le tenseur des déformations.
6. Exprimer le champ des déplacements $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ en fonction des constantes d'intégration.
7. En précisant les conditions aux limites, déterminer les constantes d'intégration de la question précédente. Dédire le champ des déplacements.

Corrigé

1. Le plan exerce une action sur le cylindre égal au poids $\rho g h \pi r^2 h$. Ce qui nous autorise à dire que le plan exerce une pression $p = \rho g h$ sur la surface (S_1) du cylindre. Soit pour $M_1 \in (S_1)$:

$$\vec{c}(M_1, -\vec{e}_3) = \rho g h \vec{e}_3.$$

Comme ; $\vec{c}(M_1, -\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ nous avons donc pour la face (S_1) :

$$-\tau_{xz} = 0 \quad -\tau_{yz} = 0 \quad -\sigma_z = \rho g h$$

2. Sur la face (S_2) nous avons pour $M_2 \in (S_2)$:

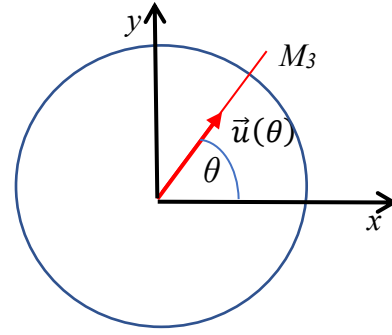
$$\vec{c}(M_2, \vec{e}_3) = \vec{0}.$$

ce qui se traduit par :

$$\tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad \sigma_z = 0.$$

3. Sur la face (S_3) nous avons pour $M_3 \in (S_3)$:

$$\vec{c}(M_3, \vec{u}(\theta)) = \vec{0} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta &= 0 \\ \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta &= 0 \\ \tau_{xz} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

Ces relations doivent être vérifiées quel que soit θ ce qui implique que $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ soient nulles.

4. L'ensemble des précédentes conditions aux limites admet comme solution :

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \sigma_y = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_z \neq 0 \text{ sur } (S_1).$$

Le tenseur ci-dessous satisfait les conditions aux limites pour les contraintes et vérifie bien les équations de l'équilibre.

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho g(h-z) \end{bmatrix}.$$

Puisque :

$$\begin{aligned} \rho X_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \\ -\rho g + 0 + 0 + \rho g &= 0 \end{aligned}$$

Pour les équations de compatibilités écrivons les relations entre contraintes et déformations.

$$\begin{aligned} e_x = a &= \frac{\nu}{E} \rho g(h-z) & g_{xy} &= 0 \\ e_y = b &= \frac{\nu}{E} \rho g(h-z) & g_{xz} &= 0 \\ e_z = c &= -\frac{\rho g}{E} (h-z) & g_{yz} &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons bien :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} &= 0 & \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} &= 0 & \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial z} &= 0 & \frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} &= 0 & \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} &= 0 & \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} &= 0 & \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

5.

De la question précédente on déduit immédiatement :

$$[L_d] = \frac{\rho g}{E} \begin{bmatrix} v(h-z) & 0 & 0 \\ 0 & v(h-z) & 0 \\ 0 & 0 & -(h-z) \end{bmatrix}$$

6. Des relations entre déplacement et déformation nous déduisons :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{E} \rho g (h-z) \Rightarrow u = \frac{v}{E} \rho g (h-z)x + f_1(y, z)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v}{E} \rho g (h-z) \Rightarrow v = \frac{v}{E} \rho g (h-z)y + f_2(x, z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\rho g}{E} (h-z) \Rightarrow w = -\frac{v}{E} \rho g \left(h - \frac{z}{2}\right)z + f_3(x, y)$$

$$2g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x, z)}{\partial x} \quad (1)$$

$$2g_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 = -\frac{v}{E} \rho g x + \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial f_3(x, y)}{\partial x} \quad (2)$$

$$2g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 = -\frac{v}{E} \rho g y + \frac{\partial f_2(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial f_3(x, y)}{\partial y} \quad (3)$$

Dérivons (1) par rapport à y :

$$\frac{\partial^2 f_1(y, z)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} = a(z) + b \Rightarrow f_1(y, z) = a(z)y + by + c(z) + d$$

Dérivons (2) par rapport à z :

$$\frac{\partial^2 f_1(y, z)}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow f_1(y, z) = a_1(y)z + b_1z + c_1(y) + d_1$$

Ces deux valeurs de $f_1(y, z)$ doivent être égales si bien que nous avons :

$$a(z)y = a_1(y)z = Ayz \quad by = c_1(y) \quad c(z) = b_1z \quad d_1 = d$$

Donc l'expression de la fonction $f_1(y, z)$ est :

$$f_1(y, z) = Ayz + by + b_1z + d \quad (4)$$

Dérivons (2) par rapport à x et (3) par rapport à z puis procédons de même en dérivant (3) par rapport à y puis (2) par rapport à x on obtient sans difficulté les expressions des fonctions $f_2(x, z)$ et $f_3(x, y)$:

$$f_2(x, z) = Bxz + b_2x + b_3z + d_2 \quad (5)$$

$$f_3(x, y) = \frac{v}{2E} \rho g (x^2 + y^2) + b_4x + Cxy + b_5y + d_4 \quad (6)$$

Mais il va de soi que les relations (4), (5), (6) doivent satisfaire les relations (1), (2), (3) :

$$\begin{aligned} Az + b + bz + b_2 &= 0 \\ -\frac{v}{E} \rho g x + Ay + b_1 + \frac{v}{E} \rho g x + b_4 + Cy &= 0 \\ -\frac{v}{E} \rho g y + Bx + b_3 + \frac{v}{E} \rho g y + Cx + b_5 &= 0 \end{aligned}$$

Ces relations doivent être vérifiées quelles que soient x, y et z donc :

$$\begin{aligned} A = B = C = 0 \\ b = -b_2 \quad b_3 = -b_5 \quad b_1 = -b_4 \end{aligned}$$

D'où les composantes du vecteur déplacement $\vec{u}(M)$:

$$u = \frac{\nu}{E} \rho g (h - z)x + by + b_1 z + d \quad (7)$$

$$v = \frac{\nu}{E} \rho g (h - z)y - bx + b_3 z + d_2 \quad (8)$$

$$w = -\frac{\nu}{E} \rho g \left(h - \frac{z}{2}\right) z + \frac{\nu}{2E} \rho g (x^2 + y^2) - b_1 x - b_3 y + d_4 \quad (9)$$

7. Écrivons tout d'abord que le centre g_1 doit être fixe, c'est-à-dire : $\vec{u}(g_1) = \vec{0}$. Ce qui revient à dire que pour ; $x=0, y=0, z=0$ nous avons : $u=0, v=0, w=0$. Cette condition aux limites sur les déplacements implique forcément que : $d=0, d_2=0, d_4=0$.

Du fait de la symétrie les déplacements doivent être radiaux :

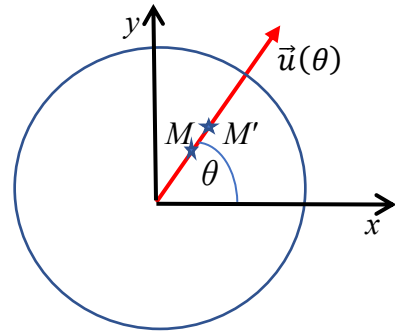
$$\vec{u}(M) = \overrightarrow{MM'} = \varepsilon_1 \vec{u}(\theta) + \varepsilon_2 \vec{e}_3$$

En particulier si M est l'axe des x , c'est-à-dire si $\theta = 0$:

$$\overrightarrow{MM'} = \varepsilon_1 \vec{u}(0) + \varepsilon_2 \vec{e}_3$$

$\forall x$ et z nous avons pour $y=0$ la composante v qui est nulle et de la relation (8), nous déduisons :

$$b = 0 \text{ et } b_3 = 0$$



En tenant le même raisonnement sur l'axe des y : $\overrightarrow{MM'} = \varepsilon_1 \vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \varepsilon_2 \vec{e}_3$

$\forall y$ et z nous avons pour $x=0$ la composante u qui est nulle.

De la relation (7), nous déduisons :

$$b = 0 \text{ et } b_1 = 0$$

En définitive le champ des déplacements s'écrit :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\nu}{E} \rho g (h - z)x \\ v &= \frac{\nu}{E} \rho g (h - z)y \\ w &= -\frac{\nu}{E} \rho g \left(h - \frac{z}{2}\right) z + \frac{\nu}{2E} \rho g (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Les problèmes de la théorie de l'élasticité sont simplifiés, dans une large mesure, lorsque l'on rencontre l'un des deux cas particuliers importants :

- L'état plan de contrainte (état de contrainte double).
- L'état plan de déformation.

4 Etat plan de contrainte

Il existe un très grand nombre de problèmes industriels dans lesquels la répartition des contraintes se trouve dans un même plan. C'est notamment le cas d'une plaque mince soumise à l'action de forces réparties appliquées sur toute son épaisseur.

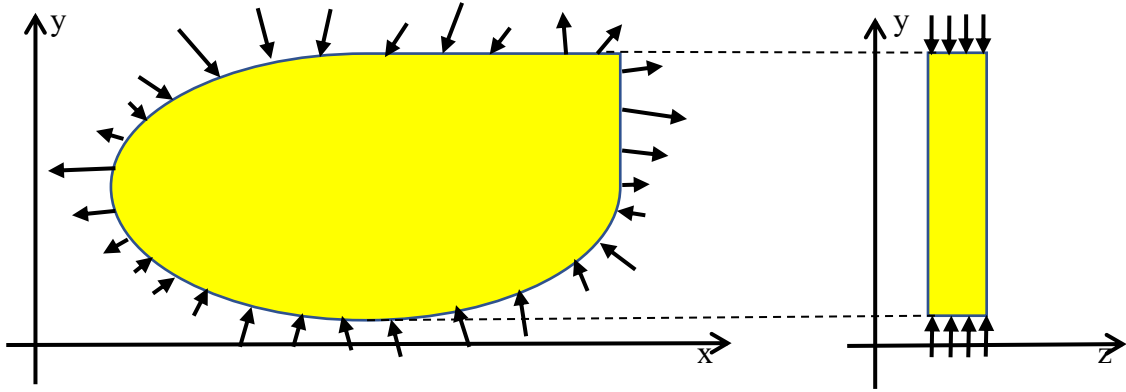


Figure VIII.03 Etat plan de contrainte

Dans le repère ci-dessus les composantes du tenseur des contraintes σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} sont nulles sur les deux faces latérales de la plaque. Si la plaque est mince on peut dire qu'il en est de même à l'intérieur de celle-ci sans erreur appréciable.

On peut également admettre que les autres composantes du tenseur des contraintes σ_x , σ_y , τ_{xy} ne sont pas des fonctions de z . C'est-à-dire qu'elles restent constantes en tous les points de l'épaisseur de la plaque. Le tenseur des contraintes s'écrit donc :

$$[L] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.09})$$

Les relations entre contraintes et déformations deviennent :

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) & g_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G} \\ e_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) & g_{xz} &= 0 \\ e_z &= \frac{1}{E} (0 - \nu (\sigma_y + \sigma_x)) & g_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.10})$$

Elles nous permettent d'écrire le tenseur des déformations :

$$[L_d] = \begin{bmatrix} e_x & g_{xy} & 0 \\ g_{xy} & e_y & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.11})$$

Il suffit donc de déterminer σ_x , σ_y , τ_{xy} pour en déduire e_x , e_y , e_{xz} , g_{xy} , puis les composantes du vecteur déplacement u , v , w .

Pour cela nous disposons :

- Des équations d'équilibre :

$$\begin{aligned}\rho X_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \rho X_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \\ \rho X_z &= 0\end{aligned}\tag{VIII.12}$$

Ces relations expriment que les forces volumiques sont contenues dans un plan parallèle à oxy.

Dans (VIII.12) dérivons la première relation par rapport à x, la seconde par rapport à y et la troisième par rapport à z. Ajoutons les résultats ainsi obtenus :

$$\rho \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} + \rho \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$

Soit sous forme plus condensée :

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \rho \operatorname{div} \vec{X} = 0\tag{VIII.13}$$

- Des équations de compatibilité :

Les équations de compatibilité entre les déformations et déplacements deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} &= 0 & \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial z} &= 0 & \frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} &= 0 & \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} &= 0\end{aligned}\tag{VIII.14}$$

Or, compte tenu des relations contraintes déformations, la relation (VIII.14) s'écrit :

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2 (\sigma_x - \nu \sigma_y)}{\partial y^2} + \frac{1}{E} \frac{\partial^2 (\sigma_y - \nu \sigma_x)}{\partial x^2} = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Des relations (VIII.13) et $G = \frac{E}{2(\nu+1)}$ nous obtenons tous calculs effectués :

$$\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} + (1 + \nu) \rho \operatorname{div} \vec{X} = 0\tag{VIII.15}$$

5 Etat plan de déformation

On arrive à une simplification similaire lorsque la dimension suivant l'axe z est très grande, et surtout si les extrémités de la pièce considérée sont maintenues entre deux plans fixes parfaitement lisses et rigides, de telle sorte que tout déplacement axial soit évité.

Il existe beaucoup de problèmes importants de cette espèce ; un barrage de retenue, un tube cylindrique soumis à une pression interne etc ...

Dans un état plan de déformation les composantes du vecteur déplacement $\vec{u}(M)$ sont : $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, $w=0$ ou égale à une constante.

Le tenseur des déformations s'écrit dans ces conditions :

$$[L_d] = \begin{bmatrix} e_x & g_{xy} & 0 \\ g_{xy} & e_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.16})$$

Puisque :

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ g_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & g_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 & g_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

Les relations entre contraintes et déformations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Ge_x + \lambda(e_x + e_y) & \tau_{xy} &= 2Gg_{xy} \\ \sigma_y &= 2Ge_y + \lambda(e_x + e_y) & \tau_{xz} &= 0 \\ \sigma_z &= \lambda(e_x + e_y) & \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

D'où l'expression du tenseur des contraintes :

$$[L] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.17})$$

Remarquons que : $e_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)) = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_y + \sigma_x)$

Par conséquent, il s'ensuit :

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \nu(\sigma_y + \sigma_x)) \right) = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ e_y &= \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \nu(\sigma_y + \sigma_x)) \right) = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x) \end{aligned} \quad (\text{VIII.18})$$

Comme σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} ne sont des fonctions que de x et y , l'équation d'équilibre (V.06) s'écrit :

$$\begin{aligned}\rho X_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \rho X_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \\ \rho X_z &= 0\end{aligned}$$

Donc, comme pour l'état plan de contrainte, la relation (VIII.13) est inchangée et il en est de même pour les équations de compatibilité qui se résument à la relation (VIII.14).

Reportons la relation (VIII.18) dans la relation (VIII.14) :

$$\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \left((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y \right)}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \left((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x \right)}{\partial x^2} = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Et compte tenu de (VIII.13) il vient en définitive :

$$(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} \right) + \rho \operatorname{div} \vec{X} = 0$$

6 Fonction d'Airy

Dans le cas particulier fréquent où le champ des forces volumiques $\rho \vec{X}$ est tel que :

$$\operatorname{div} \vec{X} = 0$$

Les états plans de contraintes et les états plans de déformations se réduisent à l'équation :

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial z^2} = 0$$

Ces problèmes d'élasticité plane ont une solution générale qui a été donnée par Airy.

Envisagions les deux cas suivants : $\vec{X} = \vec{0}$ ou $\vec{X} \neq \vec{0}$

6-1 $\vec{X} = \vec{0}$

Supposons qu'il existe deux fonctions ϕ et ψ telles que :

$$\sigma_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad \sigma_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Posons alors : $\phi = \frac{\partial F}{\partial y}$ et $\psi = \frac{\partial F}{\partial x}$. Il s'ensuit :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Dans ces conditions :

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

$$= \Delta(\Delta F)$$

Le Laplacien du Laplacien de F est nul, F est une fonction bi-harmonique. C'est la fonction d'AIRY.

6-2 $\vec{X}$ dérive d'une fonction de force U

Soit, par exemple : $\rho X_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ et $\rho X_y = \frac{\partial U}{\partial y}$

Les équations de l'équilibre (VI.06) deviennent :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial(U + \sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial(U + \sigma_y)}{\partial y} = 0$$

Ces équations sont satisfaites si on pose :

$$\sigma_x + U = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y + U = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

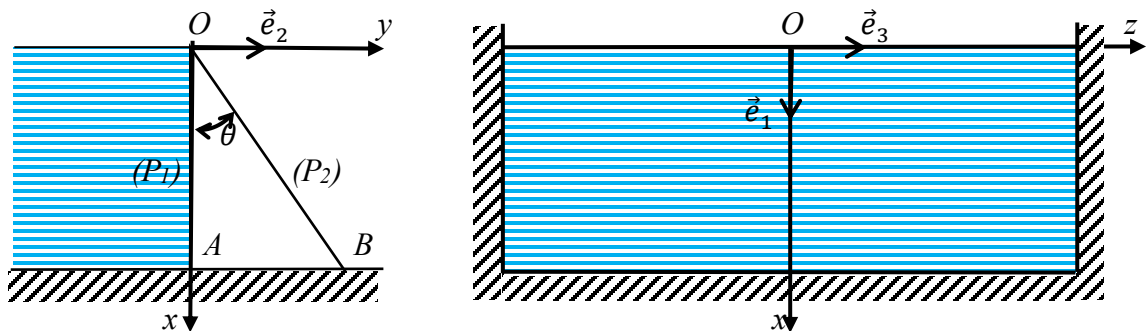
Exercice VIII.2

Pour barrer une vallée de grande largeur dans la direction $\vec{e}_3$ (par exemple dans le but de constituer une retenue d'eau) on construit un massif prismatique en béton schématisé ci-après.

Ce barrage de section triangulaire OAB repose simplement sur le sol par son côté AB et retient une certaine hauteur d'eau sur son côté eau OA . Nous étudierons le cas où le barrage est plein.

Le béton qui constitue ce barrage est supposé homogène, isotrope et élastique, et on désignera par ρ sa masse volumique et par ρ_1 la masse volumique de l'eau.

La pesanteur est évidemment dirigée suivant $\vec{e}_1$.



1. Sachant que l'on a affaire à un cas de déformation plane, on peut déterminer le champ des contraintes en considérant un polynôme du troisième degré comme fonction d'Airy :

$$F(x, y) = \frac{A}{6}x^3 + \frac{B}{6}y^3 + \frac{C}{2}y^2x + \frac{D}{2}yx^2$$

Exprimer $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ en fonction des constantes A, B, C et D (il est recommandé de bien vérifier que les équations de l'équilibre sont satisfaites).

2. Exprimer les conditions aux limites sur le plan vertical (P_1) défini par $y=0$ (on se rappellera que par définition des états de référence, il ne faut comptabiliser que les pressions effectives : $(p - p_{atm})$)

3. Exprimer les conditions aux limites sur le plan (P_2) défini par $y - \beta x$ avec $\beta = \tan \theta$. On remarquera que ce plan n'est pas chargé puisqu'il n'est soumis qu'à la pression atmosphérique p_{atm} .

4. Calculer en fonction de $\beta, \rho, \rho_1, g, x$ et y l'expression des contraintes : $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Corrigé

1. Nous avons :

$$\begin{aligned}\sigma_x + U &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{2}y^2 + Cyx + \frac{D}{2}x^2 \right) \\ \sigma_y + U &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{2}x^2 + \frac{C}{2}y^2 + Dyx \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{2}y^2 + Cyx + \frac{D}{2}x^2 \right)\end{aligned}$$

Puisque la pesanteur est dirigée suivant $\vec{e}_1$ nous avons $U = \rho g x$, il s'ensuit que l'expression des contraintes est :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= By + Cx - \rho g x \\ \sigma_y &= Ax + Dy - \rho g x \\ \tau_{xy} &= -Cy - Dx\end{aligned}$$

Nous avons bien :

$$\begin{aligned}\rho X_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \rho g + C - \rho g - C = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= -D + D = 0\end{aligned}$$

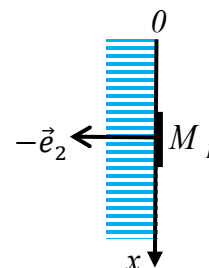
2. En vertu de l'équation fondamentale de l'hydrostatique nous avons dans notre repère :

$$\frac{p}{\rho_1 g} = \frac{p_{atm}}{\rho_1 g} + x \quad \Rightarrow \quad p - p_{atm} = \rho_1 g x$$

Nous avons pour la facette définie par $-\vec{e}_2$ au point $M_1 \in (P_1)$:

$$\vec{c}(M_1, -\vec{e}_2) = (p - p_{atm})\vec{e}_2 = \rho_1 g x \vec{e}_2$$

Comme il s'agit d'un état plan de déformation cette relation s'écrit :



$$\vec{c}(M_1, -\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_1 g x \\ 0 \end{bmatrix}$$

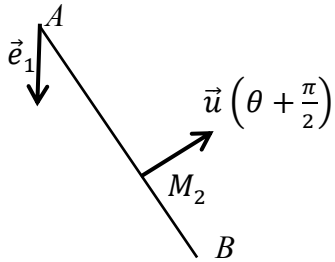
Soit :

$$\begin{aligned} -\tau_{xy} &= Cy + Dx = 0 \\ -\sigma_y &= \rho_1 g x = -Ax - Dy + \rho g x \end{aligned}$$

Or sur ce plan (P_1) $y = 0 \Rightarrow A = (\rho - \rho_1)g$ et $D = 0$.

3. Au point $M_2 \in (P_2)$ sur la facette définie par $\vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})$ nous avons : $\vec{c}(M_2, \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})) = \vec{0}$

Puisque le plan (P_2) n'est pas chargé.



$$\vec{c}(M_2, \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Il s'ensuit donc :

$$\begin{aligned} -\sigma_x \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta &= 0 \\ -\tau_{xy} \sin \theta + \sigma_y \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

Compte tenu de l'expression des contraintes en fonction des constantes A, B, C, D , ces deux relations s'écrivent :

$$\begin{aligned} -(By + Cx - \rho g x) \sin \theta - (Cy + Dx) \cos \theta &= 0 \\ (Cy + Dx) \sin \theta + (Ax + Dy - \rho g x) \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $y = \beta x$ avec $\beta = \tan \theta$ nous avons :

$$\begin{aligned} -(B\beta + C - \rho g)\beta x - (C\beta + D)x &= 0 \Rightarrow -B\beta^2 + (\rho g - 2C)\beta - D = 0 \\ (C\beta + D)\beta x + (A + D\beta - \rho g)x &= 0 \Rightarrow C\beta^2 + 2D\beta + A - \rho g = 0 \end{aligned}$$

Puisque nous avons $A = (\rho - \rho_1)g$ et $D = 0$ les valeurs des constantes C et B sont :

$$C = \frac{\rho_1 g}{\beta^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\rho g}{\beta} - \frac{2\rho_1 g}{\beta^3}$$

4. Les valeurs des constantes A, B, C, D permettent d'exprimer les contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ en fonction de $\beta, \rho, \rho_1, g, x$ et y . Soit :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left(\frac{\rho g}{\beta} - \frac{2\rho_1 g}{\beta^3} \right) y + \frac{\rho_1 g}{\beta^2} x - \rho g x = \left(\left(\rho - \frac{2\rho_1}{\beta^2} \right) \frac{y}{\beta} + \left(\frac{\rho_1}{\beta^2} - \rho \right) x \right) g \\ \sigma_y &= (\rho - \rho_1) g x - \rho g x \\ \tau_{xy} &= -\frac{\rho_1 g}{\beta^2} y \end{aligned}$$

Chapitre IX

Aspect macroscopique de l'état fluide

1 Pression

Pour aborder la notion de fluide sous l'aspect macroscopique, il est commode d'utiliser la notion de contrainte dans les corps solides.

Une contrainte normale dirigée vers l'intérieur est appelée compression ou pression. Dans un fluide il n'y a que des pressions. Bien que dans certains états métastables, sortant du cadre de cet ouvrage, on puisse observer des tensions dans les liquides.

Il faut six grandeurs pour définir en un point l'état de contrainte d'un solide et il en est de même pour un fluide.

Les liquides sont caractérisés par une masse volumique relativement importante et sont pratiquement incompressibles, ce qui est le contraire pour les gaz.

On distingue des corps intermédiaires entre les fluides et les solides tels que l'argile, le verre en fusion, les métaux lorsqu'on les forge, le béton avant coulée etc....

L'étude entre les déformations et les contraintes appliquées à ces corps s'appelle la rhéologie.

2 Fluide parfait

Les notions de fluide parfait et de gaz parfait sont souvent des sources de confusions.

Tout d'abord, intéressons-nous au fluide parfait. Le gaz parfait a été précédemment défini sous l'aspect microscopique. Il sera évoqué en fin de chapitre sous l'aspect macroscopique.

La théorie de l'élasticité montre que dans un solide isotrope les contraintes sont liées aux déformations par des relations linéaires, ce qui n'est pas le cas pour les fluides.

Dans les gaz et les liquides, les contraintes tangentielles dépendent de la vitesse à laquelle la déformation s'est effectuée.

Dans un fluide au repos la vitesse est égale à zéro, il s'ensuit que les contraintes tangentielles sont nulles.

Lorsqu'en tout point M d'un fluide en mouvement les contraintes tangentielles sont nulles, quel que soit la facette, nous dirons que le fluide est parfait.

Les fluides réels ne répondent généralement pas à cette condition.

La notion de fluide parfait constitue une fiction qu'il est cependant utile d'étudier pour avoir un terme de comparaison commode. Les fluides réels apparaissent alors comme s'en rapprochant plus ou moins.

Quand les phénomènes de viscosité restent faibles, on pourra en première approximation admettre dans les calculs que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait.

En désignant par p la pression d'un fluide parfait en mouvement ou d'un fluide réel au repos le vecteur "contrainte" devient :

$$\vec{C}(M, \vec{n}) = -p\vec{n}$$

Puisqu'il ne subsiste que des contraintes normales.

Cette pression est donc indépendante de son orientation, c'est le principe de Pascal.

3 Principe zéro de la thermodynamique

Un corps nous paraît plus ou moins chaud (ou froid) suivant la sensation que nous avons en le touchant. La comparaison de ces constatations tactiles ne peut pas, évidemment, conduire à des résultats très satisfaisants.

Par contre, l'étude de certains phénomènes physiques nous a permis d'établir sans ambiguïté un classement d'après leur ordre d'intensité. Notamment, depuis fort longtemps, on a remarqué que la dilatation des corps suit celle de nos impressions sensorielles.

Lorsqu'on met en contact un corps chaud et un corps froid, on constate que le corps chaud se refroidit en se contractant et le corps froid s'échauffe en se dilatant. Ces variations de volume se ralentissent et lorsqu'elles ont cessé nous disons que les corps sont en équilibre thermique.

Deux corps mis en contact prolongé se mettent en équilibre thermique. Deux corps en équilibre thermique avec un troisième sont aussi en équilibre thermique entre eux.

Cet énoncé constitue le principe zéro de la thermodynamique.

La température caractérisant l'état thermique d'un corps peut être mesurée grâce à ce principe.

Un "thermomètre" repère non seulement sa propre température mais également celle du milieu dans lequel il se trouve.

4 Température

Les premiers thermoscopes, ballon surmonté d'une tige mince, cylindrique et contenant un liquide dont on observe la dilatation remontent à environ deux siècles avant notre ère. Il a fallu attendre le début du dix-septième siècle pour repérer des points fixes et ainsi réaliser un thermomètre.

4-1 Température centésimale

On prend arbitrairement deux états d'équilibre thermique 0 et 1 différents et reproductibles. A ces deux états bien définis correspondent, pour un thermoscope donné, deux longueurs de liquide l_0 et l_1 auxquelles on associe les grandeurs t_0 et t_1 appelées température.

Très longtemps en France, ces états d'équilibre ont été obtenus en utilisant les propriétés de l'eau pure. Sous la pression atmosphérique normale de 101325 Pa la température $t_0 = 0^\circ$ est choisie pour la fusion de la glace et $t_1 = 100^\circ$ pour l'ébullition de l'eau.

L'intervalle 0-100 de la tige cylindrique est divisé en 100 parties égales et la graduation est prolongée de part et d'autre. La température est déterminée par la loi d'interpolation linéaire :

$$\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{t - 0}{100 - 0} = \frac{l - l_0}{l_1 - l_0}$$

Un tel appareil est appelé un thermomètre, la lecture est l et la température t correspondante est dite centésimale.

Pour des liquides thermométriques différents, les valeurs des températures correspondent à 0° et 100° mais divergent plus ou moins aux autres températures.

Il est important de noter qu'au sens strict du terme, la température définie avec cette échelle centésimale n'est pas une grandeur mesurable.

Le rapport de deux températures n'a pas de sens physique.

4-2 Température Kelvin

Dans ce qui précède nous avons utilisé une grandeur thermométrique constituée par la longueur d'une colonne de liquide, ce qui est usuel. Mais la grandeur thermométrique peut être tout autre comme la dilatation d'un solide (bilame), la résistance d'un fil de platine, la force électromotrice d'un thermocouple ou bien la pression d'un gaz à volume constant.

Sous l'action de la température les gaz se dilatent beaucoup plus que les liquides ou les solides. Il s'ensuit que l'utilisation de thermomètres à gaz basés sur la variation de volume à pression constante, ou sur la variation de pression à volume constant, apporte plus de rigueur à la définition de la température.

Prenons l'exemple du thermomètre à gaz à variation de volume V sous la pression atmosphérique normale de 101325 Pa. En utilisant les états d'équilibre précédemment définis, nous pouvons écrire :

$$\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{t - 0}{100 - 0} = \frac{V - V_0}{V_1 - V_0}$$

Soit encore :

$$\frac{V}{V_0} = \alpha t + 1 \quad \text{avec} \quad \alpha = \left(\frac{V_1}{V_0} - 1 \right) \frac{1}{100}$$

De même avec un thermomètre à gaz à variation de pression sous volume constant nous aurions

$$\frac{p}{p_0} = \beta t + 1 \quad \text{avec} \quad \beta = \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right) \frac{1}{100}$$

Le tableau ci-dessous donne, pour quelques gaz, les valeurs de α et β obtenues dans des conditions proches des normales de pression et de température.

	Hélium	Hydrogène	Azote	Oxygène	CO ₂
α	$\frac{1}{273,4}$	$\frac{1}{273,3}$	$\frac{1}{272,4}$	$\frac{1}{272,4}$	$\frac{1}{269,5}$
β	$\frac{1}{273,2}$	$\frac{1}{273,1}$	$\frac{1}{272,4}$	$\frac{1}{273,4}$	$\frac{1}{271,1}$

Si nous faisons tendre la pression vers zéro, nous trouvons pour tous les gaz :

$$\alpha_0 = \beta_0 = \frac{1}{273,15}$$

Les coefficients α et β sont affectés de l'indice "0" pour bien marquer la différence avec les résultats précédemment obtenus.

Lorsque cette égalité est satisfaite en dehors de cette condition restrictive (pression qui tend vers zéro), le gaz est dit parfait.

Pour un thermomètre utilisant un gaz parfait et fonctionnant à pression constante le rapport des volumes devient :

$$\frac{V}{V_0} = \alpha_0 t + 1$$

Cette relation, appelée loi de Gay-Lussac, devient en posant $T = t + 273,15$:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{273,15}$$

Le même raisonnement pour le thermomètre à gaz, à variation de pression sous volume constant, conduit à un résultat analogue, que l'on désigne parfois par loi de Charles.

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{273,15}$$

T est l'unité légale de température, elle fut d'abord appelée degré Kelvin (°K) pour être maintenant désignée par Kelvin (symbole K).

À pression constante l'expression $V/V_0 = T/273,15$ montre que la température T ne peut jamais être négative. Ce qui justifie le qualificatif donné à T de température absolue du gaz parfait. L'origine est qualifiée de zéro absolu.

La température absolue d'un gaz parfait est une grandeur mesurable. Elle est directement liée à une propriété de ce gaz.

Par contre, la température absolue d'un corps quelconque, mesurée par comparaison avec un gaz parfait, n'a pas les caractères d'une grandeur mesurable. Mais nous verrons que la température absolue s'identifie à la température thermodynamique, qui apparaît comme mesurable vis-à-vis d'un corps quelconque. C'est ce qui justifie le choix préférentiel de cette échelle de température.

4-3 Température Celsius

Pour des questions de commodité, le comité international des poids et mesures permet l'usage de température Celsius définie par la relation :

$$t = T - 273.15$$

L'unité de mesure est le degré Celsius, symbole °C. Une différence de température s'exprime en °C par le même nombre qu'en Kelvin.

Le symbole de la température Celsius est t ou θ . Lorsque t prête à confusion, notamment avec le temps t , on utilise alors θ .

Exercice IX.1

Le but de cet exercice est de comparer deux thermomètres différents et ceci dans l'intervalle de température compris entre 0°C et 100°C.

L'un utilise une grandeur thermométrique satisfaisant la relation : $X(t) = a + bt + ct^2$ ou t est la température Celsius et a , b et c sont des constantes.

L'autre thermomètre fonctionne suivant une échelle centésimale dont la grandeur thermométrique est $X(\theta) = A\theta + B$. Le terme θ est la température centésimale.

Sachant que ces deux thermomètres doivent parfaitement correspondre à 0° et 100° déterminer à quelle température t l'écart $t - \theta$ passe par une valeur maximale.

Corrigé

Puisque ces deux thermomètres doivent correspondre aux états d'équilibre de 0° et 100° nous pouvons écrire :

$$X(0) = a = B$$

$$X(100) = a + 100b + 10000c = 100A + B$$

$$\text{Il s'ensuit } A = b + 100c$$

Pour obtenir l'écart maximal il faut déjà que les températures lues sur les deux thermomètres soient égales : $X(t) = X(\theta)$

Soit encore :

$$a + bt + ct^2 = (b + 100c) \theta + a$$

D'où la valeur de θ et de $t - \theta$

$$\theta = \frac{bt + ct^2}{b + 100c}$$

$$t - \theta = \frac{100ct - ct^2}{b + 100c}$$

Cet écart sera maximal pour $t = 50^\circ\text{C}$, puisque :

$$\frac{d(t - \theta)}{dt} = \frac{100c - 2ct}{b + 100c} = 0$$

5 Chaleur

5-1 Équation calorimétrique

Mettons en contact prolongé deux corps de même nature et de même masse à des températures différentes t_1 et t_2 . Ces deux corps se mettent en équilibre thermique, conformément au principe zéro de la thermodynamique. Nous savons que cette température finale sera sensiblement égale à la moyenne arithmétique des températures initiales t_1 et t_2 .

$$t_f = \frac{t_1 + t_2}{2} \text{ ou encore } (t_f - t_1) + (t_f - t_2) = 0$$

Si les deux corps sont de même nature mais de masse différente cette relation devient :

$$t_f = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} \text{ ou bien : } m_1(t_f - t_1) + m_2(t_f - t_2) = 0$$

Exercice IX.2

Pour remplir une baignoire de 140 dm^3 on dispose d'eau à 80°C . Quelle devra être la quantité d'eau froide à 10°C à mélanger pour obtenir une eau à 37°C . La masse volumique de l'eau est de 1000 Kg/m^3 .

Corrigé

$$m_1(t_f - t_1) + m_2(t_f - t_2) = m_1(37 - 80) + m_2(80 - 10) = 0$$

$$m_1 + m_2 = 0,140 \times 1000 = 140 \text{ Kg}$$

Nous avons deux équations et deux inconnues d'où : $m_1 = 54 \text{ Kg}$ et $m_2 = 86 \text{ Kg}$.

Si les deux corps sont différents, nature et masse, la température finale est donnée par une relation de la forme :

$$m_1 c_1 (t_f - t_1) + m_2 c_2 (t_f - t_2) = 0$$

Cette relation se généralise pour n corps en contact thermique, sans action chimique les uns sur les autres.

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i c_i (t_f - t_i) = 0$$

Le produit $m_i c_i = C_i$ qui caractérise un corps donné de masse m_i est appelé capacité thermique.

Le coefficient c_i qui dépend de la nature du corps considéré est la capacité thermique massique.

Remarquons que cette relation est valable aussi bien pour des températures exprimées en Kelvin qu'en degré Celsius puisqu'elles n'interviennent que par leurs différences.

La quantité $Q_i = m_i c_i (t_f - t_i)$ est appelée quantité de chaleur échangée par le corps " i " avec les autres corps.

Lorsque n corps sont mis en contact prolongé et se mettent mutuellement en équilibre thermique, la somme algébrique des quantités de chaleur échangées par chaque corps avec les autres est nulle.

$$\sum_{i=1}^{i=n} Q_i = 0$$

Cette relation est appelée ; équation calorimétrique.

5-2 Quantité de chaleur

L'équation calorimétrique montre qu'entre deux corps en contact la quantité de chaleur gagnée par l'un est égale à la quantité de chaleur perdue par l'autre.

Les physiciens du XVIIIème siècle avaient établi expérimentalement cette propriété. Ils pensaient que la quantité de chaleur jouait le rôle d'une grandeur indestructible analogue à la masse en mécanique du solide. Pour eux la chaleur apparaissait comme une substance constituée par un fluide immatériel imprégnant les corps en quantité totale invariable dans la nature et susceptible de passer d'un corps à un autre.

Ils désignaient à l'époque "phlogistique" cette substance pour l'appeler, ensuite, au milieu du XIXème siècle le "calorique".

Cette propriété de conservation n'est valable que dans les phénomènes purement calorifiques. Si l'énergie mécanique intervient, la quantité de chaleur ne reste pas constante, d'où la nécessité d'utiliser la thermodynamique. Malgré tout, nous avons conservé le langage de l'époque du "calorique" en parlant de "chaleur" présente dans un corps. Elle est apportée, cédée, dégagée, absorbée, perdue, reçue, gagnée, emportée un peu comme si la chaleur était une substance.

La chaleur, dans le langage commun, est souvent confondue avec la notion de température.

Cette confusion est entretenue, en bonne partie, par la définition précédente : $Q_i = m_i c_i (t_f - t_i)$ où la chaleur reçue entraîne forcément une augmentation de température et inversement.

En fait un système peut recevoir ou céder de la chaleur sans qu'il y ait variation de température.

C'est le cas d'un changement d'état physique comme par exemple la fusion de la glace ou l'ébullition de l'eau à pression constante.

De même, la température d'un système peut se trouver modifiée sans observer de transfert de chaleur. L'évolution du fluide contenu à l'intérieur d'une turbomachine s'effectue, la plupart du temps, sans transfert de chaleur. Pourtant la température du fluide, entre la bride d'entrée et la bride de sortie, augmente ou diminue suivant qu'il s'agit d'une machine de compression ou de détente. Il y a eu échange d'énergie mécanique.

Il est très important de noter qu'une quantité de chaleur ne se perçoit qu'à son transfert d'un corps à un autre.

Le développement de la thermodynamique statistique a permis de définir la chaleur comme un transfert de l'agitation thermique des particules.

Prenons un exemple simple. Au gré des chocs aléatoires qui se produisent à l'échelle microscopique, les molécules d'un gaz chaud, plus agitées, frappent les molécules d'un gaz froid en leur cédant de façon désordonnée une partie de leur énergie, jusqu'à ce que l'équilibre thermique soit atteint.

À l'équilibre thermique, la température absolue d'un gaz mesure le degré d'agitation des molécules. Un gaz dont les particules sont plus agitées présentera une température d'équilibre plus élevée et inversement.

En résumé la température est une grandeur servant à décrire l'état d'équilibre d'un système alors que la quantité de chaleur est un transfert d'agitation thermique assimilable à une quantité d'énergie.

Il faut donc absolument éviter de confondre température et quantité de chaleur. Une quantité de chaleur fournie par une "source" à la température T_1 n'est pas équivalente à la même quantité de chaleur cédée à la température T_2 plus faible. La première est susceptible d'effets dont la seconde est incapable (cuisson d'un œuf par exemple).

La chaleur étant une forme d'énergie, les quantités de chaleur se mesurent avec les mêmes unités que le travail, donc en Joules. Bien que ce soit déconseillé par le Comité International des Poids et Mesures, la calorie est encore parfois utilisée.

La calorie (symbole cal) est la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de 1 g d'eau de $14,5^\circ\text{C}$ à $15,5^\circ\text{C}$ sous la pression normale de 101325 Pa.

La calorie désignée parfois par "petite calorie" est : $1\text{cal} = 4,1855\text{J}$.

La kilocalorie, appelée "grande calorie" est : $1\text{kcal} = 4,1855\text{kJ}$

La thermie est : $1\text{thermie} = 10^6\text{cal}$

Dans les industries frigorifiques il est courant d'exprimer les quantités de chaleur enlevées en frigories (fg). La frigorie est une kcal négative : $1\text{fg} = -1\text{kcal}$

Citons à titre d'information : $1\text{ kWh} = 3600\text{ kJ} = \frac{3600}{4,1855}\text{ Kcal} = 860\text{ kcal}$

La tonne équivalente de pétrole (tep)

$$1\text{ tep} = 4,1855 \cdot 10^{10}\text{ J}.$$

5-3 Capacité thermique massique

Pour un corps donné la valeur de la capacité thermique massique n'est pas une constante. Elle varie essentiellement avec la température. Dans l'intervalle de température t_1, t_2 et pour une masse unité, l'expression : $C = \frac{\delta Q}{dt}$ est appelée capacité thermique massique vraie.

Alors que : $C = \frac{Q}{t_1 - t_2}$ est la capacité thermique massique moyenne.

Expérimentalement, les capacités thermiques massiques vraies sont déterminées à pression constantes ou à volume constant. Elles sont notées respectivement c_p et c_v .

c_p est la capacité thermique massique à pression constante.

c_v est la capacité thermique massique à volume constant.

Remarques :

- La valeur de la capacité thermique massique moyenne ne dépend pas du sens de l'évolution. En d'autres termes, la quantité de chaleur reçue par un corps qui s'échauffe de t_i à t_f est égale à celle qu'il céderait en se refroidissant de t_f à t_i .
- La valeur de la capacité thermique massique d'un corps en contact avec un autre corps ne dépend pas de la nature du partenaire.
- Pour les liquides et les solides, les tables donnent en principe les capacités thermiques massiques à pression constante. Il est difficile de maintenir un liquide ou un solide à volume constant pendant son échauffement. Il faudrait, pour cela, maintenir le corps dans une enveloppe absolument indilatable.

Exercice IX.3

Le calorimètre dit de Berthelot permet de déterminer la capacité thermique massique d'un corps. Très schématiquement il est constitué d'un réservoir conformément à la figure IX.01.

On suppose avoir pris les précautions nécessaires pour que les échanges de chaleur entre l'enceinte calorimétrique et le milieu extérieur soient négligeables.

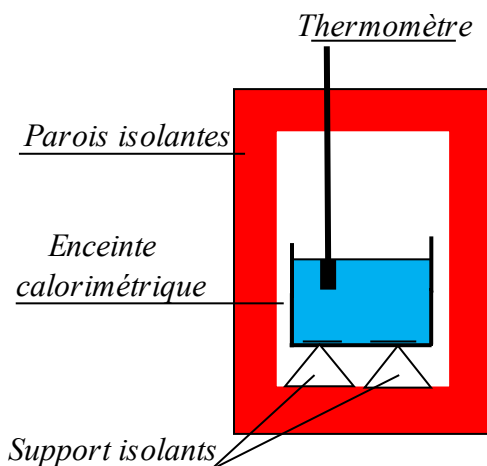
Ce calorimètre contient 0,1kg d'eau à 16°C et la capacité thermique du vase et de ses accessoires est de 75J/K. La capacité thermique massique à pression constante de l'eau est $c_p = 4185\text{ J/kg K}$.

On plonge dans l'eau un corps métallique pesant 0,03kg et ayant une température de 84°C. A l'équilibre thermique la température finale est de 17,6°C.

Calculer la capacité thermique massique à pression constante de cet échantillon métallique.

Corrigé

Pour l'ensemble du système contenu à l'intérieur de l'enceinte il n'y a ni travail, ni chaleur échangée avec le milieu extérieur.



Corrigé

Il faut donc appliquer l'équation calorimétrique :

$$\sum_{i=1}^{i=n} Q_i = 0$$

Soit :

$$0,1 \times 4185,5 \times (17,6 - 16) + 75 \times (17,6 - 16) + 0,03 \times c_p \times (17,6 - 84) = 0$$

Une équation, une inconnue d'où :

$$c_p = 396 \text{ J/kg K}$$

Figure IX.01 Calorimètre dit de Berthelot

5-4 Source de chaleur

Une source de chaleur est un milieu à température uniforme dans lequel la capacité thermique est très grande par rapport à celle du système étudié. Si bien qu'une source de chaleur peut recevoir ou céder des quantités de chaleur quelconques, en gardant invariablement la même température, grandeur qui la caractérise.

6 Gaz parfait

La notion de gaz parfait (qu'il ne faut pas confondre avec celle de fluide parfait) est une assez bonne approximation lorsque les conditions de pression du gaz se trouvent éloignées de la zone de liquéfaction.

L'hypothèse du gaz parfait présente un intérêt pratique dans les applications industrielles.

6-1 Équation d'état des gaz parfaits

Les premières études concernant les relations entre le volume et la pression d'une masse de gaz ont abouti à la loi de Mariotte, attribuée aussi à Boyle:

"Les volumes occupés par une masse déterminée de gaz, maintenue à température constante, sont inversement proportionnels aux pressions qu'ils supportent".

L'évolution isotherme d'un gaz parfait traduit cette loi par la relation $pV = \text{constante}$.

D'une façon générale, il faut distinguer trois variables pour caractériser l'état d'un gaz, sa pression p , sa température T et son volume V . Dans le cas d'un gaz parfait la combinaison, de la loi de Mariotte avec celle de Gay-Lussac (ou de Charles), permet d'obtenir facilement son équation d'état.

Pour le montrer considérons une évolution isotherme $pV = C^{te}$ suivie d'une évolution isobare :

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{273,15}$$

Représentons ces évolutions sur un diagramme, dit de Clapeyron, obtenu en portant p en ordonnée et V en abscisse. Soit une masse quelconque de gaz parfait dans un état initial i caractérisé par p_i , V_i et T_i .

Supposons qu'on l'emmène dans un état final f défini par p_f , V_f et T_f en passant par un état intermédiaire 1 où il règne p_f , V_1 et T_i .

Nous pouvons écrire $p_i V_i = p_f V_1$ pour l'évolution isotherme de i à 1.

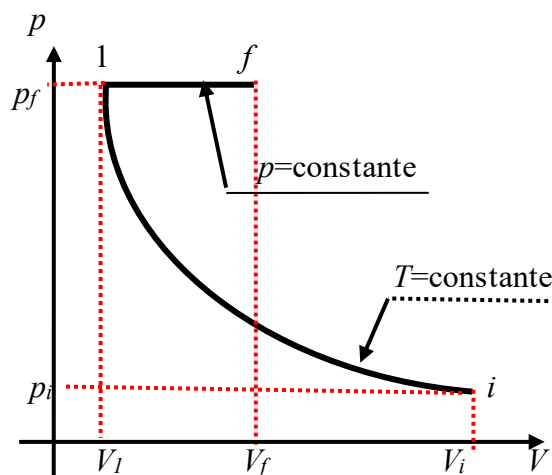


Figure IX.02 Diagramme de Clapeyron

Pour l'évolution isobare de 1 à f , nous avons :

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{T_i}{273,15} \text{ et } \frac{V_f}{V_0} = \frac{T_f}{273,15}$$

$$\text{Soit : } V_1 = \frac{T_i}{T_f} V_f = \frac{p_i}{p_f} V_i$$

$$\text{Ou encore : } \frac{p_f V_f}{T_f} = \frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{pV}{T} = \text{constante}$$

Puisque l'état initial i et l'état final f ont été choisis de façon arbitraire.

Pour une mole de gaz parfait, ce résultat s'écrit :

$$\frac{pV_m}{T} = R$$

C'est-à-dire l'équation d'état des gaz parfaits, déjà obtenue au chapitre consacré aux notions sur l'aspect microscopique de l'état fluide.

Utilisons les conditions normales pour calculer la constante universelle R des gaz parfaits :

$$R = \frac{\frac{101325 \text{ Pa}}{\widetilde{p}_0} \cdot \frac{0,02241383 \text{ m}^3/\text{mol}}{\widetilde{V}_{m0}}}{\underbrace{T_0}_{273,15 \text{ K}}} = 8,3144... \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Cette expression, établie pour une mole de gaz parfait, revêt d'autres formes qui sont très utilisées dans les applications pratiques de la thermodynamique. À cet effet multiplions les deux membres de l'équation d'état des gaz parfaits par le nombre de moles n .

De la définition du volume molaire, il vient immédiatement $pV = nRT$

Il est commode de poser : $r = R/M$. Cette fois r est une constante qui dépend de la nature du gaz parfait considéré, ce qui n'est pas le cas pour R .

Cette constante r s'exprime en Joule par kilogramme Kelvin (J/kg K).

De la définition de la masse molaire nous déduisons :

$$pV = nMrT = mrT$$

Et de la définition du volume massique : $p \frac{V}{m} = pv = rT$

Moyennant quoi, pour plus de clartés, récapitulons ci-dessous les diverses écritures de l'équation d'état des gaz parfaits :

$$pV_m = RT$$

$$pV = nRT$$

$$pV = mrT$$

$$pv = rT$$

Exercice IX.4

Sachant que dans les conditions normales de pression et de température la masse volumique de l'air est $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$ calculer sa constante r en supposant qu'il se comporte comme un gaz parfait.

Corrigé

Écrivons l'équation d'état dans les conditions normales :

$$p_0 v_0 = p_0 \frac{1}{\rho_0} = rT_0$$

Soit :

$$r = \frac{101325}{1,293 \times 273,15} = 287 \text{ J/kg.K}$$

Exercice IX.5

Les pneus d'une automobile sont gonflés à 2 bar lorsque la température ambiante est de -8°C . Quelle sera la pression de l'air à l'intérieur des pneus si l'automobile se retrouve dans un endroit où la température est de 18°C ?

Pour simplifier, on supposera invariable le volume intérieur des pneus.

Corrigé

Affectons de l'indice "1" les caractéristiques de l'air à 2 bar et -8°C et par l'indice "2" lorsque la température est de 18°C.

De l'équation d'état des gaz parfaits nous déduisons :

$$p_1 V_1 = m r T_1$$

$$p_2 V_2 = m r T_2$$

Puisque par hypothèse $V_1 = V_2$ il vient immédiatement :

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = \frac{273,15 + 18}{273,15 - 8} 2$$

$$p_2 = 2,196 \text{ bar}$$

6-2 Mélange de gaz parfaits

Considérons un mélange constitué d'un gaz G_1 de masse m_1 , d'un gaz G_2 de masse m_2 , G_i de masse m_ietc....et désignons par N le nombre de ses constituants.

La masse totale du mélange sera : $m = \sum_{i=1}^{i=N} m_i$

La composition d'un mélange est définie par les fractions massiques et molaires de ses constituants.

La fraction massique d'un constituant de masse m_i est le rapport de sa masse m_i à la masse totale du mélange. Son symbole est w_i .

$$w_i = \frac{m_i}{m}$$

La fraction molaire d'un constituant de masse m_i est le rapport du nombre de moles n_i de ce constituant au nombre total n de moles du mélange. Son symbole est x_i .

$$x_i = \frac{n_i}{n}$$

La masse molaire d'un mélange s'écrit tout simplement :

$$M = \frac{m}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} m_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} M_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^{i=N} M_i \frac{n_i}{n}$$

$$M = \sum_{i=1}^{i=N} M_i x_i$$

De même la constante r d'un mélange de gaz parfait s'écrit :

$$r = \frac{R}{M} = \frac{Rn}{m} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{Rn_i}{m} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{r_i m_i}{m}$$

$$r = \sum_{i=1}^{i=N} r_i w_i$$

Exercice IX.6

Si l'on considère que l'air est un mélange dans la proportion de 79 moles d'azote pour 21 moles d'oxygène, calculer la masse molaire de l'air.

(La masse molaire de l'azote est de 0,028 kg/mol et de 0,032 pour kg/mol l'oxygène).

Corrigé

$$M = 0,028 \times \frac{79}{79+21} + 0,032 \times \frac{21}{79+21} = 0,02884 \text{ kg / mol}$$

En fait la masse molaire est de 0,02896 kg/mol en tenant compte des autres constituants de l'air.

6-3 Loi de Dalton

Un mélange de gaz parfaits se comporte comme un gaz parfait. Par conséquent en désignant par p , V , T , et n la pression, le volume, la température et le nombre de moles du mélange, l'équation d'état du mélange s'écrit :

$$pV = nRT$$

Si bien que nous avons :

$$n = \frac{pV}{RT} = \sum_{i=1}^{i=N} n_i = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{p_i V_i}{RT_i}$$

Or pour calculer le nombre de moles n_i gaz G_i nous pouvons supposer qu'il occupe seul le volume total V à la température T du mélange et sous une pression p'_i , soit :

$$n_i = \frac{p_i V_i}{RT_i} = \frac{p'_i V}{RT}$$

En tenant le même raisonnement pour les autres constituants, nous aurions :

$$n = \frac{pV}{RT} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{p'_i V}{RT} = \frac{V}{RT} \sum_{i=1}^{i=N} p'_i$$

Ou encore :

$$p = p'_1 + p'_2 + p'_3 + \dots p'_i + \dots p'_N = \sum_{i=1}^{i=N} p'_i$$

Les pressions ainsi définies s'appellent pressions partielles. La pression p'_i est la pression partielle du gaz G_i .

La pression totale d'un mélange de gaz parfaits est égale à la somme des pressions partielles des différents gaz constituants, considérés chacun comme occupant le volume total du mélange à la température de celui-ci.

Ceci constitue la loi de Dalton.

Exercice IX.7

Un mélange d'air et gaz carbonique (CO_2) considéré comme un gaz parfait a une masse $m = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ et occupe un volume $V = 10^{-3} \text{ m}^3$ lorsque la température $t = 20^\circ\text{C}$ et la pression $p = 98655 \text{ Pa}$.

Dans les conditions normales de pression et de température ($t_0 = 0^\circ\text{C}$ et $p_0 = 101325 \text{ Pa}$) calculer les volumes d'air V_1 et de gaz carbonique V_2 qu'il faut mélanger pour obtenir le mixage défini ci-dessus. Rappelons que dans les conditions normales :

$$\rho_{\text{air}} = 1,293 \text{ kg/m}^3 \text{ et } \rho_{CO_2} = 1,977 \text{ kg/m}^3$$

Corrigé

En désignant par m_1 et m_2 les masses d'air et de gaz carbonique, nous avons :

$$m = m_1 + m_2 = \rho_{\text{air}} V_1 + \rho_{CO_2} V_2$$

Soit en passant à l'application numérique : $1,4 \cdot 10^{-3} = 1,293 V_1 + 1,977 V_2$

D'autre part nous pouvons écrire :

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_1}{T_0} + \frac{p_0 V_2}{T_0} = \frac{p_0}{T_0} (V_1 + V_2)$$

$$\frac{98655 \times 10^{-3}}{293,15} = \frac{101325}{273,15} (V_1 + V_2)$$

Nous avons ainsi deux équations et deux inconnues, ce qui permet d'obtenir :

$$V_1 = 0,575 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad \text{et} \quad V_2 = 0,332 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Exercice IX.8

Déterminer la pression d'un mélange d'air et de gaz carbonique occupant un volume $V=4\text{m}^3$ à la température $T=300\text{K}$. Le mélange contient $3,5\text{Kg}$ d'air et 2Kg de CO_2 .

Pour l'air la constante r est de 287 J/kg K et pour le gaz carbonique de 189 J/kg K .

Corrigé

En vertu de la loi de Dalton la pression totale du mélange est égale à la somme des pressions partielles de l'air et du CO_2 , considérés chacun comme occupant le volume V à la température T .

$$p = \underbrace{p'_{\text{air}}}_{\frac{m_{\text{air}} r_{\text{air}} T}{V}} + \underbrace{p'_{\text{CO}_2}}_{\frac{m_{\text{CO}_2} r_{\text{CO}_2} T}{V}} = (m_{\text{air}} r_{\text{air}} + m_{\text{CO}_2} r_{\text{CO}_2}) \frac{T}{V}$$

$$p = (3,5 \times 287 + 2 \times 189) \frac{300}{4} = 103687 \text{ Pa}$$

Chapitre X

Cinématique des fluides

1 Généralités

La mécanique des fluides est une science très vaste qui interfère, dans de nombreux domaines, avec la thermodynamique. Il va de soi que la mécanique des fluides compressibles ne peut pas se concevoir sans faire appel à la thermodynamique et inversement.

La mécanique des fluides fait appel à des notions différentes de celles exposées en mécanique du solide. Dans un écoulement il y a déformation du fluide. Pour étudier son mouvement on décompose fictivement le fluide en volumes élémentaires continus que l'on appelle particules.

La cinématique des fluides, comme son nom l'indique, permet de décrire les mouvements des fluides sans se préoccuper de ses causes afin d'étudier le champ des vitesses.

1-1 Particule fluide

La particule fluide est une portion de fluide, de dimensions arbitrairement choisies, à laquelle correspondent, pendant un intervalle de temps dt entourant l'instant t , une vitesse, une pression, une température, une masse volumique, etc... Par convention nous dirons que ce sont les valeurs de ces grandeurs à l'instant t au centre d'inertie de la particule.

Par définition de la particule fluide tous ses points matériels M ont une vitesse, au deuxième ordre près, égale à la vitesse du centre d'inertie de la particule. Ce qui permet d'écrire tout simplement :

$$E_c = m \frac{V_G^2}{2} = m \frac{V^2}{2}$$

Chaque particule d'un fluide est soumise à des forces de volumes comme le poids ou les forces d'inerties et à des forces de contact transmises à la surface de la particule par les éléments environnants.

Ainsi, un fluide apparaît pareillement à un corps homogène et continu dont les diverses particules peuvent se déplacer ou se déformer sous l'action d'une force très faible.

En mécanique des fluides deux approches différentes peuvent être utilisées. Elles diffèrent par le choix des variables utilisées, soit Lagrange ou Euler.

Dans la description lagrangienne on suit une particule fluide dans son mouvement. Comme par exemple, un petit morceau de bois emporté par le courant d'une rivière. Les variables de Lagrange sont surtout réservées à l'étude des solides.

Dans la description eulérienne on se place en un point $M(x, y, z)$ du fluide et on étudie les variations des grandeurs physiques à des instants différents. Comme par exemple examiner dans une rivière les tourbillons qui se forment derrière un obstacle.

Pour étudier le mouvement d'un fluide, il est plus commode d'utiliser les variables d'Euler. Elles permettent de définir le champ des vitesses à chaque instant t et en tout point M du fluide.

1-2 Variables de Lagrange

Dans un repère orthonormé $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, les coordonnées d'une particule fluide sont x_0, y_0, z_0 , à la date $t = t_0$. A l'instant t , elles deviennent :

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t), y = y(x_0, y_0, z_0, t), z = z(x_0, y_0, z_0, t)$$

Ces coordonnées sont appelées variables de Lagrange. Le mouvement d'une particule fluide est connu en exprimant x, y et z en fonction de x_0, y_0, z_0 et de t .

Désignons par $V_1(x, y, z, t)$, $V_2(x, y, z, t)$, $V_3(x, y, z, t)$ les composantes de la vitesse $\vec{V}$ d'une particule, en un point M et à une date t . Par définition de la vitesse nous avons :

$$dx = V_1(x, y, z, t)dt \quad dy = V_2(x, y, z, t)dt \quad dz = V_3(x, y, z, t)dt$$

Soit encore :

$$\frac{dx}{V_1(x, y, z, t)} = \frac{dy}{V_2(x, y, z, t)} = \frac{dz}{V_3(x, y, z, t)} = dt$$

On définit alors la trajectoire comme étant le chemin que suit une particule fluide. Comme par exemple, le petit morceau de bois emporté par le courant d'une rivière que l'on suit en traçant son trajet.

Les trajectoires issues d'un même point à différents instants seront différentes (sauf si l'écoulement est permanent). En pratique les particules ne conservent pas longtemps leur individualité et il est difficile de déterminer leur trajectoire.

Dans l'étude des écoulements il n'est pas important de connaître la marche individuelle de chaque particule, si bien que ce mode de calcul n'est donc pas très employé en mécanique des fluides.

1-3 Variables d'Euler

Supposons qu'au contraire on porte attention à l'ensemble de tous les vecteurs vitesses des particules au même instant. L'utilisation, de ce qu'on appelle les variables d'Euler, sera alors mieux adaptée pour résoudre les problèmes de mécanique des fluides. Les variables d'Euler sont les composantes V_1, V_2, V_3 , de la vitesse à un instant t_0 .

Admettons que l'on connaisse, à une date t_0 , les vecteurs vitesses en différents points. Dans ces conditions il sera alors possible de tracer les lignes tangentes à ces vecteurs vitesses en chacun de leurs points. Ces lignes, appelées lignes de courant à l'instant t_0 , sont définies par les relations différentielles :

$$\frac{dx}{V_1(x, y, z, t_0)} = \frac{dy}{V_2(x, y, z, t_0)} = \frac{dz}{V_3(x, y, z, t_0)}$$

L'utilisation des variables d'Euler est plus commode, en mécanique des fluides, que celles de Lagrange pour les raisons suivantes :

- les vecteurs vitesses de l'écoulement forment un champ de vecteurs auquel on peut appliquer les propriétés des champs de vecteurs.

- pour les écoulements permanents, la projection des vitesses dans le repère ne dépend pas du temps.

Toutes les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe fermée constituent un tube de courant. On définit un filet de courant lorsque la section du tube de courant devient infiniment petite.

1-4 Écoulement permanent

Si en chaque point d'un écoulement, le champ des vitesses, la pression et la température ne dépendent pas du temps, on dit que l'écoulement est permanent (ou stationnaire). Les composantes u , v et w du vecteur vitesse $\vec{V}$ sont alors fonction que du point, c'est-à-dire de x , y et z .

Dans un écoulement permanent les trajectoires coïncident alors avec les lignes de courant.

Dans un écoulement permanent un tube de courant est fixe dans le temps et tout se passe comme si le fluide s'écoulait à l'intérieur de parois rigides. On assimilera souvent l'écoulement dans les tuyauteries à un tube de courant. Ce sera fréquemment le cas dans les canalisations utilisées par les turbomachines.

2 Dérivées particulières

Les principes de la thermodynamique et les relations fondamentales de la mécanique s'appliquent à des systèmes que l'on suit dans leurs mouvements. Lorsqu'on veut utiliser les variables d'Euler, pour traiter un problème de mécanique ou de thermodynamique, on introduit la notion de dérivées particulières.

2-1 Dérivée partielle d'une fonction scalaire

Considérons une particule fluide M de vitesse $\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3$ et une fonction scalaire $f(x, y, z, t)$. La différentielle de cette fonction est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

En divisant par dt , on définit la dérivée partielle de la fonction $f(x, y, z, t)$:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} V_1 + \frac{\partial f}{\partial y} V_2 + \frac{\partial f}{\partial z} V_3$$

Soit encore :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f \quad (\text{X.01})$$

Compte tenu de ces résultats nous pouvons écrire que l'accélération $\vec{\gamma}$ de la particule M a pour composantes :

$$\vec{\gamma} \left\{ \begin{array}{l} \frac{DV_1}{Dt} = \frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial y} + V_3 \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ \frac{DV_2}{Dt} = \frac{\partial V_2}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + V_3 \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{DV_3}{Dt} = \frac{\partial V_3}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_3}{\partial x} + V_2 \frac{\partial V_3}{\partial y} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{array} \right.$$

En remarquant que $(\vec{V})^2 = V^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2$ le lecteur vérifiera facilement, à titre d'exercice, que cette relation peut se mettre sous la forme :

$$\vec{\gamma} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{grad} V^2 + \overrightarrow{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} \quad (X.02)$$

Ou encore, de la relation (III.08), on déduit :

$$\vec{\gamma} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{grad} V^2 + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}$$

2-2 Dérivée particulaire d'une intégrale de volume

Considérons un écoulement fluide occupant à l'instant t un domaine D de volume (V) et limité par une surface fermée (A) .

Désignons par $F(M,t)$ une fonction de la position de la particule M et du temps t ainsi que par I l'intégrale de volume :

$$I = \iiint_V F(M,t) dV \quad (X.03)$$

Pendant l'intervalle de temps dt le domaine D est venu en D_1 .

Dans la partie constituée par l'inclusion de D et D_1 (partie commune à D et D_1) : la variation de l'intégrale de volume est : $\iiint_V \frac{\partial F(M,t)}{\partial t} dt dV$

Le volume V occupé par le fluide à l'instant t dans D est devenu V_1 dans D_1 son évolution a été de :

$$dV = \iint_A (\vec{V} \cdot \vec{n}) dt dA$$

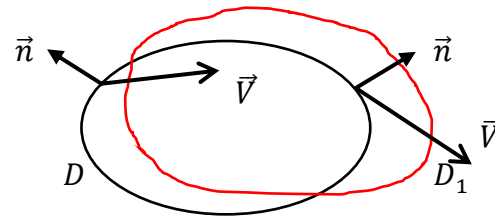


Figure X.01 Transformation de D en D_1

Ce qui provoque une variation de l'intégrale de volume :

$$\iint_A F(M,t) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dt dA$$

Au total la variation de l'intégrale de volume I est :

$$dI = \iiint_V \frac{\partial F(M, t)}{\partial t} dt dV + \iint_A F(M, t) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dt dA$$

Que l'on peut mettre sous une autre forme en divisant par dt et en simplifiant les écritures :

$$\underbrace{\frac{dI}{dt}}_{\text{Dérivée particulière}} = \underbrace{\iiint_V \frac{\partial F(M, t)}{\partial t} dV}_{\text{Dérivée locale}} + \underbrace{\iint_A F(M, t) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA}_{\text{Dérivée convective}} \quad (\text{X.04})$$

3 Équation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de la conservation de la masse.

Première démonstration.

Soit ρ la masse volumique et dV le volume d'une particule fluide. Considérons une portion de fluide de masse m que l'on suit dans son mouvement :

$$m = \iiint_V \rho dV.$$

Cette masse restant constante sa dérivée particulière est nulle. En vertu de la relation (X.04) nous avons donc :

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_A \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

Du théorème d'Ostrogradski (II.05) :

$$\iint_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \iiint_V \text{div}(\rho \vec{V}) dV$$

Il s'ensuit donc :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \right) dV = 0$$

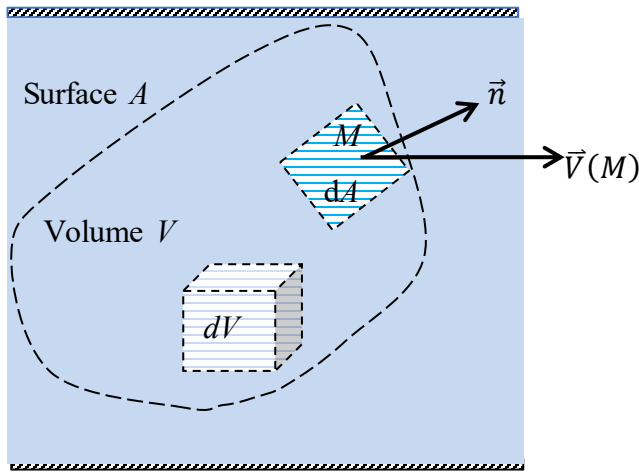
Cette relation doit être vérifiée quel que soit l'élément de volume V donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{X.05})$$

Deuxième démonstration.

Considérons un fluide en écoulement et délimitons une surface fermée (A) limitant un volume (V) dans ce fluide.

L'augmentation de masse contenue dans ce volume V , pendant un certain temps, doit être égale à la somme des masses du fluide qui entrent diminuées de celles qui en sortent.



Désignons par M un point appartenant à la surface A où la vitesse du fluide est $\vec{V}(M)$.

Pendant le temps dt , la masse de fluide qui traverse la surface élémentaire dA est :

$$\rho \vec{V}(M) \cdot \vec{n} dA dt$$

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à dA et dirigé vers l'extérieur de V .

Figure X.02 Volume fictif V dans un écoulement fluide

Pour le volume V la masse dm qui traversera la surface A pendant le temps dt sera :

$$dm = \left(\iint_A \rho \vec{V}(M) \cdot \vec{n} dA \right) dt$$

Et en vertu de la formule d'Ostrogradski nous pouvons écrire :

$$dm = \left(\iint_A \rho \vec{V}(M) \cdot \vec{n} dA \right) dt = \left(\iiint_V \text{div}(\rho \vec{V}(P)) dV \right) dt$$

Pendant ce même temps, la masse contenue à l'intérieur du volume élémentaire dV est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV$$

Et pour le volume V :

$$dm_i = \left(\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right) dt$$

Si l'écoulement est conservatif, l'augmentation de masse dm_i à l'intérieur du volume V doit être égale à la masse dm qui est entrée en traversant la surface A pendant le même intervalle de temps dt (une diminution de masse dm_i serait, évidemment, égale à celle qui sort).

Ce qui se traduit par la relation :

$$\left(\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right) dt + \left(\iiint_V \text{div}(\rho \vec{V}(P)) dV \right) dt = 0$$

Ou encore :

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}(P)) \right] dV = 0$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit le point P considéré et bien sûr le volume élémentaire dV , soit la relation (X.05) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

4 Différents types d'écoulements

Écoulements non conservatifs

Si l'écoulement n'est pas conservatif, c'est-à-dire s'il y a apparition ou dissipation de fluide dans le champ de l'écoulement, il faudra tenir compte des débits massiques qui entrent (sources) ou qui sortent (puits). La relation (X.05) deviendra :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = \sum \rho q_v$$

Écoulements permanents

Si l'écoulement est permanent nous avons $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et la relation (X.05) devient :

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{X.06})$$

Écoulements isovolumes

Compte tenu de (II.20) la relation (X.06) peut également s'écrire :

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = \rho \text{div} \vec{V} + \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} \rho$$

Si bien que pour l'écoulement d'un fluide incompressible (isovolume $\rho = \text{constante}$) les relations (X.05) et (X.07) prennent la même forme :

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad (\text{X.07})$$

Pour un écoulement isovolume l'équation de conservation de la masse est donc la même que le régime soit permanent ou variable.

Cas particulier

On remarquera que pour un écoulement permanent la relation (X.07) est également satisfaite si $\vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0$, c'est-à-dire si les variations de masse volumique sont orthogonales, en tous points, au vecteur vitesse. Ce cas peut se rencontrer dans des écoulements stratifiés par salinité ou température (courants marins).

Écoulements unidimensionnels

Considérons un écoulement permanent d'un fluide dans une canalisation, ou dans un simple tube de courant, et admettons également que cet écoulement soit unidimensionnel. C'est-à-dire qu'en tous points d'une section droite, la pression, la vitesse et la masse volumique conservent la même valeur et ne dépendent uniquement que de l'abscisse "s".

C'est une hypothèse souvent admise dans les applications industrielles. De la relation (X.06) on en déduit que :

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = \frac{\partial(\rho V)}{\partial s}$$

Prenons comme volume de contrôle V la portion de fluide comprise entre les sections droites de surface A_1 et A_2 représentées sur la figure X.03.

En intégrant $\iiint_V \left[\frac{\partial(\rho V)}{\partial s} \right] dV$ on obtient :

$$\rho_2 V_2 A_2 - \rho_1 V_1 A_1 = 0.$$

Que l'on écrit :

$$q_m = \rho V A \quad (\text{X.08})$$

q_m est le débit masse.

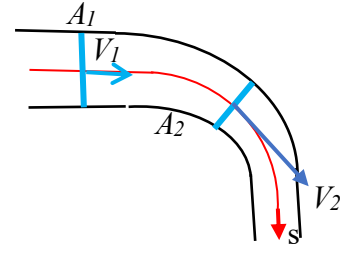


Figure X.03 Ecoulement unidimensionnel

Si la masse volumique ρ est constante (cas des liquides) la relation (X.08) se réduit à :

$$q_v = AV \quad (\text{X.09})$$

q_v est le débit volume.

5 Répartition des vitesses

Soit un élément de fluide en mouvement entourant un point A où la vitesse est $\vec{V}_A$ de composantes V_{A1}, V_{A2}, V_{A3} . Considérons un point M , proche de A , de coordonnées x, y, z dont l'origine est le point A et désignons par V_1, V_2, V_3 les composantes de la vitesse $\vec{V}_M$ du point M . La formule des accroissements finis permet de déterminer les composantes de la vitesse $\vec{V}_M$ en supposant que M est suffisamment voisin de A pour négliger les termes de second ordre.

$$V_1 = V_{A1} + x \frac{\partial V_1}{\partial x} + y \frac{\partial V_1}{\partial y} + z \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

Et pour les trois composantes écrites sous forme matricielle :

$$[\vec{V}_M] = [\vec{V}_A] + \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y} & \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y} & \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} & \frac{\partial V_3}{\partial y} & \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{bmatrix} [\overline{AM}] = [\vec{V}_A] + [M][\overline{AM}]$$

D'une façon analogue au chapitre VII (concernant le tenseur des déformations), décomposons la matrice $[M]$ en une matrice symétrique $[M_1]$ et une matrice anti symétrique $[M_2]$ soit :

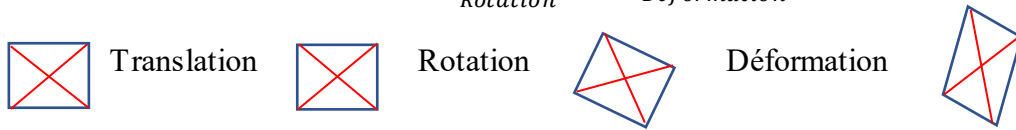
$$[M] = [M_1] + [M_2]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y} & \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y} & \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} & \frac{\partial V_3}{\partial y} & \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{bmatrix}}_{[M]} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix}}_{[M_1]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}}_{[M_2]}$$

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \vec{V}_M &= \vec{V}_A + [M_2][\overline{AM}] + [M_1][\overline{AM}] \\ \vec{V}_M &= \underbrace{\vec{V}_A}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \overline{AM}}_{\text{Rotation}} + \underbrace{[M_1][\overline{AM}]}_{\text{Déformation}} \end{aligned} \quad (X.10)$$



Le mouvement d'une particule fluide apparaît ainsi comme l'accumulation d'une translation, d'une rotation et d'une déformation.

6 Écoulements irrotationnels ou à potentiel des vitesses

Un écoulement est irrotationnel lorsque que les particules fluides ne subissent aucune rotation, en d'autres termes :

$$2\vec{\omega} = \overrightarrow{rot}\vec{V} \left(\frac{M}{R}\right) = \vec{0} \quad (X.11)$$

Appliquons le théorème de Stokes : la circulation d'un vecteur $\vec{V}$ le long d'un contour fermé C est égal au flux du rotationnel de ce vecteur à travers une surface $\underline{A}$ admettant C comme frontière.

Par conséquent, pour un écoulement irrotationnel nous aurons :

$$\int_C \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \iint_A \overrightarrow{rot}\vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (X.12)$$

Et ceci quel que soit la courbe C dans le fluide.

Considérons 2 points A et B de la courbe C .

La circulation entre ces 2 points est indépendante du chemin suivi pour aller de A à B .

La vitesse V dérive donc d'un potentiel φ .

$$\Gamma = \int_{AB} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \varphi_B - \varphi_A$$

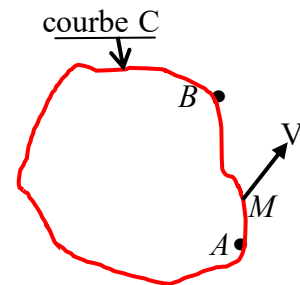


Figure X.04 Circulation

On remarquera

-a) que $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\varphi) = \vec{0}$, puisque $\overrightarrow{\text{rot}}V = \vec{0}$ on peut écrire : $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$

-b) que sur une ligne équipotentielle nous avons :

$$\int_{AB} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \int_{AB} \overrightarrow{\text{grad}}\varphi \cdot d\vec{M} = \varphi_B - \varphi_A = 0.$$

Ce qui montre que le vecteur vitesse en un point M est normal à la ligne équipotentielle qui passe par ce point. Les lignes de courant sont orthogonales aux équipotentielles.

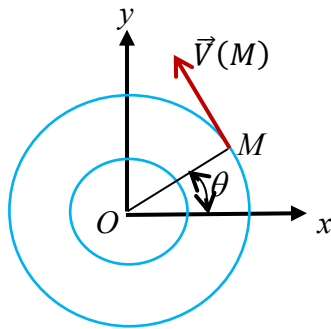
Exercice X.1

Rappelons qu'en coordonnées cylindriques l'expression de la vitesse est en un point M :

$$\vec{V}(M) = V_r \vec{u}(\theta) + V_\theta \vec{u}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + V_z \vec{e}_3$$

Et conformément au chapitre II, paragraphe 8, en coordonnées cylindriques le rotationnel de la vitesse est :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial z} \right), \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \right]$$



Déterminer le rotationnel de la vitesse d'un écoulement dont les lignes de courant sont des cercles concentriques de centre O .

On précise que la vitesse d'un point M ne dépend que de la distance r , c'est-à-dire :

$$|\vec{V}(M)| = f(r) = V_\theta \\ V_r = 0 \quad \text{et} \quad V_z = 0.$$

On examinera les deux cas suivants :

$$f(r) = \frac{k}{r} \quad \text{et} \quad f(r) = kr$$

Corrigé

Il s'ensuit que le rotationnel de $\vec{V}(M)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} \vec{e}_3 = \left(\frac{f(r)}{r} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \vec{e}_3$$

1. Pour le cas "a" nous avons :

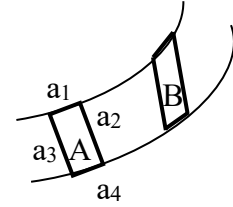
$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \left(\frac{f(r)}{r} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \vec{e}_3 = \left(\frac{k}{r^2} - \frac{k}{r^2} \right) \vec{e}_3 \quad \overrightarrow{rot\vec{V}} = \vec{0}$$

L'écoulement est donc irrotationnel.

Considérons une particule fluide de forme carrée occupant la position A à la date t.

Elle occupera, à la date $t+\Delta t$, la position B.

Son côté "a₁a₂" plus près du centre du cercle se déplacera plus vite que son côté opposé "a₃a₄".



La particule s'est déplacée en se déformant mais sans tourner sur elle-même. Le vecteur $\vec{\omega}$ est nul en tous points sauf au centre O.

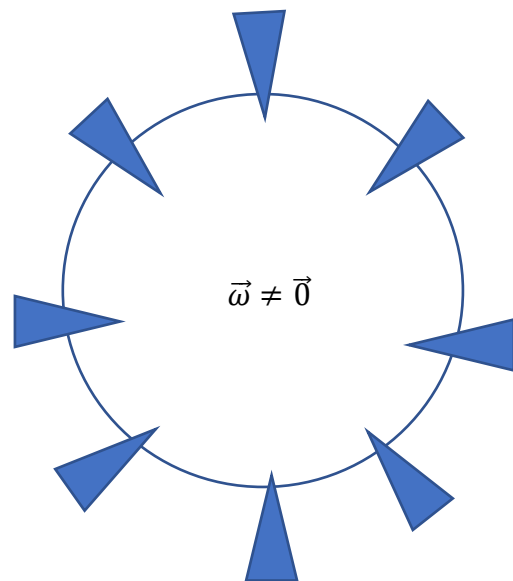
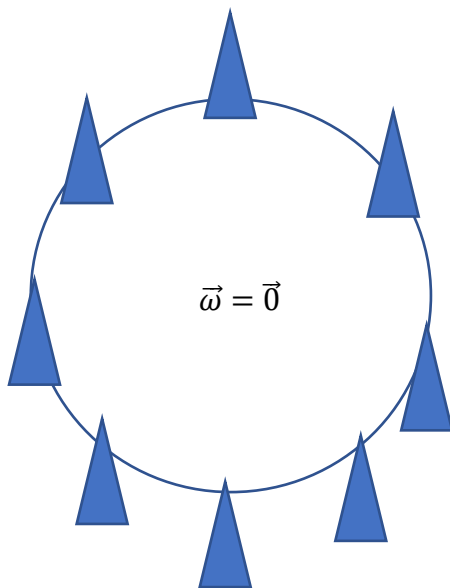
2. Pour le cas "b" nous avons :

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \left(\frac{f(r)}{r} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \vec{e}_3 = \left(\frac{kr}{r} + k \right) \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = 2k\vec{e}_3 = 2\omega\vec{e}_3 \neq \vec{0}$$

L'écoulement est rotationnel

Donnons une signification physique simple aux résultats de l'exercice X.1.

**7 Écoulements rotationnels**

Lorsque le vecteur tourbillon est différent de zéro, $\omega \neq 0$, l'écoulement est rotationnel. On l'étudie en associant au champ des vitesses habituelles le champ des vecteurs tourbillon et on appelle :

- Ligne tourbillon, une ligne tangente en chaque point au vecteur tourbillon en ce point.

- Surface tourbillon, une surface tangente en chaque point au vecteur tourbillon.
- Filet tourbillon, l'ensemble des lignes tourbillon s'appuyant sur une courbe fermée infiniment petite.
- Intensités d'un tube tourbillon, le flux du rotationnel du vecteur vitesse à travers une section quelconque de ce tube.

8 Écoulements laminaire et turbulent

Les écoulements laminaires et turbulents ont été mis en évidence pour la première fois par Reynolds.

L'expérience consistait à observer le mouvement d'un fluide à l'intérieur d'un tube de verre dans lequel on introduisait un liquide coloré.

Dans cette expérience, souvent répétée, on constatait qu'aux faibles vitesses le filet coloré reste stable sur toute la longueur du tube. L'écoulement est dit laminaire. Les lignes de courant sont bien parallèles et il n'y a pas d'échange de particules.

Lorsque la vitesse du fluide augmente, à une certaine distance de l'entrée du tube, le filet coloré se mélange avec le fluide initial. L'écoulement devient instable ; il est dit turbulent.

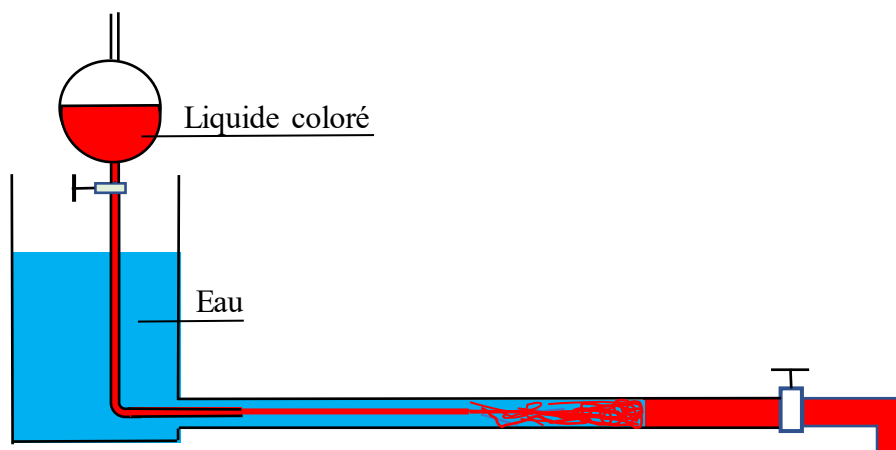


Figure X.05 Expérience de Reynolds

La prise en compte des forces de viscosité fait apparaître un groupement sans dimensions qu'on appelle le nombre de Reynolds (Re). Il a été mis en évidence, en 1883, par Osborne Reynolds. Il caractérise la nature du régime d'écoulement d'un fluide (laminaire, transitoire, turbulent).

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu} \quad (X.13)$$

V est la vitesse du fluide.

L est une longueur caractéristique.

Si l'écoulement est laminaire le nombre de Reynolds est plus petit que 2000 il y a une forte viscosité.

Si le Reynolds est compris entre 2000 et 3000 le régime est dit intermédiaire transitoire.

Lorsque le Reynolds devient supérieur à 3000 le régime est dit turbulent. Lorsque le régime devient turbulent on dit que ce nombre est le Reynolds critique.

Exercice X.2

Calculer le nombre de Reynolds d'un écoulement d'air dans une tuyauterie cylindrique ayant un diamètre de 0,09 m. La vitesse de l'air dans cette tuyauterie est de 15m/s et sa température est de 20°C sous une pression de 2 bar.

Corrigé

Dans ces conditions de pression et de température la masse volumique de l'air est :

$$\rho = \frac{P}{rT} = \frac{2 \cdot 10^5}{287 \cdot 293,15} = 2,377 \text{ Kg/m}^3$$

D'où le nombre de Reynolds (relation X.13) :

$$Re = \frac{2,377 \cdot 15 \cdot 0,09}{18,1 \cdot 10^{-6}} = 177290$$

Ce calcul montre que le régime est turbulent et que nous sommes loin du Reynolds critique. Ce n'est pas un cas particulier. Les écoulements laminaires ne s'observent qu'assez rarement dans le domaine des turbomachines et des moteurs. On les rencontre dans les paliers et glissières et parfois pour des fluides très visqueux s'écoulant lentement dans des canalisations.

9 Viscosité

L'expérience montre que, lors d'un écoulement d'un fluide, la pression (force normale) ne suffit pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées **forces de viscosité**.

De la même façon qu'au chapitre VI on décompose le tenseur des contraintes. Dans la relation (VI.04) en posant $\sigma_m = -p$

Soit :

$$\begin{matrix} [L] & \text{Tenseur isotrope} & \text{Tenseur de viscosité} \\ \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y + p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z + p \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (\text{X.14})$$

Le tenseur de viscosité est nul lorsque les contraintes tangentielles le sont également et que :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p.$$

Il ne subsiste alors que le tenseur isotrope et on dit, comme on l'a vu précédemment, que le fluide est parfait. Disons, peut-être plus simplement que, en un point M d'un fluide parfait, il ne subsiste que la pression p , et ceci quelle que soit la direction de la facette considérée.

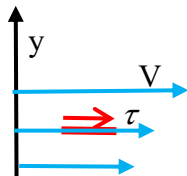
Notons que, dans un fluide réel au repos, les forces de frottement sont également nulles.

Lorsque les contraintes tangentielles ne sont pas nulles on dit que le fluide est visqueux.

Dans un écoulement par filets horizontaux, la contrainte tangentielle en un point donné est proportionnelle au gradient de vitesse perpendiculaire au plan de glissement.

On peut également dire, qu'entre deux couches fluides planes glissant l'une sur l'autre, s'exerce par unité de surface la force de frottement visqueux :

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial y} \quad (\text{X.15})$$



μ est le coefficient de viscosité dynamique qui s'exprime en Pascal.seconde (Pa.s). Ce coefficient, dans l'ancien système CGS était le poise (P) ; $1\text{P}=0,1\text{Pa.s}$.

Figure X.06 Viscosité

On associe souvent la masse volumique au coefficient de viscosité dynamique sous la forme :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{X.16})$$

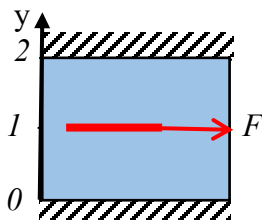
ν est appelé le coefficient de viscosité cinématique, il s'exprime dans le système SI en mètres carrés par seconde (m^2/s). Dans le système CGS, il s'exprimait en stockes (St) ; $1\text{St}=10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$.

Exercice X.3

Un espace de 2 cm entre deux larges surfaces planes et parallèles est rempli d'huile ayant un coefficient de viscosité dynamique : $\mu = 0,4$ Poise .

Quelle force horizontale faut-il appliquer à une plaque très mince de 20 cm^2 de surface, située à égale distance des deux parois pour la déplacer à une vitesse de 10 m/s. On supposera le gradient de vitesse constant.

Corrigé



$$\text{On a : } \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{10}{0,01} = 1000$$

$$\mu = 0,4 \text{ Poise} = 0,04 \text{ Pa.s}$$

Pour déterminer la force F il faut comptabiliser les deux surfaces de la plaque soit : 40 cm^2 au total.

$$\text{D'où : } F = \mu * \frac{\partial V}{\partial y} * S = 4.10^{-2} * 1.10^3 * 40.10^{-4}$$

$$F = 0,16 \text{ N}$$

La viscosité dynamique des liquides et des gaz varie différemment avec la température et la pression. Pour les liquides la viscosité dynamique diminue avec la température et elle est peu sensible à la pression. Pour les gaz c'est le contraire, la viscosité dynamique augmente avec la pression et la température.

Pour quelques liquides et gaz usuels le tableau X.1 donne le coefficient de viscosité dynamique en fonction de la température.

Désignation	Températures						
	-10	0	20	50	100	250	500
Air	16,67	17,2	18,1	19,1	21,77	27,77	35,62
Azote	16,18	16,7	17,6	18,9	20,99	26,25	33,96
Ammoniaque		9,2			12,8		
Dioxyde de carbone	13,44	13,9	14,9	16,4	18 83	24,42	32,91
Dioxyde de soufre		11,7			16,2		
Eau		1800	1000	660	280		
Vapeur d'eau		8	8,8	10,0	12,6	18,22	28,40
Éthylène		9,3			12,4		
Hydrogène	8,14	8,3	8,7	9,4	10,30	12,97	16,69
Méthane		10,3			13,6		
Monoxyde d'azote		17,8			22,7		
Monoxyde de carbone	16,18	16,7	17,6	18,9	20,99	26 04	
Oxydes d'azote		13,6			18,2		
Oxygène	18,53	19,10	20,30	22	24,42	30,95	40,11
Sulfure d'hydrogène		11,6			15,9		

Tableau X.1. Coefficient de viscosité dynamique en 10^{-6} Pa.S

Chapitre XI

Dynamique des fluides

Pour déterminer le comportement d'un fluide monophasique, il est nécessaire de connaître, en chaque point, le vecteur vitesse $\vec{V}$ et ses trois composantes V_1 , V_2 et V_3 , la masse volumique ρ , la température T et la pression p . Soit au total 6 grandeurs scalaires qui sont toutes fonction du point considéré $M(x, y, z)$ et du temps t . Ces six grandeurs sont liées entre-elles par six relations que nous enseigne la physique. Elles sont généralement mesurables et parfois fonction du temps t .

La thermodynamique donne une relation entre la masse volumique ρ , la température T et la pression p . Comme nous le savons maintenant, ces trois grandeurs sont liées par une équation d'état ($p v = r T$ pour un gaz parfait), ou soit encore par l'utilisation des diagrammes ou des tables numériques. L'étude de la mécanique des fluides conduit à établir les cinq autres relations. Il est bon de noter qu'il faudra ajouter à ces six équations les conditions aux limites, encore nommées conditions aux frontières, pour résoudre un problème.

1. Equations d'Euler

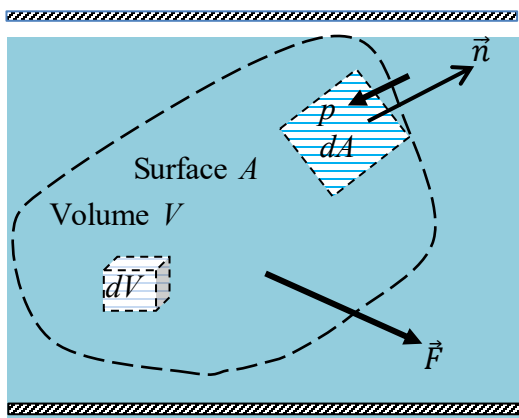


Figure XI.01 Domaine fictif D

Considérons l'écoulement à potentiel d'un fluide parfait et désignons un domaine D de volume (V) limité par une surface fermée (A) fixe.

En l'absence de viscosité les efforts exercés sur toute la surface (A) par la pression p sont :

$$- \iint_A p \vec{n} dA$$

De la relation (II.06) nous avons l'égalité suivante :

$$- \iint_A p \vec{n} dA = - \iiint_V \overrightarrow{grad} p dV.$$

Soit $\vec{F}$ la force de volume, rapportée à l'unité de masse, agissant sur le fluide contenu dans le volume V . La résultante des forces de volume est donc :

$$\iiint_V \vec{F} \rho dV$$

Et par suite la résultante de toutes les forces agissant sur le volume V est :

$$\vec{R} = \iiint_V \vec{F} \rho dV - \iiint_V \overrightarrow{grad} p dV$$

Du principe fondamental de la mécanique (IV.14) nous avons :

$$\vec{R} = \iiint_V \rho \vec{\gamma} dV = \iiint_V \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dV$$

D'où :

$$\iiint_V \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dV = \iiint_V \vec{F} \rho dV - \iiint_V \overrightarrow{\text{grad} p} dV$$

Ou encore :

$$\iiint_V \left(\rho \frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{F} \rho + \overrightarrow{\text{grad} p} \right) dV = \vec{0}$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit le volume pris à l'intérieur du fluide. Ce qui signifie que la fonction figurant sous le signe intégral doit être nulle en toutes les particules élémentaires du fluide.

Il s'ensuit que :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{F} \rho + \overrightarrow{\text{grad} p} = \vec{0}$$

Et en divisant par ρ on obtient **les équations d'Euler**

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad} p}$$

La notion de dérivée particulière permet d'écrire :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V} - \vec{F} + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad} p} = \vec{0} \quad (\text{XI.01})$$

Rappelons que les équations d'Euler s'appliquent à des fluides dénués de viscosité. Les équations d'Euler s'appliquent aussi bien pour des fluides compressibles qu'incompressibles.

2. Equations de Navier Stokes

Les équations de Navier Stokes sont obtenues en ajoutant aux équations d'Euler la viscosité.

Ce sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides. La résolution de ces équations ne peut être intégrée que dans quelques cas particuliers. Cependant elles permettent parfois une résolution approchée en proposant une modélisation pour certaines applications pratiques.

Utilisons une approche différente pour établir les équations de Navier Stokes que celle utilisée précédemment pour les équations d'Euler. Écrivons le principe fondamental de la mécanique de la façon suivante :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \rho + \overrightarrow{\text{div}}[L]$$

De la relation (X.14) rappelée ci-après :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}}^{[L]} = \overbrace{\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}}^{\text{Tenseur isotrope}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y + p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z + p \end{bmatrix}}^{\text{Tenseur de viscosité}=[L_V]}$$

Nous obtenons l'équation générale de la dynamique des fluides visqueux en divisant par ρ :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{div}}[L_V]$$

Et, comme précédemment, en utilisant la notion de dérivée particulaire :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V} - \vec{F} + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{div}}[L_V] = \vec{0} \quad (\text{XI.02})$$

3. Equations de Bernoulli

Dans l'équation d'Euler, considérons le cas particulier d'un fluide incompressible ($\rho = \text{constante}$). Dans ces conditions nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{p}{\rho}$$

Multiplions la relation (XI.01) par la vitesse $\vec{V}$.

$$\vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{\vec{V} \cdot (2\vec{\omega} \wedge \vec{V})}_0 + \vec{V} \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 - \vec{F} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Dans le cas des liquides, la force $\vec{F}$ est généralement due à l'apesanteur. Dans ces conditions F dérive d'une fonction de force et nous pouvons écrire :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} gh.$$

Où h mesure l'altitude.

Par ailleurs si l'écoulement est permanent nous aurons :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$$

Dans ces conditions il ne subsistera que :

$$\vec{V} \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 + \overrightarrow{\text{grad}} gh + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Posons :

$$H = \frac{V^2}{2g} + h + \frac{p}{\rho g}$$

H est la charge du fluide, comptée en mètre de fluide en mouvement. En vertu de la relation (X.01) on peut écrire :

$$\frac{DH}{Dt} = 0$$

C'est le théorème de Bernoulli ; la charge du fluide reste constante sur une ligne de courant.

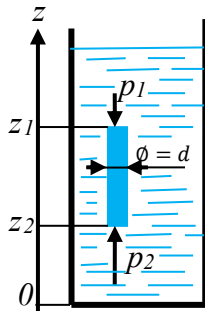
$$\frac{V^2}{2g} + h + \frac{p}{\rho g} = \text{Constante} \quad (\text{XI.03})$$

Lorsque dans l'équation de Bernoulli les vitesses sont nulles, la relation obtenue est dite "équation fondamentale de l'hydrostatique".

$$\frac{p}{\rho g} + z = \text{constante} \quad (\text{XI.04})$$

Remarque

Il est facile de retrouver la relation (XI.04). Pour cela considérons à l'intérieur d'un liquide au repos, un cylindre vertical fictif de diamètre d et de hauteur $z_1 - z_2$. Écrivons son équilibre vertical, il est soumis, d'une part à son propre poids et, d'autre part, aux forces de pression p_1 et p_2 qui agissent sur ses extrémités.



En désignant par ρ la masse volumique du liquide il vient :

$$-p_1 \pi \frac{d^2}{4} + p_2 \pi \frac{d^2}{4} - \rho g \pi \frac{d^2}{4} (z_1 - z_2) = 0$$

On obtient en simplifiant par $\pi \frac{d^2}{4}$:

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 = p + \rho g z = \text{constante}$$

Figure XI.02 Pression dans un liquide

On retrouve bien le résultat $\frac{p}{\rho g} + z = \text{constante}$

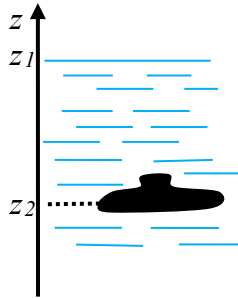
Exercice XI.01

En supposant la pression atmosphérique égale à 101 325 Pa, déterminer la pression qui règne sur l'extérieur d'un sous-marin, assimilé à un point, enfoncé et immobile à 100 m de profondeur.

La masse volumique de l'eau sera prise égale à 1000 kg/m³.

Corrigé

Affectons de l'indice "1" le niveau d'eau et par "2" la profondeur du sous-marin.
De la loi fondamentale de l'hydrostatique, nous avons



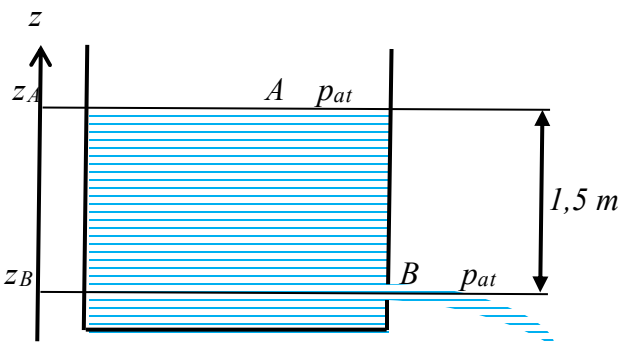
$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + z_1 - z_2$$

Soit :

$$\begin{aligned}\frac{p_2}{\rho g} &= \frac{101325}{1000 \times 9,81} + 100 = 110,32 \text{ m} \\ p_2 &= 110,32 \times 1000 \times 9,81 = 1\,082\,239 \text{ Pa} \\ p_2 &= 10,82 \text{ bars}\end{aligned}$$

Exercice XI.02

Soit un liquide contenu dans un récipient A et s'écoulant par un orifice percé B à sa base.



L'ouverture B est située à 1,5 m au-dessous du niveau libre A. La surface libre est à la pression atmosphérique p_{at} de 101325 Pa.

Calculer la vitesse du liquide à la sortie de l'orifice B.

Corrigé

Appliquons le théorème de Bernoulli aux filets fluides compris entre A et B.

$$z_A + \frac{v_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} = z_B + \frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g}$$

Ici nous avons :

$$z_A - z_B = 1,3 \quad p_A = p_B = p_{at}$$

Si la surface libre A est grande vis-à-vis de la surface de l'orifice B on peut négliger le terme $\frac{v_A^2}{2g}$. L'équation de Bernoulli devient :

$$z_A = z_B + \frac{v_B^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

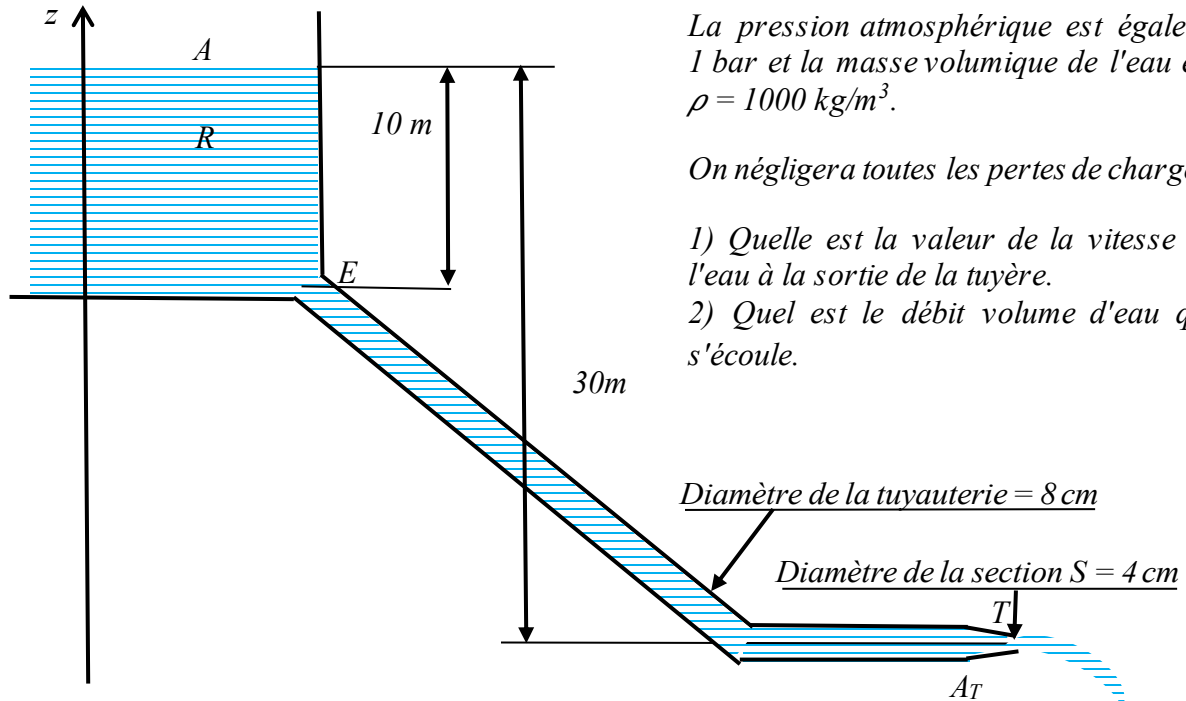
Soit :

$$v_B = \sqrt{2 \times 9,81 \times 1,3} = 5,05 \text{ m/s}$$

En désignant par $h = z_A - z_B$ la relation $v = \sqrt{2gh}$ constitue la loi de Torricelli.

Exercice XI.03

L'entrée E d'un tuyau se trouve à 10 m sous la surface libre d'un réservoir d'eau R de grande dimension. La sortie est à 30 m au-dessous de cette même surface libre. Le tuyau a un diamètre de 8 cm et se termine par une courte tuyère T d'un diamètre de 4 cm.



La pression atmosphérique est égale à 1 bar et la masse volumique de l'eau est $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

On négligera toutes les pertes de charges.

- 1) Quelle est la valeur de la vitesse de l'eau à la sortie de la tuyère.
- 2) Quel est le débit volume d'eau qui s'écoule.

3) Déterminer dans le tuyau la valeur de la pression en E ainsi que dans une section A_T située juste en amont de la tuyère T de sortie.

Corrigé

1. Considérons un filet fluide allant de A à T et écrivons l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V_A^2}{2g} + z_A + \frac{p_A}{\rho g} = \frac{V_T^2}{2g} + z_T + \frac{p_T}{\rho g}$$

Or nous avons : $\frac{V_A^2}{2g} = 0$. Le réservoir est grand et le niveau d'eau reste constant.

D'autre part $p_A = p_T =$ pression atmosphérique. Il s'ensuit donc :

$$z_A - z_T = \frac{V_T^2}{2g} \Rightarrow V_T = \sqrt{2g(z_A - z_T)}$$

$$V_T = \sqrt{2 \times 9,81 \times 30} = 24,26 \text{ m/s}$$

2. Le calcul du débit volume est immédiat :

$$q_v = A_T V_T = \frac{\pi \times 0,04^2}{4} \times 24,26$$

$$q_v = 0,0305 \text{ m}^3/\text{s}$$

3. Écrivons l'équation de Bernoulli de A à E

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} = \frac{V_E^2}{2g} + z_E + \frac{p_E}{\rho g}$$

Pour déterminer la pression p_E il faut tout d'abord calculer la vitesse V_E .

$$V_E = \frac{q_v}{A_E} = \frac{0,0305}{\frac{\pi \times 0,08^2}{4}} = 6,07 \text{ m/s}$$

Et par suite :

$$\frac{p_E}{\rho g} = z_A - z_E + \frac{p_A}{\rho g} - \frac{V_E^2}{2g} = 10 + \frac{1.10^5}{1000 \times 9,81} - \frac{6,07^2}{2 \times 9,81} = 18,32 \text{ m}$$

$$p_E = 18,32 \rho g = 18,32 \times 1000 \times 9,81 = 179719 \text{ Pa}$$

$$p_E \approx 1,8 \text{ bar.}$$

Écrivons Bernoulli entre A et A_T à l'amont de la tuyère de sortie.

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} = \frac{V_{A_T}^2}{2g} + z_T + \frac{p_{A_T}}{\rho g}$$

Sachant que $V_{A_T} = V_E$ nous déduisons la pression p_{A_T} :

$$\frac{p_{A_T}}{\rho g} = z_A - z_T + \frac{p_A}{\rho g} - \frac{V_{A_T}^2}{2g} = 30 + \frac{1.10^5}{1000 \times 9,81} - \frac{6,07^2}{2 \times 9,81} = 38,32 \text{ m}$$

$$p_{A_T} = 375919 \text{ Pa}$$

$$p_{A_T} \approx 3,76 \text{ bar}$$

Exercice XI.04

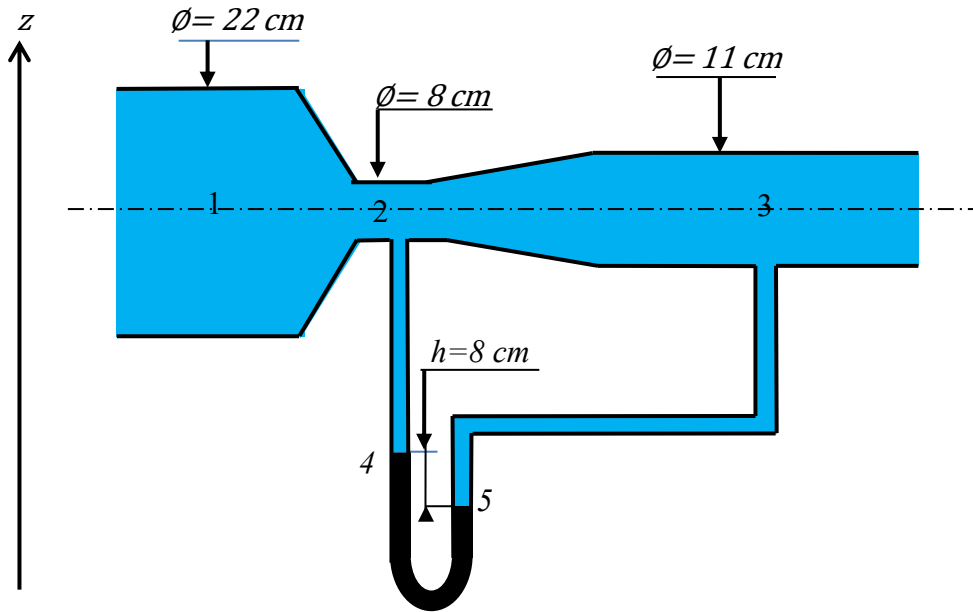
De l'eau s'écoule, en régime permanent, dans une tuyauterie horizontale et cylindrique. Elle comporte un Venturi dont le col a un diamètre de 8 cm. À l'amont du Venturi le diamètre de la tuyauterie est de 22 cm et à l'aval il est de 11 cm

Conformément aux croquis ci-dessous un tube en U relié au col et à la section de sortie du Venturi indique une différence de pression de 8 cm de mercure.

Calculer la vitesse d'écoulement au col et le débit d'eau.

Nous supposons que l'écoulement est réversible.

On précise que la masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3 et que la masse volumique du mercure est de $13\,600 \text{ kg/m}^3$.



Corrigé

En désignant par ρ le volume massique de l'eau, le débit masse s'écrit :

$$q_m = \rho A_1 V_1 = \rho A_2 V_2 = \rho A_3 V_3$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\pi d_2^2}{4} V_2 = \frac{\pi d_3^2}{4} V_3 \quad \Rightarrow \quad V_3 = \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^2 V_2$$

La tuyauterie étant horizontale, l'équation de Bernoulli prise entre 2 et 3 s'écrit :

$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} = \frac{p_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad p_3 - p_2 = \left(\frac{V_2^2 - V_3^2}{2}\right) \rho = \left(1 - \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4\right) \frac{\rho V_2^2}{2}$$

Du principe fondamental de la statique des fluides nous pouvons écrire entre 2 et 4 ainsi qu'entre 3 et 5 :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \frac{p_4}{\rho g} + z_4 \\ \frac{p_3}{\rho g} + z_3 = \frac{p_5}{\rho g} + z_5 \end{array} \right\} \Rightarrow p_3 - p_2 = p_5 - p_4 + \left(z_5 - z_4 - \underbrace{(z_3 - z_2)}_0 \right) \rho g = p_5 - p_4 - \rho g h$$

En désignant par ρ_{Hg} le volume massique du mercure, nous pouvons écrire :

$$\frac{p_4}{\rho_{Hg} g} + z_4 = \frac{p_5}{\rho_{Hg} g} + z_5 \quad \Rightarrow \quad p_5 - p_4 = (z_4 - z_5) \rho_{Hg} g = \rho_{Hg} g h$$

De ces trois dernières relations on déduit :

$$p_3 - p_2 = p_5 - p_4 - \rho gh = (\rho_{Hg} - \rho)gh$$

Il s'ensuit donc la vitesse au col de la tuyère :

$$p_3 - p_2 = \left(1 - \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4\right) \frac{\rho V_2^2}{2} = (\rho_{Hg} - \rho)gh$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho} - 1\right)g}{\left(1 - \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4\right)}} h$$

L'application numérique conduit à $V_2 = 5,2 \text{ m/s}$ et $q_m = \rho A_2 V_2 = 26,3 \text{ kg/s}$

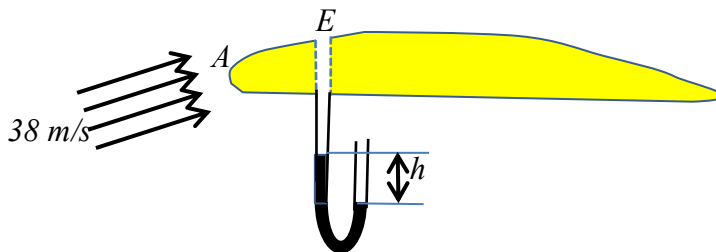
Exercice XI.05

Une maquette d'aile d'avion est essayée en soufflerie avec une vitesse d'air de 38 m/s .

En un point E de l'extrados de l'air, une prise de pression statique indique une dépression $h = 290 \text{ mm}$ d'eau.

Quelle est la vitesse de l'air au point E ?

On précise que dans la soufflerie la pression atmosphérique est de 101325 Pa et la masse volumique de l'air est de $1,205 \text{ kg/m}^3$.



Corrigé

Par définition la pression totale au point A est :

$$p_{\text{Totale A}} = p_A + \frac{\rho_{\text{air}} V_A^2}{2} = 101325 + \frac{1,205 \times 38^2}{2}$$

$$p_{\text{Totale A}} = 102195 \text{ Pa}$$

La pression statique au point E est :

$$p_E = p_{\text{atmosphérique}} - h \rho_{\text{eau}} g = 101325 - 0,29 \times 1000 \times 9,81$$

$$p_E = 98480 \text{ Pa}$$

Pour les filets fluides s'écoulant autour de l'aile, écrivons Bernoulli de A à E

$$\frac{p_A}{\rho_{\text{air}} g} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_E}{\rho_{\text{air}} g} + \frac{V_E^2}{2g} + z_E$$

$$p_A + \frac{\rho_{air} V_A^2}{2} + g\rho_{air} z_A = p_E + \frac{\rho_{air} V_E^2}{2} + g\rho_{air} z_E$$

L'écart entre z_A et z_E est minime si bien qu'on peut écrire : $z_A = z_E$

$$p_A + \frac{\rho_{air} V_A^2}{2} = p_E + \frac{\rho_{air} V_E^2}{2} = p_{Totale A}$$

Il s'ensuit donc :

$$V_E = \sqrt{2 \frac{p_{Totale A} - p_E}{\rho_{air}}} = \sqrt{2 \frac{102195 - 98480}{1,205}}$$

$$V_E = 78,5 \text{ m/s}$$

4. Théorème des quantités de mouvement

La quantité de mouvement, variables beaucoup utilisées en mécanique des fluides, est le produit de la masse par le vecteur vitesse d'une particule fluide. Pour le volume élémentaire dV , on définit une grandeur vectorielle par : $\vec{V} \rho dV$.

En mécanique des fluides, l'équation de bilan de la quantité de mouvement découle du principe fondamental de la dynamique du solide appliqué un fluide.

4.1 Résultante

La résultante des forces extérieures est égale à la dérivée par rapport au temps de la résultante des quantités de mouvement.

$$\vec{F}_{ext} = \frac{D}{Dt} \iiint_V \vec{V} \rho dV \quad (\text{XI.05})$$

Des relations (X.04) et (XI.05) nous déduisons :

$$\vec{F}_{ext} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V} \rho) dV + \iint_A \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Dans le cas d'un écoulement permanent cette relation devient :

$$\vec{F}_{ext} = \iint_A \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (\text{XI.06})$$

Il n'a été fait aucune hypothèse sur le fluide, ce théorème est applicable indifféremment au fluide parfait et au fluide réel. Seul change le bilan des forces extérieures.

Considérons l'écoulement permanent d'un fluide à l'intérieur d'un morceau de tuyauterie représentée sur la figure XI.03.

Désignons par $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, les normales aux surfaces A_1 et A_2 et dirigés suivant l'abscisse curviligne « s ». La surface latérale est A_3 et on désigne par $\vec{n}_3$ sa normale extérieure.

En supposant que les frottements soient négligeables, on décomposera la relation (XI.06) de la façon suivante :

$$\iint_A \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \iint_{A_2} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA_2 - \iint_{A_1} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA_1$$

Si en outre, on admet que la pression, la masse volumique, la vitesse ont les mêmes valeurs en tous les points d'une section droite et ne dépendent que de l'abscisse curviligne « s » on peut écrire :

$$\iint_A \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \vec{V}_2 \rho_2 (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2) A_2 - \vec{V}_1 \rho_1 (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1) A_1$$

Mais nous avons :

$$\rho_2 (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2) A_2 = \rho_1 (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1) A_1 = q_m$$

C'est-à-dire égal au débit masse q_m .

Avec toutes ces hypothèses l'intégration de la relation (XI.06) conduit au théorème des quantités de mouvements :

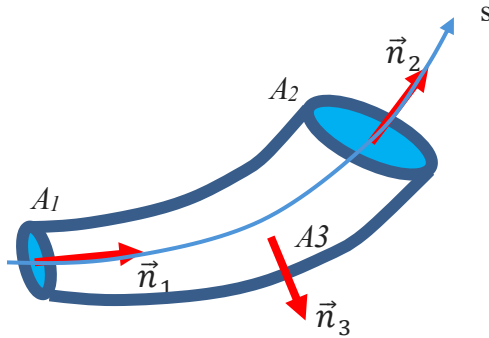


Figure XI.03 Tuyauterie

$$\iint_A \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) q_m = \vec{F}_{ext} \quad (XI.07)$$

Nous pouvons décomposer la force $\vec{F}_{ext}$ de la façon suivante :

- Les forces $p_1 A_1 \vec{n}_1 - p_2 A_2 \vec{n}_2$ exercées par le fluide à l'amont et à l'aval du système considéré. Les vecteurs unitaires $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont dirigés dans le sens des vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$
- L'action $\vec{R}$ exercée par les parois sur le fluide.
- L'action de la pesanteur $\vec{P}$ exercée sur le fluide

Reportons ces forces dans la relation (XI.07)

$$\vec{F}_{ext} = p_1 A_1 \vec{n}_1 - p_2 A_2 \vec{n}_2 + \vec{P} + \vec{R} = (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) q_m$$

$$p_1 A_1 \vec{n}_1 - p_2 A_2 \vec{n}_2 + \vec{P} + \vec{R} = (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) q_m$$

4.2 Moment

Le moment résultant par rapport à un point fixe M des forces extérieures est égal à la dérivée par rapport au temps des moments des quantités de mouvement.

$$\vec{M}_{oFext} = \frac{D}{Dt} \iiint_V (\vec{OM} \wedge \vec{V}) \rho dV \quad (XI.08)$$

Comme précédemment nous pouvons écrire :

$$\vec{M}_{o_{Ext}} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{OM} \wedge \vec{V} \rho) dV + \iint_A (\vec{OM} \wedge \vec{V}) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

5. Etude dynamique d'une particule fluide en écoulement permanent

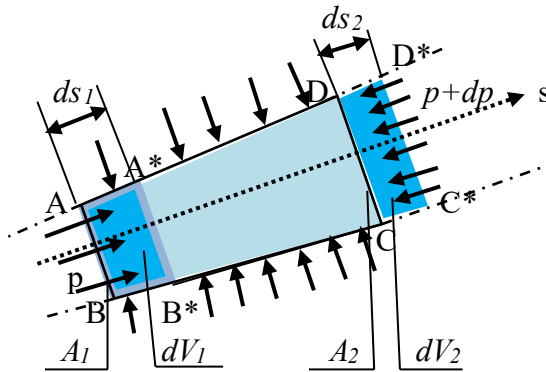


Figure XI.05 Pression sur une particule fluide

Tout d'abord supposons que le fluide soit parfait et considérons la trajectoire que suit la particule. Dans un écoulement permanent les trajectoires et les lignes de courant sont confondues.

A la date t la particule fluide occupe dans le tube de courant le contour ABCD et à la date $t+dt$ la position infiniment voisine $A^*B^*C^*D^*$.

AB se déplace de ds_1 et CD de ds_2 .

Désignons par p et A_1 les valeurs moyennes de la pression et de la surface de la section droite du tube de courant en AB. De même notons $p+dp$ et A_2 les grandeurs moyennes de CD pendant ce déplacement.

Le fluide étant supposé parfait, les forces de contact sont toutes normales à la surface de la particule. Dans l'évaluation de leur travail au cours du déplacement ne subsisteront que les forces de pression agissant sur les surfaces A_1 et A_2 . Soit :

$$\delta W = p A_1 ds_1 - (p+dp) A_2 ds_2$$

Puisque l'écoulement est permanent, la masse contenue dans le contour ABB*A* est identique à celle qui est contenue dans CDD*C*. Il s'ensuit :

$$dV_1 = A_1 ds_1 = v dm \text{ et } dV_2 = A_2 ds_2 = (v + dv) dm$$

v étant le volume massique du fluide.

Remplaçons dV_1 et dV_2 dans l'expression de ce travail :

$$\begin{aligned} \delta W &= [pv - (p + dp)(v + dv)] dm \\ &= -d(pv) dm \end{aligned}$$

Et rapporté à l'unité de masse :

$$\delta w = -d(pv)$$

Dans ce cas particulier, nous aurions pu noter dw au lieu de δw puisque le travail est ici une différentielle totale exacte.

Dans un fluide réel, le vecteur contrainte agissant sur un élément de surface a une composante tangentielle due au frottement. En régime laminaire, les efforts tangentiels sont provoqués par la viscosité. En régime turbulent, elles résultent d'un apport de quantité de mouvement lié aux fluctuations de la vitesse.

En chaque point d'un fluide en écoulement permanent, ces efforts sont constants quelle que soit la date t . Tout tube de courant voisin, plus rapide que la particule, lui transmet un travail moteur. C'est l'inverse s'il est plus lent.

Pour le déplacement élémentaire de la particule fluide, le travail de frottement rapporté à l'unité de masse sera noté δw_f . Le signe de δw_f est, à priori, absolument quelconque.

Pour un écoulement permanent le travail des forces de contact sur une particule fluide aura l'expression suivante :

$$\delta w = -d(pv) + \delta w_f \quad (\text{XI.09})$$

Si le fluide est parfait $\delta w_f = 0$

6 Travail des forces de contact dans un fluide quasiment au repos

Pour déterminer le travail, des forces de contact s'exerçant sur un fluide quasiment au repos, il est plus simple de considérer un gaz emprisonné dans un cylindre surmonté d'un piston. Les résultats obtenus sont évidemment valables pour une particule fluide.

Sous l'action des poids dont la résultante est la force $\vec{F}$ le piston se déplace de dx . Dans le repère ci-contre, ce travail est donc : $\delta W = -\vec{F} dx \vec{e}_1 = -F dx$

Pour que le fluide reste quasiment au repos, il faut que le piston se déplace infiniment lentement. C'est une succession d'états d'équilibres.

A chaque état d'équilibre il doit régner une pression uniforme dans toute la masse de gaz.

En désignant par p la pression qui règne dans le gaz et par A la surface du piston, l'équilibre du piston n'impose que $F = A p$.

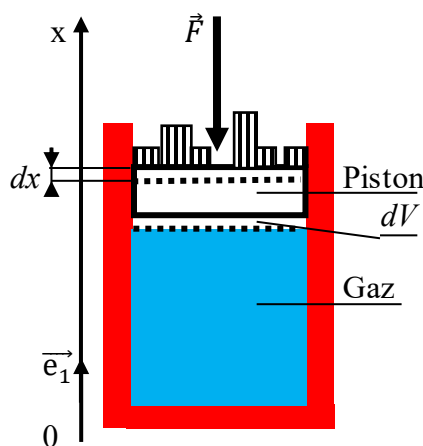


Figure XI.06 Déplacement d'un piston

Le travail correspondant est donc :

$$\delta W = -A p dx = -p dV$$

puisque $A dx = dV$

Par unité de masse, le travail des forces de contact s'exerçant sur un fluide quasiment au repos s'exprime donc par :

$$\delta w = -p dv \quad (\text{XI.10})$$

7 Travail des forces intérieures agissant sur une particule fluide

Puisque le travail des forces intérieures est indépendant du repère choisi pour l'évaluer, il est commode de choisir le repère central. Pour une particule fluide, la relation (IV.24) permet de déduire immédiatement :

$$-\delta W^* = \delta W_i$$

Puisque dE_C^* est nul par définition.

Dans ce repère, le travail de la force de pesanteur est également nul. Il ne subsistera que le travail des forces de contact caractérisant la déformation de la particule.

- Si les forces de contact sont normales à la surface de la particule, le résultat est très simple :

$$\delta W_i = -(-pdV) = pdV$$

- Si les forces de contact ne sont pas normales à la surface de la particule, le travail dû aux contraintes tangentielles de frottement, entraînera une dissipation d'énergie souvent notée $-\delta F$. Ce terme est par nature résistant donc toujours négatif. Il est parfois appelé travail dégradé ou encore travail non compensé.

En conclusion, le travail des forces intérieures agissant sur une particule fluide, absolument quelconque, sera :

$$\delta W_i = pdV - \delta F$$

Et par unité de masse :

$$\delta w_i = pdv - \delta f \quad (XI.11)$$

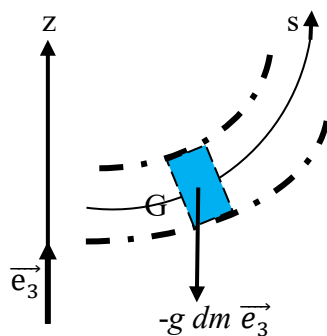
8 Équation fondamentale d'un écoulement permanent unidimensionnel

Le théorème de l'énergie cinétique (IV.22) permet d'établir très facilement l'équation de mouvement d'un écoulement unidimensionnel.

$$dE_C = dW_i + dW_e$$

Pour cela considérons une particule fluide à l'intérieur d'un tube de courant.

L'écoulement étant permanent, le travail des forces de contact est $\delta w = -d(pv) + \delta w_f$ (Voir relation (XI.09)).



L'action de la pesanteur sur la particule est par unité de masse : $-g dz$.

Le travail des forces intérieures est : $pdv - \delta f$ (relation (XI.11)).

Figure XI.07 Écoulement d'une particule fluide

Des termes se simplifient : $-d(pv) + p dv = -v dp - p dv + p dv = -v dp$

En mécanique des fluides et dans le domaine des turbomachines il est d'usage d'utiliser la masse volumique au lieu du volume massique.

$$v dp = \frac{dp}{\rho}$$

Cela, par ailleurs, évite les confusions entre la vitesse V et le volume massique v .

En posant : $\delta\xi = -(\delta w_f - \delta f)$ la relation (IV.22) devient :

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + g dz + \delta\xi = 0 \quad (\text{XI.12})$$

C'est-à-dire la relation de Bernoulli à laquelle les pertes ont été ajoutées.

Remarque importante.

Le terme mesurant le travail des forces tangentielles de frottement δw_f disparaît lorsqu'on considère l'ensemble d'une tranche fluide s'écoulant à l'intérieur d'une tuyauterie.

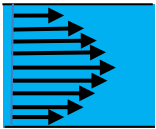


Figure XI.08 Répartition des vitesses

La vitesse du fluide s'annule le long des parois de la canalisation et il en est de même pour les contraintes tangentielles.

Pour une tranche de fluide la quantité $\delta\xi = \delta f$ caractérise donc une dégradation énergétique.

$\delta\xi$ est souvent appelée "**perte de charge**".

En ne s'intéressant qu'aux valeurs moyennes de l'écoulement, nous aurons en intégrant la relation (XI.12) :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \xi_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (\text{XI.13})$$

Cette relation, fréquemment utilisée, est souvent désignée par "équation fondamentale d'un écoulement permanent unidimensionnel".

Pour intégrer le terme $\int_1^2 \frac{dp}{\rho}$, il faut connaître la nature des évolutions, afin de déterminer les relations liant la pression p à la masse volumique ρ . En d'autres termes, utiliser les relations de la thermodynamique.

Lorsqu'on néglige la perte de charge et la pesanteur, la relation (XI.13) est désignée par *équation de Barré de Saint Venant*.

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (\text{XI.14})$$

9 Perte de pression

Aussi bien en régime laminaire qu'en régime turbulent, la perte de pression Δp d'une tuyauterie se représente par la relation :

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \lambda \frac{L}{D} \frac{V_m^2}{2} \quad (\text{XI.15})$$

λ qui n'a pas de dimension est appelé le coefficient de perte de charge.

V_m est la vitesse moyenne du fluide dans la tuyauterie exprimée en m/s

L est la longueur de la tuyauterie.

D est le diamètre de la tuyauterie. Parfois on comptabilise le diamètre hydraulique D_h défini par $D_h = \frac{4A}{P_m}$ où A est la surface de la section droite tuyau et P_m le périmètre mouillé.

En régime laminaire, c'est-à-dire lorsque le Reynolds est inférieur à 2000, le coefficient λ ne dépend que du nombre de Reynolds. Il est donné par la relation suivante :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Si on construit la courbe en utilisant une échelle logarithmique on obtient une droite de pente négative, dite droite de Poiseuille.

Lorsque le Reynolds est compris entre 2000 et 4000 la zone est critique. Le coefficient λ ne dépend que du Reynolds mais sa valeur est mal définie.

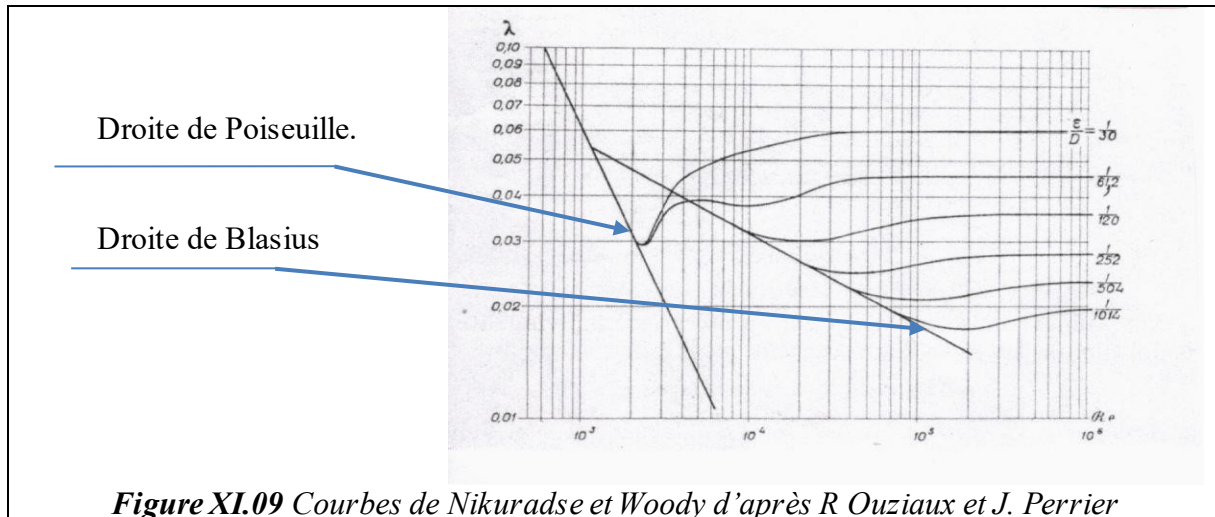
En régime turbulent lisse que l'on définit dans l'intervalle de la turbulence naturelle pour la limite inférieure et la rugosité des parois pour la limite supérieure. Dans cette région on définit approximativement la loi de Blasius :

$$\lambda = 0,316 Re^{-\frac{1}{4}}$$

En coordonnées logarithmiques cette relation se traduit par une droite inclinée de pente -1/4, appelée droite de Blasius.

Les travaux expérimentaux effectués par Darcy puis par Nikuradse ont montré que λ est en fait fonction du nombre de Reynolds et d'un coefficient de rugosité caractérisant l'état de surface de la paroi intérieure de la tuyauterie.

Dans ses essais Nikuradse avait rendu les conduites rugueuses artificiellement en collant des grains de sable. Ce qui permettait, ainsi, de définir un coefficient de rugosité relative égal à $\frac{\varepsilon}{D}$



10 Pertes de pression singulières des conduites

Indépendamment des pertes par frottement dans la partie droite d'une tuyauterie, l'estimation de la résistance d'une conduite doit tenir compte des pertes singulières qui peuvent s'y produire.

Les pertes singulières proviennent des changements de direction, des changements de section ou de forme, de clapets, de vannes etc. etc.

La relation (XI.165) représente la perte de pression Δp d'une tuyauterie droite. En introduisant un coefficient K , on exprime les pertes de pression singulières d'une façon analogue :

$$\frac{\Delta p}{\rho} = K \frac{V_m^2}{2} \quad (\text{XI.16})$$

Le coefficient K est déterminé pour chaque type de singularité et la vitesse moyenne V_m est calculée à son amont.

10. 1. Élargissement brusque

Calculons la perte de pression Δp , entre deux sections droites A_1 et A_2 , provoquée par un élargissement brusque, soit :

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} \right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} \right) = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} - \frac{V_2^2}{2}$$

Pour cela considérons deux conduites de diamètre différent et raccordées l'une à l'autre. Elles sont parcourues par un fluide en écoulement permanent.

Au passage de la première conduite, de surface droite A_1 , à la deuxième, de surface droite A_2 , il se produit un élargissement brusque représenté sur la figure (XI.10).

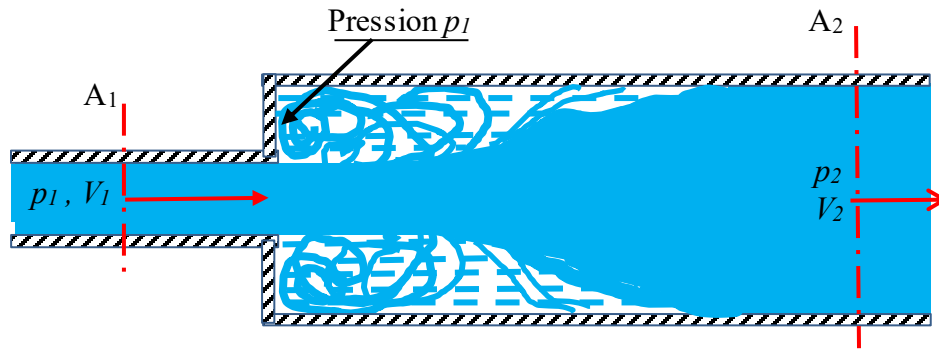


Figure XI.10 Elargissement brusque

Pour déterminer le coefficient K appliquons le théorème des quantités mouvement. En supposant les tuyauteries horizontales et en négligeant l'action de la pesanteur sur le fluide la relation (XI.07) devient :

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 + R = (V_2 - V_1) q_m \quad (\text{XI.17})$$

Le terme R caractérise l'action exercée par les parois sur le fluide. Plus précisément les tourbillons exercent sur la surface annulaire $A_2 - A_1$ une pression p où l'expérience montre qu'elle est sensiblement égale à p_1 .

Tout le calcul repose sur cette hypothèse. On a donc :

$$R = (A_2 - A_1) p_1$$

Dans les sections 1 et 2 le débit masse s'écrit :

$$q_m = \rho A_1 V_1 = \rho A_2 V_2$$

En tenant compte de R et de q_m la relation (XI.17) devient :

$$(p_1 - p_2) A_2 = \rho A_2 V_2^2 - \rho A_1 V_1^2$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = V_2^2 - \frac{A_1}{A_2} V_1^2$$

Et en tenant compte que : $\frac{A_1}{A_2} V_1 = V_2$ cette dernière relation devient :

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right) - 1 \right) \frac{A_1}{A_2} V_1^2$$

En reportant $\frac{p_1 - p_2}{\rho}$ dans l'expression de la perte de pression $\frac{\Delta p}{\rho}$ nous obtenons :

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right) - 1 \right) \frac{A_1}{A_2} V_1^2 + \frac{V_1^2}{2} - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \frac{V_1^2}{2}$$

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 2 \frac{A_1}{A_2} + 1 \right) \frac{V_1^2}{2} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \frac{V_1^2}{2}$$

D'où l'expression du coefficient K pour un élargissement brusque :

$$K = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad (\text{XI.18})$$

On remarquera que lorsque la section $A_2 \gg A_1$, c'est-à-dire lorsque la tuyauterie de section A_1 débouche dans un réservoir de très grande dimension on a $K=1$. La perte de pression devient : $\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{v_1^2}{2}$. Cette perte correspond à la dégradation complète de l'énergie cinétique.

10. 2. Rétrécissement brusque

Dans un rétrécissement brusque la part importante de la perte de pression est à l'aval de la contraction. Sébastien Candel, dans son cours de mécanique des fluides, donne les valeurs suivantes de K en fonction du rapport des surfaces A_2/A_1 .

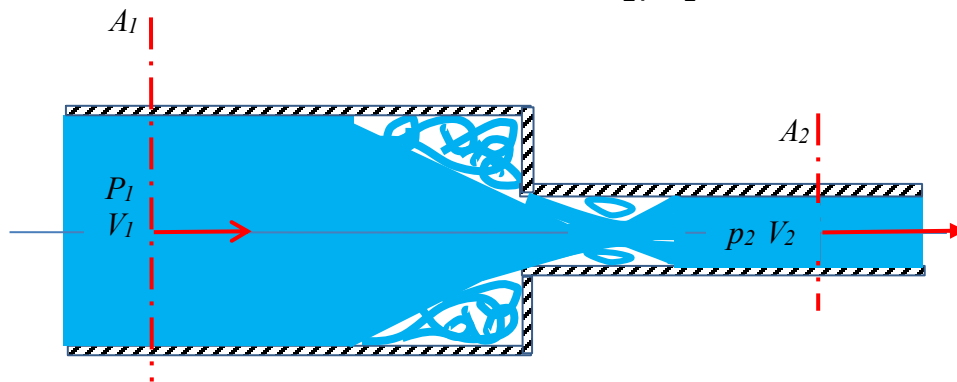


Figure XI.11 Rétrécissement brusque

$\frac{A_2}{A_1}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
K	0,37	0,35	0,32	0,27	0,22	0,17	0,10	0,06	0,02	0

Tableau XI. 01 Coefficient K pour un rétrécissement brusque

La perte de pression varie avec la géométrie du rétrécissement. Si la contraction est profilée l'écoulement sera moins perturbé et la perte de charge se trouvera diminuée.

Par exemple, pour la géométrie de la section d'entrée de conduite représentée sur la figure *XI.12*, le coefficient K de perte de charge sera relativement faible.

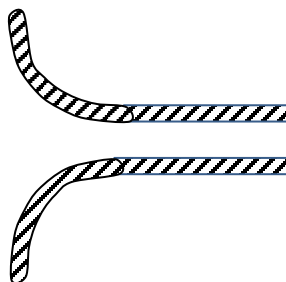


Figure XI.12 Entrée de conduite profilée

***MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS ET
THERMODYNAMIQUE TECHNIQUES***

Application aux turbomachines

Cours avec exercices corrigés

Livre 3
Thermodynamique

Marcel Frelin

Sous-Directeur de laboratoire honoraire au
Conservatoire National des Arts et Métiers

TABLE DES MATIERES

Thermodynamique

Chapitre XII	Premier principe de thermodynamique	1
1	Spécificités de la thermodynamique	1
1-1	Systèmes thermodynamiques	1
1-2	Variables d'états	2
1-3	Transformations et évolutions thermodynamiques	2
1-4	Transformations réversibles et irréversibles	3
1-5	Représentation graphique	4
2	Énergie interne	4
3	Expression du premier principe	5
4	Transformation cyclique	6
5	Équation thermodynamique générale	7
6	Expression simplifiée	7
7	Système ouvert	8
8	Enthalpie	10
9	Autre forme de l'équation thermodynamique générale	11
10	Enthalpie d'arrêt	12
Chapitre XIII	Etude thermodynamique des gaz parfaits	14
1	Expérience de Joule	14
2	Expression de l'énergie interne d'un gaz parfait	15
3	Expression de l'enthalpie	17
4	Relation de Mayer	17
5	Détentes et compressions adiabatiques réversibles d'un gaz parfait	17
Chapitre XIV	Deuxième principe de la thermodynamique	25
1	Postulat de Clausius	25
2	Postulat de Thomson-Kelvin	26
3	Transformation cyclique ditherme	28
4	Rendement thermique	29
5	Théorème de Carnot	29
6	Température thermodynamique	31
7	Cycle de Carnot	33
Chapitre XV	L'entropie	35
1	Transformations cycliques dithermes	35
2	Transformations cycliques échangeant de la chaleur avec une infinité de sources	36
3	Transformations non cycliques	39

3-1 Transformations réversibles	39
3-2 Transformations irréversibles	41
4 Extension du second principe aux irréversibilités thermiques	43
5 Variation d'entropie	46
6 Entropie des systèmes isolés	46
Chapitre XVI Relations thermodynamiques	47
1 Généralités	47
2 Coefficients de dilatation et de compressibilité	48
3 Coefficients calorimétriques	50
4 Formules de Reech	51
5 Formules de Clapeyron	52
6 Formule de Mayer généralisée	54
7 Formules de Maxwell	54
7-1 Première relation de Maxwell	54
7-2 Deuxième relation de Maxwell	54
7-3 Troisième relation de Maxwell	54
7-4 Quatrième relation de Maxwell	55
Chapitre XVII Gaz réels	57
1 Validité de l'équation d'état des gaz parfaits	57
2 Equations d'état sous forme du viriel	58
3 Pression interne et covolume	59
4 Equations d'état des gaz réels	61
5 Capacité thermiques massiques des gaz réels	62
Chapitre XVIII Transition de phase	65
1 Changement d'état	65
2 Vapeur saturante	66
3 Point critique	67
4 Titre	70
5 Courbe de vaporisation	72
6 Continuité de l'état gazeux et de l'état liquide	73
7 Point triple	74
8 Surface caractéristique	75
9 Chaleur latente	76
10 Formule de Clapeyron	76
11 Troisième principe de la thermodynamique	78
Chapitre XIX Diagrammes	80
1 Généralités	80

2 Diagramme de Clapeyron (p, v)	81
3 Diagramme entropique (T, s).....	82
4. Diagramme entropique des corps purs	86
5 Diagramme de Mollier (h,s)	88
5-1 Propriété du diagramme (h,s)	89
5-2 Gaz parfait	89
5-3 Diagramme (h,s) d'un corps pur.....	89
6 Diagrammes des frigoristes	92
6-1 Diagramme pression-enthalpie (p,h).....	92
6-2 Diagramme ln (p,h)	93
Chapitre XX Anergie et exergie.	94
1 Généralités	94
2 Expression de l'exergie	94
3 Rendement exergetique	96
4 Bilan exergetique	98

Chapitre XII

Premier principe de thermodynamique

1 Spécificités de la thermodynamique

Les thermodynamiciens utilisent une terminologie et des notations qui leur sont spécifiques. Citons par exemple les termes suivants : source de chaleur, transformation irréversible, évolution isentropique, transformation cyclique, transformation ditherme, variables d'états, évolution polytropique. Certaines de ces expressions ne peuvent pas être précisées dans ce chapitre. Il faut que le niveau de connaissance acquis soit suffisant pour bien comprendre leur signification.

1-1 Systèmes thermodynamiques

Définir un système thermodynamique c'est délimiter la région de l'espace où se trouve la matière dont on veut étudier les propriétés. Pour distinguer cette région du reste de l'univers, on la limite par une surface fermée qui peut être réelle ou imaginaire.

Ce qui n'est pas le système est appelé le milieu extérieur.

Un système thermodynamique peut échanger de l'énergie avec le milieu extérieur sous diverses formes (mécanique, calorifique, électrique). Il peut être composé d'un ensemble de corps de composition variable ou non. Par exemple, il peut s'agir d'une certaine quantité d'essence et d'air qui se transforme chimiquement en gaz brûlés ou bien de l'eau qui se vaporise partiellement ou totalement.

Un système est dit ouvert s'il échange de la matière et de l'énergie avec le milieu extérieur. Un exemple simple à prendre est celui de la fusée.

Un système est dit fermé s'il n'échange que de l'énergie avec le milieu extérieur sans transfert de matières. Étudier un système fermé, c'est centrer son analyse sur une quantité donnée de matière tel un gaz emprisonné dans un cylindre surmonté d'un piston.

Un système est dit isolé s'il n'échange ni matière ni énergie avec son milieu extérieur.

Un système est dit homogène si ses propriétés (pression, température, composition etc...) ont la même valeur en tous ses points. Le système est nécessairement en phase unique.

Un système est hétérogène ou discontinu s'il est constitué de plusieurs sous-ensembles individuellement homogènes mais différents les uns des autres. Par exemple, un système constitué de plusieurs phases (liquide-vapeur).

Un système est dit continu si ses propriétés sont des fonctions continues du point considéré

1-2 Variables d'états

La thermodynamique macroscopique ne se préoccupe que des propriétés directement observables et mesurables. L'état dans lequel se trouve un système, à une date donnée, est caractérisé par des grandeurs appelées variables d'états ou coordonnées thermodynamiques. Elles se décomposent en coordonnées externes (vitesse, position, etc.) et en variables d'états internes extensives ou intensives.

Les variables extensives sont des grandeurs quantitatives, c'est-à-dire directement proportionnelles à la "taille" du système comme la masse, le volume, ...

Les variables intensives sont des grandeurs qualitatives, elles définissent la qualité d'un système comme par exemple la pression, la température ou la masse volumique.

Pour distinguer les variables extensives des variables intensives, il faut supposer que l'on ajoute deux systèmes thermodynamiques identiques. Dans ces conditions les variables d'états extensives doubleraient ce qui serait le cas de leur masse ou de leur volume. Par contre les variables d'états intensives resteraient constantes comme la pression, la température ou la masse volumique.

Si les variables intensives ne dépendent pas du temps, le système se trouve soit dans un état d'équilibre soit dans un état stationnaire. Un état stationnaire s'établit sous l'effet de causes extérieures, par contre un état d'équilibre est déterminé par des conditions qui sont internes au système.

Pour un système quelconque, l'équilibre thermique sera réalisé si la température est uniforme. Dans le cas d'un gaz il y aura équilibre mécanique si c'est la pression qui est uniforme.

L'expérience montre que tout système isolé tend vers un état d'équilibre qu'il ne peut désormais plus quitter sans intervention extérieure.

C'est de cette constatation qu'est née la thermodynamique classique qui ne concerne que les états d'équilibres des systèmes.

En fait, on traite les évolutions des systèmes par le biais d'une succession d'états d'équilibre, et on définit à ce propos la notion idéaliste d'évolutions réversibles.

1-3 Transformations et évolutions thermodynamiques

Le passage d'un système d'état initial (i) à un état final (f) est appelé transformation.

Si ces deux états sont infiniment voisins, la transformation est dite élémentaire.

Si le système se retrouve à l'état final dans le même état qu'initialement, la transformation est dite cyclique.

Pour qu'un système subisse une transformation au cours du temps, il est nécessaire que les conditions d'équilibre ne soient pas satisfaites. Par exemple :

- Lorsque la résultante des forces s'exerçant sur un système n'est pas nulle il se produit un mouvement et il y a un échange de travail entre le système et le milieu extérieur.
- Si deux réservoirs contenant un même gaz à des pressions différentes sont réunis, il se produit alors un écoulement du gaz d'un réservoir dans l'autre.
- Lorsqu'un système est séparé du milieu extérieur par des parois perméables à la chaleur (parois conductrices ou diathermanes) et qu'il existe une différence de température entre le système et son milieu extérieur, il se produit un échange de chaleur. Ce qui a pour effet d'atténuer l'écart de température en entraînant des changements d'état au sein du système.

Il est possible de passer d'un état initial (i) à un état final (f) en utilisant des chemins différents. Le terme d'évolution est souvent préféré à celui de transformation lorsqu'il est précisé la nature du "chemin" que suit le système pour passer de (i) à (f).

Un système subit une évolution adiabatique lorsqu'il est thermiquement isolé de son milieu extérieur empêchant ainsi tout échange de chaleur.

Lorsqu'un système est entouré de parois rigides indéformables, il ne peut subir que des évolutions à volume constant. Une évolution à volume constant est appelée isochore.

Une évolution au cours de laquelle la température du système reste constante est appelée évolution isotherme.

Une évolution au cours de laquelle la pression du système reste constante est appelée évolution

Pour les variations élémentaires de variables caractérisant l'état d'un système thermodynamique, ou pour des différentielles totales exactes, nous emploierons comme il est d'usage le symbole "d" (dT , dp , dv , $d\rho$). Le symbole " δ " sera réservé dans le cas contraire (δW , δQ).

1-4 Transformations réversibles et irréversibles

Une transformation d'un système sera dite réversible si à chaque instant de son évolution, le système peut être défini par des variables d'état possédant la même valeur en tous les points d'une phase homogène.

La transformation progressive du système peut être considérée comme une succession continue d'états d'équilibre infiniment voisins. Dans ces conditions, les variables d'état possèdent à tout instant des valeurs bien déterminées. Ce qui permet de représenter les variations des propriétés thermodynamiques par des relations mathématiques.

Il suffit d'actions extérieures très faibles, théoriquement aussi petites que l'on veut, pour provoquer la transformation dans le sens désiré. Ainsi il est possible de revenir à l'état initial en repassant successivement, mais dans l'ordre inverse, par tous les états antérieurs. Cela suppose l'absence de forces de frottement ou plus précisément de phénomène de dissipation.

Une évolution réversible est une transformation dont les effets peuvent être entièrement effacés.

Il n'est pas nécessaire que le fluide soit pratiquement au repos pour que les évolutions soient réversibles. Cette notion de transformation réversible s'applique également dans un fluide en mouvement.

Par exemple, considérons l'écoulement d'un fluide parfait et plus particulièrement d'une particule fluide. Dans son mouvement la particule fluide peut augmenter sa pression en diminuant sa vitesse dans un diffuseur ou faire l'opération inverse.

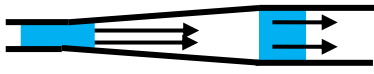


Figure XII.01 *Divergent réversible*

La particule fluide étant à chaque instant dans un état très voisin d'un état d'équilibre par rapport à des axes liés au mouvement.

À l'opposé de l'exemple précédent, la détente d'un gaz au moyen d'un volet, diaphragme ou robinet est une opération irréversible.



Figure XII.02 *Diaphragme*

En fait les transformations réelles sont irréversibles mais il se trouve que la schématisation par des évolutions réversibles, constitue très souvent dans la physique que nous faisons, une approximation suffisante des phénomènes réels.

Les principales causes d'irréversibilités sont le frottement, la viscosité, la déformation permanente d'un solide, voire la rupture, les réactions chimiques, les ondes de choc, ...

Toute évolution irréversible laisse une trace dans l'univers. Cette trace indélébile apparaît comme une sorte de perte d'énergie qui sera précisée ultérieurement.

1-5 Représentation graphique

La transformation d'un système passant d'un état initial (i) à un état final (f) peut être représentée sur un diagramme thermodynamique à condition que les évolutions correspondantes soient réversibles.

Pour les transformations irréversibles il sera défini, lors de l'étude des turbomachines, la notion d'évolution polytropique pour tourner cette difficulté.

2 Énergie interne

Considérons un système fermé constitué de corps quelconques et limité par une surface réelle ou fictive.

Supposons qu'une transformation amène ce système d'un état initial (i) à un état final (f) en recevant ou cédant un travail W et une quantité de chaleur Q tout en subissant une variation de son énergie cinétique :

$$\begin{matrix} i \\ \Delta E_c \\ f \end{matrix}$$

Ces grandeurs, précédemment définies sont mesurables.

Ceci étant dit, formons la somme :

$$W + Q - \begin{matrix} i \\ \Delta E_c \\ f \end{matrix}$$

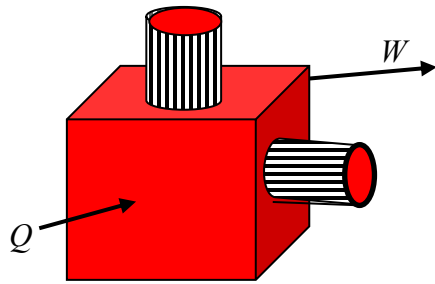


Figure XII.03 Système fermé

Les calculs montrent que cette somme ne dépend toujours que de l'état initial et de l'état final.

En d'autres termes, on peut dire que cette somme ne change pas en utilisant des évolutions différentes pour passer du même état initial au même état final.

Le résultat est tout à fait remarquable.

Ces faits expérimentaux étant indéfiniment reproductibles et contrôlables conduisent à ériger en principe que cette somme représente la variation d'une fonction des seules variables d'état.

Cette fonction d'état, désignée par la lettre U , est appelée énergie interne. L'énergie interne massique est notée " u ". Cette énergie est constituée par l'énergie cinétique des molécules. Dans chaque état défini, une masse donnée d'un corps renferme une quantité bien déterminée qui est son énergie interne.

3 Expression du premier principe

Le résultat précédent, valable pour tous les systèmes fermés, constitue le premier principe de la thermodynamique. Il se traduit par l'égalité fondamentale :

$$W + Q = \Delta U + \Delta E_c \quad (\text{XII.01})$$

Par unité de masse il s'écrit :

$$w + Q = \Delta u + \Delta e_c \quad (\text{XII.02})$$

L'énergie ne se perd pas et ne se crée pas, elle ne fait que passer d'une forme à une autre dans les diverses transformations physiques et chimiques.

L'énoncé sous cette forme, est désigné par loi de la conservation et de la transformation de l'énergie.

Sous forme différentielle le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta W + \delta Q &= dU + dE_c \\ \delta w + \delta Q &= du + de_c \end{aligned} \quad (\text{XII.03})$$

À l'origine de la thermodynamique, le terme ΔE_c n'apparaissait pas, on se préoccupait essentiellement de l'étude de systèmes quasi-immobiles et à variations lentes telles les capsulismes.

Aujourd'hui le mouvement et ses variations sont souvent des facteurs importants des transformations qu'il faut étudier, l'énoncé ci-dessus doit être le seul retenu.

Exercice XII.1

Une voiture d'une masse $m = 1350 \text{ kg}$ descend une route dont la pente correspond à un angle $\alpha = 3^\circ$.

Le conducteur doit freiner pour immobiliser son véhicule sur une distance de 75 m .

Avant freinage, la voiture avait une vitesse initiale $V = 87 \text{ km/h}$.

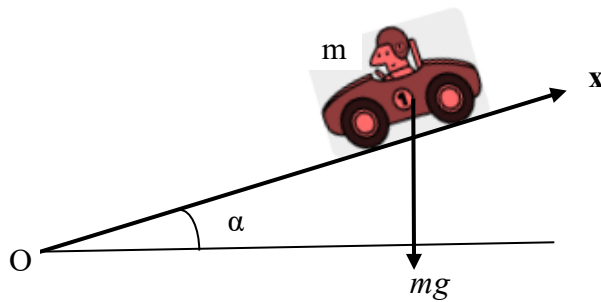


Figure XII.04 Pente inclinée

Calculer la chaleur dégagée lors du freinage, sachant que :

- l'action de l'air agissant sur la voiture est négligé.

- le glissement des roues sur la route est supposé nul.

- l'énergie interne de la voiture ne varie pas.

Corrigé

Du premier principe de la thermodynamique nous avons : $\delta W + \delta Q = dE_c$ puisque par hypothèse $dU=0$

$$Q = \Delta E_c - W$$

La variation d'énergie cinétique est :

$$\Delta E_c = m \Delta \frac{V^2}{2} = 1350 \left[0 - \frac{1}{2} \left(\frac{87000}{3600} \right)^2 \right] = -394219 \text{ J}$$

Le travail des forces extérieures est :

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = mg \sin \alpha \, dx$$

$$W = 1350 \times 9,81 \times \sin 3^\circ \times 75 = 51983 \text{ J}$$

Ce qui permet de déduire la chaleur dégagée lors du freinage :

$$Q = -394219 - 51983 = -446202 \text{ J}$$

4 Transformation cyclique

Par définition d'une transformation cyclique, le système se retrouve à l'état final dans le même état qu'initialement.

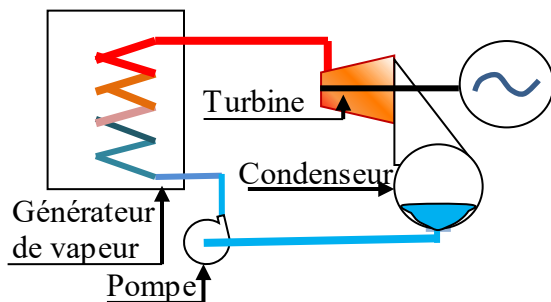
Puisque dU et dE_c sont des différentielles totales exactes, nous avons :

$$\begin{array}{l} i \\ \Delta U = 0 \\ f \end{array} \qquad \begin{array}{l} i \\ \Delta E_c = 0 \\ f \end{array}$$

Dans ces conditions le premier principe de la thermodynamique devient :

$$W + Q = 0 \quad (\text{XII.04})$$

Il existe de nombreux systèmes où le fluide décrit une transformation cyclique, parfois appelé circuit fermé ou tout simplement cycle.



Par exemple, c'est le cas des centrales thermiques ou nucléaires où l'eau se trouve successivement sous forme de liquide et de vapeur.

Cette transformation cyclique, représentée sur la figure XII.05, se compose, essentiellement, d'un condenseur, d'une pompe alimentaire, d'un générateur de vapeur et d'une turbine.

Figure XII.05 Production d'énergie

5 Équation thermodynamique générale

En tenant compte du théorème de l'énergie cinétique (IV.23) le premier principe s'écrit :

$$\delta W + \delta Q = dU + \underbrace{dE_c}_{\delta W + \delta W_i} = dU + \delta W + \delta W_i$$

Il s'ensuit donc :

$$\delta Q = dU + \delta W_i$$

Pour une particule fluide, le travail des forces intérieures massique est $\delta W_i = p dV - \delta F$, ce qui permet d'obtenir une autre expression du premier principe de la thermodynamique :

$$\begin{array}{l} \delta Q + \delta F = dU + p dV \\ \delta Q + \delta f = du + p dv \end{array} \quad (\text{XII.05})$$

Expression appelée parfois "deuxième équation fondamentale" ou encore "**équation thermodynamique générale**".

6 Expression simplifiée

Si la transformation élémentaire est réversible, le terme caractérisant la dissipation d'énergie est nul, il ne subsiste que :

$$\left. \begin{array}{l} \delta Q = dU + p dV \\ \delta Q = du + p dv \end{array} \right\} \quad (\text{XII.06})$$

Cette relation est parfois appelée "**expression simplifiée**" du premier principe de la thermodynamique.

Pour une transformation réversible amenant le système d'un état initial "i" à un état final "f", on a, en intégrant cette relation :

$$Q = u_f - u_i + \int_{v_i}^{v_f} p \, dv$$

Exercice XII.2

Au cours d'une évolution isobare réversible, $p_0 = 5 \text{ bar}$, le volume d'une masse de gaz parfait passe de 5.10^{-2} m^3 à 1.10^{-1} m^3 .

Pendant cette évolution l'énergie interne du gaz augmente de 18 kcal.

Déterminer la quantité de chaleur transférée en précisant si elle est reçue ou cédée par le gaz.

Corrigé

De l'expression simplifiée du premier principe de la thermodynamique, nous déduisons pour cette évolution réversible:

$$Q = U_f - U_i + \int_{V_i}^{V_f} p \, dV$$

Avec:

$$U_f - U_i = 18.10^3 \times 4,1855 = 75339 \text{ J}$$

Et puisque l'évolution est isobare :

$$\int_{V_i}^{V_f} p \, dV = p_0 (V_f - V_i) = 5.10^5 \times (1.10^{-1} - 5.10^{-2}) = 25000 \text{ J}$$

Il vient donc en définitive :

$$Q = 75339 + 25000 = 100339 \text{ J} = 24 \text{ kcal}$$

La quantité Q est positive, le gaz a donc reçu de la chaleur.

7 Système ouvert

Dans l'étude d'un système thermodynamique le travail, échangé avec le milieu extérieur, est décomposé afin de faire apparaître, le cas échéant, sa partie utile.

Il est facile de concevoir que dans certaines applications une fraction du travail soit directement échangée avec l'atmosphère. Sa connaissance ne présente pas, à priori, un intérêt considérable bien qu'il soit à comptabiliser dans le bilan énergétique. Par contre, industriellement, le travail fourni ou absorbé par une machine constituera un élément important de l'étude. Ce travail, noté W_I , est désigné par travail interne.

Dans le cas des turbomachines, il est la conséquence du transfert d'énergie entre le fluide et les aubes de la machine.

Pour plus de généralités, considérons un système en régime instationnaire échangeant de l'énergie et de la matière avec son milieu extérieur. Ce serait, par exemple, le cas d'une turbomachine en phase d'accélération ou de décélération.

Ramenons artificiellement l'étude d'un système ouvert à celui d'un système fermé afin de pouvoir appliquer le premier principe de la thermodynamique. Pour cela définissons un système formé d'une quantité constante de matière et suivons son évolution entre les instants t et $t+dt$.

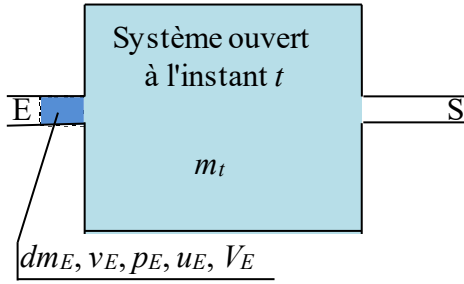


Figure XII.06 Système fermé à la date t

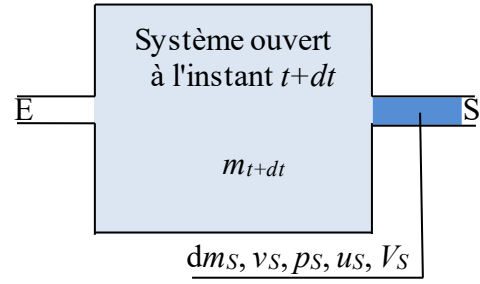


Figure XII.07 Système fermé à la date $t+dt$

Désignons par :

- dm_E = masse élémentaire qui entre à la date t .
- m_t = masse du système ouvert à la date t .
- m_{t+dt} = masse du système ouvert à la date $t+dt$.
- dm_S = masse élémentaire qui sort à la date $t+dt$.

Par construction l'égalité des masses doit être satisfaite :

$$m = dm_E + m_t = m_{t+dt} + dm_S$$

Pour ce système artificiellement fermé, de masse m , explicitons chacun des termes du premier principe de la thermodynamique (XII.03), entre les instants t et $t+dt$. Soit :

$$\delta W = \delta W_I + p_E v_E dm_E - p_S v_S dm_S - dE_P$$

δW_I , est ici le travail interne d'une machine, qu'il ne faut pas confondre avec le travail des forces intérieures noté W_i .

dE_P , est l'énergie potentielle du système de masse m qui se décompose également de la façon suivante : $dE_P = dE_P^* + gz_S dm_S - gz_E dm_E$. Le terme dE_P^* est l'énergie potentielle du système ouvert pendant l'intervalle de temps dt .

δQ , est la quantité de chaleur échangée, par le système de masse m , avec son milieu extérieur pendant l'intervalle de temps dt .

$$dU = dU^* + u_S dm_S - u_E dm_E$$

dU^* est l'énergie interne du système ouvert pendant l'intervalle de temps dt .

Les termes u_S et u_E représentent respectivement l'énergie interne massique de la masse élémentaire qui sort et de celle qui entre.

$$dE_C = dE_C^* + \frac{V_S^2}{2} dm_S - \frac{V_E^2}{2} dm_E$$

dE_C^* est la variation d'énergie cinétique du système ouvert.

V_S et V_E sont les vitesses moyennes dans les brides de sortie "S" et d'entrée "E".

Reportons ces expressions dans (XII.03) en regroupant les termes de même nature, on obtient l'équation (XII.07) :

$$\delta W_I + \delta Q = d(U^* + E_C^* + E_P^*) + \left(u_S + p_S v_S + g z_S + \frac{V_S^2}{2} \right) dm_S - \left(u_E + p_E v_E + g z_E + \frac{V_E^2}{2} \right) dm_E$$

Divisons celle-ci par l'intervalle de temps dt et posons :

$$P_I = \frac{\delta W_I}{dt} = \text{Puissance fournie ou absorbée par une machine.}$$

$$P_{th} = \frac{\delta Q}{dt} = \text{Puissance thermique.}$$

$$q_{mS} = \frac{dm_S}{dt} = \text{Débit massique à la sortie de la machine.}$$

$$q_{mE} = \frac{dm_E}{dt} = \text{Débit massique à l'entrée de la machine.}$$

On obtient, l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un système en régime instationnaire sous forme de puissance.

$$P_I + P_{th} = \frac{d}{dt}(U^* + E_C^* + E_P^*) + \left(u_S + p_S v_S + g z_S + \frac{V_S^2}{2} \right) q_{mS} - \left(u_E + p_E v_E + g z_E + \frac{V_E^2}{2} \right) q_{mE}$$

Si le système est ouvert et en régime stationnaire (régime permanent) cette expression se simplifie :

$$\frac{d}{dt}(U^* + E_C^* + E_P^*) = 0$$

Les débits se conservent $q_{mS} = q_{mE} = q_m = \text{constante}$.

Dans ces conditions, cette relation s'écrit :

$$P_I + P_{th} = \Delta \frac{S}{E} \left(u + p v + g z + \frac{v^2}{2} \right) q_m \quad (\text{XII.08})$$

Et en divisant par le débit massique q_m :

$$w_I + Q = \Delta \frac{S}{E} \left(u + p v + g z + \frac{v^2}{2} \right) \quad (\text{XII.09})$$

8 Enthalpie

En posant :

$$h = u + p v \quad (\text{XII.10})$$

La relation (XII.09) devient :

$$w_l + Q = \Delta \frac{S}{E} \left(h + gz + \frac{v^2}{2} \right) \quad (\text{XII.11})$$

Et sous forme différentielle :

$$\delta w_l + \delta Q = dh + g dz + d \left(\frac{v^2}{2} \right) \quad (\text{XII.12})$$

h est une fonction d'état, appelée **enthalpie**. Ici, plus précisément, elle est désignée par **enthalpie massique** et s'exprime en J/Kg.

L'enthalpie rapportée à la masse du fluide, s'écrit :

$$H = U + pV.$$

9 Autre forme de l'équation thermodynamique générale

Cette fonction d'état n'est pas restrictive à l'étude des machines et des moteurs.

On rencontre l'enthalpie dans de très nombreux domaines de la thermodynamique, mais il se trouve qu'elle s'introduit tout naturellement lorsqu'il s'agit d'un système ouvert en écoulement permanent.

Il est commode et fort utile d'introduire l'enthalpie dans l'équation de thermodynamique générale. En effet, de la définition même de l'enthalpie h , nous pouvons écrire :

$$dh = d(u + pv) = du + p dv + v dp$$

$$du + p dv = dh - v dp = dh - \frac{dp}{\rho}$$

L'équation de thermodynamique générale (XII.05), peut donc s'écrire :

$$\delta Q + \delta f = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (\text{XII.13})$$

D'autre part en remplaçant dans (XII.12) l'enthalpie élémentaire dh déduite de (XII.13), il vient :

$$\delta w_l + \delta Q = \delta Q + \delta f + \frac{dp}{\rho} + g dz + d \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

Soit:

$$\delta w_l = \frac{dp}{\rho} + g dz + d \left(\frac{v^2}{2} \right) + \delta f \quad (\text{XII.14})$$

Dans cette dernière relation la quantité de chaleur Q disparaît. Toutefois il serait hasardeux d'en déduire que la relation (XII.14) est réservée uniquement aux évolutions adiabatiques.

La nature des transformations sera marquée par l'intégration de $\frac{dp}{\rho}$.

La relation (XII.14) est constamment utilisée dans l'étude des turbomachines.

Remarquons que si le travail interne w_I est nul, nous retrouvons l'équation (XI.12), pour une tranche de fluide s'écoulant à l'intérieur d'une tuyauterie.

10 Enthalpie d'arrêt

En mécanique des fluides et dans le domaine des turbomachines, il est souvent posé :

$$h_i = h + \frac{v^2}{2} \quad (\text{XII.15})$$

La quantité h_i est alors désignée par **enthalpie d'arrêt** (ou enthalpie totale et parfois enthalpie d'impact).

Avec cette notation, pour un système ouvert en régime permanent, le premier principe de la thermodynamique peut s'écrire :

$$w_I + Q = \Delta \frac{S}{E} (h_i + gz)$$

Dans le cas de fluide compressible (gaz), le terme gz est généralement négligeable, le premier principe devient :

$$w_I + Q = \Delta \frac{S}{E} h_i \quad (\text{XII.16})$$

L'enthalpie d'arrêt jouit de propriétés remarquables, éminemment pratiques. Prenons quelques exemples en se plaçant toujours dans le cas de fluides compressibles.

a) Écoulement adiabatique d'un fluide compressible

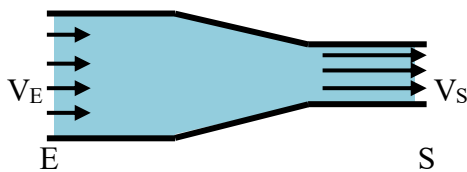


Figure XII.08 Écoulement d'un fluide

Le travail interne w_I est nul, puisqu'il n'y a pas de machines. L'écoulement est adiabatique donc $Q = 0$, il s'ensuit :

$$h_{iS} - h_{iE} = 0$$

L'évolution du fluide est à enthalpie d'arrêt constante.

b) Échangeur

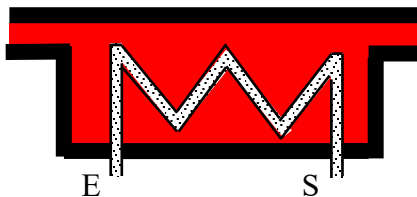


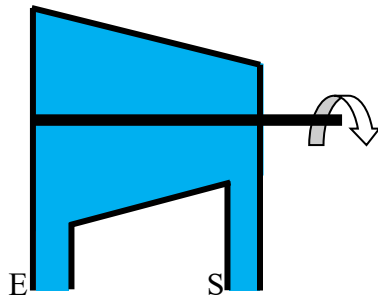
Figure XII.09 Transfert de chaleur

Dans un échangeur, le travail interne est évidemment nul.

La quantité de chaleur transférée est donc :

$$Q = h_{iS} - h_{iE}$$

c) Turbomachines



Compte tenu de leur faible surface extérieure et de leur puissance, les turbomachines n'échangent pratiquement pas de chaleur avec leur milieu extérieur ($Q = 0$).

$$W_I = h_{iS} - h_{iE}$$

Figure XII.10 Turbomachines adiabatiques

Cette hypothèse d'adiabaticité n'est mise en défaut que dans quelques cas particuliers.

Chapitre XIII

Etude thermodynamique des gaz parfaits

1 Expérience de Joule

Conformément au schéma ci-dessous deux réservoirs A et B, à parois conductrices de la chaleur, sont plongés dans l'eau d'un calorimètre. A l'état initial le réservoir A contient un gaz sous pression et est relié à B, initialement vide, par une tuyauterie munie d'un robinet. Ouvrons le robinet, une partie du gaz du réservoir A se transvase, irréversiblement, dans le réservoir B. A l'état final les deux réservoirs sont en équilibre thermique.

Durant cette transformation, l'expérience montre que la température de l'eau du calorimètre est restée constante ; $T_f = T_i$.

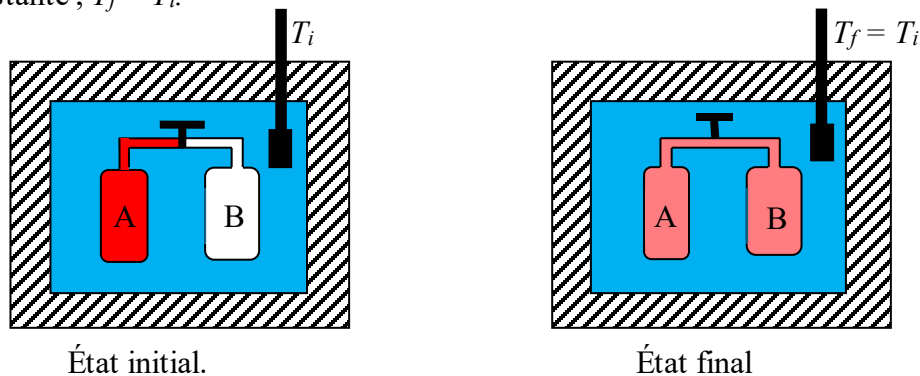


Figure XIII.01 Système isolé

Lors de la transformation $i \rightarrow f$, appliquons le premier principe de la thermodynamique au système constitué par le gaz. Ce système est délimité par les surfaces des réservoirs et de la tuyauterie les reliant.

$$W + Q = \Delta \underset{i}{\overset{f}{U}} + \Delta \underset{i}{\overset{f}{E_c}}$$

Explicitons chacun de ces termes.

$W = 0$, puisque aucun travail n'a été échangé avec le milieu extérieur.

$Q = 0$, les échanges entre les bouteilles et l'eau du calorimètre sont uniquement d'ordre calorimétrique. Or la température de l'eau n'a pas varié, il s'ensuit que le transfert de chaleur est nul, l'évolution $i \rightarrow f$ est donc adiabatique.

$\Delta \underset{i}{\overset{f}{E_c}} = 0$, la variation d'énergie cinétique est nulle puisque le gaz est au repos à l'état initial et à l'état final.

Ces trois termes étant nuls, il s'ensuit que la variation d'énergie cinétique est également nulle.

$$\Delta U = 0 \Rightarrow U_f = U_i = U = \text{constante.}$$

Par contre, durant cette détente adiabatique, le volume et la pression du gaz ont obligatoirement varié. La température étant restée constante, Joule a déduit que l'énergie interne ne pouvait être fonction que de la température.

Cette expérience de Joule était en réalité peu précise. Des expérimentations plus récentes sur un certain nombre de gaz, à température constante, ont montré que leur énergie interne était légèrement fonction de leur volume ou de leur pression.

Dorénavant nous considérerons qu'un gaz parfait est un gaz hypothétique dont l'équation d'état est $p v = r T$ et qui, en outre obéit à l'équation de Joule.

2 Expression de l'énergie interne d'un gaz parfait

Si nous considérons une évolution réversible et isochore ($dv = 0$), l'expression simplifiée du premier principe de la thermodynamique (XII.06) permet d'écrire :

$$\delta Q = du$$

Cette quantité de chaleur, transférée à volume constant, est : $c_v dt$ et par conséquent :

$$du = c_v dt \quad (\text{XIII.01})$$

L'énergie interne est une fonction d'état et ne dépend que de l'état final et de l'état initial d'équilibre. Cette relation est donc valable quelle que soit la nature des évolutions.

Cette notion de fonction d'état est très importante en thermodynamique.

À titre d'exemple, pour le lecteur pas encore familiarisé avec les fonctions d'état, nous allons montrer d'une autre façon que la relation (XIII.01) n'est pas restrictive aux évolutions isochores. Puisque nous pouvons utiliser n'importe quel chemin pour effectuer une transformation amenant un gaz parfait d'un état initial (i) à un état final (f), utilisons les évolutions particulières suivantes :

- évolution isochore pour aller de $i \rightarrow A$
- évolution isotherme pour aller de $A \rightarrow f$

Pour l'évolution isochore, nous avons :

$$u_A - u_i = \int_{T_i}^{T_A=T_f} c_v dT$$

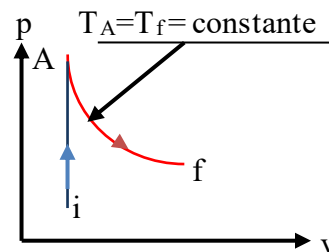


Figure XIII.02 Représentations des évolutions

Pour l'évolution isotherme $u_A = u_f$, puisque l'énergie interne ne dépend que de la température. On conclue que l'expression :

$$u_f - u_i = \int_{T_i}^{T_f} c_v dT$$

est valable quelles que soient les transformations d'un gaz parfait pour aller de $i \rightarrow f$.

Exercice XIII.1

Deux moles d'un gaz parfait occupent à l'état initial un volume $V_1 = 2 \text{ m}^3$ à la température $t_1 = 0^\circ\text{C}$.

Ces deux moles décrivent la transformation cyclique réversible suivante :

- 1 $\rightarrow$ 2 Évolution isochore jusqu'à la température $t_2 = 30^\circ\text{C}$.
- 2 $\rightarrow$ 3 Évolution isotherme jusqu'au volume $V_3 = 0,5 \text{ m}^3$.
- 3 $\rightarrow$ 4 Évolution isochore jusqu'à la température $t_4 = t_1 = 0^\circ\text{C}$.
- 4 $\rightarrow$ 1 Évolution isotherme jusqu'au volume $V_1 = 2 \text{ m}^3$.

Calculer :

- 1- Les quantités de chaleur échangées avec le milieu extérieur pour chacune de ces évolutions.
 - 2- La variation d'énergie interne au cours du cycle.
 - 3- Le travail échangé avec le milieu extérieur durant cette transformation cyclique.
- Il est précisé que la capacité thermique molaire à volume constant est : $c_v = 20,786 \text{ J/mol.K}$.
Il est rappelé que la constante universelle des gaz parfaits est $R = 8,3144 \text{ J/mol K}$.

Corrigé

1- Tout d'abord, représentons cette transformation cyclique sur un diagramme de Clapeyron. Les évolutions étant réversibles, nous pouvons écrire :

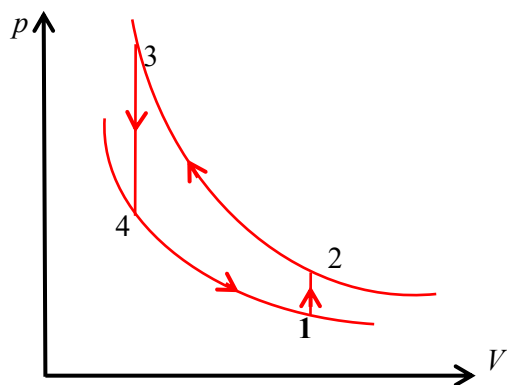


Figure XIII.03 Transformation cyclique

par unité de masse: $\delta Q = du + p dv$
pour la masse totale: $\delta Q = dU + p dV$
Pour chacune de ces évolutions, calculons les transferts de chaleur.

1 $\rightarrow$ 2 $\delta Q = du$
puisque l'évolution est isochore; $dV = 0$. Il s'ensuit :
 $Q = n c_v (t_2 - t_1) = 2 \times 20,786 \times (30 - 0) = 1\,247 \text{ J}$
2 $\rightarrow$ 3 $\delta Q = p dV$ pour une évolution isotherme $dU = 0$.

Remplaçons la pression p déduite de l'équation d'état $p = \frac{nRT}{V}$ et intégrons cette relation.
La chaleur transférée durant cette évolution est donc :

$$Q = RT_2 \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = 2 \times 8,3144 \times (273,15 + 30) \times \ln \frac{0,5}{2} = -6988 \text{ J}$$

3 $\rightarrow$ 4 Évolution isochore jusqu'à la température $t_4 = t_1 = 0^\circ\text{C}$.

$$Q = n c_v (t_4 - t_3) = n c_v (t_1 - t_2) = -1\,247 \text{ J}$$

Puisque $t_4 = t_1$ et $t_3 = t_2$

4 → 1 Comme précédemment $U_1 - U_4 = 0$ et par suite :

$$Q = RT_1 \int_{V_4}^{V_1} \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_4} = 2 \times 8,3144 \times 273,15 \times \ln \frac{2}{0,5} = 6297 \text{ J}$$

2- La variation d'énergie interne est nulle pour une transformation cyclique. L'état final est confondu avec l'état initial.

3- Durant cette transformation cyclique la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur est :

$$Q = 1247 - 6988 - 1247 - 691 = -691 \text{ J}$$

Le premier principe de la thermodynamique pour une transformation cyclique (XII.04) permet de déduire le travail échangé avec le milieu extérieur :

$$W = -Q = 691 \text{ J}$$

Le travail est positif, il est reçu par le système.

3 Expression de l'enthalpie

Un raisonnement calqué sur celui de l'énergie interne permet d'obtenir immédiatement l'expression de l'enthalpie d'un gaz parfait. La relation (XII.13) devient pour une évolution réversible et isobare.

$$\delta Q = dh$$

Cette quantité de chaleur transférée à pression constante est : $c_p dt$ et par suite :

$$dh = c_p dt \quad (\text{XIII.02})$$

L'enthalpie, comme l'énergie interne, est une fonction d'état et ne dépend, donc, que de l'état initial et de l'état final.

4 Relation de Mayer

En partant, directement, de la définition de l'enthalpie on obtient:

$$\underbrace{\frac{dh}{c_p dt}} = \underbrace{\frac{du}{c_v dt}} + \underbrace{\frac{d(pv)}{r dt}}$$

Soit la relation, dite de Mayer, pour un gaz parfait.

$$r = c_p - c_v \quad (\text{XIII.03})$$

5 Détentes et compressions adiabatiques réversibles d'un gaz parfait

L'expression simplifiée du premier principe (XII.06) pour une évolution adiabatique s'écrit :

$$0 = du + p dv = c_v dT + p dv$$

Écrivons, l'équation d'état des gaz parfaits, sous forme différentielle :

$$dT = \frac{1}{r}(v dp + p dv)$$

et reportons cette expression de dT dans la relation précédente :

$$\frac{c_v}{r} v dp + \left(\frac{c_v}{r} + 1\right) p dv = 0$$

Multiplions par $\frac{r}{pv}$ et en tenons compte de la relation de Mayer :

$$c_v \frac{dp}{p} + c_p \frac{dv}{v} = 0$$

En posant :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (\text{XIII. 04})$$

Intégrons cette dernière relation :

$$p v^\gamma = \text{constante} \quad (\text{XIII.05})$$

Pour une évolution adiabatique réversible entre un état initial (i) et un état final (f) la relation (XIII.05) peut s'écrire :

$$\frac{p_f}{p_i} = \left(\frac{v_i}{v_f}\right)^\gamma = \left(\frac{\rho_f}{\rho_i}\right)^\gamma \quad (\text{XIII. 06})$$

Par combinaison avec l'équation d'état des gaz parfaits, nous obtenons également :

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{p_f}{p_i}\right)^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} = \left(\frac{\rho_f}{\rho_i}\right)^{(\gamma-1)} = \left(\frac{v_i}{v_f}\right)^{(\gamma-1)} \quad (\text{XIII. 07})$$

Remarques :

a) Lorsque les capacités thermiques c_p et c_v sont constantes, le gaz est dit parfois "idéal parfait".

b) En utilisant les relations (XIII.03) et (XIII.05) il est facile d'exprimer c_p et c_v en fonction de r et de γ .

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \quad c_v = \frac{r}{\gamma - 1}$$

Exercice XIII.2

Une turbo soufflante de haut fourneau comprime adiabatiquement et réversiblement 39000 kg/h d'un mélange de gaz considéré comme parfait dont les caractéristiques sont :

$$c_p = 1050,6 \text{ J/kg.K} \quad c_v = 761,8 \text{ J/kg.K}$$

Pour simplifier, le rendement de cette machine sera supposé égal à 1.

À l'entrée de la turbomachine, nous avons les valeurs suivantes pour le fluide :

Pression: $p_E = 1,025 \text{ bar.}$

Température: $t_E = 24 \text{ }^\circ\text{C.}$

Vitesse: $V_E = 15 \text{ m/s.}$

À la sortie les caractéristiques du fluide sont devenues :

Pression: $p_s = 1,81 \text{ bar}$

Vitesse: $V_s = 20 \text{ m/s}$.

Calculer :

1) La température à la sortie de la turbo soufflante.

2) La puissance interne de la machine, sachant qu'elle est égale au débit masse multiplié par le travail interne.

Corrigé

1) La température à la sortie est :

$$T_s = T_E \left(\frac{p_s}{p_E} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \text{ avec } \gamma = \frac{c_p}{c_v} \frac{1050,6}{761,8} = 1,379$$

par suite :

$$T_s = (273,15 + 24) \times \left(\frac{1,81}{1,025} \right)^{\frac{(1,379-1)}{1,379}} = 347,41 \text{ K}$$

$$t_s = 74,26 \text{ } ^\circ\text{C}$$

2) La relation (XII.16), pour cette évolution adiabatique, s'écrit :

$$w_I = h_{is} - h_{iE} = h_s - h_E + \frac{V_s^2 - V_E^2}{2}$$

$$w_I = 1050,6 \times (347,15 - (273,15 + 24)) + \frac{20^2 - 15^2}{2}$$

$$w_I = 52890 \text{ J/kg}$$

La puissance interne est donc :

$$P_I = \frac{39000}{3600} \times 52890 = 572975 \text{ W}$$

Exercice XIII.3

Conformément au croquis ci-dessous, un réservoir comporte deux parties A et B. Le piston de séparation, non pesant, peut se déplacer sans frottement.

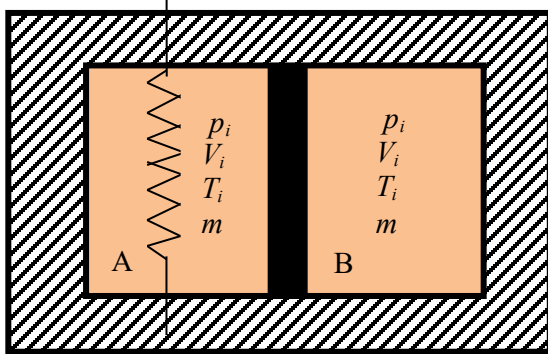


Figure XIII.04 Etat initial (i)

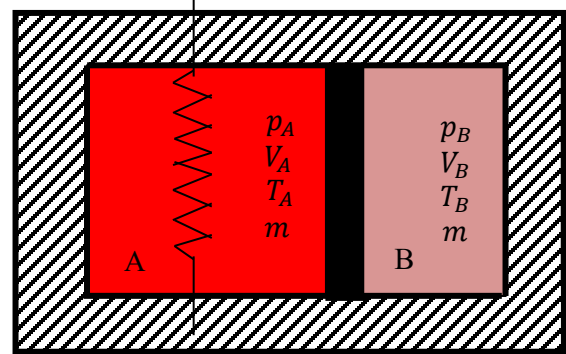


Figure XIII.05 Etat final (f)

Les deux parties, A et B, contiennent la même masse de gaz parfait caractérisé par sa constante r et par son γ .

A l'état initial, il règne une pression p et une température T dans les deux enceintes.

La partie A reçoit une quantité de chaleur Q_A tandis que la partie B subit une évolution adiabatique réversible.

Déterminer l'état final du système ($p_A, p_B, T_A, T_B, V_A, V_B$) en fonction de Q_A, p_i, T_i, V_i, r et γ .

Corrigé

Tout d'abord, considérons le système composé du piston et des deux réservoirs A et B. Le système n'échange que de la chaleur avec le milieu extérieur, le travail des forces extérieures est nul. Le système est au repos à l'état initial et à l'état final, la variation d'énergie cinétique est également nulle. Le premier principe de la thermodynamique devient :

$$Q_A = U_f - U_i = mc_v(T_A - T_i) + mc_v(T_B - T_i)$$

$$Q_A = mc_v(T_A + T_B - 2T_i) = m \frac{r}{\gamma - 1} (T_A + T_B - 2T_i)$$

Pour satisfaire l'équilibre du piston il faut que : $p_A = p_B$.

Remarquons également que : $V_A + V_B = 2V_i$

Écrivons l'équation d'état, pour les gaz parfaits contenus dans les réservoirs A et B à l'état final :

$$p_A V_A = p_B V_B = mrT_A$$

$$p_B V_B = mrT_B$$

Ajoutons ces deux dernières relations :

$$mr(T_A + T_B) = p_B(V_A + V_B) = 2p_B V_i$$

Reportons la somme des températures dans l'expression de Q_A :

$$Q_A = \frac{2}{\gamma - 1} (p_B V_i - mrT_i)$$

Une équation, une inconnue p_B .

$$p_B = \frac{1}{V_i} \left(\frac{\gamma - 1}{2} Q_A + mrT_i \right) = \frac{\gamma - 1}{2V_i} + p_i$$

La pression p_B étant connue il est facile de déduire les autres résultats.

$$\begin{aligned} V_B &= \left(\frac{p_i}{p_B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} V_i \\ T_B &= \left(\frac{p_B}{p_i} \right)^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)} T_i \\ V_A &= 2V_i - V_B \\ T_A &= \frac{p_A V_A}{mr} \end{aligned}$$

Exercice XIII.4

Un gaz parfait, défini par r et γ , est emprisonné dans un cylindre surmonté d'un piston qui coulisse sans frottement.

À l'état initial, le gaz occupe un volume V_i sous une température T_i et une pression p_i . Ce gaz est comprimé adiabatiquement jusqu'à la pression finale p_f et il est envisagé les deux cas suivants :

Cas A - L'évolution est supposée réversible.

Pour concevoir une telle évolution, il faudrait supposer, placer progressivement, une infinité de petits poids sur le piston. Ainsi à chaque étape, la pression, la température et la masse volumique seraient homogènes dans toute la masse de gaz.

Calculer le volume V_A et la température T_A en fonction de γ , V_i , T_i , p_i et p_f .

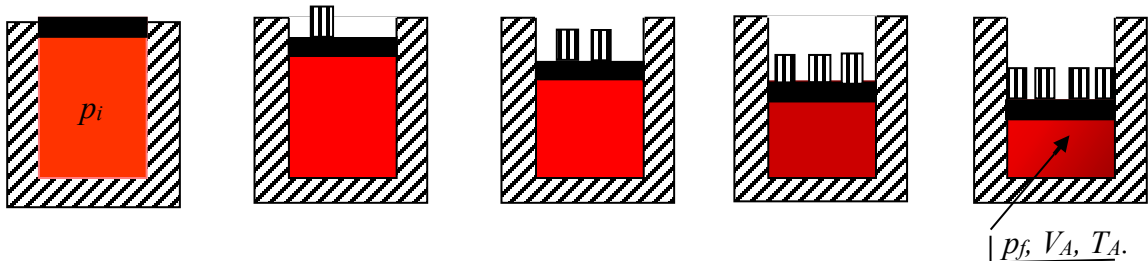


Figure XIII.06 Évolution réversible

Cas B - L'évolution est supposée irréversible

Conformément à la figure XIII.07, l'index est retiré brutalement et le gaz est comprimé jusqu'à la pression p_f .

Calculer la température T_B et le volume V_B en fonction de γ , V_i , T_i , p_i et p_f .

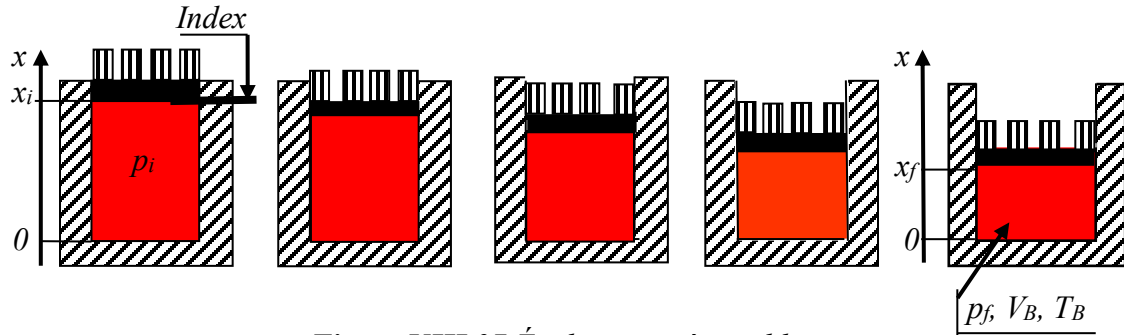


Figure XIII.07 Évolution irréversible

Corrigé

Cas A.

Le résultat s'obtient immédiatement à partir des relations (XIII.06) et (XIII.07).

$$V_A = V_i \left(\frac{p_i}{p_f} \right)$$

$$T_A = T_i \left(\frac{p_f}{p_i} \right)^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)}$$

Cas B

Explicitons tous les termes du premier principe de la thermodynamique, relation (XII.03).

Le travail des forces extérieures est constitué par l'action du piston sur le gaz : $\delta W = -F dx$.

Pendant toute l'évolution, la force $\vec{F}$ reste constante dans le cas B. En désignant par A la surface du piston, cette force est égale à $p_f A$. Il vient donc :

$$W = -F \int_{x_i}^{x_f} dx = p_f A (x_i - x_f) = p_f (A x_i - A x_f)$$

$$W = p_f (V_i - V_B)$$

Nous avons le droit d'écrire l'équation d'état des gaz parfaits à l'état initial et à l'état final. Ce serait complètement faux dans les états intermédiaires, la masse de gaz ne serait pas homogène vis-à-vis des pressions et des températures.

$$p_i V_i = mr T_i$$

$$p_f V_B = mr T_B$$

Il s'ensuit donc :

$$W = p_f \left(mr \frac{T_i}{p_i} - mr \frac{T_B}{p_f} \right) = mr \left(T_i \frac{p_f}{p_i} - T_B \right)$$

Par hypothèse l'évolution est adiabatique : $\delta Q = 0$

La variation d'énergie interne est :

$$U_B - U_i = mc_v(T_B - T_i) = m \frac{r}{\gamma - 1} (T_B - T_i)$$

En définitive, il ne reste dans le premier principe que $\delta W = dU$ soit :

$$mr \left(T_i \frac{p_f}{p_i} - T_B \right) = m \frac{r}{\gamma - 1} (T_B - T_i)$$

Une équation, une inconnue T_B .

$$T_B = \frac{T_i}{\gamma} \left[(\gamma - 1) \frac{p_f}{p_i} + 1 \right]$$

Connaissant T_B , le volume V_B s'obtient à partir de l'équation d'état :

$$V_B = \frac{V_i}{\gamma} \left(\gamma - 1 + \frac{p_i}{p_f} \right)$$

Exercice XIII.5

À l'état initial, une bouteille munie d'un robinet de remplissage est vide.

On ouvre le robinet, une masse d'air pénètre adiabatiquement, et irréversiblement, dans la bouteille.

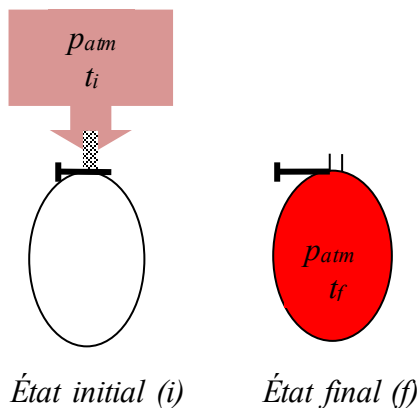


Figure XIII.08 Remplissage d'une bouteille vide

Calculer la température régnant dans la bouteille, juste au moment où la pression dans la bouteille devient égale à la pression atmosphérique.

Il est précisé :

Pression atmosphérique :

$$p_{atm} = 101325 \text{ Pa}$$

Température ambiante : $t_i = 18^\circ \text{C}$

$$r = 287 \text{ J / kg} \cdot \text{K} \quad \text{et} \quad \gamma = 1,4$$

Corrigé

Il s'agit d'un système ouvert donc la relation (XII.07), rappelée ci-dessous, est tout à fait appropriée pour résoudre ce problème.

$$\delta W_l + \delta Q = d(U + E_C + E_P) + \left(u_S + p_S v_S + g z_S + \frac{V_S^2}{2} \right) dm_S - \left(u_E + p_E v_E + g z_E + \frac{V_E^2}{2} \right) dm_E$$

Le système étudié est l'air qui entre dans la bouteille.

L'air qui pénètre dans la bouteille ne provoque pas de travail interne $\delta W_I = 0$

L'évolution est suffisamment rapide pour justifier l'hypothèse d'adiabaticité $\delta Q = 0$

L'air entre dans la bouteille mais ne sort pas $dm_S = 0$.

L'énergie potentielle (action de la pesanteur) est négligeable.

A l'état initial et à l'état final, l'air est au repos $dE_C = 0$.

Compte tenu de ces remarques la relation (XII.07) se simplifie et devient :

$$0 = dU - (u_E + p_E v_E) dm_E = dU - h_E dm_E$$

Soit :

$$U_f - U_i = \int_0^{m_E} h_E dm_E$$

À l'état initial, il n'y a pas d'air dans la bouteille donc $U_i = 0 \Rightarrow U_f - U_i = m_E c_v T_f$

D'autre part, en admettant que l'air se comporte comme un gaz idéal parfait, il vient :

$$\int_0^{m_E} h_E dm_E = h_E \int_0^{m_E} dm_E = c_p T_i m_E$$

Par conséquent, il s'ensuit :

$$c_v T_f = c_p T_i$$

$$T_f = \frac{c_p}{c_v} T_i = \gamma T_i$$

$$T_f = 1,4 \times (273,15 + 18) = 407,61K \text{ soit : } t_f = 134,46^\circ C$$

L'air contenu dans la bouteille s'est réchauffé de $116,46^\circ C$.

Chapitre XIV

Deuxième principe de la thermodynamique

1 Postulat de Clausius

Le premier principe de la thermodynamique établit entre les diverses formes de l'énergie une équivalence quantitative.

Il s'oppose ainsi au mouvement perpétuel dit de première espèce, basé sur l'idée de production illimitée de travail sans recevoir, sous aucune forme, d'énergie. Mais il ne donne pas une description complète des phénomènes naturels, plus précisément, il ne se préoccupe pas de savoir si telle ou telle autre transformation est réalisable.

Par exemple, on peut arrêter un train en marche par le frottement des patins de freins contre les roues qui s'échauffent. Le premier principe montre que l'énergie cinétique du train s'est transformée en chaleur. Ce principe ne serait pas mis en défaut si, en chauffant les patins de freins, le train repartait en retrouvant sa vitesse initiale. Ce qui est impossible, comme nous le savons.

Un autre exemple, qui est d'ailleurs important en thermodynamique, est celui du corps chaud que nous mettons en présence d'un corps froid. Si dans une enceinte adiabatique, nous mélangeons 1 kg d'eau à $t_{i1} = 60^\circ\text{C}$ avec 1 kg d'eau à $t_{i2} = 20^\circ\text{C}$, nous obtenons 2 kg d'eau à $t_f = 40^\circ\text{C}$.

$$c_p(t_f - t_{i1}) + c_p(t_f - t_{i2}) = 0$$

$$\underbrace{4,18 \times (40 - 60)}_{(-Q)} + \underbrace{4,18 \times (40 - 20)}_{(+Q)} = 0$$

Le corps froid s'est réchauffé et le corps chaud s'est refroidi. Une quantité de chaleur a été transférée du corps chaud vers le corps froid. Cependant si dans ce mélange, nous avions obtenu à l'état final 1 kg d'eau à $t_{1f} = 70^\circ\text{C}$ et 1 kg d'eau à $t_{2f} = 10^\circ\text{C}$ au lieu des 2 kg d'eau à $t_f = 40^\circ\text{C}$, le résultat n'aurait pas été contraire au premier principe de la thermodynamique.

$$c_p(t_{1f} - t_{i1}) + c_p(t_{2f} - t_{i2}) = 0$$

$$\underbrace{4,18 \times (70 - 60)}_{(Q)} + \underbrace{4,18 \times (10 - 20)}_{(-Q)} = 0$$

Si cela avait été possible, le corps froid se serait encore refroidi alors que le corps chaud se réchaufferait. Ainsi une quantité de chaleur aurait été transférée du corps froid vers le corps chaud.

Une telle transformation n'a jamais été observée.

L'expérience montre que les échanges purement calorifiques s'effectuent toujours dans le même sens ; du corps chaud vers le corps froid. Ceci n'est autre que le postulat de Clausius et constitue l'un des énoncés classiques du second principe de la thermodynamique.

Une quantité de chaleur ne peut jamais être transférée, sans dépense d'énergie, d'un corps froid à un corps chaud.

Le second principe introduit une distinction fondamentale entre les transformations réversibles et les transformations irréversibles. Rappelons qu'une transformation est réversible si, après avoir été accomplie, elle peut retourner à son état initial, en empruntant le chemin inverse, en retrouvant les mêmes valeurs du travail et de la quantité de chaleur changées de signes.

Du postulat de Clausius, nous retiendrons que tout transfert de chaleur entre deux corps à des températures différentes est irréversible. Pour que le transfert de chaleur soit réversible, il faut que les évolutions soient isothermes.

2 Postulat de Thomson-Kelvin

Pour mettre en évidence le postulat de Thomson-Kelvin, prenons l'exemple de la propulsion d'un navire et raisonnons par l'absurde. Si le postulat de Clausius était faux, nous pourrions transférer de la chaleur, de l'eau à la température t_2 , à un corps ayant une température t_1 plus élevée. Puis nous utiliserions cette source chaude pour produire de la vapeur afin d'entraîner une turbine.

Ainsi ce navire se déplacerait en empruntant uniquement de la chaleur à l'eau de la mer.

Une telle installation, contraire au postulat de Clausius réaliserait un mouvement perpétuel de seconde espèce.

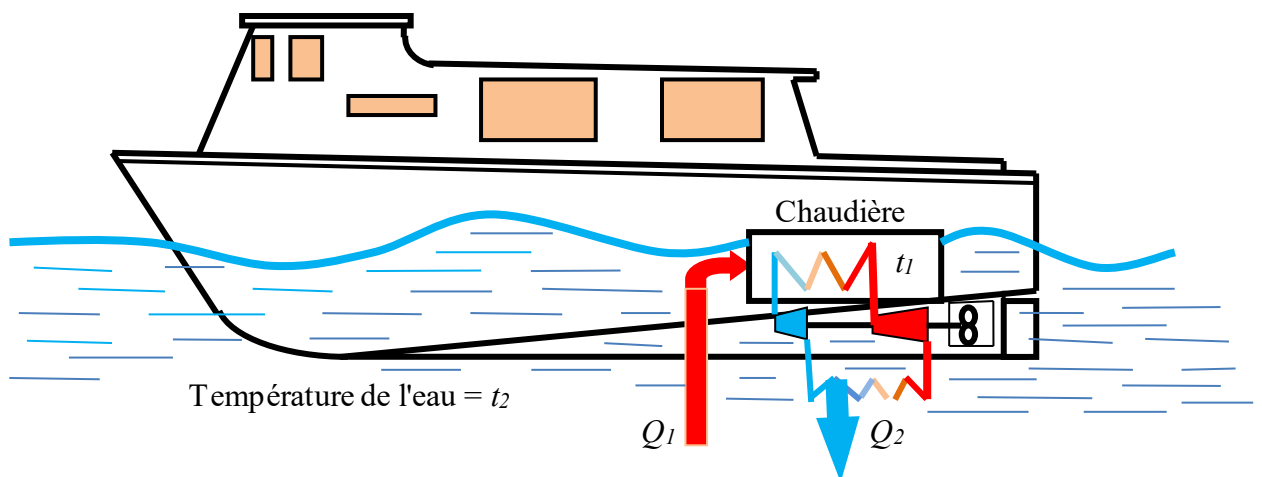


Figure XIV.01 Transformation cyclique monotherme

C'est le second principe de la thermodynamique qui affirme le caractère utopique de telles réalisations, d'où l'énoncé du postulat de Thomson (lord Kelvin) :

À l'aide d'un système qui décrit une transformation cyclique et qui n'est en contact qu'avec une seule source de chaleur, il est impossible de recueillir du travail.

Ou, sous une forme différente mais équivalente :

Lorsqu'un système matériel est revenu à son état initial après n'avoir échangé de chaleur qu'avec une seule source, il a obligatoirement reçu du travail et cédé de la chaleur.

La conformité au postulat de Thomson Kelvin peut se traduire par le schéma ci-après :

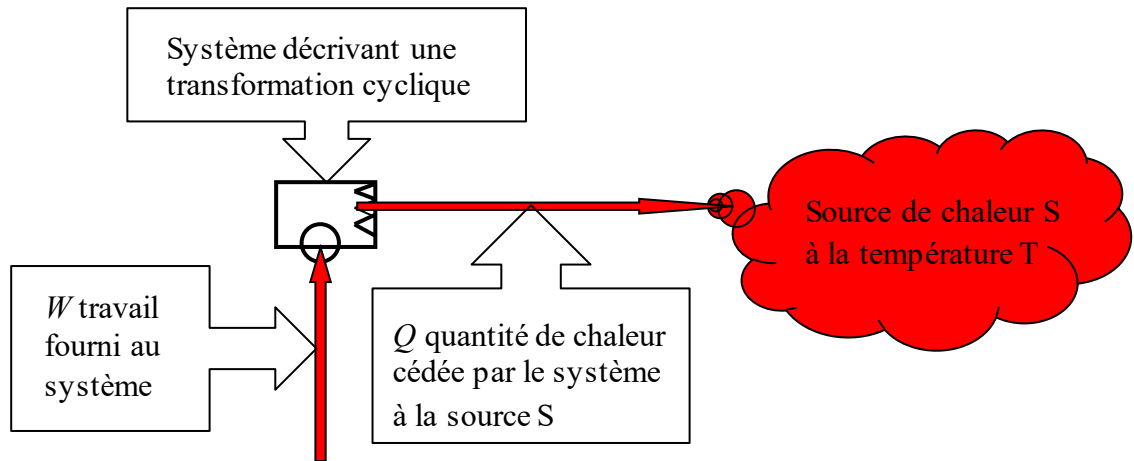


Figure XIV.02 Conformité au postulat de Thomson Kelvin

Le postulat de Thomson-Kelvin est équivalent à celui de Clausius. Pour le montrer, raisonnons de façon analogue à l'exemple du bateau ci-dessus.

Supposons donc que le postulat de Thomson-Kelvin soit faux. Nous pourrions alors prélever à la source froide S_2 une quantité de chaleur Q que nous transformerions ensuite en travail W puisque $W + Q = 0$.

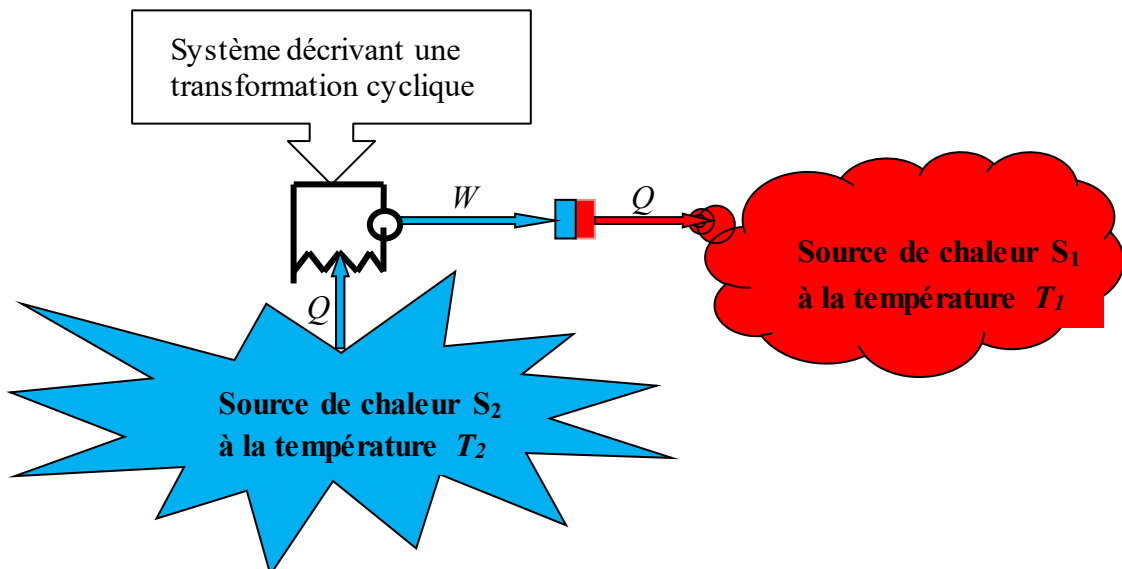


Figure XIV.03 Transformation impossible à réaliser

Ce travail pourrait être retransformé en chaleur par frottement à une température $T_1 > T_2$, puis cédé à une source de chaleur S_1 où régnerait la même température T_1 . Ainsi la quantité de chaleur Q aurait été transférée de la source froide S_2 à la source chaude S_1 sans aucune contribution du milieu extérieur.

Cette opération est impossible en vertu du postulat de Clausius. Le postulat de Thomson-Kelvin est équivalent à celui de Clausius.

Dans une transformation cyclique réversible d'un système n'échangeant de la chaleur qu'avec une seule source, le travail W mis en jeu, et corrélativement la quantité de chaleur Q , sont nuls.

En effet, d'après le postulat de Thomson-Kelvin, le travail doit être positif, mais l'hypothèse de réversibilité implique que le travail puisse devenir négatif. La seule solution possible est $W = 0$. Or du premier principe de la thermodynamique, nous avons: $W + Q = 0$, donc $Q = 0$.

Avec une transformation non cyclique, il est possible de produire du travail en n'échangeant de la chaleur qu'avec une seule source. Dans ces conditions, il faut toujours avoir présent à l'esprit que l'état final du système doit être, nécessairement, différent de l'état initial.

3 Transformation cyclique ditherme

Une transformation cyclique est dite monotherme si les transferts de chaleur ne s'effectuent qu'avec une seule source de chaleur. C'est le cas des schémas du paragraphe précédent. Par contre, si les transferts de chaleur s'effectuent à partir de deux sources de chaleur, la transformation cyclique est dite ditherme.

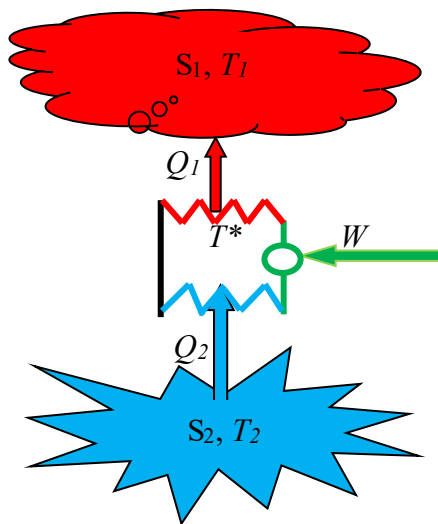


Figure XIV.04 Principe de fonctionnement des pompes à chaleur et machines frigorifiques

Il est possible de transférer de la chaleur d'un corps froid à un corps chaud, en utilisant un système qui décrit une transformation cyclique ditherme.

Pour le montrer utilisons tout d'abord le postulat de Thomson-Kelvin.

Si la transformation cyclique était monotherme le système pourrait recevoir un travail W , et céder une quantité de chaleur Q_1 à une source chaude caractérisée par sa température T_1 .

Il est alors facile de concevoir qu'une telle transformation cyclique peut comporter une partie où la température T^* devienne inférieure à T_1 .

Ce qui permet cette fois, conformément au postulat de Clausius, de prélever une quantité de chaleur Q_2 à une autre source dite froide, et définie par sa température $T_2 \geq T^*$. La transformation cyclique devient ainsi ditherme.

Appliquons le premier principe de la thermodynamique à cette transformation cyclique ditherme :

$$W + Q_1 + Q_2 = 0 \quad \text{avec} \quad W > 0 \quad Q_1 < 0 \quad Q_2 > 0$$

Puisque le signe est positif lorsque le travail ou la quantité de chaleur sont reçus par le système. C'est l'inverse dans le cas contraire. Ce qui permet d'écrire cette expression sous la forme suivante :

$$|Q_1| = W + Q_2$$

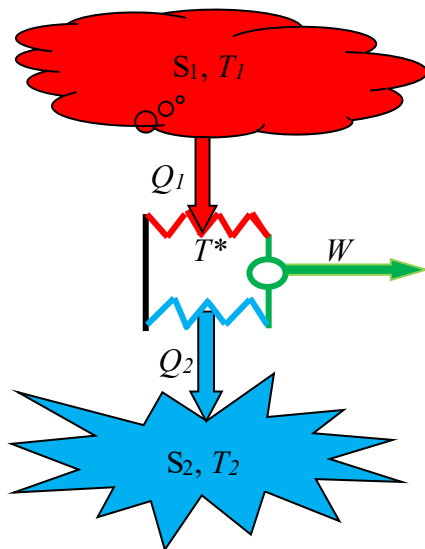
Ainsi on renvoie à la source chaude plus de chaleur qu'on en a extraite de la source froide.

C'est sur ce principe que fonctionnent les pompes à chaleur et les machines frigorifiques.

Dans les pompes à chaleur la source froide sera, par exemple, l'atmosphère à l'extérieur d'une maison, et l'air chaud à l'intérieur, constituera la source chaude.

La source froide d'un réfrigérateur domestique est l'intérieur de l'armoire, alors que la source chaude est l'air ambiant de la pièce dans laquelle il se trouve. Si la porte du réfrigérateur reste ouverte, la transformation cyclique devient monotherme, et en vertu du postulat de Thomson-Kelvin, il se transforme en radiateur.

Le problème, de la conversion d'énergie thermique en énergie mécanique, est résolu en inversant le sens de la transformation cyclique, précédemment décrit.



Mais cette fois :

$$W + Q_1 + Q_2 = 0 \text{ avec :} \\ W < 0 \quad Q_1 > 0 \quad Q_2 < 0$$

Il s'ensuit que :

$$|W| = Q_1 - |Q_2|$$

Ainsi inévitablement, pour produire le travail W , une quantité de chaleur Q_2 doit être rejetée à la source froide S_2 .

Il est donc impossible de transformer intégralement de la chaleur en travail, alors qu'il est possible de faire l'inverse (travail en chaleur).

Figure XIV.05 Production d'énergie

Le second principe établit, en quelque sorte, que la chaleur est une énergie de qualité inférieure.

4 Rendement thermique

En 1824, Sadi Carnot désignait par puissance motrice du feu ce qu'on appelle aujourd'hui le rendement d'une machine.

Le rendement thermique, d'une transformation cyclique ditherme, est le rapport de l'énergie mécanique recueillie à l'énergie thermique qu'il faut emprunter à la source chaude.

$$\eta = \frac{-W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \quad (\text{XIV.01})$$

5 Théorème de Carnot

Toutes les transformations cycliques dithermes réversibles, qui fonctionnent entre deux températures données T_1 et T_2 , ont le même rendement.

Pour le montrer, considérons deux transformations cycliques C et C^0 , produisant respectivement le travail W et W^0 , et qui ont la particularité de fonctionner entre les mêmes sources de chaleur S_1 et S_2 .

Supposons également que ces installations sont calculées pour que les quantités de chaleurs Q_1 et Q_1^0 prélevées à la source chaude S_1 soient égales.

Par définition, les rendements de ces transformations cycliques sont :

$$\text{Pour } C \quad \eta = \frac{-W}{Q_1} \quad \Rightarrow \quad |W| = \eta Q_1$$

$$\text{et pour } C^0 \quad \eta^0 = \frac{-W^0}{Q_1^0} \quad \Rightarrow \quad |W| = \eta^0 Q_1^0 = \eta^0 Q_1$$

Si la transformation cyclique C est réversible nous pouvons emprunter le chemin inverse. Le travail et les quantités de chaleur changent donc de signe.

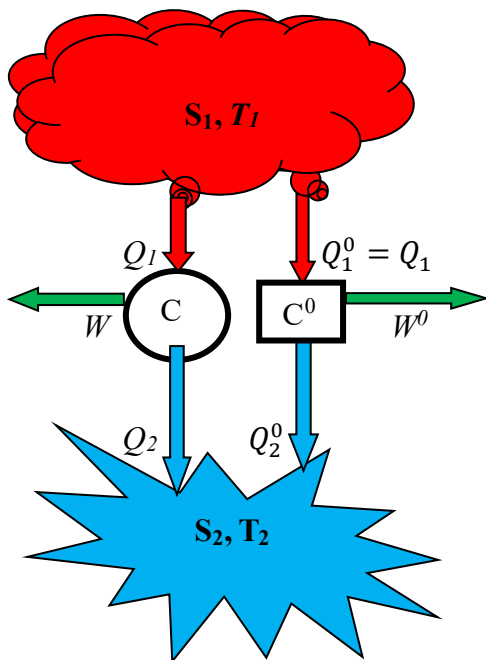


Figure XIV.06 Transformation ditherme

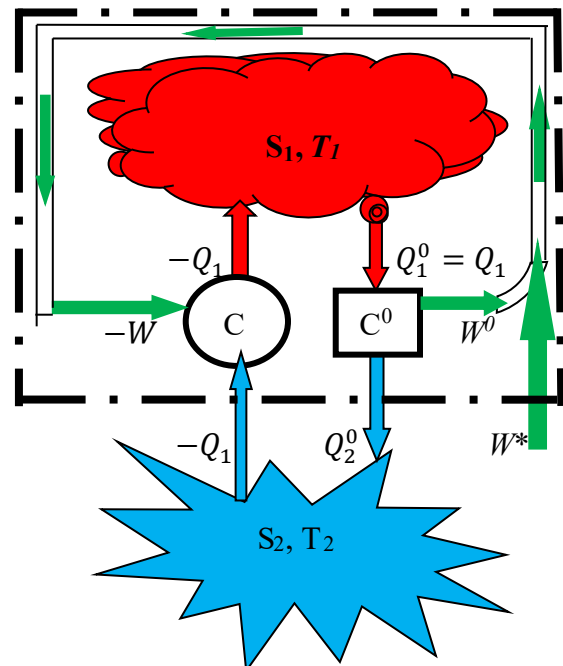


Figure XIV.07 Transformation monotherme

Avec cette hypothèse, accouplons C avec C^0 . Ainsi, la source S_1 reçoit la même quantité de chaleur qu'elle cède. Le système, C et C^0 est donc devenu monotherme. Il n'échange de la chaleur qu'avec la source S_2 .

En vertu du postulat de Thomson-Kelvin, le travail W^* échangé avec le milieu extérieur ne peut être que positif ou nul.

Nous devons satisfaire l'égalité suivante :

$$|W| = W^* + |W^0|$$

De l'expression des rendements cette expression devient :

$$\eta Q_1 = W^* + \eta^0 Q_1$$

Soit encore :

$$\frac{W^*}{Q_1} = \eta - \eta^0$$

Envisageons les deux cas évoqués.

a) C° est irréversible donc $W^* > 0 \Rightarrow \eta > \eta^0$

Ce qui semble en soi assez normal. Le rendement d'une machine parfaite est supérieur au rendement d'une machine imparfaite.

b) C° est également réversible $W^* = 0 \Rightarrow \eta = \eta^0$

C'est-à-dire le théorème de Carnot.

Ce résultat est tout à fait extraordinaire, car on obtient le même résultat quel que soit l'agent moteur (eau, fluide frigorigène, etc...) ou quelles que soient les machines réversibles utilisées (turbomachines, moteurs à pistons, etc..).

Le rendement est uniquement fonction des deux sources définies par leur propre température.

$$\eta = \eta(T_1, T_2)$$

Dans son ouvrage célèbre, en 1824, Sadi Carnot avait énoncé un principe fondamental :

La puissance motrice de toute machine thermique parfaite est indépendante de l'agent de transformation et ne dépend que des températures extrêmes entre lesquelles se fait le transport de chaleur.

6 Température thermodynamique

Pour des transformations cycliques réversibles le théorème de Carnot s'écrit :

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \eta(T_1, T_2) = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$$

Ce qui permet d'exprimer le rapport des quantités de chaleur sous la forme suivante :

$$\frac{Q_1}{|Q_2|} = f(T_1, T_2)$$

Nous allons montrer que ce rapport définit, en fait, une échelle de température.

Pour cela, considérons trois sources S_1, S_2, S_0 , ayant respectivement des températures T_1, T_2 et T_0 , qui satisfont l'inégalité :

$$T_1 > T_2 > T_0$$

Conformément à la Figure XIV.08, intercalons deux transformations cycliques réversibles C et C^* .

C entre S_1 et S_2 .
 C^* entre S_2 et S_0 .

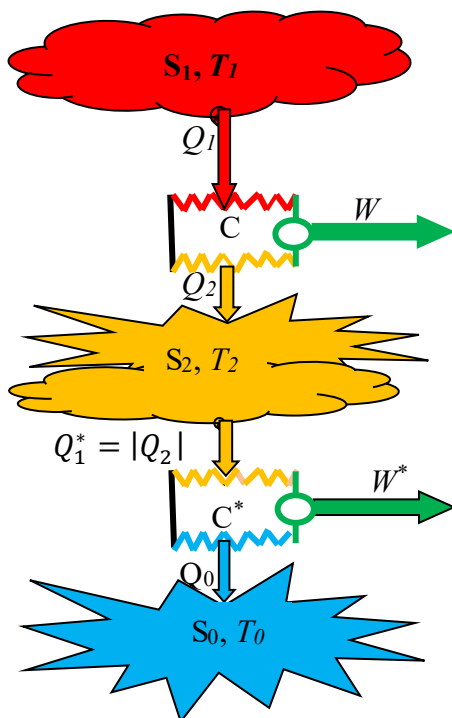
Admettons que C^* absorbe en provenance de S_2 la même quantité de chaleur que celle cédée par C. C'est-à-dire :

$$Q_1^* = |Q_2|$$

Pour la transformation cyclique réversible C^* nous avons :

$$\frac{|Q_2|}{|Q_0|} = f(T_2, T_0)$$

L'ensemble C et C^* constitue un système de transformations cycliques réversibles n'échangeant de la chaleur qu'avec les sources S_1 et S_0 , donc :



$$\frac{Q_1}{|Q_0|} = f(T_1, T_0)$$

Formons le rapport de ces deux dernières relations :

$$\frac{Q_1}{|Q_2|} = \frac{f(T_1, T_0)}{f(T_2, T_0)}$$

Or, en considérant uniquement le cyclique C, nous aurions obtenu :

$$\frac{Q_1}{|Q_2|} = f(T_1, T_2)$$

Soit :

$$f(T_1, T_2) = \frac{f(T_1, T_0)}{f(T_2, T_0)}$$

Figure XIV.08 Transformations en série ditherme

Les températures T_1 et T_2 peuvent être considérées comme des variables. La température T_0 est fixe et constitue, en quelque sorte un repère. Si bien que :

$$\frac{Q_1}{|Q_2|} = \frac{f(T_1, T_0)}{f(T_2, T_0)} = \frac{\theta(T_1)}{\theta(T_2)}$$

Prenons pour la fonction $\theta(T)$ la forme la plus simple en posant $\theta = \theta(T)$

Il vient alors :

$$\frac{Q_1}{|Q_2|} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad (\text{XIV.02})$$

Cette relation exprime, que le rapport des températures dans l'échelle θ est égal au rapport des quantités de chaleur transférées lors d'une transformation cyclique réversible. La température θ

devient une grandeur mesurable, et définit ainsi une échelle de température dite thermodynamique.

7 Cycle de Carnot

Conformément au postulat de Clausius, une transformation cyclique ditherme sera réversible si déjà les transferts de chaleur s'effectuent à la température des sources. En plus, ces deux évolutions isothermes doivent être intercalées avec d'autres transformations réversibles, pour obtenir un cycle.

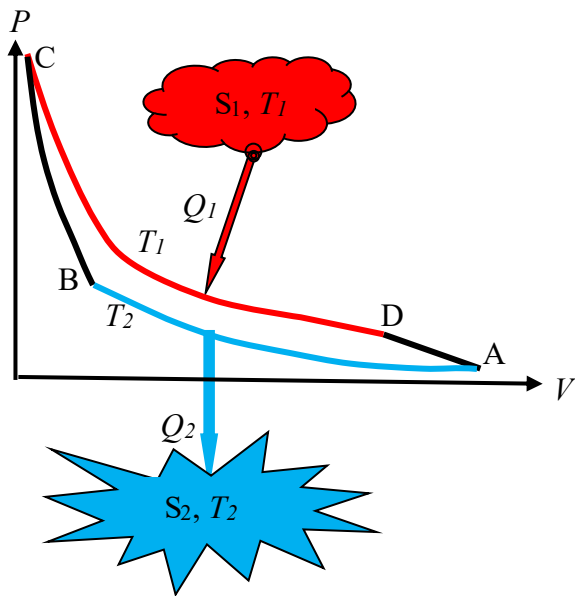
Si ces intermédiaires sont deux évolutions adiabatiques réversibles, la transformation cyclique est appelée cycle de Carnot.

Calculons le rendement d'un cycle de Carnot parcouru par une masse m d'un gaz idéal parfait.

Pour cela utilisons l'expression simplifiée du premier principe de la thermodynamique, relation (XII.06) :

$$\delta Q = dU + p dV.$$

Tout d'abord, déterminons l'expression des transferts de chaleur Q_1 et Q_2 échangés avec les sources S_1 et S_2 .



Dans ces deux évolutions isothermes la variation d'énergie interne est nulle. Puisqu'en vertu de l'expérience de Joule, l'énergie interne pour un gaz parfait n'est fonction que de la température.

La relation (XII.06) se simplifie :

$$\delta Q = p dV$$

Pour intégrer, il faut exprimer la pression p en fonction du volume V . L'équation d'état des gaz parfaits satisfait cette exigence :

$$pV = mrT$$

Figure XIV.09 Représentation d'un cycle de Carnot

Soit pour l'évolution $A \rightarrow B$: $Q_2 = mrT_2 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = mrT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$

Et pour l'évolution $C \rightarrow D$: $Q_1 = mrT_1 \int_{V_C}^{V_D} \frac{dV}{V} = mrT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}$

D'où l'expression du rendement :

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{mrT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}}{mrT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}}$$

La relation (XIII.07) permet de simplifier, puisque :

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)} = \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_D} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

D'où :

$$\frac{\ln \frac{V_B}{V_A}}{\ln \frac{V_D}{V_C}} = -1$$

En définitive, le rendement d'un cycle de Carnot s'écrit :

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (\text{XIV.03})$$

Remarque :

De la température thermodynamique, précédemment définie, et du rendement d'un cycle de Carnot, nous obtenons :

$$\frac{|Q_2|}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

La température thermodynamique est proportionnelle à la température absolue définie à partir des propriétés des gaz parfaits. Pour ces deux échelles, le kelvin est choisi comme unité. Ces deux températures sont égales.

$$T = \theta$$

Exercice XIV.1

De l'eau reçoit d'une chaudière $Q_1 = 230 \text{ kWh}$ à une température $t_1 = 460^\circ\text{C}$. Cette eau décrit un cycle de Carnot.

Sachant que la source froide est à la température $t_2 = 20^\circ\text{C}$, déterminer la quantité de chaleur Q_2 rejetée à cette source.

Corrigé

$$Q_2 = -\frac{T_2}{T_1} Q_1 = -\frac{273,15 + 20}{273,15 + 460} \times 230 = -91,965 \text{ kWh}$$

Chapitre XV

L'entropie

1 Transformations cycliques dithermes

Comme précédemment, considérons tout d'abord un cycle de Carnot et raisonnons par unité de masse, pour simplifier les écritures. Son rendement (XIV.03) permet d'écrire :

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}$$

Ou encore :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Puisque les deux transferts de chaleur s'effectuent à la température des sources, nous pouvons écrire sous forme abrégée :

$$\int_{\text{cycle}} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Par contre, s'il y a irréversibilité dans une transformation cyclique, il est intéressant d'effectuer une comparaison avec un cycle de Carnot fonctionnant entre les mêmes sources de chaleur.

Désignons par η^0 le rendement du cycle de Carnot et par η celui de la transformation cyclique ditherme irréversible. Comme nous le savons, le rendement d'une machine imparfaite est inférieur au rendement d'une machine parfaite.

Soit $\eta < \eta^0$, ce qui permet d'écrire :

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Ou encore :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$$

Il est important de préciser que les irréversibilités peuvent être de natures différentes. Il faut distinguer les irréversibilités thermiques des irréversibilités internes. Elles peuvent se produire simultanément ou séparément.

Les irréversibilités thermiques sont extérieures au cycle et proviennent de la différence de température qui existe entre la source de chaleur et le fluide qui évolue. Les transferts de chaleur ne s'effectuent donc pas isothermiquement.

Les irréversibilités internes aux transformations sont essentiellement dues aux frottements.

2 Transformations cycliques échangeant de la chaleur avec une infinité de sources

Pour qu'une transformation cyclique absolument quelconque soit réversible, il faut, qu'en plus de la réversibilité mécanique, les transferts de chaleur soient isothermes.

Pour satisfaire cette dernière condition, il faut disposer d'un très grand nombre de sources de chaleur, voire d'une infinité, la température du système variant de façon continue d'un point à un autre.

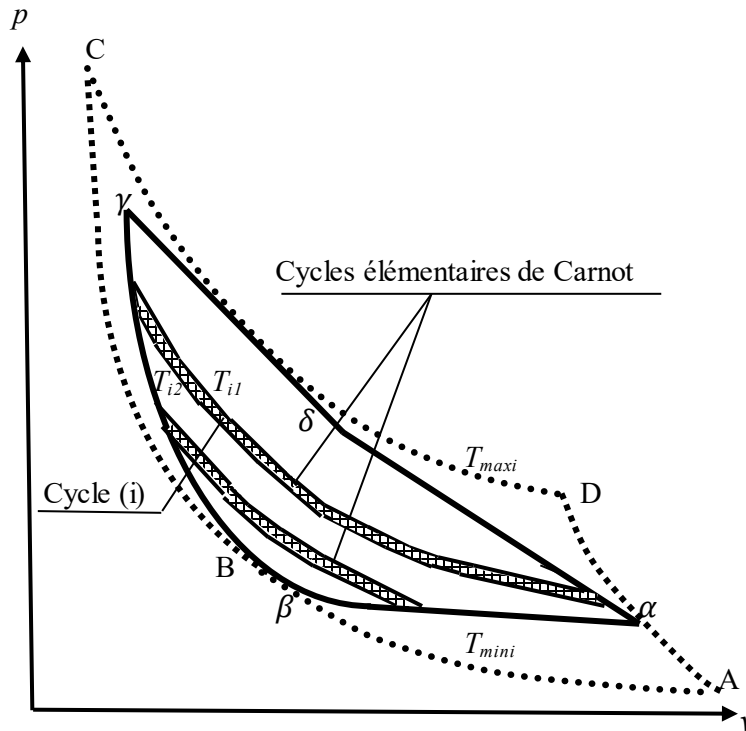


Figure XV.01 Cycle de rendement maximum

Considérons alors un cycle de Carnot ABCD, fonctionnant entre les températures extrémales T_{maxi} et T_{mini} d'une transformation cyclique $\alpha\beta\gamma\delta$, de configuration quelconque.

Décomposons alors la transformation cyclique $\alpha\beta\gamma\delta$ en un ensemble cycles élémentaires de Carnot.

Chacun de ces cycles élémentaires a un rendement inférieur à celui de ABCD.

Par exemple pour le cycle (i) nous aurions :

$$\eta_i = 1 - \frac{T_{i2}}{T_{i1}} < 1 - \frac{T_{mini}}{T_{maxi}}$$

Il en serait de même pour tous ces cycles élémentaires de Carnot ainsi que pour la transformation $\alpha\beta\gamma\delta$.

Son rendement est, en quelque sorte, une moyenne de ces cycles élémentaires.

Compte tenu des résultats précédemment obtenus, nous pouvons écrire pour chacun de ces cycles élémentaires :

$$\frac{\delta Q_{i1}}{T_{i1}} + \frac{\delta Q_{i2}}{T_{i2}} = 0$$

En faisant la somme des n cycles élémentaires constituant le cycle étudié nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta Q_{i1}}{T_{i1}} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta Q_{i2}}{T_{i2}} = 0$$

Si n tend vers l'infini (cycles infiniment petits) et en désignant par C le cycle $\alpha\beta\gamma\delta$, cette expression devient :

$$\int_C \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (\text{XV.01})$$

La quantité $\int_C \frac{\delta Q}{T}$ s'appelle l'intégrale de Clausius et l'équation ci-dessus montre qu'elle est nulle pour toute transformation cyclique réversible.

Si la transformation cyclique comporte des irréversibilités la relation (XV.01) devient :

$$\int_C \frac{\delta Q}{T} < 0 \quad (\text{XV.02})$$

Exercice XV.1

Un gaz parfait, décrit réversiblement un cycle de Beau de Rochas. C'est-à-dire, une transformation cyclique composée de deux isochores et de deux adiabatiques conformément au croquis ci-dessous.

C'est le cycle théorique des moteurs à combustion interne à allumage commandé en excluant les phases d'aspiration et d'échappement.

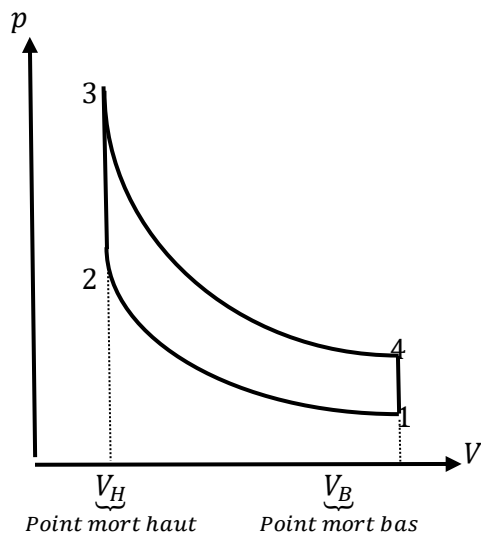


Figure XV.02 Cycle de Beau de Rochas

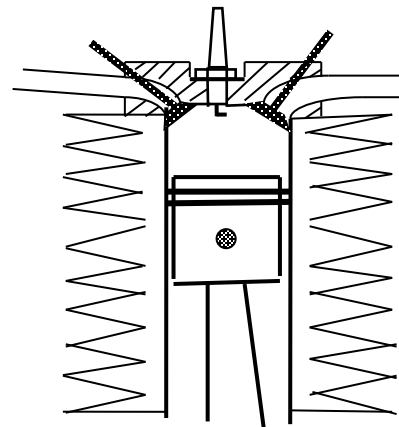


Figure XV.03 Moteur à allumage commandé

1) Calculer le rendement thermique de ce cycle en fonction du taux de compression

$$\mu = \frac{V_B}{V_H} \text{ et du } \gamma$$

2) Montrer que l'intégrale de Clausius est nulle pour cette transformation cyclique.

Corrigé.

1) Tout d'abord, suivons chacune de ces évolutions.

- Évolution adiabatique (compression) $1 \rightarrow 2$

De la relation (VIII.07) nous déduisons :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_B}{V_H}\right)^{(\gamma-1)} = \mu^{(\gamma-1)}$$

- Évolution isochore (combustion) $2 \rightarrow 3$

De l'expression simplifiée du premier principe (XII.06) et de la relation (XIII.01) nous avons :

$$\delta Q = dU = mc_V dT$$

Soit en intégrant :

$$Q_{2 \rightarrow 3} = mc_V (T_3 - T_2)$$

- Évolution adiabatique (détente) $3 \rightarrow 4$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_H}{V_B}\right)^{(\gamma-1)} = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{(\gamma-1)} \quad \text{ou} \quad \frac{T_3}{T_4} = \mu^{(\gamma-1)} \quad \text{et par suite} \quad \frac{T_3}{T_4} = \frac{T_2}{T_1}$$

- Évolution isochore $4 \rightarrow 1$

$$Q_{4 \rightarrow 1} = mc_V (T_1 - T_4)$$

Du premier principe pour une transformation cyclique, relation (VIII.04), nous déduisons le travail échangé avec le milieu extérieur :

$$-W = Q = Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{4 \rightarrow 1}$$

Pour déterminer la quantité de chaleur fournie au cycle, il est intéressant de remarquer que $T_3 > T_2$ et $T_4 > T_1$. Ce qui veut dire que $Q_{2 \rightarrow 3} > 0$ et $Q_{4 \rightarrow 1} < 0$ et par conséquent $Q_{2 \rightarrow 3}$ est la quantité de chaleur reçue par le cycle.

De la définition du rendement thermique (XIV.01) nous déduisons :

$$\eta = \frac{-W}{Q_1} = \frac{Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{4 \rightarrow 1}}{Q_{2 \rightarrow 3}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 \left(1 - \frac{T_1}{T_4}\right)}{T_3 \left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right)} = 1 - \frac{T_4}{T_3}$$

$$\text{puisque} \quad \frac{T_3}{T_4} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2}{T_3}$$

D'où l'expression du rendement thermique d'un cycle théorique de Beau de Rochas :

$$\eta = 1 - \frac{1}{\mu^{(\gamma-1)}}$$

Nous voyons ainsi que le rendement augmentera avec le taux de compression.

Remarque :

Les calculs montrent que le travail et la chaleur sont positifs lorsqu'ils entrent dans le système étudié. Par contre, ils sont négatifs lorsqu'ils en sortent. Un moyen mnémotechnique un peu trivial, consiste à penser à son porte monnaie, ce qui rentre est positif et négatif dans le cas contraire.

2) Calculons l'intégrale de Clausius pour ce cycle.

$$\begin{aligned}\int_{\text{cycle}} \frac{\delta Q}{T} &= \int_{1 \rightarrow 2} \frac{\delta Q}{T} + \int_{2 \rightarrow 3} \frac{\delta Q}{T} + \int_{3 \rightarrow 4} \frac{\delta Q}{T} + \int_{4 \rightarrow 1} \frac{\delta Q}{T} \\ \int_{\text{cycle}} \frac{\delta Q}{T} &= 0 + \int_{T_2}^{T_3} \frac{mc_v dT}{T} + 0 + \int_{T_4}^{T_1} \frac{mc_v dT}{T} \\ \int_{\text{cycle}} \frac{\delta Q}{T} &= mc_v \left(\ln \frac{T_3}{T_2} + \ln \frac{T_1}{T_4} \right) = mc_v \ln \frac{T_3 T_1}{T_2 T_4}\end{aligned}$$

or $\frac{T_1 T_3}{T_2 T_4} = 1$, il s'ensuit donc :

$$\int_{\text{cycle}} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

3 Transformations non cycliques

Soit une transformation non cyclique amenant un système d'un état initial (*i*) à un état final (*f*). Deux cas sont à envisager suivant que la transformation est réversible ou irréversible.

3-1 Transformations réversibles

Pour faire subir à un système une transformation réversible, utilisons le chemin "*a*" pour passer de l'état initial (*i*) à l'état final (*f*). Puis revenons, réversiblement, à l'état initial (*i*) mais, cette fois, en utilisant le chemin "*b*", conformément à la figure XV.04.

Remarquons que $i \xrightarrow{a} f \xrightarrow{b} i$ devient ainsi une transformation cyclique réversible.

L'intégrale de Clausius est donc nulle.

$$\int_{\text{cycle}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{i \rightarrow f} \frac{\delta Q}{T} + \int_{f \rightarrow i} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Pour aller de (*i*) à (*f*) nous aurions pu utiliser un autre chemin réversible, par exemple, le parcours "*c*" et revenir, comme précédemment, par le chemin "*b*".

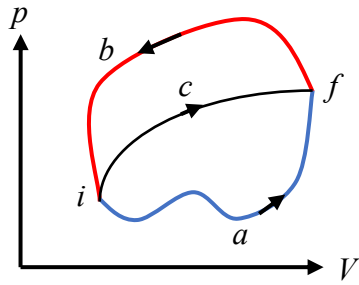


Figure XV.04 Divers chemins

Un raisonnement calqué sur le précédent conduit à écrire :

$$\int_{i \rightarrow f}^{\underline{c}} \frac{\delta Q}{T} + \int_{f \rightarrow i}^{\underline{b}} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Ce qui permet de déduire :

$$\int_{i \rightarrow f}^{\underline{a}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{i \rightarrow f}^{\underline{c}} \frac{\delta Q}{T}$$

Quelle que soit la transformation réversible, pour aller du point (i) au point (f), l'intégrale de Clausius conserve la même valeur. Elle ne dépend donc que de l'état initial (i) et de l'état final (f) du système.

Ce qui peut s'exprimer par :

$$\int_{i \rightarrow f} \frac{\delta Q}{T} = s_f - s_i \quad (\text{XV.03})$$

Cette fonction d'état s , ainsi définie, est appelée "entropie", plus précisément ici, entropie massique ($\text{J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$). Comme u et h , elle n'est définie, a priori, qu'à une constante près.

Lorsque l'entropie n'est pas massique (J.K^{-1}), elle est notée S .

Pour toute transformation élémentaire réversible, nous avons :

$$ds = \frac{\delta Q}{T} \text{ ou } T ds = \delta Q \quad (\text{XV.04})$$

ds est une différentielle totale exacte, ce qui n'est pas le cas de δQ .

Une évolution adiabatique réversible a lieu à entropie constante, $ds = 0$. Elle est dite isentropique.

L'entropie n'est pas accessible à nos sens, comme d'ailleurs l'énergie interne, l'enthalpie ou l'énergie cinétique.

Il est intéressant de remarquer que toute énergie est le produit d'une variable intensive par une variable extensive.

Par exemple :

Dans le champ de pesanteur :

$$\delta W = - \underbrace{m}_{\text{extensive}} \underbrace{g}_{\text{intensive}} \underbrace{dz}_{\text{extensive}}$$

Pour la compression d'un gaz dans un capsulisme : $\delta W = - \underbrace{p}_{\text{intensive}} \underbrace{dV}_{\text{extensive}}$

Pour une énergie thermique :

$$\delta Q = \underbrace{T}_{\text{intensive}} \underbrace{dS}_{\text{extensive}}$$

L'entropie est une variable extensive. L'entropie d'un système est la somme des entropies de ses constituants. Par exemple, l'entropie d'un système composé d'air et d'eau sera la somme de l'entropie de l'air et de l'entropie de l'eau.

3-2 Transformations irréversibles

Cette fois, pour aller de l'état initial (i) à l'état final (f) en utilisant le chemin " a ", faisons subir au système une transformation irréversible. Puis revenons, réversiblement, à l'état initial (i) en empruntant le chemin " b ", conformément à la figure XI.05.

Cette transformation cyclique $i \xrightarrow{a} f \xrightarrow{b} i$ est donc irréversible et en vertu de la relation (XV.02) nous avons :

$$\int_{i \xrightarrow{a} f \xrightarrow{b} i} \frac{\delta Q}{T} < 0$$

Or cette intégrale peut se décomposer de la façon suivante :

$$\int_{i \rightarrow f} \frac{\delta Q}{T} + \underbrace{\int_{f \rightarrow i} \frac{\delta Q}{T}}_{s_i - s_f} < 0$$

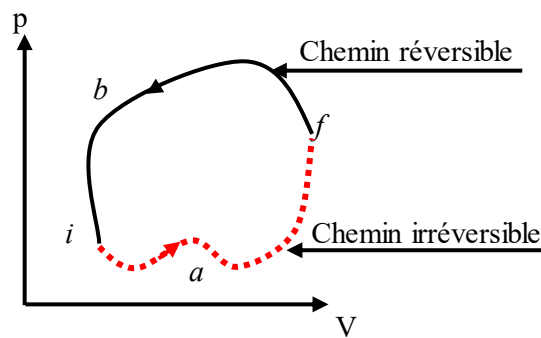


Figure XV.05 Transformation cyclique irréversible

Il s'ensuit donc :

$$\int_{i \rightarrow f} \frac{\delta Q}{T} < s_f - s_i \quad (\text{XV.05})$$

et sous forme différentielle :

$$\frac{\delta Q}{T} < ds \quad \text{ou} \quad \delta Q < T ds \quad (\text{XV.06})$$

Ces résultats peuvent également s'obtenir en comparant une transformation irréversible avec une transformation réversible en faisant passer, dans ces deux cas, un fluide du même état initial au même état final.

Raisonnons sur une transformation élémentaire et appliquons le premier principe de la thermodynamique (XII.03). Utilisons l'indice " r " pour la transformation réversible et " ir " pour la transformation irréversible.

$$\delta w_r + \delta Q_r = \delta w_{ir} + \delta Q_{ir} = du + de_c$$

Du fait des irréversibilités $\delta w_{ir} - \delta w_r = \delta f > 0$, cette différence est toujours positive quel que soit le signe du travail δw .

- Si $\delta w > 0$ le travail est reçu par le fluide, par exemple ; les pompes, les ventilateurs et les compresseurs. Pour obtenir le même résultat, une machine imparfaite consommera plus d'énergie que la machine parfaite, $\delta w_{ir} > \delta w_r$ donc $\delta f > 0$.

- Si $\delta w < 0$ le travail est fourni par le fluide comme par exemple les moteurs ou les turbines. Une machine imparfaite produira moins d'énergie que la machine parfaite pour obtenir le même résultat :

$$|\delta w_{ir}| < |\delta w_r| \text{ et par conséquent } \delta w_{ir} - \delta w_r = -|\delta w_{ir}| - (-|\delta w_r|) = \delta f > 0.$$

Il s'ensuit :

$$\delta w_{ir} - \delta w_r = \delta Q_r - \delta Q_{ir} = \delta f > 0$$

Avec ces notations la relation (XV.04) permet d'écrire : $\delta Q_r = T ds$

$$\text{Soit : } T ds = \delta Q_{ir} + \delta f$$

Dorénavant on écrira :

$$T ds = \delta Q + \delta f \quad (\text{XV.07})$$

En posant tout simplement : $\delta Q = \delta Q_{ir}$

Notons que l'on retrouve très facilement les résultats précédemment établis.

- Si l'évolution est réversible : $\delta f = 0$ et $T ds = \delta Q$

- Si l'évolution est irréversible, $\delta f \neq 0$ et $T ds = \delta Q + \delta f$
ou encore $\delta Q < T ds$ puisque $\delta f > 0$

Ainsi les relations (XII.05) et (XII.06) revêtent une forme beaucoup plus simple.

$$T ds = du + p dv = dh - v dp \quad \text{ou} \quad T dS = dU + p dV = dH - V dp \quad (\text{XV.08})$$

Cette équation reste valable aussi bien pour une évolution réversible que pour une évolution irréversible.

Exercice XV.2

Un gaz idéal parfait, de masse m et de constantes r et γ , subit des transformations qui l'amènent d'un état initial (i), caractérisé par p_i et T_i , à un état final (f) où règne une pression p_f et une température T_f .

Calculer la variation d'entropie en fonction des données.

Corrigé.

La variation d'entropie s'obtient à partir de la relation (XV.08) :

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{V dp}{T}$$

La variation élémentaire de l'enthalpie s'obtient à partir de la relation (XIII.02), en tenant compte de l'expression de la capacité thermique massique en fonction des constantes r et γ .

$$dH = m c_p dT = m \frac{\gamma r}{\gamma - 1} dT$$

L'équation d'état des gaz parfaits permet d'écrire :

$$\frac{V}{T} = \frac{mr}{p}$$

Si bien que nous avons :

$$dS = mr \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} \right)$$

D'où la variation d'entropie en intégrant cette dernière relation :

$$S_f - S_i = mr \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_f}{T_i} - \ln \frac{p_f}{p_i} \right)$$

$$S_f - S_i = mr \ln \left[\left(\frac{T_f}{T_i} \right)^{\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)} \frac{p_i}{p_f} \right]$$

Remarque :

Si l'évolution était isentropique $S_f = S_i$, $\left[\left(\frac{T_f}{T_i} \right)^{\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)} \frac{p_i}{p_f} \right] = 1$ on retrouve la relation (XIII.07) pour une évolution adiabatique réversible.

4 Extension du second principe aux irréversibilités thermiques

La relation (XV.07) est l'égalité de Jouguet limitée aux irréversibilités internes. En effet nous nous sommes uniquement intéressés à la transformation d'un fluide sans nous préoccuper de la réversibilité ou non des transferts de chaleur.

Le postulat de Clausius montre que les irréversibilités d'ordre thermique proviennent des différences de température entre la source et le système évoluant. Il est difficile, dans la pratique, d'annuler cet écart de température.

Il est important de bien différencier les pertes thermiques, extérieures au système qui évolue, et les pertes internes comme le frottement par exemple.

Pour bien distinguer ces pertes, comparons, comme précédemment, des transformations réversible et irréversible, qui font passer le système, dans les deux cas, du même état initial (i) au même état final (f) infiniment voisin.

Supposons qu'au cours de sa transformation élémentaire, avec transfert de chaleur, le système se trouve à une température $T_{\text{système}}$ alors que la température θ règne dans la source.

Pour aller réversiblement de l'état initial (i) à l'état final (f), le transfert de chaleur est obligatoirement isotherme à la température θ de la source. Les autres évolutions sont nécessairement isentropiques.

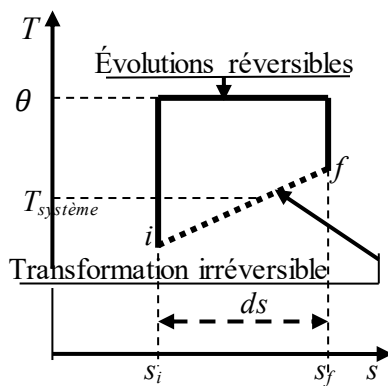
Représentons ces évolutions sur un diagramme T, s . Ce diagramme, très utile à l'étude des turbomachines, sera traité lors d'un prochain chapitre.

De la même façon que précédemment, utilisons l'indice " r " pour la transformation réversible et " ir " pour la transformation irréversible.

Pour aller réversiblement de i à f nous avons :

$$\delta Q_r = \theta ds$$

Par comparaison avec la transformation irréversible : $\delta Q_r = \delta Q_{ir} + \delta f_{\text{totales}}$



Le terme $\delta f_{\text{totales}}$ représente ici les pertes totales d'énergie.

Ces pertes comptabilisent les irréversibilités thermiques plus les irréversibilités internes.

Pour faire apparaître les pertes internes de la transformation irréversible $i \rightarrow f$, utilisons la relation (XV.07) :

$$Tds = \delta Q_{ir} + \delta f$$

Figure XV.06 Transformations élémentaires

Cette fois δf représente, comme nous le savons, la perte énergétique interne.

Afin d'exprimer la perte totale, on élimine dans ces trois dernières relations les transferts de chaleur δQ_{ir} et δQ_r . Soit :

$$\delta f_{\text{totales}} = \underbrace{(\theta - T)ds}_{\text{pertes thermiques}} + \underbrace{\delta f}_{\text{pertes internes}} \quad (\text{XV.09})$$

En quelque sorte $(\theta - T)ds$ mesure le travail produit par une transformation cyclique réversible fonctionnant entre la source chaude à la température θ et la source froide à la température T .

Cette perte, par irréversibilité thermique $(\theta - T)ds$, revêt un caractère idéal. Elle constitue le supplément de travail que l'on tirerait de l'équilibre thermique du système avec la source. Par contre, la perte interne δf appartient bien au phénomène réel.

C'est l'exergie qui développe ces notions de pertes thermiques et internes. L'exergie, fonction d'état, est utile dans l'étude des cycles, un peu moins dans le domaine spécifique aux turbomachines.

Exercice XV.3

Un corps solide de capacité thermique constante " mc_p " se trouvant à la température T_i est mis en contact, à pression constante, avec une source de chaleur à la température $\theta > T_i$. Ce corps se met en équilibre thermique à la température $T_f = \theta$.

Calculer la variation d'entropie du système constitué par la source et le corps.

Corrigé

Aussi bien pour le corps que pour la source, l'évolution est purement thermique.

La variation d'entropie du système est la somme de celles qui sont obtenues par la source et le corps.

- Pour la source le transfert de chaleur est réversible puisqu'il s'effectue à la température constante θ . La quantité de chaleur cédée par la source est opposée à celle qui est reçue par le corps.

$$\delta Q_{\text{corps}} = mc_p dT = -\delta Q_{\text{source}}$$

$$Q_{\text{corps}} = mc_p(\theta - T_i) = -Q_{\text{source}}$$

(le travail et la chaleur sont positifs lorsqu'ils entrent dans le système étudié et négatifs dans le cas contraire)

La variation d'entropie de la source est donc :

$$\Delta S_{\text{source}} = -\frac{mc_p(\theta - T_i)}{\theta}$$

- Pour le corps solide, nous avons à priori : $Tds = \delta Q + \delta f$ mais comme l'évolution est uniquement calorifique, (par exemple, une barre métallique introduite dans un four) le terme caractérisant les irréversibilités internes est supposé nul. $\delta f = 0$

Par suite la variation d'entropie du corps est :

$$ds_{\text{corps}} = mc_p \frac{dT}{T}$$

$$\Delta S_{\text{corps}} = mc_p \ln \frac{\theta}{T_i}$$

La variation d'entropie du système constitué par la source et le corps est donc :

$$s_f - s_i = mc_p \left(\ln \frac{\theta}{T_i} - 1 + \frac{T_i}{\theta} \right)$$

5 Variation d'entropie

Tout changement d'état d'un système s'accompagne d'une variation d'entropie que nous pouvons écrire sous la forme :

$$ds = \underbrace{\frac{\delta Q}{T}}_{ds_e} + \underbrace{\frac{\delta f}{T}}_{ds_i}$$

La première contribution ds_e résulte des interactions entre le système et son environnement. S'il s'agit d'une évolution adiabatique, réversible ou irréversible, ds_e est nulle. En quelque sorte c'est l'entropie transférée de l'extérieur et ds_e peut être négative, nulle ou positive suivant la transformation considérée.

La deuxième contribution ds_i provient de l'entropie créée dans le système au cours de sa transformation. Elle représente la dégradation énergétique produite par des processus internes au système. Elle ne peut pas être négative.

$$ds_i = 0 \quad \text{pour une transformation réversible}$$

$$ds_i > 0 \quad \text{pour une transformation irréversible}$$

6 Entropie des systèmes isolés

Considérons une transformation réelle, donc irréversible, d'un système isolé. En vertu de la relation (XV.02) nous avons :

$$\int_{i \rightarrow f} \frac{\delta Q}{T} < s_f - s_i$$

Puisque le système est isolé, il ne peut pas y avoir de transfert de chaleur avec son milieu extérieur, donc $\delta Q = 0$ et par suite $s_i < s_f$

Si un système isolé évolue, l'entropie du système croît en général. Ce n'est que dans le cas idéal où toutes les transformations seraient réversibles que l'entropie demeurerait stationnaire.

Ce théorème est attribué à Clausius.

Clausius, considérant l'univers comme un système isolé, avait conclu que l'entropie de l'univers tend vers un maximum. L'augmentation d'entropie d'un système isolé est liée à une dégradation énergétique qui se convertit en chaleur. Ce qui conduit à penser que l'évolution du monde ne pourra tendre que vers l'égalisation des températures. Le monde serait alors dans un vaste état d'équilibre thermodynamique dans lequel aucun événement ne pourrait plus se produire.

Cette proposition entraîne que l'univers ne passe jamais deux fois par le même état. Il convient d'accueillir avec prudence ces théories scientifico-philosophiques, car rien ne nous permet d'assurer que le concept d'entropie est valable dans toutes les régions de l'univers. En particulier, là où il règne des températures se chiffrant par des centaines de milliards de degrés.

Chapitre XVI

Relations thermodynamiques

1 Généralités

Des méthodes purement mathématiques permettent d'obtenir des relations utilisant les propriétés thermodynamiques des fluides. L'équation d'état, d'un corps pur à l'état de fluide homogène, est caractérisée par une équation de la forme :

$$F(p, v, T) = 0$$

Cette relation peut également se mettre sous les formes suivantes :

$$v = v(p, T)$$

$$p = p(v, T)$$

$$T = T(p, v)$$

Dont les différentielles sont :

$$\frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{\partial F}{\partial T} dT = 0$$

Ou avec une autre écriture :

$$F'_p dp + F'_v dv + F'_T dT = 0 \quad (\text{XVI.01})$$

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT \quad (\text{XVI.02})$$

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT \quad (\text{XVI.03})$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v dp + \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p dv \quad (\text{XVI.04})$$

Ces notations sont utilisées par les thermodynamiciens.

Elles rappellent, tout simplement, que la dérivée s'est effectuée en considérant comme constante la variable portée en indice.

Dans les relations ci-dessus, ces notations peuvent paraître superflues. Par contre, si la situation d'un fluide est caractérisée par des fonctions d'état comme par exemple : $F(h, s, p) = 0$, nous verrons apparaître des termes de la forme :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s, \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p \text{ etc...}$$

D'où la nécessité d'utiliser ces notations pour lever toute ambiguïté.

Travaillons sur les expressions précédemment obtenues. Portons (XVI.02) dans (XVI.01) et groupons les termes en dp et dT .

$$\left[F_p' + F_v' \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T\right] dp + \left[F_T' + F_v' \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right] dT = 0$$

Les termes entre les "crochets" sont nuls, et par suite :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -\frac{F_p'}{F_v'} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\frac{F_T'}{F_v'}$$

Faisons une permutation circulaire ou portons (XVI.03) et (XVI.04) dans (XVI.01) :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p = -\frac{F_v'}{F_T'} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v = -\frac{F_p'}{F_T'}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -\frac{F_T'}{F_p'} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\frac{F_v'}{F_T'}$$

Le lecteur vérifiera que les relations ci-dessous sont également satisfaites :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = 1$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p = 1$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = 1$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v = -1$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p = -1$$

2 Coefficients de dilatation et de compressibilité

Les dérivées partielles figurant dans les relations précédentes permettent de définir les coefficients suivants :

- Coefficient de dilatation isobare :

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (\text{XVI.05})$$

- Coefficient de compression isochore :

$$\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \quad (\text{XVI.06})$$

- Coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad \text{XVI.07})$$

Pour un accroissement de pression, nous avons une diminution de volume, d'où la nécessité de mettre un signe moins devant cette expression.

Ces trois coefficients ne sont pas indépendants, ils sont liés par une relation facile à établir :

$$\chi_T = \frac{\alpha}{p\beta} \quad (\text{XVI.08})$$

- Coefficient de compressibilité isentropique :

$$\chi_s = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s \quad (\text{XVI.09})$$

Exercice XVI.1

Les coefficients de dilatation isobare α et compressibilité isotherme χ_T d'un certain gaz peuvent être représentés par les relations empiriques suivantes :

$$\alpha = \frac{r}{pv} \quad \text{et} \quad \chi_T = \frac{1}{p} + \frac{a}{v}$$

Où r est la constante de ce gaz, " a " une constante.

Déterminer l'équation d'état de ce gaz sachant que pour v fixé, nous avons p qui tend vers zéro si T tend également vers zéro.

Corrigé

Par définition de ces coefficients, nous avons :

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{r}{pv} \quad \text{et} \quad \chi_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{p} + \frac{a}{v}$$

Cela s'intègre facilement en considérant que la température T est une fonction de p et de v . Soit :

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv = \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v} dp + \frac{1}{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p} dv$$

Or :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \beta p = \frac{\alpha}{\chi_T} = \frac{r}{pv} \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{a}{v}} = \frac{r}{v + ap}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \alpha v = \frac{r}{p}$$

Donc :

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv = \left(\frac{v}{r} + \frac{ap}{r}\right) dp + \frac{p}{r} dv$$

Il s'ensuit :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v = \left(\frac{v}{r} + \frac{ap}{r}\right) \Rightarrow T = \frac{pv}{r} + \frac{ap^2}{2r} + f(v)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p = \frac{p}{r} + \frac{df(v)}{dv} = \frac{p}{r} \Rightarrow \frac{df(v)}{dv} = 0 \Rightarrow f(v) = \text{Constante}$$

$$T = \frac{pv}{r} + \frac{ap^2}{2r} + \text{Constante}$$

Puisque pour v fixé, nous avons p et T qui tendent vers zéro, cela implique que la constante est nulle. L'équation d'état de ce gaz s'écrit donc :

$$pv + \frac{ap^2}{2} = rT$$

3 Coefficients calorimétriques

Faisons subir une transformation élémentaire et réversible à un fluide homogène quelconque. Pour une évolution réversible ($\delta f = 0$) et pour une masse unité, la relation (XV.08) s'écrit :

$$T ds = \delta Q = du + p dv = dh - v dp$$

L'énergie interne u et l'enthalpie h peuvent s'exprimer en fonction des couples (p, v) , (p, T) ou encore (v, T) . Il en est donc de même pour la quantité de chaleur transférée Q .

Soit à choisir, pour δQ , parmi l'une des trois relations suivantes :

$$\delta Q = c_v dT + l_T dv \quad (\text{XVI.10})$$

où c_v et l_T sont des fonctions de T et v

$$\delta Q = c_p dT + h_T dp \quad (\text{XVI.11})$$

où c_p et h_T sont des fonctions de T et p

$$\delta Q = \lambda_v dp + \mu_p dv \quad (\text{XVI.12})$$

où λ_v et μ_p sont des fonctions de p et v

La quantité de chaleur δQ , transférée par le système avec son milieu extérieur, peut toujours être exprimée en fonction de deux des six coefficients c_v , l_T , c_p , h_T , λ_v , et μ_p . Ces coefficients ne sont pas indépendants les uns des autres. Il existe entre eux quatre relations.

Les coefficients l_T , h_T , λ_v , et μ_p sont exprimés en fonction des capacités thermiques massiques c_v et c_p qui sont facilement accessibles à l'expérience. A titre d'exemple exprimons l_T et h_T .

Des relations (XVI.10), (XVI.02) et (XVI.11), nous déduisons :

$$\delta Q = c_v dT + l_T dv = c_v dT + l_T \left[\left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT \right] = c_p dT + h_T dp$$

Groupons les termes en dT et dp :

$$\left[c_v + l_T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - c_p \right] dT + \left[l_T \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T - h_T \right] dp = 0$$

Soit encore :

$$l_T = \frac{c_p - c_v}{\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p}$$

$$h_T = l_T \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = \frac{c_p - c_v}{\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = (c_p - c_v) \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p = - \frac{c_p - c_v}{\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v}$$

On trouverait de même :

$$\mu_p = \frac{c_p}{\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p} \quad \text{et} \quad \lambda_v = \frac{c_v}{\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v}$$

Remarquons, qu'expérimentalement, il faut attacher un soin tout particulier à la détermination numérique du c_v et du c_p car les évolutions ne sont jamais rigoureusement réversibles.

4 Formules de Reech

Pour une évolution isentropique, la relation (XVI.12) permet d'écrire :

$$0 = \lambda_v dp + \mu_p dv \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dp} = - \frac{\lambda_v}{\mu_p}$$

Cette relation est restrictive aux évolutions isentropiques si bien qu'il est préférable d'écrire $\left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s$ au lieu de $\frac{dv}{dp}$. Remplaçons λ_v et μ_p par leur valeur trouvée précédemment :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = -\frac{c_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}{c_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

Puisque

$$\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v} = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v = -\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T} = -\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

Il vient en définitive la relation connue sous le nom de formule de Reech.

$$\gamma = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s} \quad (\text{XVI.13})$$

5 Formules de Clapeyron

Comme précédemment, faisons subir une transformation élémentaire réversible à un fluide. Tout d'abord, considérons que l'énergie interne u et l'entropie s sont fonction des deux variables indépendantes T et v .

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT \quad (\text{XVI.14})$$

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v dT \quad (\text{XVI.15})$$

On déduit des relations (XVI.10), (XVI.14) et (XVI.04) :

$$\delta Q = c_v dT + l_T dv = du + p dv = T ds$$

$$\delta Q = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p \right] dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT$$

Regroupons les termes en dv et dT .

$$0 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p - l_T \right] dv + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v - c_v \right] dT$$

On déduit alors :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = l_T - p \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = c_v \quad (\text{XVI.16})$$

La relation et (XVI.15) permet d'écrire :

$$ds = \frac{\delta Q}{T} = \frac{c_v}{T} dT + \frac{l_T}{T} dv$$

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v dT$$

Soit :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = \frac{l_T}{T} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = \frac{c_v}{T}$$

En écrivant que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial T \partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial T} = \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial v}$$

On obtient :

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_T = \left(\frac{\partial l_T}{\partial T} \right)_v - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \left(\frac{\partial l_T}{\partial T} \right)_v - \frac{l_T}{T}$$

Ce qui permet d'écrire la première formule de Clapeyron :

$$l_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \quad (\text{XVI.17})$$

En choisissant T et p comme variables indépendantes on obtient la deuxième formule de Clapeyron :

$$h_T = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (\text{XVI.18})$$

Exercice XVI.2

Montrer que nous avons la relation : $\left(\frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_v$

Corrigé

Précédemment nous avons montré que :

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_T = \left(\frac{\partial l_T}{\partial T} \right)_v - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

De la première formule de Clapeyron nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial l_T}{\partial T} \right)_v = \frac{\partial}{\partial T} \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \right] = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v + T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_v$$

D'où le résultat demandé : $\left(\frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_v$

6 Formule de Mayer généralisée

De la première formule de Clapeyron et de l'expression de l_T en fonction de c_p et de c_v on obtient immédiatement :

$$c_p - c_v = T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \quad (\text{XVI.19})$$

Evidemment on obtiendrait le même résultat en travaillant avec la deuxième formule de Clapeyron.

7 Formules de Maxwell

Pour établir les formules de Maxwell on considère les quatre couples de variables indépendantes, sv, sp, Tv, Tp , pour décrire une transformation. A chacun de ces couples, on associe une fonction caractérisant l'état du système.

7-1 Première relation de Maxwell

La relation (XV.08) permet d'associer l'énergie interne au couple de valeurs indépendantes s, v . Soit :

$$du = T ds - p dv = \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_T ds + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_s dv$$

Il s'ensuit que :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_T = T \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = -p$$

La première relation de Maxwell s'obtient immédiatement en écrivant : $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial v} = \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial s}$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_s = - \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_v \quad (\text{XVI.20})$$

On procède de façon analogue pour obtenir les autres relations de Maxwell.

7-2 Deuxième relation de Maxwell

Au couple de valeurs s et p on associe l'enthalpie $dh = T ds + v dp$ et on obtient :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = - \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p \quad (\text{XVI.21})$$

7-3 Troisième relation de Maxwell

Il faut définir la fonction d'état $F = u - Ts$, appelée énergie libre ou fonction de Helmholtz, pour le couple de valeurs T et v .

On a donc :

$$dF = du - T ds - s dT = du - (du + pdv) - sdT$$

$$dF = pdv - sdT = \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_v dT$$

Ce qui permet de déduire la troisième relation de Maxwell :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \quad (\text{XVI.22})$$

7-4 Quatrième relation de Maxwell

Au couple T et p on associe une fonction d'état G que l'on désigne par enthalpie libre ou fonction de Gibbs : $G = h - Ts$.

$$dG = dh - T ds - s dT = dh - (dh - vdp) - sdT$$

$$dG = vdp - sdT = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT$$

D'où la quatrième relation de Maxwell :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \quad (\text{XVI.23})$$

Exercice XVI.3

On comprime isentropiquement, de 1 à 10 bar, un liquide ayant une température initiale $t_i = 26^\circ\text{C}$.

Calculer la température finale t_f sachant que ρ , c_p et α sont constants et ont pour valeurs :

$$\rho = 700 \text{ kg/m}^3 \quad c_p = 25000 \text{ J/kg.K} \quad \alpha = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Corrigé

La deuxième relation de Maxwell est bien appropriée pour résoudre ce genre de problème.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p$$

Or le deuxième membre de cette relation peut s'écrire, compte tenu de (XVI.05) :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \alpha v \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p$$

De (XVI.11) on déduit :

$$ds = \frac{\delta Q}{T} = \frac{c_p}{T} dT + \frac{h_T}{T} dp = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dp$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{c_p}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p} = \frac{\alpha v}{\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p}$$

$$\frac{c_p}{T} = \frac{\alpha v}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s}$$

Soit :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{\alpha v T}{c_p} = \frac{\alpha T}{\rho c_p}$$

Puisque l'évolution est isentropique, nous pouvons remplacer les " ∂ " par des " d ". Soit :

$$\frac{dT}{T} = \frac{\alpha}{\rho c_p} dp \quad \Rightarrow \quad T_f = T_i e^{\frac{\alpha}{\rho c_p}(p_f - p_i)}$$

Passons à l'application numérique :

$$T_f = (273,15 + 26) e^{\frac{1,3 \cdot 10^{-3}}{700 \times 2500} (10 - 1) \cdot 10^5}$$

$$T_f = 299,17 K$$

Chapitre XVII

Gaz réels

Le chapitre précédent est l'outil indispensable aux traitements analytiques des gaz réels.

1 Validité de l'équation d'état des gaz parfaits

Pour mettre en évidence les écarts entre les gaz parfaits et les gaz réels on utilise souvent le facteur de compressibilité :

$$Z = \frac{pV_m}{RT} = \frac{pv}{rT} \quad (\text{XVII.01})$$

Par exemple pour une température de 0°C le tableau XVII.1 donne les valeurs de Z pour différents gaz à diverses pressions.

Gaz	Pression en bar		
	0,1	1	51
H	1,0000	1,0001	1,0253
H ₂	1,0002	1,0007	1,0316
N ₂	0,9999	0,9995	0,9841
O ₂	1,0000	0,9992	0,9565
CO ₂	0,9993	0,9932	0,104

Tableau XVII.1 Facteur de compressibilité

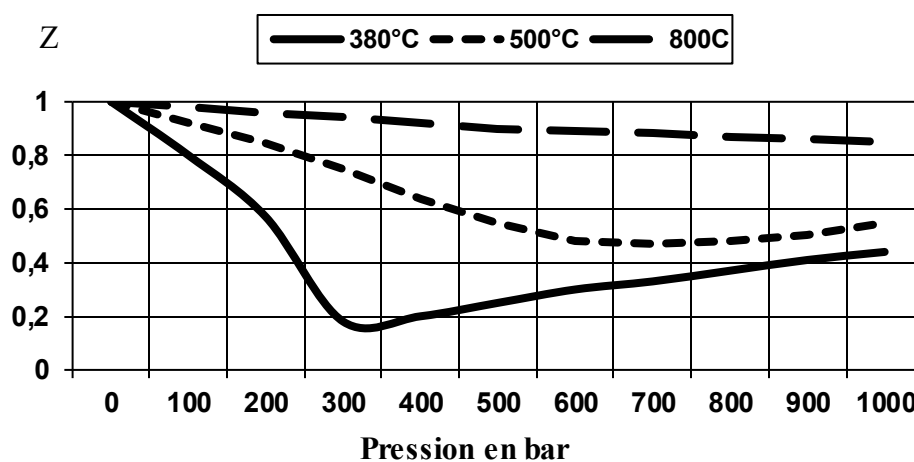


Figure XVII.01 Facteur de compressibilité de la vapeur d'eau

Souvent ces variations sont représentées graphiquement en portant Z en ordonnée et la pression p en abscisse. Pour les gaz parfaits et pour les gaz réels aux très faibles pressions, le facteur de compressibilité Z est égal à l'unité.

2 Equations d'état sous forme du viriel

Avec une excellente approximation, on obtient l'expression d'une isotherme en considérant la relation empirique :

$$Z = 1 + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \dots \quad (\text{XVII.02})$$

Dans ce développement en série nous avons bien $Z = 1$ pour $p = 0$.

Puisqu'en première approximation V_m varie comme $\frac{1}{p}$, il est aisé d'exprimer, à température constante, Z en fonction du volume V_m :

$$Z = 1 + \frac{B^*}{V_m} + \frac{C^*}{V_m^2} + \frac{D^*}{V_m^3} + \dots \quad (\text{XVII.03})$$

Ces deux développements en série sont appelés "équations d'état sous forme du viriel". Les coefficients $B, C, D, \dots$ ou $B^*, C^*, D^*, \dots$ sont des fonctions de la température et s'appellent deuxième, troisième, quatrième, etc... coefficient du viriel.

Exercice XVII.1

Montrer que les coefficients du viriel sont liés par les relations :

$$B = \frac{B^*}{RT} \quad ; \quad C = \frac{C^* - B^*}{(RT)^2} \quad ; \quad D = \frac{D^* + 2B^{*3} - 3B^*C^*}{(RT)^3} \quad ; \quad \text{etc} \dots$$

Corrigé

Tirons, des relations (XVII.01) et (XVII.03), la valeur de la pression p .

$$p = RT \left(1 + \frac{B^*}{V_m} + \frac{C^*}{V_m^2} + \frac{D^*}{V_m^3} + \dots \right)$$

D'où les expressions de p^2 et p^3 en conservant que les premiers termes.

$$p^2 = \left(\frac{RT}{V} \right)^2 \left(1 + \frac{2B^*}{V} + \frac{1}{V^2} (2C^* + B^{*2}) + \frac{1}{V^3} (2C^*B^* + D^*) + \dots \right)$$

$$p^3 = \left(\frac{RT}{V} \right)^3 \left(1 + \frac{3B^*}{V} + \frac{1}{V^2} (3C^* + 3B^{*2}) + \dots \right)$$

Portons ces valeurs dans la relation (XVII.02). En regroupant les termes on obtient :

$$Z = 1 + \frac{BRT}{V} + \frac{1}{V^2} (BB^*RT + CR^2T^2) + \frac{1}{V^3} (BC^*RT + 2B^*CR^2T^2 + DR^3T^3) + \dots$$

Par identification avec la relation (XVII.03) on obtient le résultat cherché :

$$\begin{aligned}
 B^* &= BRT & \Rightarrow & B = \frac{B^*}{RT} \\
 C^* &= BB^*RT + CR^2T^2 & \Rightarrow & C = \frac{C^* - B^*}{(RT)^2} \\
 D^* &= BC^*RT + 2B^*CR^2T^2 + DR^3T^3 & \Rightarrow & D = \frac{D^* + 2B^*C^* - 3B^*C^*}{(RT)^3}
 \end{aligned}$$

3 Pression interne et covolume

Pour un gaz parfait les forces d'interactions à distance entre molécules sont nulles et par conséquent les forces de pression sont uniquement dues à l'action exercée par les parois du récipient qui les contient.

Dans le cas d'un gaz réel il en est tout autrement. La pression p exercée par un gaz réel, sur la paroi du récipient qui le contient, sera moins grande que celle d'un gaz parfait qui occuperait le même volume dans des conditions de température identiques.

On pose alors :

$$\text{pression du gaz parfait} = p + \pi$$

La quantité π est appelée pression interne.

Dans le modèle du gaz parfait, il est admis que les molécules peuvent être considérées comme ponctuelles. En réalité, ce n'est pas le cas. Pour se déplacer, les molécules ne disposent pas du volume du récipient qui les contient mais d'un volume inférieur.

Le volume à comptabiliser est celui qui est compris entre les molécules. On considère donc le volume :

$$V - b$$

V est le volume du récipient.

b est appelé le covolume. Il correspond au volume minimal que puisse occuper la matière. On montre que b est égal à quatre fois le volume propre des molécules.

Ces remarques, concernant les notions de pression interne et de covolume, incitent à remplacer l'équation d'état des gaz parfaits par la relation :

$$(p + \pi)(V_m - b) = RT \quad (\text{XVII.04})$$

La relation (XVII.04) n'est guère utilisée sauf pour des pressions très élevées. Dans ces conditions, la pression interne π devient négligeable devant p .

Exercice XIII.2

Montrer que pour un gaz d'équation d'état $p(v - b) = rT$:

1 – L'énergie interne ne dépend que de T .

2 – Les équations des isentropiques sont de la forme : $p(v - b)^\gamma = \text{constante}$

Corrigé

1 – Choisissons T et v comme variables indépendantes.

Des relations (XVI.16) et (XVI.17) nous déduisons que :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = l_T - p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p$$

Par ailleurs l'équation d'état $p = \frac{rT}{v-b}$ permet d'écrire $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{r}{v-b} = \frac{p}{T}$

Il s'ensuit que $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = 0 \Rightarrow u \neq f(v)$. L'énergie interne n'est donc fonction que de la température puisque T et v avaient été choisis, à priori, comme variables indépendantes.

2 – Travaillons avec la formule de Reech (XVI.13)

$$\gamma = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s}$$

De l'équation d'état $v - b = \frac{rT}{p}$ nous déduisons que :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -\frac{rT}{p^2} = -\frac{v-b}{p}$$

Et par suite :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = -\frac{1}{\gamma} \frac{v-b}{p}$$

Cette dernière relation n'est vraie que si l'évolution est isentropique donc écrivons que :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = \frac{dv}{dp}$$

Il s'ensuit alors que :

$$\gamma \frac{dv}{v-b} + \frac{dp}{p} = 0$$

Soit en intégrant :

$$\gamma \ln(v-b) + \ln p = c$$

$$p(v-b)^\gamma = \text{constante}$$

4 Equations d'état des gaz réels

Un grand nombre d'équations d'état ont été proposées, parmi lesquelles la plus connue est celle de Van Der Waals. Des considérations théoriques, ont conduit Van Der Waals à admettre que la pression interne était indépendante de la température et inversement proportionnelle au carré du volume.

$$\pi = \frac{a}{V_m^2}$$

L'équation de Van Der Waals s'écrit donc:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT \quad (\text{XVII.05})$$

Dans le prochain chapitre consacré aux changements d'états des corps purs il sera utilisé, à titre d'exercice, une méthode visant à déterminer les constantes a et b .

Exercice XVII.3

Une compression isotherme amène un gaz réel d'un état initial i à un état final f .
Sachant que ce gaz obéit à l'équation de Van Der Waals et que le covolume b est petit devant v , calculer :

$$- \int_{v_i}^{v_f} p \, dv$$

Corrigé

De l'équation de Van Der Waals nous tirons la valeur de p pour intégrer :

$$\begin{aligned} - \int_{v_i}^{v_f} p \, dv &= - \int_{v_i}^{v_f} \left(\frac{rT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \right) dv = -rT \ln \left(\frac{v_f - b}{v_i - b} \right) - \left(\frac{a}{v_f} - \frac{a}{v_i} \right) \\ &= rT \ln \left(\frac{v_i \left(1 - \frac{b}{v_i} \right)}{v_f \left(1 - \frac{b}{v_f} \right)} \right) + a \left(\frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_f} \right) \end{aligned}$$

Puisque le covolume b est petit devant le volume v nous pouvons écrire :

$$\frac{1 - \frac{b}{v_i}}{1 - \frac{b}{v_f}} \approx 1 - b \left(\frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_f} \right) \quad \Rightarrow \quad \ln \left(\frac{v_i \left(1 - \frac{b}{v_i} \right)}{v_f \left(1 - \frac{b}{v_f} \right)} \right) = -b \left(\frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_f} \right)$$

Il vient en définitive :

$$- \int_{v_i}^{v_f} p \, dv = rT \ln \frac{v_i}{v_f} + (a - rTb) \left(\frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_f} \right)$$

Si le gaz était parfait les constantes a et b seraient, évidemment nulles.

Clausius a cherché à améliorer l'équation de Van Der Waals en supposant que la pression interne dépendait également de la température.

$$\pi = \frac{a^*}{T(V_m + \beta)^2} \quad a \text{ et } \beta \text{ étant des constantes}$$

D'où l'équation de Clausius :

$$\left(p + \frac{a^*}{T(V_m + \beta)^2}\right)(V_m - b) = RT \quad (\text{XVII.06})$$

L'équation de Daniel Berthelot est très souvent utilisée :

$$\left(p + \frac{a^{**}}{TV_m^2}\right)(V_m - b) = RT \quad (\text{XVII.07})$$

Ces équations empiriques sont nombreuses et c'est la quantité des constantes qui augmentent. Citons, par exemple l'équation de Redlich-Kwong à 3 constantes :

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{\sqrt{T}V_m(V_m + b)}$$

Ainsi que l'équation de Wohl à 4 constantes :

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{TV_m(V_m - b)} + \frac{c}{T^2V_m^2}$$

5 Capacité thermiques massiques des gaz réels

Lorsque les capacités thermiques massiques sont constantes on dit souvent que le gaz est idéal parfait.

Lorsque les capacités thermiques massiques ne dépendent que de la température (loi de Joule), le gaz est dit parfait. Pour décrire leurs variations en fonction de la température on utilise des relations empiriques.

$$C_p = a + bT + cT^2 \quad \text{avec } C_p \text{ en J/mol.K}$$

Le tableau XVII.2 donne les valeurs des constantes a, b, c pour différents gaz à la pression atmosphérique et pour des températures comprises entre 273 K et 1500 K.

Gaz	a	b	c
H ₂	29,09	8,37 10 ⁻⁴	2,01 10 ⁻⁶
O ₂	25,74	1,30 10 ⁻²	3,86 10 ⁻⁶
N ₂	27,29	5,23 10 ⁻³	- 4,02 10 ⁻⁹
CO	26,87	6,99 10 ⁻³	-8,20 10 ⁻⁷
H ₂ O	30,39	9,63 10 ⁻³	1,18 10 ⁻⁶
CO ₂	25,99	4,35 10 ⁻³	-1,48 10 ⁻⁵

Tableau XVII.2 valeurs des constantes a , b , c .

Pour un gaz réel les capacités thermiques massiques dépendent également de la deuxième variable qui définit l'état du gaz, pression ou volume.

Le chapitre XVI, consacré aux relations thermodynamiques, montre que pour un fluide réel et homogène, il existe des relations entre les capacités thermiques et certaines grandeurs thermodynamiques. Par exemple rappelons :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = c_v$$

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$$

$$c_p - c_v = T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

Exercice XVII.4

Exprimer, en fonction des variables d'états T et V_m , la capacité thermique molaire à volume constant d'un gaz obéissant à l'équation de Daniel Berthelot.

Corrigé

Pour une mole de gaz nous avons :

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial V_m}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_{V_m}$$

De l'équation XVII.07 nous tirons l'expression de la pression p :

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a^{**}}{TV_m^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_{V_m} = -\frac{2a^{**}}{T^3 V_m^2}$$

Que nous portons dans la relation précédente :

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial V_m}\right)_T = -\frac{2a^{**}}{T^2 V_m^2}$$

Par intégration nous obtenons le résultat cherché :

$$C_v = \frac{2a^{**}}{T^2 V_m} + C_{v0}$$

La constante C_{v0} est la capacité thermique molaire à volume constant lorsque V_m tend vers l'infini.

Chapitre XVIII

Transition de phase

1 Changement d'état

Les conséquences analytiques du premier et second principe permettent d'établir un certain nombre de relations thermodynamiques entre les variables intensives d'un corps pur, lorsqu'il se trouve à l'état de fluide homogène.

Ce chapitre a pour but d'étudier le comportement des corps purs lorsqu'il change d'état. Il se limite au cas où il n'existerait qu'une seule variété solide (cristallin).

Les changements d'état sont désignés par :

Fusion et solidification.

Vaporisation (évaporation) et liquéfaction (condensation).

Sublimation et condensation.

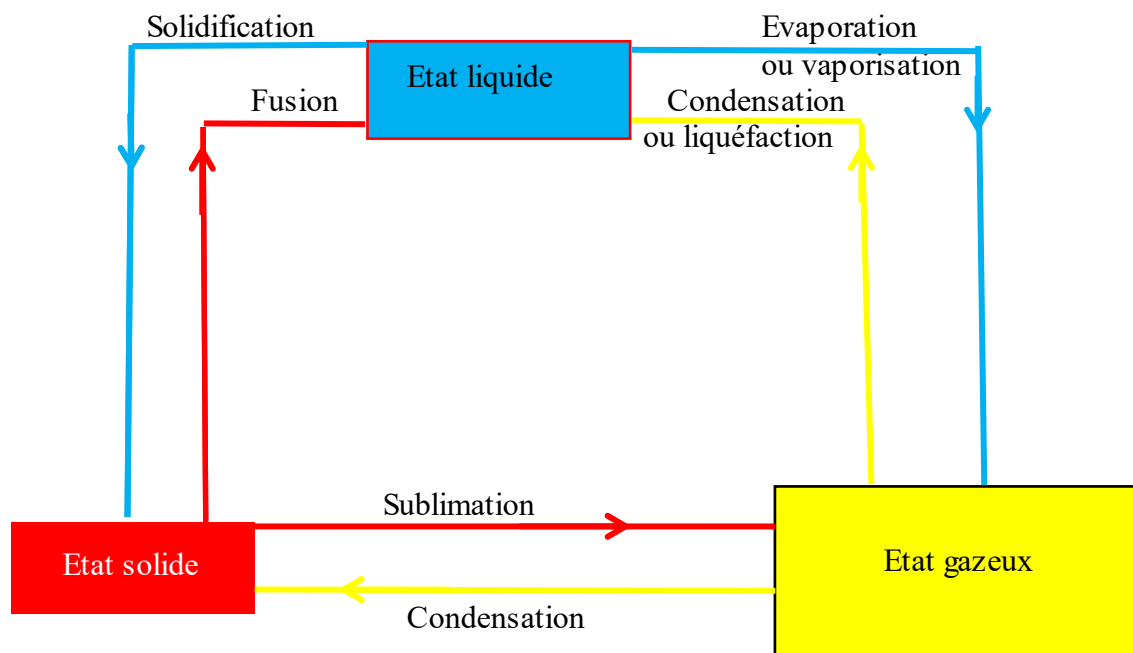


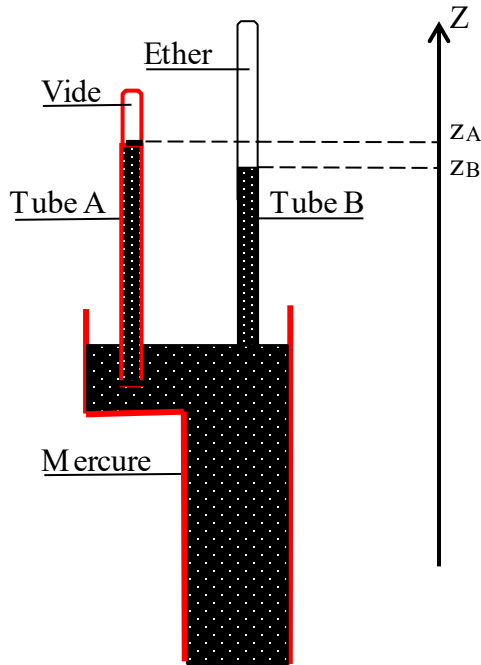
Figure XVIII.01 Changements d'état

Le terme de vapeur est fréquemment utilisé pour désigner l'état gazeux d'un corps pur que l'on connaît habituellement sous forme de liquide ou de solide, dans les conditions normales de pression et de température, comme l'eau par exemple.

C'est le changement d'état liquide-gaz (ou l'inverse) que rencontrent souvent les turbomachines, dans leurs utilisations. Citons par exemple les centrales thermiques ou nucléaires.

2 Vapeur saturante

Pour montrer les propriétés de condensation et d'évaporation d'une masse donnée de fluide utilisons l'expérience classique représentée sur la figure XVIII.02.



Cet appareil se compose de deux tubes A et B retournés sur une cuve remplie de mercure.

A est un tube barométrique, il règne le vide dans sa partie supérieure. A constitue, en quelque sorte, un repère pour le tube B.

B est un tube qui peut coulisser verticalement dans la cuve à mercure. Sa partie supérieure est remplie d'éther qui se trouve dans sa phase gazeuse.

La différence des niveaux de mercure de ces deux tubes mesure la pression au haut du tube B puisque :

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + z_B$$

Figure XVIII.02 Description

Or $p_A = 0$ puisqu'il règne le vide au-dessus du niveau de mercure du tube A, donc :

$$p_B = \rho g(z_A - z_B) = \rho g h$$

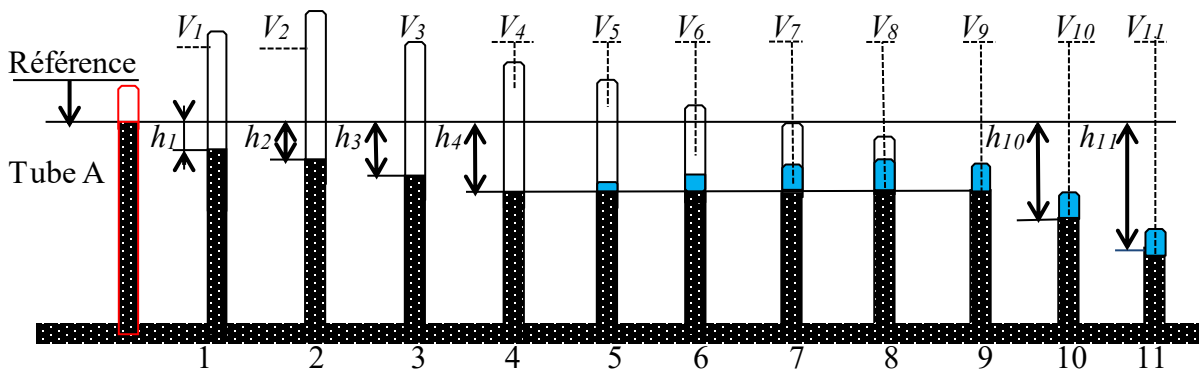


Figure XVIII.03 Déplacement du tube B

Afin de faire subir à la masse d'éther une évolution isotherme, le tube B est enfoncé très lentement dans le mercure. Ainsi la masse d'éther va successivement occuper les volumes caractérisés par les positions 1, 2, 3, ..., 10, 11 précisées sur la figure XVIII.03.

Supposons que l'état initial corresponde à la position 1 où l'éther est entièrement vaporisé en occupant le grand volume V_1 .

En enfouissant le tube B on constate que l'éther reste sous forme gazeuse jusqu'au volume V_4 en suivant approximativement l'équation d'état des gaz parfaits :

$$pV = mrT$$

Immédiatement après le volume V_4 , on voit apparaître une trace de liquide au-dessus du niveau du mercure. Il y a condensation de la vapeur d'éther.

En continuant d'enfoncer le tube, on voit augmenter la masse d'éther sous forme de liquide. Par contre la pression, caractérisée par la grandeur h , reste constante. La vapeur est alors en équilibre avec le liquide, elle est dite saturante. La pression correspondante, que l'on note p_v , est appelée pression de vapeur saturante.

Le mélange constitué par le liquide et la vapeur est souvent désigné par vapeur humide. En toute rigueur cette appellation concernerait plutôt un mélange de vapeur et de gouttelettes en suspension.

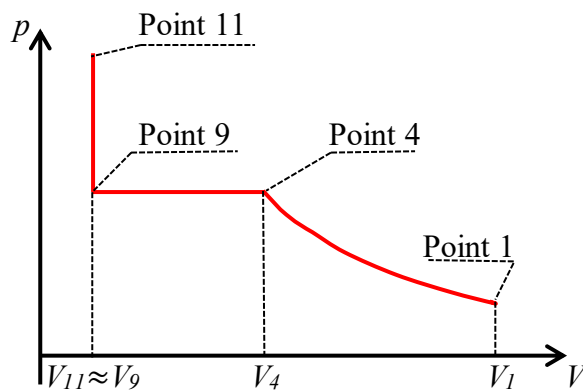
On constate, en poursuivant notre expérience jusqu'au volume V_9 , que toute la masse d'éther se trouve sous forme liquide.

En continuant d'enfoncer le tube, on remarque que le volume varie très peu alors que la pression augmente considérablement.

On retrouverait les mêmes résultats en recommençant en sens inverse cette évolution isotherme.

3 Point critique

Transcrivons les résultats de l'expérience précédente en portant p en ordonnée et V en abscisse (diagramme de Clapeyron). Cette évolution isotherme se compose de trois parties :



1 → 4 Pour les faibles pressions, la courbe se rapproche plus ou moins d'une hyperbole équilatère. L'éther est sous forme gazeuse.

9 → 11 Pour les fortes pressions, la courbe est presque verticale. L'éther est liquide.

4 → 9 Entre ces courbes un palier horizontal correspondant à l'état liquide-vapeur.

Figure XVIII.04 Résultats expérimentaux

Il est intéressant de noter :

- que pour le palier 4 → 9 l'isotherme et l'isobare sont confondues.
- qu'aux valeurs numériques près, on observerait la même allure de courbe pour un quelconque corps pur.

Recommençons cette expérience avec une température plus élevée. On constate alors que le volume massique du liquide v' augmente et que le volume massique de la vapeur saturante v'' diminue.

La figure XVIII.05 montre que le palier horizontal raccourcit lorsque la température s'accroît. Ce palier s'annule en un point c que l'on appelle le point critique.

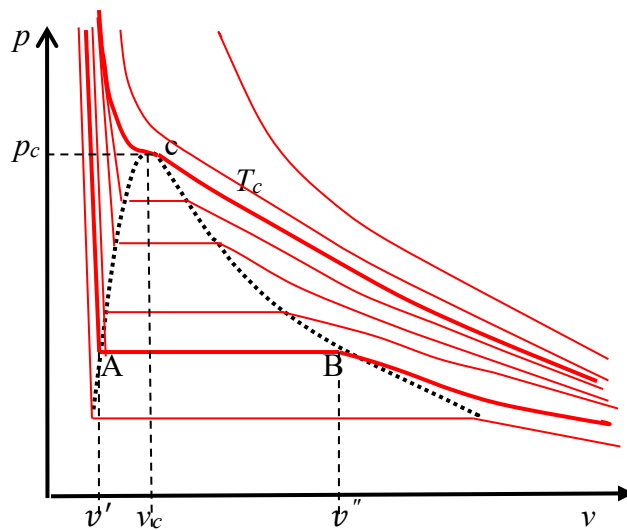


Figure XVIII.05 Isothermes d'Andrews

Au point critique, la température, la pression et le volume sont désignés par :

- température critique T_c
- pression critique p_c
- volume critique v_c

En c le palier disparaît.

L'isotherme T_c présente donc en c un point d'inflexion à tangente horizontale.

Ce qui se traduit dans ce diagramme par :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T = 0$$

Pour des températures supérieures à la température critique T_c , les isothermes ne présentent plus de palier de liquéfaction et nous avons :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T < 0$$

Pour chaque gaz, il existe une température critique au-dessus de laquelle il est impossible d'observer une liquéfaction.

Pour les températures inférieures à la température critique T_c , on donne souvent le nom de vapeur sèche à l'état gazeux en l'absence de liquide. Ainsi que nous l'avons précédemment évoqué, la vapeur en équilibre avec le liquide est souvent désignée par vapeur saturante ou vapeur humide.

Le lieu des extrémités des paliers horizontaux AB formé de deux branches est appelé courbe de saturation.

La branche Ac donnant les variations de v' est la courbe d'ébullition.

La partie Bc, relative à v'' , est désignée par courbe de rosée.

Exercice XVIII.1

Connaissant la température critique T_c et le volume molaire critique V_{mc} d'un gaz obéissant à l'équation de Van der Waals :

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

Calculer les constantes a et b .

Corrigé

L'équation de Van der Waals peut s'écrire :

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$$

En utilisant les propriétés du point critique on obtient deux équations :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\frac{RT}{(V_{mc} - b)^2} + \frac{2a}{V_{mc}^3} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_m^2}\right)_T = \frac{2RT}{(V_{mc} - b)^3} - \frac{6a}{V_{mc}^4} = 0$$

Ce qui permet de déduire les valeurs de a et b :

$$a = \frac{9}{8}RTV_{mc} \quad \text{et} \quad b = \frac{V_{mc}}{3}$$

Remarque :

Si nous reportons dans l'équation de Van Der Waals les valeurs de a et b , nous pouvons obtenir la valeur de la pression critique p_c .

$$p_c = \frac{RT_c}{V_{mc} - b} - \frac{a}{V_{mc}^2} = \frac{RT_c}{V_{mc} - \frac{V_{mc}}{3}} - \frac{9RT_c V_{mc}}{8V_{mc}^2} = \frac{3RT_c}{8V_{mc}}$$

De la définition du facteur de compressibilité Z , nous pourrions déduire que pour tous les gaz nous aurions au point critique : $Z_c = \frac{p_c V_{mc}}{RT_c} = \frac{3}{8} = 0,375$. Ce qui est inexact puisque Z varie d'une substance à une autre et qu'il se situe entre 0,23 et 0,29.

A titre indicatif, le tableau XVIII.1 donne les constantes de quelques corps purs à leur point critique.

	Symbole	T_c en K	P_c en bar	v_c en m ³ /kg
Mercure	Hg	1733,9	1066	0,0002
Oxygène	O ₂	154,7	50,4	0,002326
Argon	A	150,8	48,6	0,001883
Azote	N ₂	126	33,9	0,003215
Hydrogène	H ₂	33,5	12,96	0,03223
Hélium	He	5,2	2,29	0,01443
Eau	H ₂ O	647,3	221,2	0,00317
Benzène	C ₆ H ₆	562	48,34	0,00333
Propane	C ₃ H ₈	369,9	42,56	0,004425
Ethylène	C ₂ H ₄	263,9	51,17	0,004545
Méthane	CH ₄	190,6	46,29	0,006172
Alcool	C ₂ H ₅ OH	516	63,84	0,003629
Ether	(C ₂ H ₅) ₂ O	467	35,99	0,003787
Fréon 12	CCl ₂ F ₂	385	41,15	0,00179
Ammoniac	NH ₃	405	112,97	0,004255
Gaz carbonique	CO ₂	304,2	73,76	0,00216

Tableau XVIII.1 Exemple de points critiques

4 Titre

La notion de titre a pour but de connaître, dans un mélange liquide-vapeur, la part respective de liquide et de vapeur.

Le titre, désigné par x , est égal au rapport de la masse de vapeur m'' à la masse totale m :

$$x = \frac{m''}{m} \quad (\text{XVIII. 01})$$

Le titre x représente, en quelque sorte, la masse de vapeur contenue dans l'unité de masse du mélange. La masse de liquide contenue dans le mélange est désignée par m' . Sa teneur dans le mélange est :

$$1 - x = \frac{m'}{m} \quad (\text{XVIII. 02})$$

Évidemment, la relation $m = m' + m''$ doit être satisfaite.

Le volume V occupé par le mélange s'écrit :

$$V = m'v' + m''v'' = mv \quad (\text{XVIII.03})$$

v' et v'' sont respectivement le volume massique du liquide et de la vapeur aux points A et B du palier de vaporisation représenté sur la figure XVIII.06.

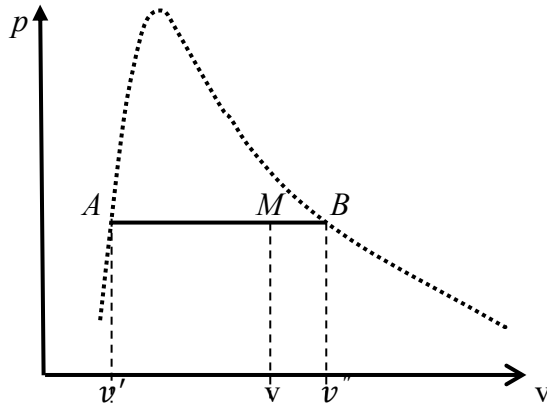


Figure XVIII.06 Palier de vaporisation

En désignant par v le volume massique du mélange, nous pouvons écrire :

$$v = \frac{m'}{m}v' + \frac{m''}{m}v''$$

Et compte tenu de la définition du titre :

$$v = (1-x)v' + xv''$$

Nous déduisons une autre expression du titre :

$$x = \frac{v - v'}{v'' - v'} = \frac{AM}{AB} \quad (\text{XVIII.04})$$

Le point M d'abscisse v , partage le palier AB en deux segments dont le rapport est égal à celui des masses des deux phases en présence :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{x}{1-x} = \frac{m''}{m'}$$

Les courbes à titre constant (isotitre) sont obtenues en joignant les points qui partagent tous les paliers de vaporisation dans le même rapport :

$$x = \frac{A_1M_1}{A_1B_1} = \frac{A_2M_2}{A_2B_2} = \frac{A_3M_3}{A_3B_3} = \frac{A_4M_4}{A_4B_4} = \frac{A_5M_5}{A_5B_5}$$

Toutes ces courbes à titre constant partent du point critique c .

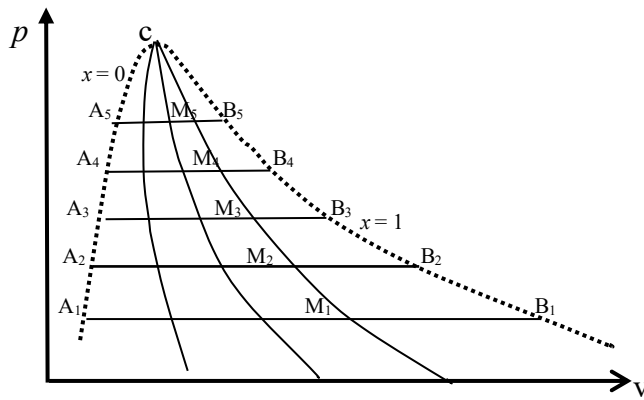


Figure XVIII.07 Isotitres

Sur la courbe d'ébullition (lieu des points A) on a $x = 0$.

Sur la courbe de rosée (lieu des points B) on a $x = 1$.

Puisque l'énergie interne, l'enthalpie et l'entropie sont des grandeurs extensives, donc additives, nous pouvons les exprimer d'une façon analogue au raisonnement tenu pour le volume V .

Donc, compte tenu de la relation (XVIII.04), l'énergie interne massique, l'enthalpie massique et l'entropie massique peuvent s'écrire :

$$u = (1-x)u' + xu'' \quad (\text{XVIII.05})$$

$$h = (1-x)h' + xh'' \quad (\text{XVIII.06})$$

$$s = (1-x)s' + xs'' \quad (\text{XVIII.07})$$

Ou encore :

$$x = \frac{u - u'}{u'' - u'} = \frac{h - h'}{h'' - h'} = \frac{s - s'}{s'' - s'} \quad (\text{XVIII.08})$$

Exercice XVIII.2

Sous une pression de 1 bar, un réservoir contient 50 kg de vapeur d'eau au titre de 0,8. Sachant qu'à cette pression de 1 bar nous avons :

$$v' = 0,0010434 \text{ m}^3/\text{kg} \quad v'' = 1,694 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$h' = 417,51 \text{ kJ/kg} \quad h'' = 2675,4 \text{ kJ/kg}$$

Calculer :

- 1) Les masses respectives de liquide et de vapeur contenues dans le réservoir.
- 2) Le volume du réservoir.
- 3) L'enthalpie massique de la vapeur humide.

Corrigé

1) Par définition du titre, relation (XVIII.01), et de la connaissance de la masse m il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} \text{Pour la vapeur} \quad m'' &= x m = 0,8 \times 50 = 40 \text{ kg} \\ \text{Pour le liquide} \quad m' &= m - m'' = 50 - 40 = 10 \text{ kg} \end{aligned}$$

2) Le volume du réservoir est donné par la relation (XVIII.03) :

$$V = m'v' + m''v'' = 10 \times 0,0010434 + 40 \times 1,694$$

$$V = 67,77 \text{ m}^3$$

3) De la relation (XVIII.06) on déduit la valeur de l'enthalpie massique.

$$h = (1 - x)h' + xh'' = (1 - 0,8) \times 417,51 + 0,8 \times 2675,4$$

$$h = 2223,8 \text{ kJ/kg}$$

5 Courbe de vaporisation

Un liquide en présence de sa vapeur est caractérisé par sa pression de vapeur saturante p_v et par sa température. La connaissance de T impose celle de la pression de vapeur saturante p_v . On peut dire que la pression et la température sont liées par une relation de la forme : $p_v = f(T)$. D'où l'existence d'une courbe d'équilibre liquide-vapeur, en coordonnée (p, T) , qui s'arrête au point critique "c". En ce point, la pente de la tangente n'est ni nulle ni infinie. Pour l'eau ; à titre d'exemple la loi $p_v = f(T)$ est donnée dans le tableau XVIII.2 et représentée sur la figure XVIII.08

t en $^{\circ}\text{C}$	p_v en bar
0,01	0,0061
5	0,0087
10	0,01227
20	0,02337
50	0,12335
100	1,01325
200	15,549
300	85,927
374,15	221,2

Tableau XVIII.2
Vaporisation de l'eau

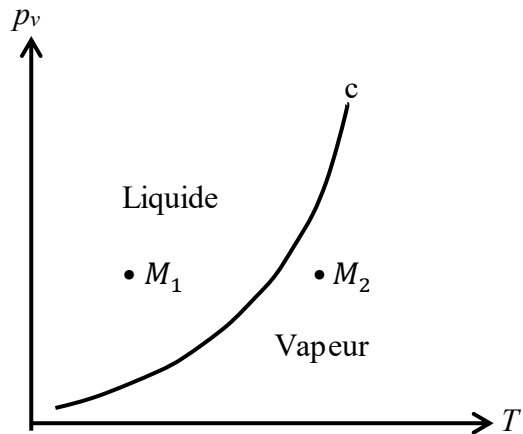


Figure XVIII.08 Courbe de vaporisation

La température peut être considérée comme le seul paramètre indépendant puisque $p_v = f(T)$. On dit que le système est dit monovariant.

La variance d'un système apparaît comme le nombre de paramètres que l'on peut faire varier arbitrairement sans modifier sa nature.

Si on place le système en dehors de cette courbe, $p_v = f(T)$, tel que le point figuratif M_1 (ou M_2), représenté sur la figure XVIII.08, l'une des phases liquide ou vapeur disparaît. L'équation d'état redevient $f(p, v, T) = 0$. Le système est dit divariant ; il faut deux paramètres pour définir son état.

6 Continuité de l'état gazeux et de l'état liquide

Les isothermes d'Andrews, figure XVIII.05, montrent que la condensation (ou liquéfaction) ne peut pas se produire si la température du gaz est supérieure à la température critique.

Par exemple pour l'évolution isotherme $i \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow f$ où la température $T < T_c$, la condensation apparaît dans la partie $B \rightarrow A$ représentée sur la figure XVIII.09. Mais il est possible de contourner le point critique sans voir apparaître de condensation. Pour cela considérons, cette fois, la transformation amenant le fluide de l'état initial gazeux "i" à l'état final liquide "f" en utilisant le chemin suivant :

- Evolution isobare $i \rightarrow 1$ jusqu'à une température $T_1 > T_c$
- Evolution isotherme $1 \rightarrow 2$ jusqu'à une pression $p_2 > p_c$
- Evolution isobare $2 \rightarrow 3$ jusqu'à température $T_i = T_f$
- Evolution isotherme $3 \rightarrow f$

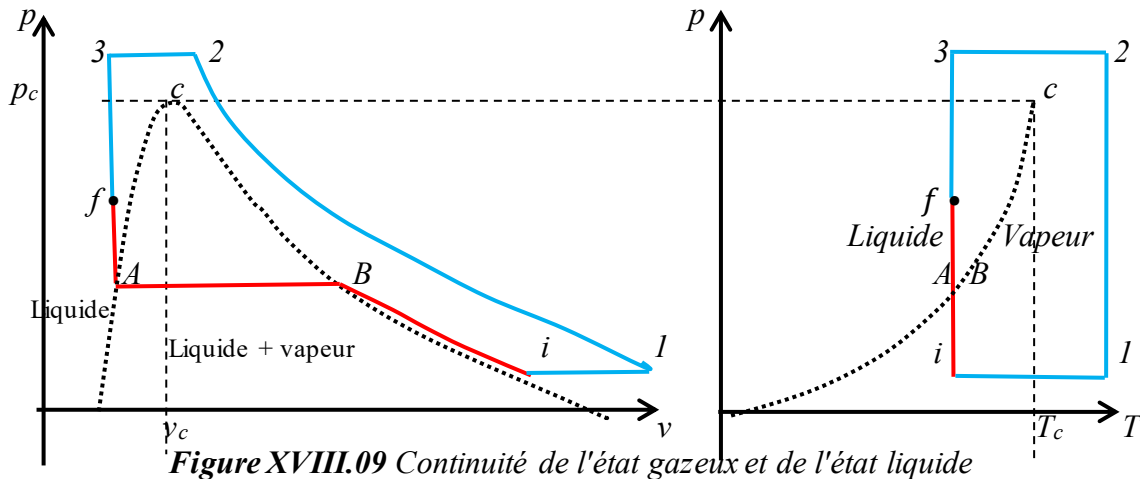


Figure XVIII.09 Continuité de l'état gazeux et de l'état liquide

Les différents points $i, 1, 2, 3$; f de ce chemin correspondent à des états homogènes du fluide. On est passé de l'état gazeux à l'état liquide sans avoir aperçu la moindre discontinuité. Dans cette transformation il y a continuité lors du passage de l'état gazeux à l'état liquide.

Évidemment l'inverse (passage de l'état liquide à l'état gazeux) serait également vrai.

7 Point triple

Dans le domaine de coexistence des deux phases liquide et gaz la courbe de vaporisation, $p_v = f(T)$, s'arrête au point critique "c".

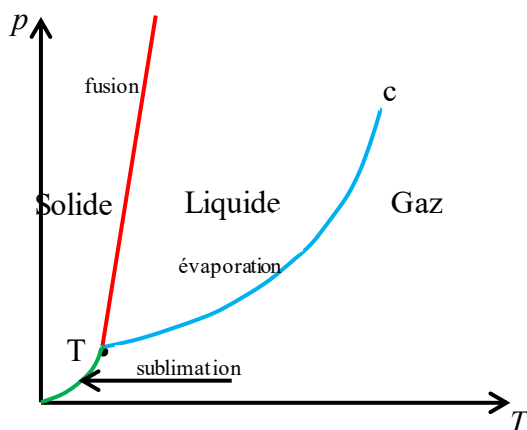


Figure XVIII.10 Point triple T

Dans le sens des pressions décroissantes, cette courbe se prolonge jusqu'à un certain point T .

En ce point elle rencontre une courbe analogue qui est celle de l'équilibre du liquide et du solide (courbe de fusion).

En T il y a équilibre entre liquide-gaz et liquide-solide.

Nous en déduisons qu'il y a, également, équilibre entre le gaz et le solide.

Le point triple T appartient donc aussi à la courbe de sublimation.

Les trois courbes, sublimation, fusion et vaporisation, se coupent en ce même point T appelé point triple.

Dans l'état actuel de nos connaissances la courbe de fusion s'étend apparemment sans limite vers les hautes pressions.

On ne saurait réaliser ni même concevoir le passage continu de l'état liquide à l'état solide.

Le tableau XVIII.3 donne à titre d'exemple les coordonnées de quelques points triples.

Désignation	T en K	P en bar
Azote	63	0,126
Ammoniac	195,5	0,061
Gaz carbonique	216,5	5,34
Eau	273,16	0,0061
Naphtalène	353	0,012

Tableau XVIII.3 Points triples

8 Surface caractéristique

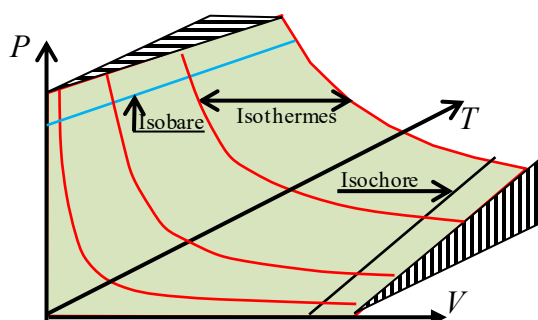


Figure XVIII.11 Surface $p v = RT$

A des fins pédagogiques, la partie dessinée en vert clair sur la figure XVIII.11, représente la surface caractéristique de l'équation d'état des gaz parfaits ; $p v = RT$.

La figure XVIII.12 représente la surface caractéristique d'un corps pur dans le domaine des températures où les diverses phases sont susceptibles de coexister.

Les courbes précédemment obtenues sur les diagrammes " $p v$ " et " $p T$ " sont évidemment les projections de la surface caractéristique.

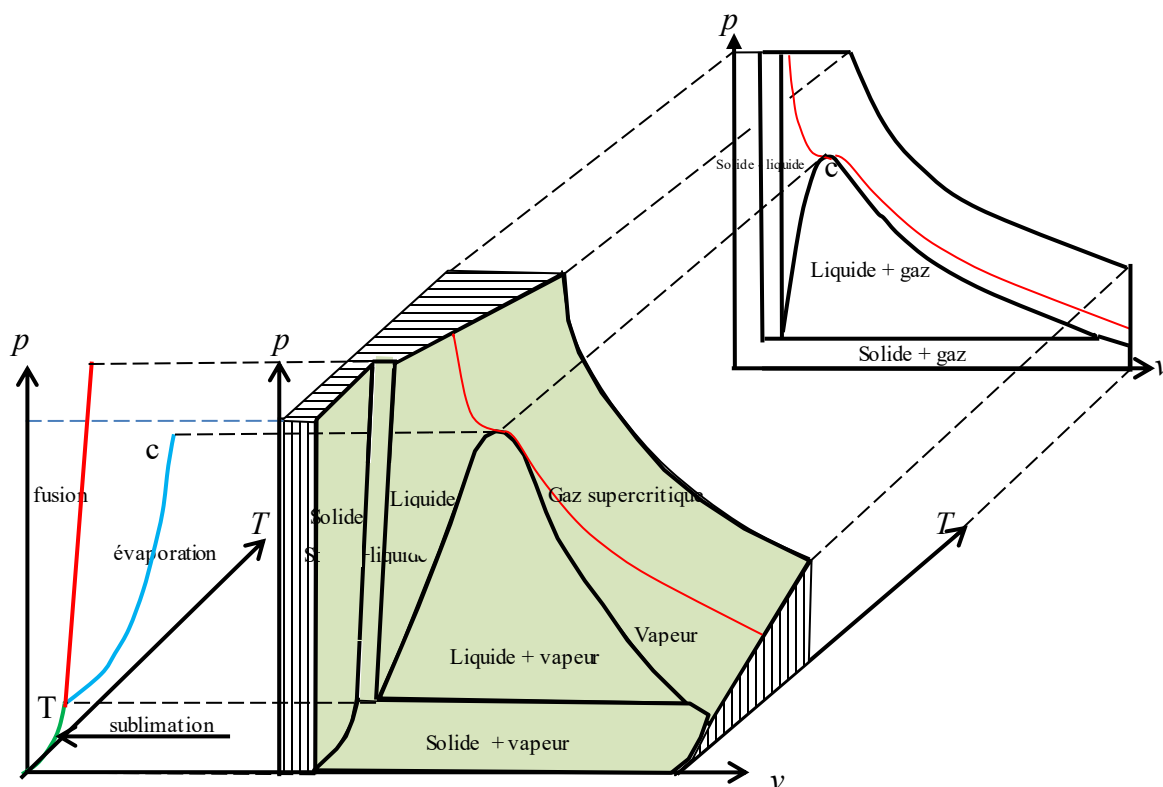


Figure XVIII.12 Surface caractéristique d'un corps pur

9 Chaleur latente

La chaleur latente de vaporisation d'un corps pur est la variation d'enthalpie de l'unité de masse de ce corps ; lorsqu'il passe de l'état liquide à l'état gazeux, sous pression constante à la température T . On pose :

$$L_v = h'' - h' \quad (\text{XVIII.09})$$

On définit de même une chaleur latente de fusion et une chaleur latente de sublimation que l'on note respectivement L_f et L_s .

La figure XVIII.07 et la relation XVIII.08, permettent de déduire que la chaleur de vaporisation diminue quand la température augmente. Elle s'annule au point critique.

Lorsque $T \rightarrow T_c$ nous avons $\frac{dL_v}{dT} \rightarrow \infty$

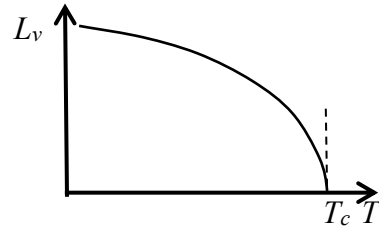


Figure XVIII.13 L_v en fonction de T

Empiriquement à 0,2% près, on donne pour l'eau entre 0°C et 180°C :

$$L_v = 597,5 - 0,592 t \quad \text{avec } L_v \text{ en kcal/kg et } t \text{ en } ^\circ\text{C}.$$

10 Formule de Clapeyron

Dans la phase liquide-vapeur d'un corps pur considérons, conformément à la figure XVIII.14, un cycle élémentaire de Carnot ABCD. Pour ce cycle, l'expression du rendement s'écrit :

$$\eta = \frac{-\delta W}{\delta Q_1} = 1 - \frac{T}{T + dT} = \frac{dT}{T}$$

Or l'aire du cycle représente le travail fourni $-\delta W$. A un infiniment petit près ce travail est égal à : $dp_v dV$.

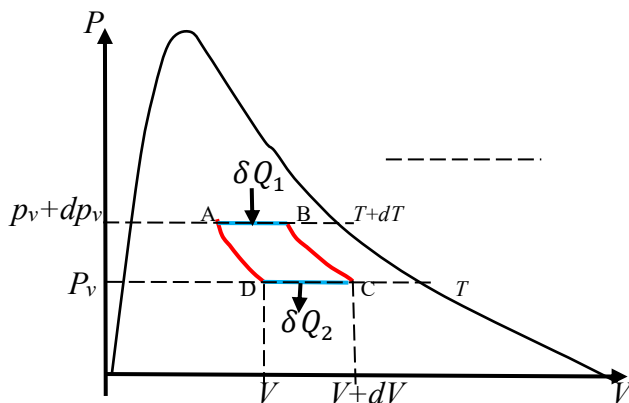


Figure XVIII.14 Cycle élémentaire de Carnot

La quantité de chaleur δQ_1 fournie par la source chaude est :

$$\delta Q_1 = L_v dm''$$

La quantité dm'' est la masse vaporisée pendant la transformation isotherme AB.

Il s'ensuit :

$$\frac{-\delta W}{\delta Q_1} = \frac{dp_v dV}{L_v dm''} = \frac{dT}{T}$$

De la définition du titre et de la relation XVIII.04, on obtient :

$$x = \frac{m''}{m} = \frac{v - v'}{v'' - v'} \Rightarrow \frac{dm''}{m} = \frac{dv}{v'' - v'}$$

Soit:

$$\frac{(v'' - v') dp_v dV}{L_v m dv} = \frac{dT}{T} \text{ et en remarquant que } \frac{dV}{mdv} = 1$$

On obtient la formule de Clapeyron :

$$L_v = T(v'' - v') \frac{dp_v}{dT} \quad (\text{XVIII. 10})$$

Exercice XVIII.3

Montrer qu'en négligeant le volume massique du liquide devant celui de la vapeur, assimilé à un gaz parfait, on peut déduire une loi approximative de la pression de vapeur saturante en fonction de la température $p_v = f(T)$.

Corrigé

Compte tenu de cette hypothèse, l'équation d'état des gaz parfaits s'écrit :

$$p_v v'' = rT$$

Portons cette valeur de v'' dans l'équation de Clapeyron sans oublier que v' est petit devant v'' .

$$L_v = T v'' \frac{dp_v}{dT} = T \frac{rT}{p_v} \frac{dp_v}{dT}$$

Soit en séparant les variables :

$$\frac{dp_v}{p_v} = d(\ln p_v) = \frac{L_v}{r} \frac{dT}{T^2}$$

Intégrons cette expression dans un intervalle de température suffisamment réduit pour que l'on puisse supposer L_v constant, sans erreur appréciable.

$$p_v = K e^{-\frac{L_v}{rT}}$$

Pour déterminer la constante K supposons qu'à la température T_0 , il règne la pression p_{v0} et que le volume massique de la vapeur soit v_0'' . Avec $p_{v0} v_0'' = rT_0$ l'expression ci-dessus devient :

$$p_v = p_{v0} e^{\frac{L_v}{p_{v0} v_0''} \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)}$$

Faisons une application numérique, pour de la vapeur d'eau, à la température $T_0 = 100^\circ\text{C}$.

A cette température la pression partielle est $p_{v0} = 1,0133 \text{ bar}$, le volume massique est

$v_0'' = 1,673 \text{ m}^3/\text{kg}$ et la chaleur latente de vaporisation $L_v = 2256,9 \text{ kJ/kg}$.

Pour des températures comprises entre 80°C et 120°C on obtient des résultats satisfaisants, comme le montre le tableau XVIII.4.

$t \text{ en } ^\circ\text{C}$	$T \text{ en } K$	$p_v \text{ en bar}$ calculée	$p_v \text{ en bar}$ lue dans les tables.
80	353,15	0,4768	0,4736
85	358,15	0,5802	0,5780
90	363,15	0,7023	0,7011
95	368,15	0,8457	0,8453
105	378,15	1,2083	1,2080
110	383,15	1,4343	1,4327
115	388,15	1,6950	1,6906
120	393,15	1,9946	1,9854

Tableau XVIII.4 Comparaisons

11 Troisième principe de la thermodynamique

Lors d'une transformation infinitésimale réversible, d'un corps pur homogène, la variation d'entropie peut s'écrire (relations XV.04 et XVI.11) :

$$ds = \frac{\delta Q}{T} = c_p \frac{dT}{T} + h_T \frac{dp}{T}$$

Pour une évolution isobare, cette relation devient :

$$ds = c_p \frac{dT}{T}$$

Pour cette évolution isobare, une difficulté apparaît lorsque la température T tend vers le zéro absolu. En effet, si la capacité thermique massique à pression constante c_p était différente de zéro, le rapport c_p/T deviendrait infini.

Dans ces conditions la variation d'entropie allant de la température $T = 0$ à la température T ne pourrait pas être finie : $s - s_0 = \int_0^T c_p \frac{dT}{T}$.

Évidemment on peut répéter le même raisonnement à volume constant. Si la capacité thermique massique à volume constant c_v n'est pas nulle la variation d'entropie, pour une évolution isochore, ne pourrait pas être finie : $s - s_0 = \int_0^T c_v \frac{dT}{T}$.

Ces indéterminations ont été levées par Nernst, physicien et chimiste allemand. Il a eu le mérite d'énoncer une hypothèse qui a été ensuite confirmée par l'expérience. Cette hypothèse complétée par Planck a été érigée en postulat. Compte tenu de son importance le terme de troisième principe de la thermodynamique est maintenant utilisé. Il s'énonce ainsi :

Au zéro de la température absolue, l'entropie de tout corps cristallisé, chimiquement homogène, possède la valeur zéro.

Les expériences qui ont été effectuées aux très basses températures montrent qu'en se rapprochant du zéro absolu :

- les capacités thermiques massiques c_p et c_v tendent vers zéro.
- les coefficients de dilatations isobare et isochore α et β tendent également vers zéro.

- le volume massique v reste fini.
- Le coefficient de compressibilité isotherme χ_T reste fini.

La connaissance de ces coefficients en fonction des variables d'états permet de calculer l'entropie. Lorsque le corps étudié subit des changements d'états, il y a lieu d'ajouter les variations d'entropie, liés à ces changements de phase. Supposons, par exemple, connaître à la pression atmosphérique la capacité thermique c_p , en fonction de la température T d'un corps pur simple. A partir de l'état cristallisé au zéro absolu, il est facile de calculer l'entropie.

$$s_{p=1,T} = \int_0^T c_p \frac{dT}{T}$$

Lorsqu'on atteint la température de fusion T_f , le changement d'état nécessite de fournir la chaleur latente de fusion L_f à la température T_f . La variation d'entropie de ce changement d'état est : L_f/T_f . Juste au début de l'état liquide l'entropie est :

$$s_{p=1,T_f} = \int_0^{T_f} c_p \frac{dT}{T} + \frac{L_f}{T_f}$$

Pour une vapeur à la pression atmosphérique et à la température T , l'entropie a comme expression :

$$s_{p=1,T} = \int_0^{T_f} c_p \frac{dT}{T} + \frac{L_f}{T_f} + \int_{T_f}^{T_v} c_p' \frac{dT}{T} + \frac{L_v}{T_v} + \int_{T_v}^T c_p'' \frac{dT}{T} \quad (\text{XVIII. 11})$$

Remarque :

Il est important de noter, qu'en thermodynamique technique on s'intéresse plus aux variations d'entropie qu'à sa valeur propre. On choisit arbitrairement un état de référence pour l'entropie. En principe l'entropie est prise nulle dans l'état choisi pour zéro de l'enthalpie ou de l'énergie interne. Ainsi, par exemple, pour l'eau l'entropie est prise nulle à son point triple.

Chapitre XIX

Diagrammes

1 Généralités

Pour traduire les caractéristiques d'un fluide dans toutes ses phases, il serait intéressant de disposer d'une équation d'état, valable quelles que soient la température et la pression du corps étudié. Hélas, c'est impossible, les chapitres précédents montrent qu'il est déjà difficile d'obtenir une équation d'état dans une phase unique. Pour définir l'état d'un fluide, on a recours aux résultats expérimentaux que l'on utilise sous forme de tables numériques, de logiciels ou de diagrammes.

Les diagrammes thermodynamiques ne se limitent pas à traduire les propriétés des corps. Ils représentent graphiquement les transformations que subit une masse de fluide, ce qui est un atout considérable sur le plan pédagogique.

L'équilibre d'une masse de fluide, chimiquement invariable, est défini au moyen de deux variables. Il est possible de les choisir parmi la pression, la température, le volume massique ou encore parmi les fonctions d'état u , h , s , G , F .

Pour construire un diagramme, on se fixe comme axe de coordonnées, deux quelconques des variables énumérées ci-dessus. Les autres peuvent être, suivant la nécessité, utilisées comme courbes paramétriques ; isobares, isochores, isothermes, isentropes, etc. Tous les diagrammes ainsi construits pour un même fluide expriment évidemment les mêmes propriétés. Leur commodité d'emploi est plus ou moins bien adaptée à tel ou tel autre problème.

Sur le plan pédagogique le diagramme de Clapeyron " p , v " est intéressant.

Dans le domaine des turbomachines le diagramme entropique " T , s " et le diagramme enthalpique (ou de Mollier pour la vapeur d'eau) " h , s " sont fréquemment employés.

Les diagrammes " h , p ", " $\ln p$, h " et " h , v " sont beaucoup utilisés dans l'étude des machines frigorifiques.

Si les transformations sont réversibles, les courbes représentatives tracées sur les diagrammes possèdent de propriétés particulières.

Si les transformations sont irréversibles, le fluide en évolution ne se trouve pas dans un état thermodynamique uniforme. Il en résulte des différences locales de pression, de température, d'énergie interne, d'entropie, etc. Malgré tout, ces transformations sont représentées, sur les diagrammes thermodynamiques, en faisant l'hypothèse qu'à chaque instant de l'évolution considérée, l'état correspondant du fluide est rendu uniforme par mélange.

Ultérieurement, il sera évoqué la notion d'évolution polytropique qui résulte de cette dernière remarque. Les courbes tracées, pour ces évolutions irréversibles, ne possèdent pas les propriétés des transformations réversibles. Elles sont souvent représentées en pointillé pour bien marquer la différence avec les transformations réversibles.

2 Diagramme de Clapeyron (p, v)

Ce diagramme est très intéressant car ses variables, la pression et le volume massique, sont deux grandeurs qui parlent bien à l'imagination.

Dans ce diagramme, l'aire correspondant à une transformation cyclique réversible représente le travail échangé avec le milieu extérieur. En effet, les relations XV.07 et XV.08 s'écrivent :

$$Tds = \delta Q + \delta f = du + pdv = dh - vdp$$

Pour une transformation cyclique on a : $u_{f=i} - u_i = 0$ et de même $h_{f=i} - h_i = 0$ puisque l'état final "f" est le même que l'état initial. Il s'ensuit que :

$$Q + \int_{cycle} \delta f = \int_{cycle} pdv = - \int_{cycle} vdp$$

La somme $\int_{cycle} \delta f$ représente la dégradation énergétique produite par les processus internes lors de cette transformation cyclique. Or du premier principe de la thermodynamique, $Q + w = 0$, ce qui permet de déduire :

$$w = -Q = - \int_{cycle} pdv + \int_{cycle} \delta f = \int_{cycle} vdp + \int_{cycle} \delta f$$

Si la transformation cyclique est réversible nous avons : $\int_{cycle} \delta f = 0$

D'où le résultat :

$$w = - \int_{cycle} pdv = \int_{cycle} vdp = \text{aire}$$

Pour une évolution irréversible cette aire ne représente plus le travail

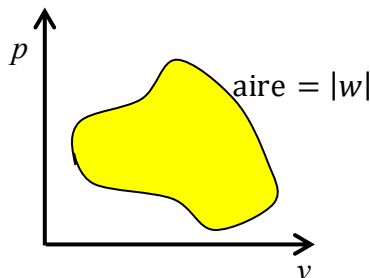


Figure XIX.01 Propriété de l'aire

Ce diagramme peut servir au calcul des machines à pistons dans la mesure où les rapports de compression ne sont pas trop élevés. Si ce n'est pas le cas, il prend rapidement des dimensions considérables. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle ce diagramme est peu utilisé, dans la pratique, pour les calculs graphiques.

Les isothermes et les isentropiques représentés sur un diagramme de Clapeyron se coupent sous un angle relativement faible égal à γ .

En effet de la formule de Reech (relation XVI.13), nous avons :

$$\gamma = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T}$$

La valeur très faible de cet angle est nuisible à la détermination précise du point d'intersection.

3 Diagramme entropique (T, s)

Dans un diagramme entropique, l'entropie est portée en abscisse et la température T en ordonnée.

Sur le plan didactique ce diagramme est très intéressant car il possède un grand nombre de propriétés.

1. Les évolutions isothermes sont représentées par des parallèles à l'axe des " s " et les isentropes parallèles à l'axe des " T ".

Si bien que pour n'importe quel fluide un cycle de Carnot sera toujours représenté par un rectangle. Ce qui n'est pas le cas pour un diagramme de Clapeyron.

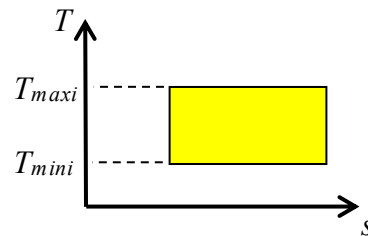


Figure XIX.02 Cycle de Carnot

2. Les évolutions adiabatiques irréversibles sont représentées par des courbes (en pointillé) inclinées vers les valeurs croissantes de l'entropie puisque :

$$ds = \frac{\delta f}{T} > 0$$

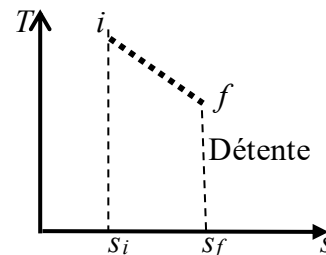
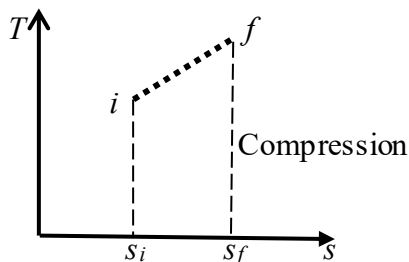


Figure XIX.03 Compression et détente adiabatique irréversible

3. L'aire sous-tendue par une courbe, représentant une transformation réversible, mesure la chaleur transférée avec le milieu extérieur puisque $\delta Q = Tds$ et par suite :

$$Q = \int_i^f T ds = \text{aire en jaune}$$

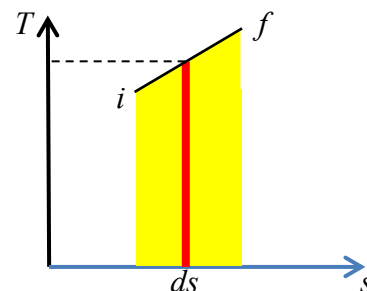


Figure XIX.04 Quantité de chaleur

4. La variation d'enthalpie, d'une évolution isobare, est mesurée par l'aire sous tendue de la courbe représentée sur la figure XIX.05.

En effet, pour une évolution isobare la relation (XV.08) devient $Tds = dh$. Il s'ensuit donc :

$$h_f - h_i = \int_i^f Tds = \text{aire en jaune}$$

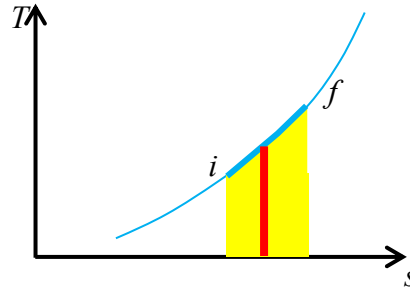


Figure XIX.05 variation d'enthalpie

Si l'évolution était isochore la relation (XV.08) permettrait d'écrire que $Tds = du$. L'aire en jaune représenterait alors la variation d'énergie interne.

Pour la mesure de ces surfaces, il faut toujours considérer l'axe correspondant au zéro absolu. La température T doit être nécessairement exprimée en Kelvin.

5. Les aires du diagramme entropique et du diagramme de Clapeyron représentent des énergies. Dans le cas d'une transformation cyclique réversible elles sont équivalentes puisque :

$$Q = \int_{\text{cycle}} Tds = \int_{\text{cycle}} pdv = - \int_{\text{cycle}} vdp = -w$$

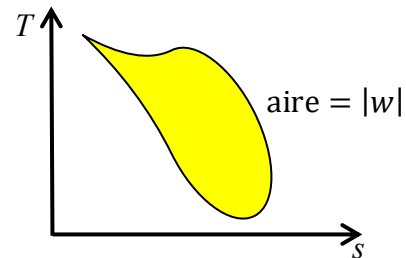


Figure XIX.06 Travail

6. La sous-tangente en un point M d'une courbe représentative d'une transformation réversible mesure la capacité thermique massique en ce point pour l'évolution considérée.

Pour une évolution isobare $i \rightarrow f$, nous pouvons écrire que :

$$\delta Q = c_p dT = Tds$$

Si bien qu'au point M nous avons :

$$\text{tg} \alpha = \frac{T}{ab} = \frac{c_p dT}{ds} \frac{1}{ab} = \frac{dT}{ds}$$

D'où le résultat :

$$c_p = ab = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p$$

De même pour une évolution isochore nous aurions :

$$c_v = a'b' = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v$$

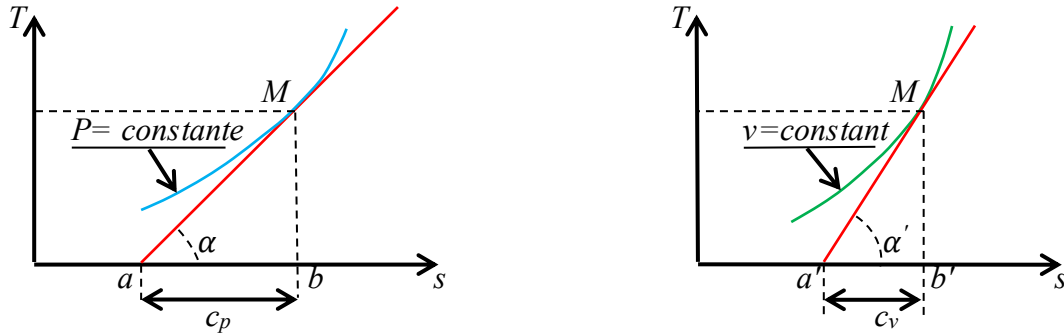


Figure XIX.07 Représentation graphique des capacités thermiques massiques c_p et c_v

On remarquera qu'en un même point M, d'un fluide homogène, la pente des isochores est plus grande que celle des isobares puisque le c_v est plus petit que le c_p .

7. Les isobares et les isochores d'un fluide homogène, ayant des capacités thermiques massiques constantes, sont des exponentielles.

Pour une transformation élémentaire réversible les relations (XV.04), (XVI.10) et (XVI.11) permettent d'écrire :

$$Tds = \delta Q = c_p dT + h_T dp = c_v dT + l_T dv$$

Pour une évolution isobare, cette expression devient $Tds = \delta Q = c_p dT$ soit :

$$ds = c_p \frac{dT}{T}$$

Si la capacité thermique massique c_p est constante, on obtient par intégration :

$$s - s_0 = c_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \Rightarrow T = T_0 e^{\frac{s-s_0}{c_p}}$$

Soit l'expression d'une exponentielle $T = Ke^{\frac{s}{c_p}}$

Pour une évolution isochore, on obtiendrait de même $T = K'e^{\frac{s}{c_v}}$

En toute rigueur nous ne pouvons pas dire que les isochores et les isobares d'un fluide homogène sont des exponentielles. Toutefois la forme réelle de ces courbes s'en éloigne assez peu.

Les variations des capacités thermiques massiques sont relativement lentes avec la température.

8. Dans un gaz idéal parfait, les isobares se déduisent les unes des autres par des translations parallèles à l'axe des s . Il en est de même pour les évolutions isochores.

De l'expression (XV.08) appliquée à un gaz parfait et pour une transformation allant de i à f , $Tds = c_p dT - vdp$, nous déduisons que la variation d'un gaz idéal parfait est :

$$s_f - s_i = c_p \ln \frac{T_f}{T_i} - r \ln \frac{p_f}{p_i} \quad (\text{XIX.01})$$

Conformément à la figure XIX.08, considérons maintenant deux isobares p_1 et p_2 ainsi qu'une parallèle quelconque à l'axe des "s". Cette isotherme coupe les deux isobares en A et B. Puisque $T_A = T_B$, la relation (XIX.01) devient :

$$s_B - s_A = -r \ln \frac{p_B}{p_A} = -r \frac{p_2}{p_1}$$

Traçons une autre isotherme qui coupe, cette fois, les isobares en C et D.

Pour les mêmes raisons que précédemment, $T_C = T_D$, donc :

$$s_D - s_C = -r \ln \frac{p_D}{p_C} = -r \frac{p_2}{p_1}$$

Il s'ensuit que :

$$s_B - s_A = s_D - s_C \quad (\text{XIX.02})$$

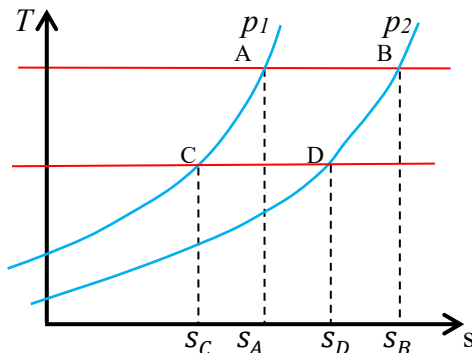


Figure XIX.08 Translation des isobares

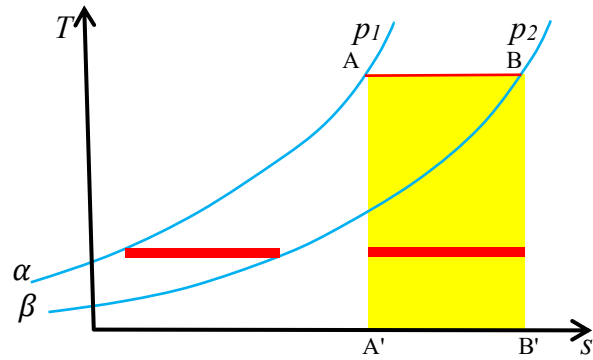


Figure XIX.09 Egalité des surfaces

Ceci est vrai pour n'importe quelle isotherme délimitée par les deux isobares p_1 et p_2 . Ainsi l'aire $\alpha AB\beta$ est finie et égale à l'aire du rectangle $A'ABB'$.

Exercice XIX.1

Une mole de gaz parfait décrit réversiblement un cycle défini par les évolutions suivantes :

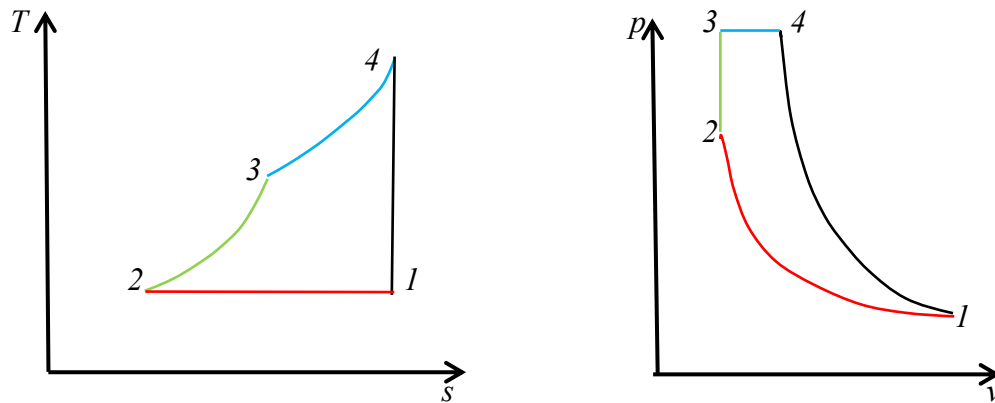
Compression isotherme $1 \rightarrow 2$

Chauffage isochore $2 \rightarrow 3$

Chauffage isobare $3 \rightarrow 4$

Détente isentropique $4 \rightarrow 1$

Représenter schématiquement cette transformation cyclique sur un diagramme entropique et sur un diagramme de Clapeyron.

Corrigé

4. Diagramme entropique des corps purs

Le but est de construire dans le diagramme entropique les caractéristiques d'un corps pur.

A titre d'exemple construisons celui de l'eau. Pour des questions pratiques, on prend nulles l'entropie et l'énergie interne au point triple.

Pour la construction, l'enthalpie est également prise nulle puisqu'au point triple le produit pv est très petit ($p = 0,0061$ bar).

1. Construction des isobares

Pour construire une isobare donnée, il faut être en mesure de déterminer avec précision un point de départ D.

En partant du point triple ($s = 0$), considérons une évolution isentropique amenant l'eau liquide jusqu'à la pression désirée.

La connaissance des capacités thermiques massiques, permet de déterminer la variation de température en utilisant les conséquences analytiques du premier et second principe de la thermodynamique.

Conformément à la Figure XIX.10, la branche DA correspond à l'échauffement isobare de l'eau liquide, de la température T_D à la température T_A de vaporisation. En tous points de cette courbe, la valeur de l'entropie est obtenue par intégration de :

$$\int_{T_D}^T c_p' \frac{dT}{T}$$

La capacité thermique massique c_p' de l'eau est presque une constante dans le domaine des températures et des pressions modérées. Cette courbe aura donc l'allure d'une exponentielle.

Dans la phase liquide-vapeur les isothermes et les isobares sont confondues. Il s'ensuit que le palier horizontal AB représentera ce changement de phase.

L'entropie du point B sera :

$$s_B = \int_{T_D}^{T_A} c_p' \frac{dT}{T} + \frac{L_v}{T_A}$$

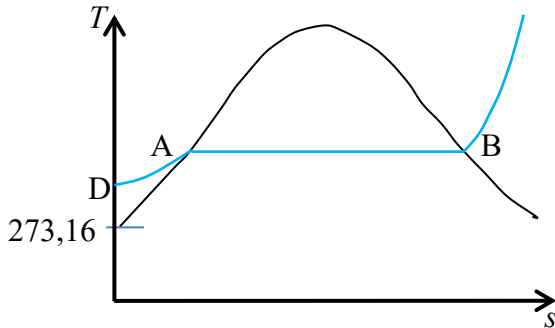


Figure XIX.10 Construction des isobares

L_v étant la chaleur latente de vaporisation à la température T_A .

Dans la région de la vapeur surchauffée, le long d'une isobare, nous aurons :

$$s - s_B = \int_{T_B=T_A}^T c_p'' \frac{dT}{T}$$

Comme pour l'eau liquide, cette courbe ressemblera à une exponentielle.

2. Courbe de saturation

Les courbes de titre constant (isotitres) sont obtenues en divisant, tout d'abord, en parties égales les paliers de vaporisation AB, puis en reliant les points homologues.

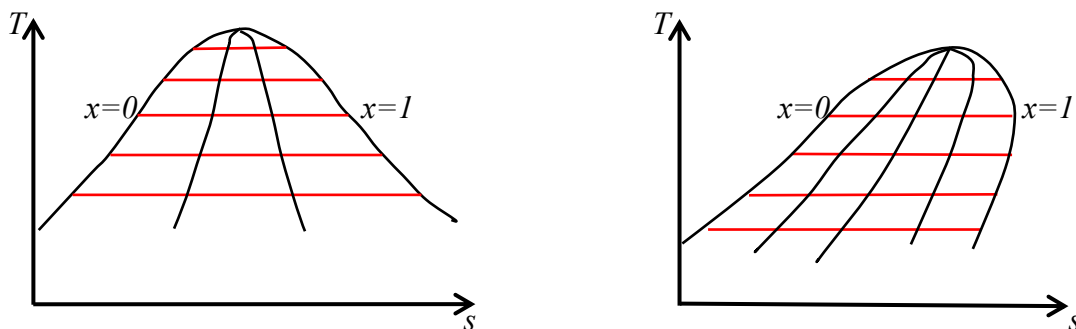


Figure XIX.11 Construction des isotitres

La plupart du temps les fluides ont une courbe de rosée ($x = 1$) de pente négative $\frac{dT}{ds} < 0$. Mais il peut en être tout autrement. Avec les hydrocarbures, une partie de la courbe $x = 1$ a une pente positive $\frac{dT}{ds} > 0$.

3. Construction des isochores

Supposons construit le réseau des isothermes dans le diagramme p, v (voir figure XVIII.05). Dans ce diagramme, en tout point d'une verticale ($v = \text{constante}$), nous pouvons relever les valeurs de la pression et de la température correspondantes.

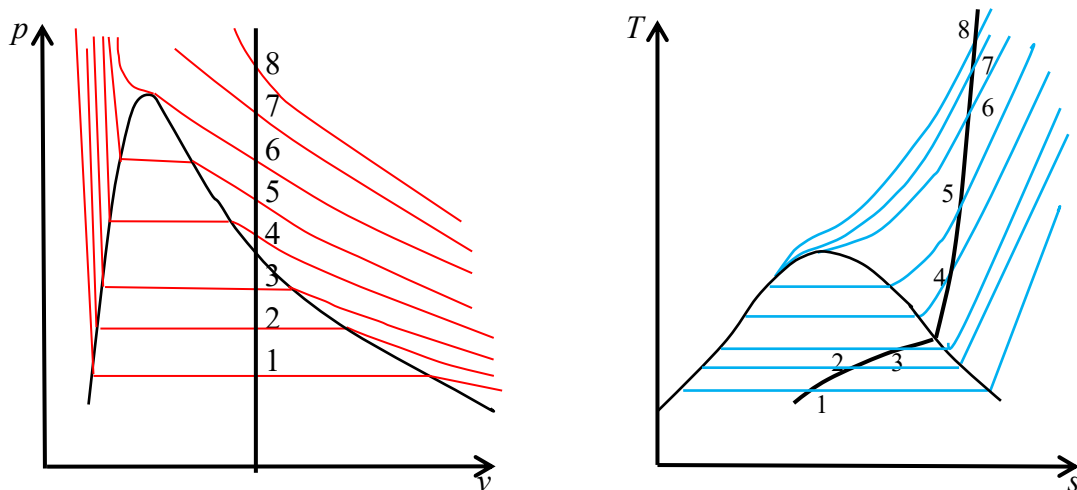


Figure XIX.12 Construction des isochores

Si dans le diagramme T,s le réseau des isobares est tracé, nous pouvons reporter tous les points précédemment relevés. En les joignant, nous traçons une courbe à volume constant. En répétant cette opération, nous obtenons le réseau des isochores dans le diagramme entropique.

4. Construction des isenthalpes

Il serait possible de déterminer les courbes à enthalpie constante à partir de la mesure des aires sous-tendues par les isobares. Mais on préfère, compte tenu des grandeurs relevées expérimentalement, calculer directement l'enthalpie. Notons que ces valeurs sont données dans les tables et leur simple report permet de construire les isenthalpes dans le diagramme entropique.

Les isenthalpes sont fortement descendantes dans la zone de vaporisation et relativement peu à droite de la courbe de rosée.

Pour la vapeur surchauffée, qui tend à se comporter comme un gaz parfait, les isenthalpes se rapprochent de l'horizontale puisque, dans ces conditions, nous avons :

$$\Delta h = c_p \Delta T$$

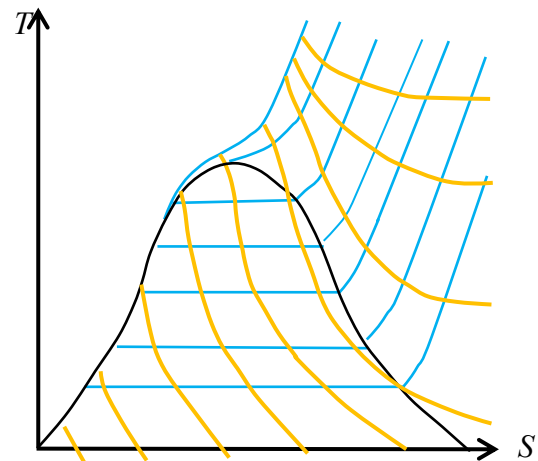


Figure XIX.13 Construction des isenthalpes

5 Diagramme de Mollier (h,s)

Conformément à la relation XII.16, le premier principe de la thermodynamique appliqué à un système ouvert en régime permanent s'écrit :

$$w_l + Q = \int_E^S h_i$$

Dans les applications industrielles, notamment dans le domaine des machines, les variations de l'enthalpie d'arrêt sont prépondérantes. Il est donc commode d'utiliser un diagramme sur lequel l'enthalpie est portée en ordonnées et l'entropie en abscisse. Ce diagramme est particulièrement intéressant dans l'étude des turbomachines qui sont considérées comme adiabatiques. Ainsi les abscisses seront représentatives de la qualité thermodynamique de l'appareil. La différence d'ordonnée mesurera directement, suivant le sens de l'échange, le travail interne reçu ou cédé par la turbomachine.

5-1. Propriété du diagramme (h,s)

Les évolutions isenthalpiques sont représentées par des parallèles à l'axe des entropies et les isentropes par des parallèles à l'axe des isenthalpes.

Les évolutions isobares sont des courbes ayant un coefficient angulaire égal à la température absolue du point considéré. En effet pour une évolution isobare, la relation XV.08 permet de déduire :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T$$

Dans la phase liquide, les isobares sont pratiquement confondues avec la courbe d'ébullition.

Dans la zone d'équilibre des deux phases liquide-vapeur, les isobares, confondues avec les isothermes, sont des droites ayant un coefficient angulaire égal à la température absolue.

Dans la zone vapeur les isobares sont des courbes croissantes qui seraient des exponentielles si le gaz était idéal parfait.

5-2 Gaz parfait

Dans le cas particulier où le fluide en évolution est idéal parfait, le diagramme h,s s'identifie au diagramme entropique T,s (à un changement de l'échelle des ordonnées près). En effet nous avons :

$$h_f - h_i = c_p(T_f - T_i)$$

Si le gaz est parfait les capacités thermiques massiques ne sont fonction que de la température. Les isothermes sont donc encore des parallèles à l'axe des s , mais leur écartement croît avec la température puisque c_p augmente avec T .

5-3 Diagramme (h,s) d'un corps pur

Le diagramme h,s d'une vapeur s'obtient par la transformation du diagramme T,s . Les abscisses étant les mêmes, il suffit de placer le diagramme h,s au-dessous du T,s et de porter en ordonnée, à la verticale de chaque point, la valeur de l'enthalpie correspondante.

La figure XIX.14 montre qu'il est facile de construire, dans le diagramme h,s , la courbe de saturation en partant du diagramme entropique T,s . Évidemment, cette construction peut s'effectuer en partant directement d'une table de vapeur.

La courbe de saturation est obtenue en reportant les valeurs de h' , s' et celles de h'' , s'' . En joignant par des droites, les points correspondants, on obtient les isobares dans la phase liquide-vapeur. Ces droites, de coefficient angulaire à T , sont également représentatives des isothermes, puisque dans la phase liquide-vapeur, elles sont confondues avec les isobares.

Les courbes de titre constant s'obtiennent, comme pour le diagramme T,s , en divisant en partie égales les paliers de vaporisation et en reliant entre eux les points homologues.

Dans la région de la vapeur surchauffée, les isobares et les isothermes se raccordent aux paliers de vaporisation. Lorsqu'on s'éloigne de la courbe de saturation, pour se rapprocher du gaz parfait, les isobares ont une allure exponentielle et les isothermes tendent vers des horizontales.

La figure XIX.16 est directement représentative des diagrammes de Mollier, de la vapeur d'eau, que l'on trouve dans le commerce. Ils sont tracés dans la zone qui contient le domaine d'emploi industriel. Ces diagrammes sont particulièrement utiles dans l'étude et la conception des turbines à vapeur.

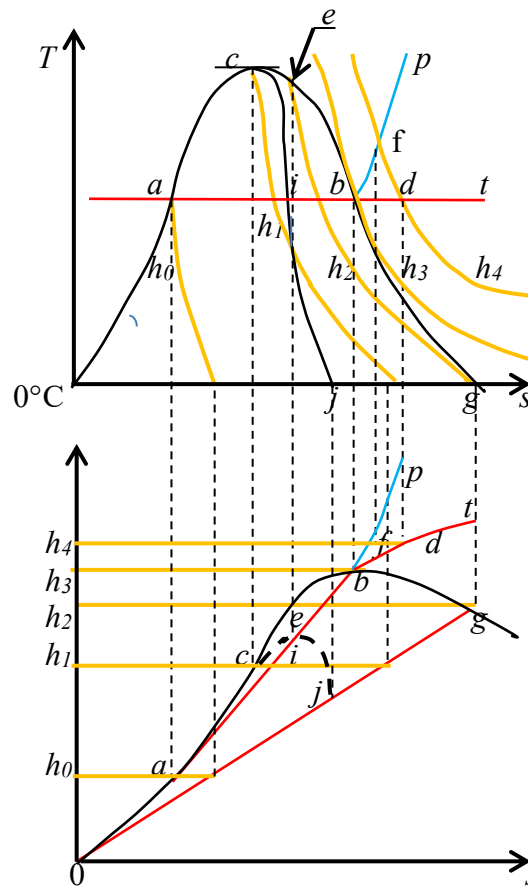


Figure XIX.14 Construction du diagramme h,s

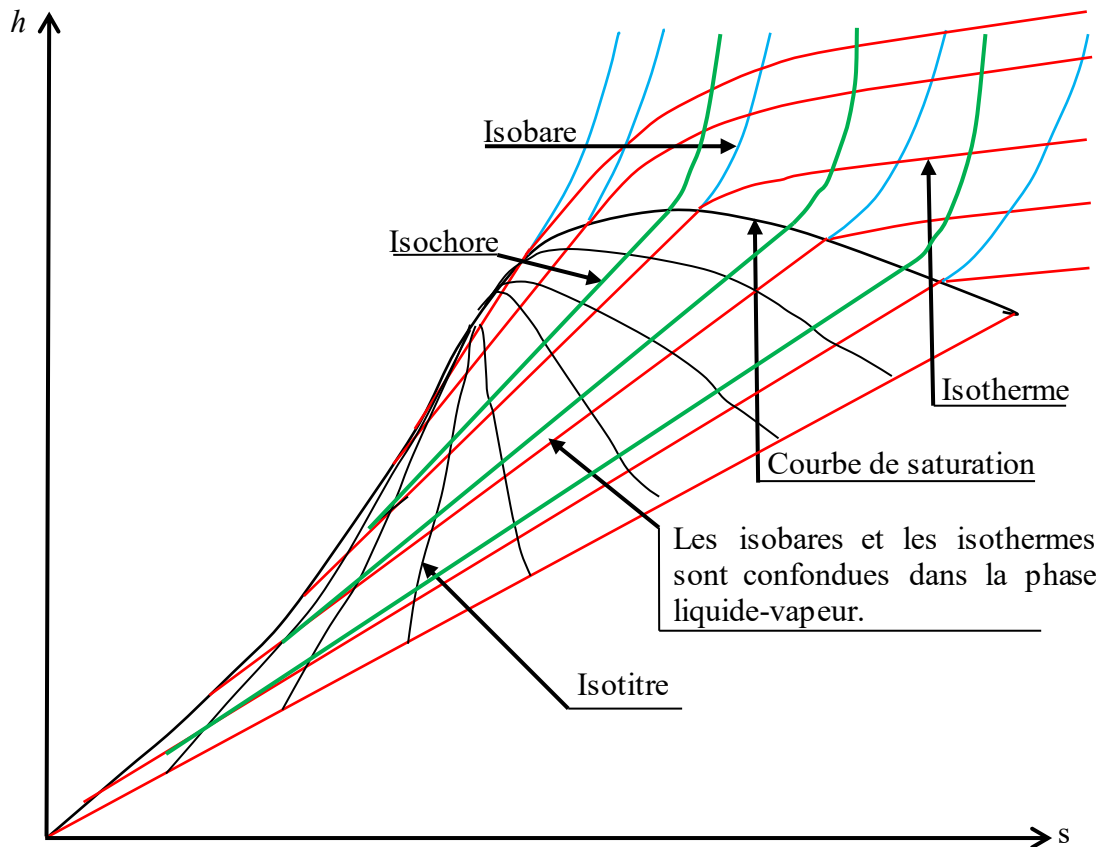


Figure XIX.15 Schématisation du diagramme h,s

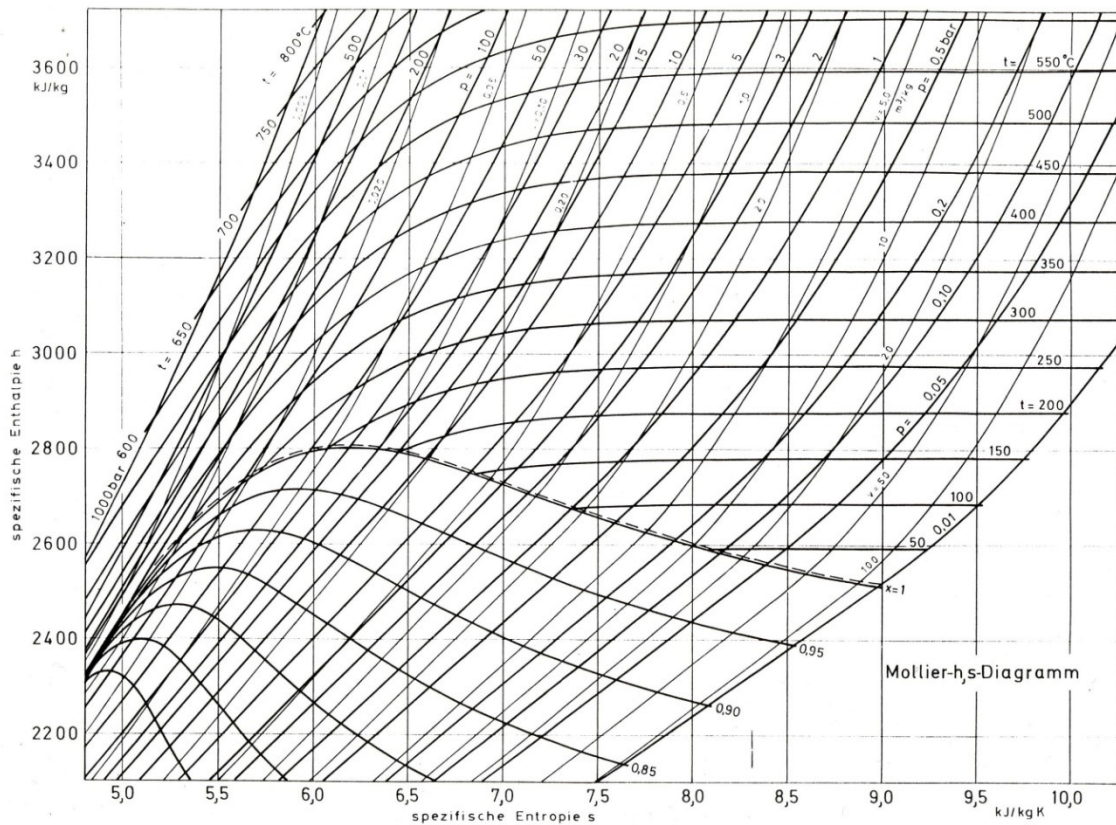


Figure XIX.16 Diagramme de Mollier de la vapeur d'eau

Exercice XV.2

Un cylindre fermé par un piston contient, à l'état initial, un volume $V_i = 45 \text{ dm}^3$ de vapeur d'eau à une température de $t_i = 123^\circ\text{C}$ sous une pression de $p_i = 1 \text{ bar}$. On laisse se déplacer très lentement le piston jusqu'au volume final de $V_f = 20 \text{ dm}^3$. On admet que l'évolution est isotherme.

En disposant d'un diagramme de Mollier déterminer la pression où a lieu le début de liquéfaction ainsi que le titre de la vapeur à l'état final.

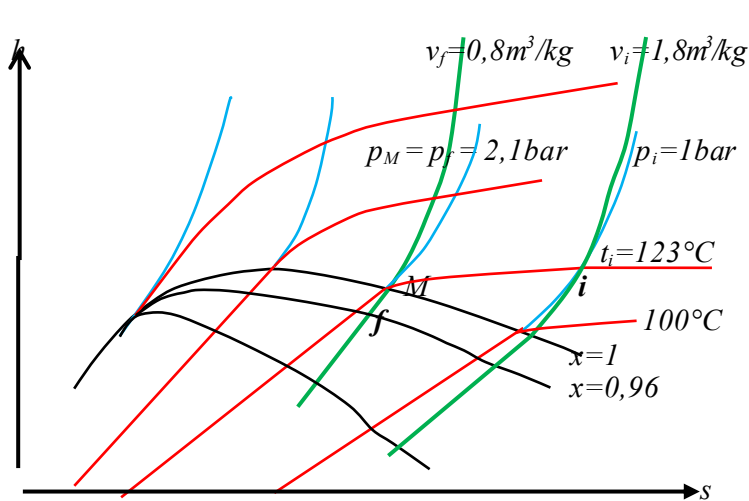
Corrigé

À l'état initial "i", avant déplacement du piston, on lit, approximativement à l'intersection de l'isobare $p_i = 1 \text{ bar}$ et de l'isotherme $t_i = 123^\circ\text{C}$, un volume massique $v_i = 1,8 \text{ m}^3/\text{kg}$.

La masse de vapeur d'eau contenue dans le cylindre est :

$$m = \frac{V_i}{v_i} = \frac{0,045}{1,8} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

Soit M le point où débute la liquéfaction, on lit à l'intersection de l'isotherme $t_i = 123^\circ\text{C}$ et de la courbe $x = 1$, une pression $p_M = 2,1 \text{ bar}$.



Pour placer le point final "f" caractérisant l'état final, il faut calculer le volume massique du mélange eau-vapeur.

$$v_f = \frac{V_f}{m} = \frac{0,020}{25 \cdot 10^{-3}}$$

$$v_f = 0,8 \text{ m}^3/\text{kg}$$

L'isochore $v_f = 0,8 \text{ m}^3/\text{kg}$ coupe l'isobare 2,1 bar au point "f" où nous lisons un titre $x = 0,96$.

6 Diagrammes des frigoristes

6-1 Diagramme pression-enthalpie (p, h)

Pour une question de commodité, liée à la représentation des systèmes cycliques des installations frigorifiques, les spécialistes préfèrent utiliser des diagrammes obtenus en portant l'enthalpie h en abscisse et la pression p en ordonnée. Les diagrammes p, h des fluides frigorigènes sont généralement construits en prenant arbitrairement l'enthalpie et l'entropie nulles pour la température $t = 0^\circ\text{C}$.

1. Isobares et isenthalpes

Dans ce diagramme les isobares sont représentées par des parallèles à l'axe des enthalpies h et les isenthalpes par des parallèles à l'axe des isobares p .

2. Isothermes

Évidemment dans le domaine de coexistence des phases liquide et vapeur, les isothermes sont confondues avec les isobares.

Dans le domaine où le fluide se rapproche d'un gaz parfait, les isothermes deviennent des parallèles à l'axe p . Dans la phase liquide, où le volume massique est quasiment constant, elles sont également verticales.

3. Isentropes

De la relation $T ds = dh - v dp$ on déduit :

$$dp = \frac{dh}{v} - \frac{T}{v} ds = \left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_s dh + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_h ds$$

Et par suite :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_s = \frac{1}{v}$$

Ainsi le coefficient angulaire des isentropes est, en tout point, inversement proportionnel au volume massique.

Les isentropes sont des courbes à coefficient angulaire positif croissant puisque, lorsque la pression croît, le volume massique décroît.

4. Isotitres

De façon analogue aux diagrammes T,s ou h,s , on obtient les courbes de titre constant en divisant les paliers de vaporisation en parties égales et en reliant entre eux les points homologues.

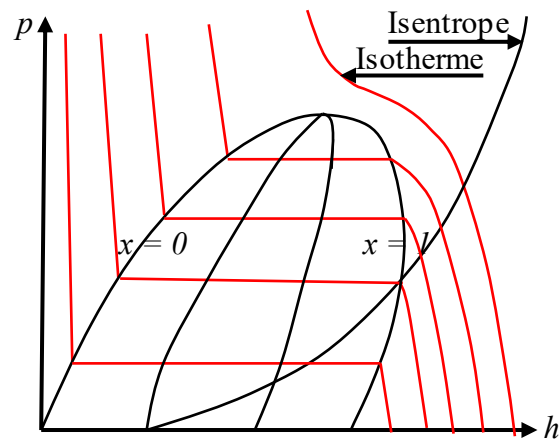


Figure XIX.17 Diagramme pression-enthalpie

6-2 Diagramme $\ln(p,h)$

Ce diagramme dérive du p,h . L'abscisse porte l'enthalpie et sur l'ordonnée il y a les pressions graduées en une échelle logarithmique. Cette représentation permet de réduire l'encombrement en hauteur du graphique.

Notons que la pente des isentropes est changée puisque :

$$\left(\frac{\partial}{\partial h} (\ln p) \right)_s = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_s$$

Et comme $\left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_s = \frac{1}{v}$ il s'ensuit que :

$$\left(\frac{\partial}{\partial h} (\ln p) \right)_s = \frac{1}{pv}$$

Dans la région où le fluide tend vers un gaz parfait, il vient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial h} (\ln p) \right)_s = \frac{1}{rT}$$

La pente des isentropes est inversement proportionnelle à la température T .

Chapitre XX

Anergie et exergie

1 Généralités

L'utilisation du premier et second principe de la thermodynamique permet d'analyser les échanges d'énergie dans une installation industrielle.

Le second principe introduit une hiérarchie entre les diverses sources d'énergie et il offre la possibilité d'apprécier l'aptitude d'un système à produire du travail.

Par contre, la notion d'entropie présente l'inconvénient de ne pas avoir de signification physique concrète et de s'exprimer en joules par kelvin (J/K).

L'intérêt majeur de l'exergie est de permettre de substituer à l'entropie un outil plus clair tout en étant homogène à une énergie.

La théorie de l'exergie s'applique à des systèmes absolument quelconques, qu'ils soient fermés ou ouverts. Devant leur importance industrielle nous ne traiterons ici que les systèmes ouverts en régime permanent. Une démarche similaire permettrait de traiter le cas des autres types de systèmes.

2 Expression de l'exergie

Une façon de procéder pour conduire à la notion d'exergie est de définir un mode de compatibilité des échanges d'énergie en tenant bien compte de la différence de nature entre le travail et la chaleur. Ceci dans le but de calculer le travail utile maximal susceptible d'être récupéré à partir d'un état déterminé.

D'où la notion de travail équivalent, ou d'énergie noble, liée à un échange d'énergie.

Dans un système ouvert en écoulement permanent le travail utile est celui qui est récupéré ou fourni par l'arbre de la machine.

Il s'ensuit que le travail équivalent sera le travail δw_l lui-même.

Le travail équivalent à un échange de chaleur δQ est celui qui serait mis en œuvre dans un cycle idéal.

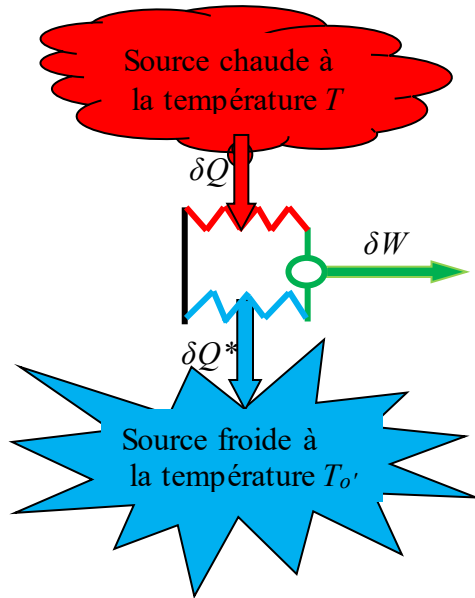
Pour un cycle de Carnot la source chaude, à température T , fournirait la quantité de chaleur δQ tandis que la source froide serait constituée par le milieu ambiant. Dans ce cas la source froide serait dite gratuite.

Dans ces conditions nous savons que :

$$\delta Q = T dS \quad \delta Q^* = -T_o dS \quad |\delta w| = \delta Q + \delta Q^*$$

Il s'ensuit donc que l'énergie noble équivalente à δQ est :

$$\left(1 - \frac{T_o}{T}\right) \delta Q$$



Pour l'évolution élémentaire d'un système ouvert en écoulement permanent l'énergie noble, telle que nous l'avons définie, s'écrit :

$$\delta w_l + \left(1 - \frac{T_o}{T}\right) \delta Q$$

En combinant cette expression avec le premier et le second principe de la thermodynamique nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta w_l + \left(1 - \frac{T_o}{T}\right) \delta Q \\ = dh + d \frac{V^2}{2} + g dz - T_o ds + T_o ds_i \end{aligned}$$

Puisque du premier principe :

$$\delta w_l + \delta Q = dh + d \frac{V^2}{2} + g dz$$

Figure XX.01 Production d'énergie

Et du second principe en posant $\delta s_i = \frac{\delta f}{T}$ (chapitre 15 paragraphes 5)

$$ds = \frac{\delta Q}{T} + ds_i$$

De la définition de l'enthalpie d'arrêt $h_i = h + \frac{V^2}{2}$, et en négligeant l'action de la pesanteur, l'expression de l'énergie noble devient :

$$\delta w_l + \left(1 - \frac{T_o}{T}\right) \delta Q = dh_i - T_o ds + T_o ds_i$$

Dans cette dernière expression posons :

$$ex = h_i - T_o s \quad \text{et} \quad \delta P_{ex} = T_o ds_i$$

Nous aboutissons à ce que l'on désigne habituellement par bilan énergétique :

$$\delta w_l + \left(1 - \frac{T_o}{T}\right) \delta Q = d(ex) + \delta P_{ex}$$

La fonction "ex" est appelée exergie massique. Comme la fonction de Gibbs $G = h - Ts$, l'exergie est une fonction d'état mais par contre, elle fait intervenir la température ambiante T_o qui est une variable extérieure au système.

Le terme $P_{ex} = T_o \int \delta S_i$ est appelé la perte exergétique. Comme nous le savons, δS_i caractérise la dégradation énergétique, il est toujours positif sauf dans le cas particulier d'évolution réversible ou il serait nul.

$$\text{Echange d'énergie noble} = \text{variation d'exergie} + \text{perte exergétique}$$

3 Rendement exergétique

Le rendement exergétique η_{ex} sera défini comme le rapport de l'exergie (considérée comme utile) produite par le système à l'exergie consommée.

À titre d'exemple, considérons la compression adiabatique irréversible depuis un état 1 jusqu'à un état 2. Pour plus de généralité nous admettons que l'état 1 est différent de l'état ambiant (T_o et p_o).

$$\eta_{ex} = \frac{\frac{2}{1} \Delta ex}{W_I} = \frac{h_{i2} - h_{i1} - T_o(s_2 - s_1)}{h_{i2} - h_{i1}}$$

Représentons sur un diagramme T,s cette évolution et comparons le rendement exergétique au rendement isentropique ainsi qu'au rendement polytropique.

Le rendement isentropique est égal au rapport des aires suivantes :

$$\eta_{is} = \frac{A}{A + B + C + D}$$

Le rendement polytropique aux aires

$$\eta_p = \frac{A + B}{A + B + C + D}$$

et le rendement exergétique

$$\eta_{ex} = \frac{A + B + C}{A + B + C + D}$$

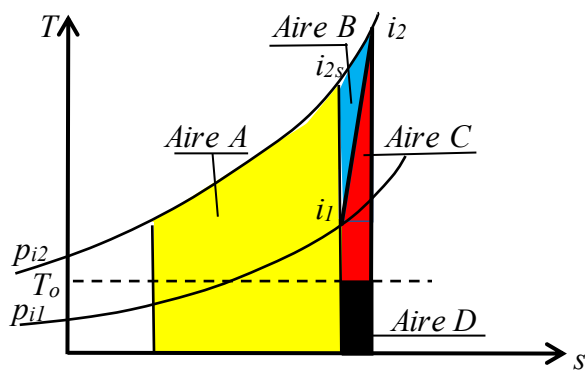


Figure XX.02 Comparaison des rendements

Le rendement isentropique caractérise l'ensemble des pertes ((B+C+D)). Il est séduisant par sa simplicité mais, en fait, d'un intérêt limité car il dépend de la qualité technologique du compresseur et de son rapport de compression.

Le rendement polytropique tient uniquement compte des pertes par frottement et par choc qui

correspondent aux aires : $C + D = \int_1^2 T ds$

Le rendement polytropique est très représentatif de la qualité technologique du compresseur et par conséquent du plus grand intérêt pour le constructeur. C'est la raison pour laquelle il sera développé dans l'étude des turbomachines.

Le rendement exergetique considere uniquement comme perte le terme $T_o(s_2 - s_1)$ que l'on nomme parfois l'**anergie**. Il presente un interet dans l'analyse des cycles ou l'aire C peut etre recuperee. Dans la construction des turbomachines il est tres peu utilise.

Exercice XX.1

Un compresseur adiabatique aspire de l'air dans un etat ambiant a $T_{i0}=288K$ et $p_{i0} = 101325 Pa$ pour le refouler a $T_{i1} = 523K$ et $p_{i1} = 6 bar$.

Calculer le rendement exergetique sachant que l'air se comporte comme un gaz ideal parfait de caracteristiques :

$$r = 287 J/kg.K \quad \gamma = 1,4 \quad c_p = 1004,5 J/kg.K$$

Corrigé.

La variation d'exergie est :

$$\Delta ex = \int_0^1 h_{i1} - h_{i0} - T_o(s_1 - s_0)$$

Avec :

$$h_{i1} - h_{i0} = c_p(T_{i1} - T_{i0}) = 101325 (523 - 288)$$

$$h_{i1} - h_{i0} = 236057,5 J/kg$$

et :

$$T_o(s_1 - s_0) = T_o \left(c_p \ln \frac{T_1}{T_o} - r \ln \frac{p_1}{p_o} \right) = 288 \left(1004,5 \ln \frac{523}{288} - 287 \ln \frac{6 \cdot 10^5}{101325} \right)$$

$$T_o(s_1 - s_0) = 25588,4 J/kg$$

Il vient :

$$\Delta ex = \int_0^1 210469,1 J/kg$$

Le travail absorbe par le compresseur adiabatique est :

$$w_l = h_{i1} - h_{i0} = 236057,5 J/kg$$

Il s'ensuit que le rendement exergetique est :

$$\eta_{ex} = \frac{210469,1}{236057,5} = 0,892$$

Le calcul conduirait a un rendement isentropique de 0,812 et a rendement polytropique de 0,852.

La notion de rendement exergetique n'est pas restrictive aux transformations non cycliques. Ce rendement est tout a fait adapte pour caracteriser le degre de perfection d'une installation au sens de l'energetique thermodynamique.

Par exemple pour une transformation cyclique ditherme, productrice d'energie le rendement energetique serait :

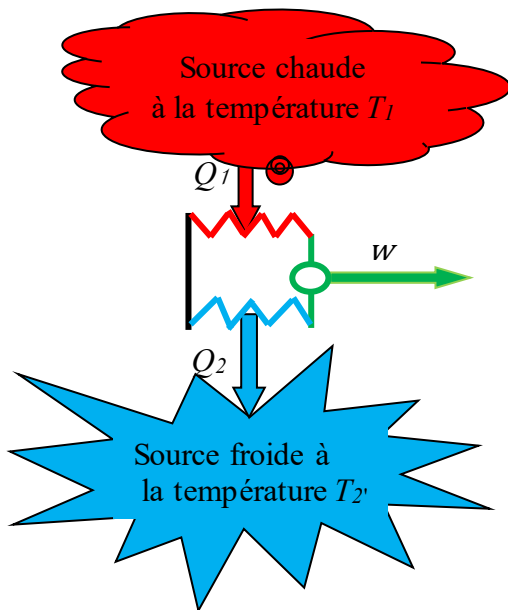


Figure XX.03 Cycle ditherme

$$\eta_{ex} = \frac{|w|}{Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}$$

Alors que le rendement thermique est :

$$\eta = \frac{|w|}{Q_1}$$

Et celui d'un cycle de Carnot :

$$\eta_{carnot} = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

Ainsi pour une transformation cyclique réversible le rendement exégetique est égal à 1.

Il est d'autant inférieur à 1 que le procédé est irréversible. Il vaut sensiblement 0,6 pour l'ensemble des centrales électriques.

4 Bilan exergétique

Le choix du système thermodynamique à étudier est très important pour l'établissement des bilans enthalpiques et exergétiques. Lors des transferts de chaleur deux démarches sont possibles :

- On peut définir un système dans lequel les transferts de chaleur s'effectuent avec le milieu extérieur aux températures du fluide qui évolue. En d'autres termes cela signifie qu'on s'intéresse uniquement à la transformation sans se préoccuper des transferts de chaleur avec les sources.
- On peut définir un système plus large dans lequel les transferts de chaleur s'effectuent aux températures des sources. Ainsi on pourra prendre en compte les irréversibilités liées aux transferts thermiques entre les sources de chaleur et le fluide qui évolue.

Exercice XX.2

Dans une centrale nucléaire le transfert de chaleur entre le dioxyde de carbone en provenance, du réacteur, de la vapeur d'eau alimentant la turbine, s'effectue dans les conditions suivantes :

- L'écoulement du CO est permanent ainsi que celui du H₂O.
- L'échangeur est parfaitement calorifugé.
- L'état atmosphérique est $p_0 = 101\,325\text{ Pa}$ et $T = 300\text{ K}$.

Pour le CO₂ on a :

-en (1) à l'entrée de l'échangeur on a : $p_1 = 26\text{ bar}$ et $t_1 = 413^\circ\text{C}$.

-en (2) à la sortie on a : $p_2 = 25,5\text{ bar}$ et $t_2 = 230^\circ\text{C}$.

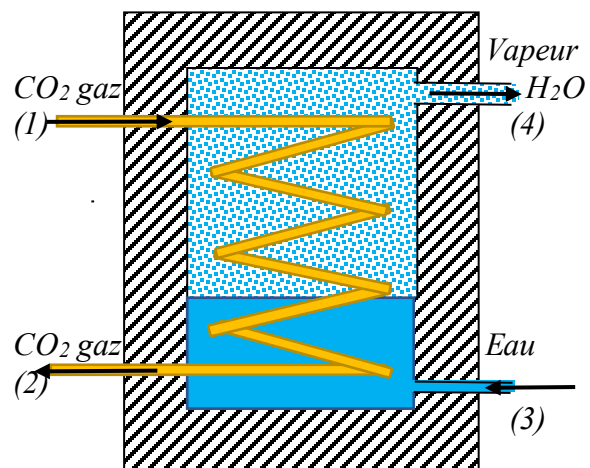
On admettra que le dioxyde de carbone se comporte comme un gaz parfait ayant, dans cet intervalle de température, les caractéristiques suivantes :

$$r = 187 \text{ J/kg.K}$$

$$c_p = 800,8 + 0,4807 T$$

avec T en K et c_p en J/kg.K

Le débit masse est : $q_{m\text{CO}_2} = 9000 \text{ kg/s}$



Pour le H_2O on donne : les caractéristiques sous la forme du tableau suivant :

Désignation	p en bar	t en $^{\circ}\text{C}$	h en kJ/kg	s en kJ/kg.K
Point 3	36	100	421,7	1,3041
Point 4	34	400	3225.9	6,8595

En négligeant les variations d'énergie cinétique calculer :

- 1.- la perte exergétique du CO_2 .
- 2.- la perte exergétique globale.
- 3.- le rendement exergétique de l'échangeur.

Corrigé.

1.- Pour le dioxyde de carbone le bilan exergétique s'écrit :

$$\left(1 - \frac{T_0}{T}\right) \delta Q = d(ex) + \delta P_{ex} \text{ puisque } W_I = 0 \text{ dans un échangeur.}$$

Calculons chacun de ces termes.

1.1.- Terme en $\left(1 - \frac{T_0}{T}\right) \delta Q$

Pour un système ouvert en écoulement permanent le premier principe de la thermodynamique nous permet d'écrire :

$$\delta Q = dh$$

Et par suite :

$$\int_1^2 \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) \delta Q = h_2 - h_1 - T_0 \int_1^2 \frac{dh}{T}$$

De l'hypothèse du gaz parfait :

$$\delta Q = c_p T$$

Donc :

$$\int_1^2 \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) \delta Q = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT - T_0 \int_{T_1}^{T_2} c_p \frac{dT}{T}$$

Avec :

$$\int_{T_1}^{T_2} c_p dT = \int_{686,15}^{503,15} (808,8 + 0,4807 T) dT = -200320 \text{ J/kg}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} c_p \frac{dT}{T} = 808,8 \ln \frac{503,15}{686,15} + 0,4807(230 - 413) = -338,9 \text{ J/kg.K}$$

On obtient :

$$\int_1^2 \left(1 - \frac{T_o}{T}\right) \delta Q - 200320 - 300 \times (-338,9)$$

$$\int_1^2 \left(1 - \frac{T_o}{T}\right) \delta Q = -98650 \text{ J/kg}$$

1.2.-Variation d'exergie :

$$\Delta ex = h_2 - h_1 - T_o(s_2 - s_1)$$

On a :

$$h_2 - h_1 = -200320 \text{ J/Kg}$$

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p \frac{dT}{T} - \int_{T_1}^{T_2} r \frac{dp}{p}$$

$$s_2 - s_1 = -338,9 - 187 \ln \frac{25,5}{26} = -335,3 \text{ J/kg.K}$$

Et :

$$\Delta ex = -200320 - 300 \times (-335,3) = -99730 \text{ J/kg}$$

1.3.- Pertes exégétiques

De l'équation de bilan nous déduisons la perte exergetique du CO2 :

$$P_{ex_{1 \rightarrow 2}} = -98650 - (-99730) = -1080 \text{ J/kg}$$

La puissance correspondant à cette perte est :

$$\dot{P}_{ex_{1 \rightarrow 2}} = 9000 \times 1,080 = 9720 \text{ kW}$$

2.- Pour l'ensemble de l'échangeur le bilan exergetique s'écrit sous forme de puissance :

$$\dot{P}_{ex} = -q_{mCO_2} \Delta ex_2 - q_{mH_2O} \Delta ex_4$$

2.1.- Calcul du débit masse d'eau

Nous devons satisfaire la relation :

$$q_{mCO_2}(h_2 - h_1) + q_{mH_2O}(h_4 - h_3) = 0$$

Soit :

$$q_{mH_2O} = \frac{9000 \times 200320}{(3225,9 - 421,7)10^3} = 642,9 \text{ kg/s}$$

2.2.- Variation de l'exergie de l'eau :

$$\begin{aligned} \Delta ex_{34} &= h_4 - h_3 - T_o(s_4 - s_3) \\ \Delta ex_{34} &= 3225,9 - 421,7 - 300 \times (6,8595 - 1,3041) \\ \Delta ex_{34} &= 1137,58 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

D'où la perte exergétique :

$$\dot{P} = (-9000 \times (-99730) - 642,9 \times 11137580)10^{-3}$$

$$\dot{P} = 166220 \text{ kW}$$

3.- Rendements exergétiques.

Le rendement exergétique de cet échangeur est :

$$\eta_{ex} = \frac{q_{mH_2O} \Delta ex_{34}}{q_{mCO_2} \Delta ex_{12}} = 0,815$$

***MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS ET
THERMODYNAMIQUE TECHNIQUES***

Application aux turbomachines

Cours avec exercices corrigés

Livre 4
Turbomachines

Marcel Frelin

Sous-Directeur de laboratoire honoraire au
Conservatoire National des Arts et Métiers

TABLE DES MATIERES

Turbomachines

Chapitre XXI	Application de la thermodynamique à la mécanique des fluides	1
1	Etude thermodynamique des écoulements stationnaires	1
2	Célérité du son.....	5
3	Théorème du Capitaine Hugoniot	7
4	Calcul du débit d'un gaz parfait au col d'une tuyère convergente-divergente.....	9
Chapitre XXII	Généralités sur les turbomachines.....	11
1	Définition.....	11
2	Classification	11
3	Principe de fonctionnement d'une pompe centrifuge.....	12
4	Principe d'une turbine centripète.....	14
5	Turbine à vapeur mono étage	15
6	Représentation de l'écoulement	16
Chapitre XXIII	Analyse des échanges d'énergie	18
1	Application du premier principe de la thermodynamique	18
2	Application du second principe	19
3	Écoulement dans une roue de turbomachine	20
4	Travail sur l'arbre de la roue	21
5	Théorème d'Euler.....	22
5.1	Première démonstration.....	22
5.2	Deuxième démonstration.....	23
6	Evolutions polytropiques.....	25
7	Travail polytropique	26
8	Représentation graphique	26
9	Rendements	27
9-1	Rendement global.....	27
9-2	Rendement mécanique	28
9-3	Rendement volumétrique	28
9-4	Rendement isentropique.....	28
9-5	Rendement polytropique	29
Chapitre XXIV	Pompes centrifuges	30
1.	Notations.....	30
2.	Hauteur manométrique	30
3	Hauteur théorique	31
4	Rendement hydraulique.....	31

5 Répartition des pressions et de l'énergie cinétique	31
6 Relations entre la hauteur théorique H_{th} et le débit volume q_v d'une pompe.....	32
7 Courbes caractéristiques.....	33
8 Déviation, influence du nombre des aubes.....	35
9 Diffuseurs	35
10 Diffuseurs lisses.....	35
11 Diffuseurs à aubes	37
Chapitre XXV Pompes hélices.....	41
1 Triangle des vitesses.....	41
2 Action du fluide sur les aubes	42
2-1 Théorème des quantités mouvement.....	42
2-2 Propriété des triangles quelconques	43
2-3 Efforts sur les aubes	44
3 Théorie sommaire de l'aile d'avion	44
4 Tracé au rayon r	46
5 Équilibre des différents filets.....	47
6 Tracé des aubages.....	49
7 Courbes caractéristiques.....	51

Chapitre XXI

Application de la thermodynamique à la mécanique des fluides

1 Etude thermodynamique des écoulements stationnaires

Le premier principe peut s'écrire (relation XII.12).

$$\delta w_l + \delta Q = dh + g dz + d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

Rappelons que δw_l est le travail interne d'une machine, qu'il ne faut pas confondre avec le travail des forces intérieures noté w_i .

Des relations (XV. 07 et XV. 08) le second principe de la thermodynamique s'écrit.

$$T ds = \delta Q + \delta f = dh - v dp = dh - \frac{dp}{\rho}$$

En procédant par substitution, on déduit de ces deux relations :

$$\delta w_l = \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + g dz + \delta f \quad (\text{XXI.01})$$

En négligeant l'action de la pesanteur, si nous considérons un écoulement réversible d'un fluide dans une canalisation nous retrouvons la relation (XI.14) parfois appelée Barré de Saint-Venant.

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0$$

En raison de la faible conductivité thermique des gaz et bien souvent de la rapidité des écoulements, on peut assimiler cette transformation à des évolutions adiabatiques.

Pour déterminer les grandeurs caractéristiques de ces écoulements nous disposons des relations suivantes :

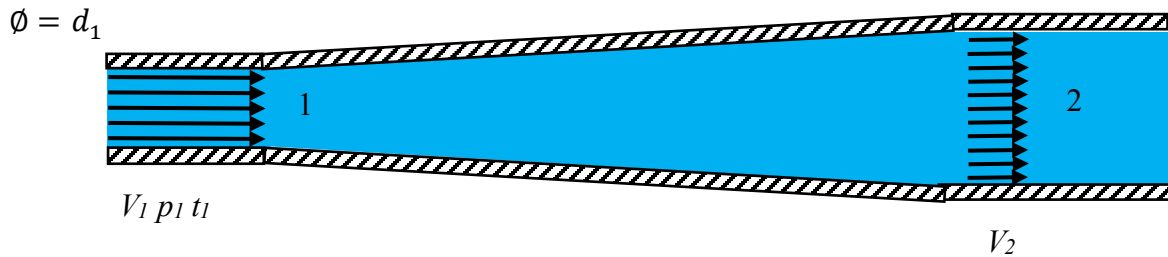
- du premier principe : $h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$ (évolution à enthalpie d'arrêt constante)

- du second principe : $h_2 - h_1 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + \zeta_{1 \rightarrow 2}$ (relation (XV.08))

- de la conservation du débit masse : $q_m = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$

Exercice XXI.01

Un gaz supposé idéal parfait, de caractéristiques $\gamma = 1,312$ et $r = 487,8 \text{ J/kg.K}$ s'écoule en régime permanent dans une tuyauterie divergente et horizontale conformément au croquis suivant. On supposera que l'écoulement est adiabatique et réversible, c'est-à-dire isentropique.



On donne les valeurs suivantes :

- à l'amont en 1 :

Vitesse moyenne	$V_1 = 250 \text{ m/s}$
Température statique	$t_1 = 20^\circ \text{C}$
Pression statique	$p_1 = 5 \text{ bar}$
Diamètre de la tuyauterie	$d_1 = 0,06 \text{ m}$

- à l'aval en 2

Vitesse moyenne	$V_2 = 100 \text{ m/s}$
-----------------	-------------------------

Calculer :

- 1) la température statique t_2
- 2) le diamètre de la tuyauterie d_2
- 3) la pression statique p_2
- 4) les pressions d'arrêt p_{i1} et p_{i2}
- 5) la masse volumique ρ_2

Corrigé

1) Du premier principe de la thermodynamique nous avons pour un écoulement permanent :

$$h_{i1} = h_{i2} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

Soit pour un gaz est idéal parfait :

$$c_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

$$\text{D'où la température statique } T_2 = T_1 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2c_p} = T_1 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2\gamma r} (\gamma - 1)$$

$$T_2 = 293 + \frac{(250)^2 - (100)^2}{2 \times 1,312 \times 487,8} (1,312 - 1) = 305,8 \text{ K} \quad t_2 = 32,7^\circ \text{C}$$

2) La continuité du débit exige :

$$q_m = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \Rightarrow A_2 = \frac{\pi d_1^2}{4} \frac{\rho_1 V_1}{\rho_2 V_2} = \frac{\pi d_2^2}{4}$$

$$D'où \quad d_2 = d_1 \sqrt{\frac{\rho_1 V_1}{\rho_2 V_2}}$$

Puisque l'évolution est isentropique on a ; $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)}$ et par suite :

$$d_2 = \sqrt{\left(\frac{293}{305,8}\right)^{\frac{1}{0,312}} \frac{250}{100}} \times 0,06 = 0,0886 \text{ m}$$

3) Le calcul de la pression statique p_2 est immédiat :

$$p_2 = p_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)} = 5 \times \left(\frac{305,8}{293}\right)^{\frac{1,312}{0,312}} = 5,98 \text{ bar}$$

4) L'évolution étant isentropique et le gaz parfait nous avons : $p_{i1} = p_{i2}$

$$p_{i1} = p_1 \left(\frac{T_{i1}}{T_1}\right)^{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)} \text{ et avec } T_{i1} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 293 + \frac{250^2 \times 0,312}{2 \times 1,312 \times 487,8} = 308,23 \text{ K}$$

D'où les pressions d'arrêt :

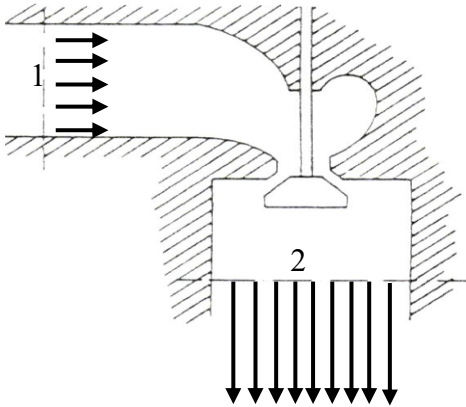
$$p_{i1} = p_{i2} = 5 \times \left(\frac{308,23}{293}\right)^{\frac{1,312}{0,312}} = 6,19 \text{ bar}$$

5) la masse volumique ρ_2 est :

$$\rho_2 = \frac{p_2}{rT_2} = \frac{5,98 \cdot 10^5}{487,8 \times 305,8} = 4 \text{ kg/m}^3$$

Exercice XXI.02.

De la vapeur d'eau s'écoule en régime permanent dans un dispositif horizontal comportant une soupape conformément à la figure ci-dessous.



En 1 à l'amont de la soupape, la vapeur a les caractéristiques suivantes :

Température statique $t_1 = 200\text{ °C}$

Pression statique $p_1 = 5 \cdot 10^5\text{ Pa}$

Surface $A_1 = 0,05\text{ m}^2$

On précise que le débit masse de la vapeur est $q_m = 1,2\text{ kg/s}$.

En 2 à l'aval de la soupape la pression statique $p_2 = 10^5\text{ Pa}$.

1) En utilisant un diagramme de Mollier déterminer le volume massique de la vapeur d'eau en 1 à l'amont de la soupape.

2) Calculer la vitesse V_1 moyenne dans la section A_1 .

3) Sachant que :

a) les parois de cet appareil sont adiabatiques.

b) la vitesse moyenne de la vapeur en 2 est $V_2 = 200\text{ m/s}$.

Calculer l'enthalpie dans la section A_2 .

4) Représenter sur un diagramme de Mollier l'évolution de la vapeur de 1 à 2. En déduire la température t_2 .

5) Calculer la surface A_2 .

6) Quelle est la variation d'entropie de la vapeur durant cette évolution.

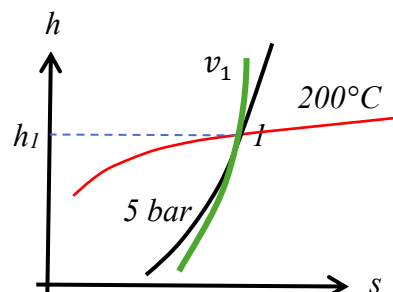
Corrigé

1) Sur un diagramme de Mollier nous lisons à l'intersection de l'isotherme 200 °C et de l'isobare cinq bars les valeurs suivantes :
 $h_1 = 2854\text{ kJ/kg}$ et $v_1 = 0,43\text{ m}^3/\text{kg}$

2) De l'équation de débit :

$$q_m = \rho_1 A_1 V_1 = \frac{A_1 V_1}{v_1}$$

$$\text{Nous déduisons : } V_1 = \frac{q_m v_1}{A_1} = \frac{1,2 \times 0,43}{0,05} = 1,32\text{ m/s}$$

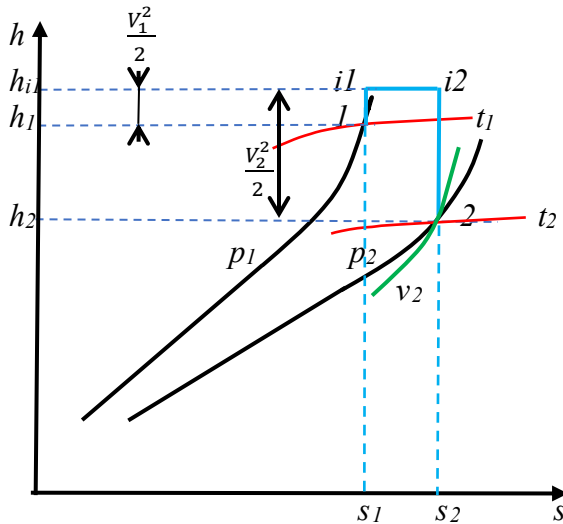


3) Du premier principe de la thermodynamique, pour un système ouvert en régime permanent, nous déduisons :

$$h_2 = h_1 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = 2854 + \frac{10,32^2 - 200^2}{2} \times 10^{-3}$$

$$h_2 = 2834 \text{ kJ/kg}$$

4) Nous avons :



$$h_{i1} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = 2854 + \frac{10,32^2}{2} \times 10^{-3}$$

$$h_{i1} = 2854,05 \text{ kJ/kg}$$

Les points 1 et il sont quasiment confondus. Malgré tout, nous les distinguons sur le diagramme ci-contre pour une question de pédagogie.

Par lecture nous lisons à l'intersection de $h_2=2834 \text{ kJ/kg}$ et de l'isobare $p_2 = 1 \text{ bar}$ les valeurs suivantes :

$$t_2 = 180\text{ }^{\circ}\text{C et } v_2 = 2,1\text{ m}^3/\text{kg}$$

5) De l'équation de débit nous déduisons :

$$A_2 = \frac{q_m v_2}{V_2} = \frac{1,2 \times 2,1}{200} = 0,0126 \text{ m}^2$$

6) Par lecture sur le diagramme de Mollier nous lisons les valeurs de l'entropie en 1 et 2. D'où la variation :

$$s_2 - s_1 = 7,74 - 7,05 = 0,69 \text{ kJ/kg.K}$$

2 Célérité du son

Pour déterminer la célérité du son, notée a , considérons tout d'abord l'écoulement permanent d'un liquide parfait contenu à l'intérieur une canalisation rectiligne. Nous supposons en outre que cette canalisation est rigoureusement indéformable et de section constante A .

Si nous provoquons alors un ébranlement, il y aura au passage de l'onde une discontinuité de la pression p , de la masse volumique ρ , de la température T et également de la vitesse V . Pendant le temps dt , la masse de fluide concernée par le parcours de cette onde est $\rho Aadt$ et

elle subit une accélération $\frac{dV}{dt}$.

Pour cette masse de fluide l'équation de la dynamique s'écrit :

$$A(p + dp) - Ap = \rho Aadt \frac{dV}{dt}$$

Soit :

$$dp = \rho a dV \quad \text{(XXI.02)}$$

À la date $t = t_1$, cette onde élémentaire se trouve à une abscisse $x = x_1$ dans la canalisation.

À la date $t_2 = t_1 + dt$ l'onde se trouvera à l'abscisse $x_2 = x_1 + adt$.

Au temps t_1 , toutes les particules du fluide comprises entre les sections A_1 et A_2 ont évidemment conservé leur masse volumique ρ et leur vitesse V .

Au temps t_2 la section A_1 se trouve en A_3 et la masse volumique et vitesse des particules fluides comprises entre A_3 et A_2 sont devenues respectivement $\rho + d\rho$ et $V + dV$.

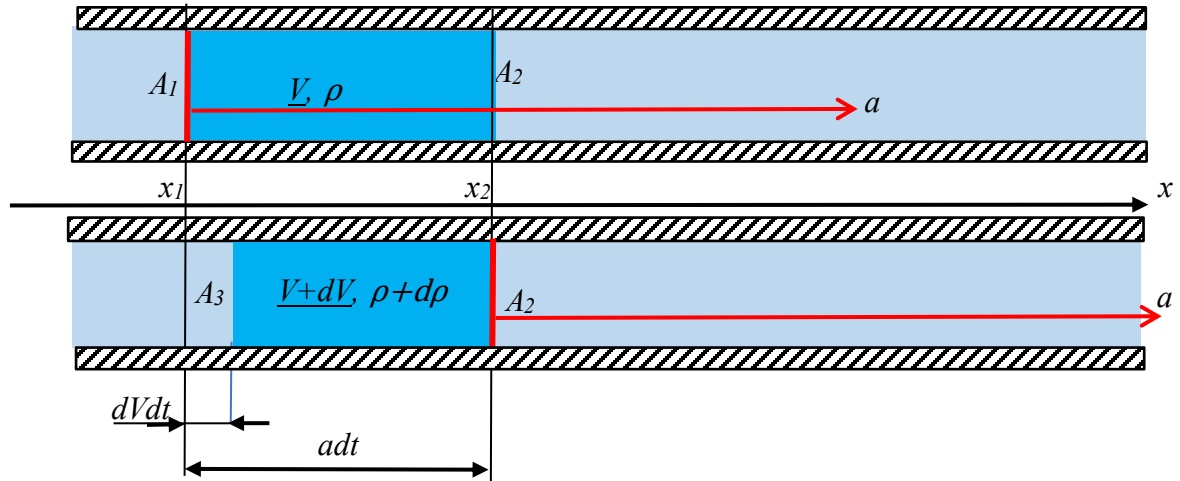


Figure XXI.01 Conservation de la masse

Ainsi que nous l'avons précédemment indiqué, avant le passage de l'onde, la masse de fluide comprise entre A_1 et A_2 s'écrit :

$$\rho A a dt$$

Après le passage de l'onde, cette même masse de fluide compris entre les sections A_3 et A_2 s'écrit :

$$(\rho + d\rho) A (adt - dV dt)$$

En égalant ces expressions et en négligeant les termes du second ordre on a :

$$ad\rho = \rho dV \quad (XXI.03)$$

Des relations (XXI.02) et (XXI.03) nous déduisons l'expression de la célérité du son a :

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

On admet généralement que la propagation d'une onde plane s'effectue adiabatiquement et puisque l'on néglige le frottement, l'évolution est isentropique.

En utilisant les notations de la thermodynamique, la célérité d'une onde de pression dans un milieu fluide indéterminé s'écrit :

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (XXI.04)$$

Exercice XXI.03

Calculer la célérité du son de l'air dans les conditions suivantes :

$$\text{Pression atmosphérique : } p_{atm} = 101325 \text{ Pa}$$

$$\text{Température ambiante : } t_{amb} = 18^\circ\text{C}$$

on suppose que l'air se comporte comme un gaz parfait de caractéristiques :

$$r = 287 \text{ J/kg.K} \quad \text{et} \quad \gamma = 1,4$$

Corrigé

Puisque l'évolution est supposée isentropique la relation (XIII.06) conduit à :

$$p = c\rho^\gamma \quad \text{avec } c = \text{constante}$$

$$dp = c\gamma\rho^{(\gamma-1)}d\rho = \frac{p\gamma}{\rho} \quad \text{avec } \frac{p}{\rho} = rT$$

Il vient en définitive :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma rT = a^2$$

$$a = \sqrt{\gamma rT} = \sqrt{1,4 \times 287 \times (273,15 + 18)} = 342,03 \text{ m/s}$$

3 Théorème du Capitaine Hugoniot

Les tuyères convergentes divergentes permettent de transformer en énergie cinétique la pression d'un fluide compressible en écoulement permanent.

Dans une détente la vitesse croît au fur et à mesure de la baisse de pression. La section, qui doit être réalisée à l'endroit où la vitesse est V , doit satisfaire l'équation de débit :

$$q_m = \rho AV$$

Pour un liquide la masse volumique est constante et il en est donc de même pour le produit AV . La section de la tuyère décroît, elle est simplement convergente.

Il en est tout autrement dans un fluide compressible comme on peut le voir à partir des équations de débit et de Barré de Saint Venant soit :

$$0 = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} \quad \text{et} \quad \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = \frac{dp}{\rho} + VdV = 0$$

D'où :

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dp}{\rho V^2}$$

Cette écriture suppose évidemment que l'écoulement est isentropique et par conséquent :

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

En désignant par $M = \frac{V}{a}$ le nombre de Mach il vient en définitive :

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right)$$

D'où le tableau des variations.

M	$M < 1$	$M = 1$	$M > 1$
$\frac{V}{a}$	$V < a$	$V = a$	$V > a$
$\frac{\partial \rho}{\rho}$	-	-	-
$\frac{1}{M^2} - 1$	+	0	-
$\frac{dA}{A}$	-	0	+

A

Tableau XXI.1 Représentation des variations

D'où le théorème d'Hugoniot.

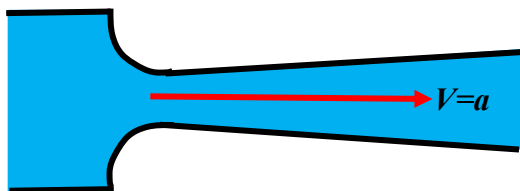


Figure XXI.02 Tuyère
Convergente-divergente

Au col tuyères de détente la vitesse du fluide est égale à la valeur de la vitesse du son dans un fluide homogène dont les caractéristiques seraient celles du fluide considéré au col.

Les caractéristiques d'un gaz parfait au col d'une tuyère convergente divergente se déterminent facilement à partir du théorème d'Hugoniot et du premier principe de la thermodynamique.

Soit :

$$h_{col} - h_0 + \frac{a^2 - V_0^2}{2} = 0$$

Le gaz étant supposé idéal parfait :

$$h_{col} - h_0 = c_p (T_{col} - T_0) = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T_{col} - T_0)$$

Comme : $V_0^2 \ll a^2$ nous avons : $\frac{(T_{col} - T_0)}{\gamma - 1} + \frac{T_{col}}{2} = 0$

Et par conséquent :

$$\frac{T_{col}}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1} = \left(\frac{p_{col}}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Ce rapport est constant et ne dépend que des caractéristiques thermodynamiques du gaz.

4 Calcul du débit d'un gaz parfait au col d'une tuyère convergente-divergente

Nous avons : $q_m = \rho AV = \rho_{col} A_{col} a$ avec $\rho_{col} = \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

Soit : $q_m = \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} A_{col} \sqrt{\gamma r T_{col}}$ mais $T_{col} = \frac{2T_0}{\gamma+1}$

Il s'ensuit que :

$$q_m = \sqrt{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{\gamma}{r}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} A_{col} = \text{constante} \times \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} A_{col}$$

Le débit masse ne dépend pas des conditions de l'aval.

Exercice XXI.04.

Une tuyère convergente divergente est alimentée par de la vapeur d'eau. Les conditions à l'amont sont :

$$p_0 = 100 \text{ bar}$$

$$t_0 = 500^\circ\text{C}$$

$$V_0 = 0 \text{ m/s}$$

La pression à l'aval est $p_1 = 30 \text{ bar}$ et le débit masse alimentant cette tuyère est $q_m = 10 \text{ kg/s}$.

L'évolution est supposée isentropique.

Déterminer la section du col dans les deux cas suivants :

Cas 1 : On suppose que la vapeur se comporte comme un gaz idéal parfait de caractéristique :

$$\gamma = 1,3 \quad \text{et} \quad r = 461,9 \text{ J/kg.K}$$

Cas 2 : Déterminer la section approximative en utilisant un diagramme de Mollier.

Corrigé

Nous avons :

$$T_{col} = \frac{2T_0}{\gamma + 1} = \frac{2(273,15 + 500)}{1,3 + 1} = 672,30\text{K} \quad \text{soit :} \quad t_{col} = 399,15^\circ\text{C}$$

$$p_{col} = p_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 100 \times \left(\frac{2}{1,3 + 1}\right)^{\frac{1,3}{1,3-1}} = 54,57\text{bar}$$

La section au col de la tuyère est :

$$A_{col} = \frac{q_m \sqrt{T_0}}{p_0 \sqrt{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{\gamma}{r}}} = \frac{10 \times \sqrt{273,15 + 500}}{100 \times 10^5 \times \sqrt{\left(\frac{2}{1,3+1}\right)^{\frac{1,3+1}{1,3-1}} \frac{1,3}{461,9}}} = 8,956 \times 10^{-4} m^2$$

$$A_{col} = 895,6 mm^2$$

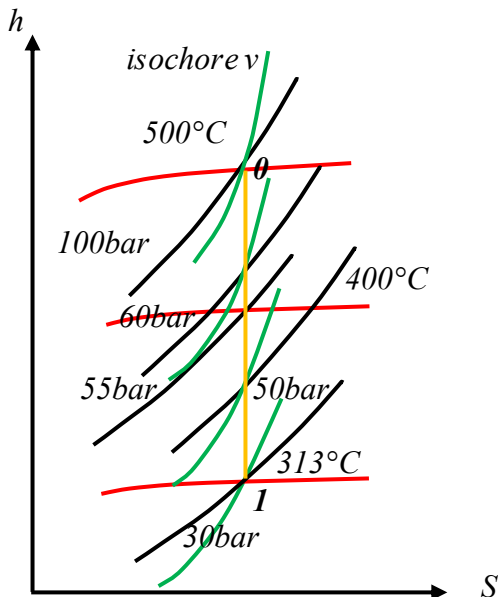
Cas 2 :

Sur le diagramme de Mollier nous lisons les valeurs de l'enthalpie h et du volume massique v .

Nous avons :

$$h_0 = h_{i0} = h + \frac{V^2}{2}, \quad V = \sqrt{2(h_{i0} - h)}, \quad A = \frac{q_m v}{V}$$

Ce qui nous permet de construire le tableau :



P en bar	h en kJ/kg	v en m^3/kg	V en m/s	A en mm^2
100	3377	0,032	≈ 0	
60	3216	0,0493	567	869
55	3190	0,0529	612	864
50	3165	0,0565	651	867

Le col se situera vers la pression de 55 bar et la section sera de l'ordre de $864 mm^2$.

Par lecture la température au col est : $t_{col} = 400^\circ C$.

Par rapport au gaz est idéal parfait (cas 1) l'erreur sur la pression et la température n'est pas considérable, elle l'est davantage sur la surface du col.

Chapitre XXII

Généralités sur les turbomachines

1 Définition

On appelle turbomachine une machine tournante dont le rôle est d'assurer un échange d'énergie mécanique entre un fluide en écoulement, quasi-permanent dans son stator, et un rotor, muni d'aubages (ou pales), animé d'un mouvement de rotation à vitesse constante autour d'un axe.

Selon le sens de l'échange d'énergie la turbomachine sera dite réceptrice (ou de détente) lorsqu'elle reçoit de l'énergie du fluide et génératrice (ou de compression) quand elle lui en communique.

Puisqu'elle consomme ou recueille de l'énergie sur son arbre, elle doit être, nécessairement, accouplée à une autre machine. Par exemple :

- dans le premier cas ; avec un alternateur ou une turbomachine génératrice.
- dans le second cas ; entraînée par un moteur électrique, un moteur à combustion interne ou une turbomachine réceptrice.

Une turbomachine peut extraire et rejeter un fluide dans un même milieu mais elle est souvent interposée entre deux ou plusieurs enceintes contenant le même fluide à des niveaux de pressions et de températures différentes.

Le corps, ou stator, se raccorde à la tuyauterie d'amenée par sa bride d'entrée et à celle du refoulement par sa bride de sortie.

2 Classification

On différencie les turbomachines suivant :

- le sens de l'échange d'énergie
- que le fluide véhiculé est incompressible ou compressible.
- la nature de l'écoulement interne dans la roue conformément à la figure XXII.01.

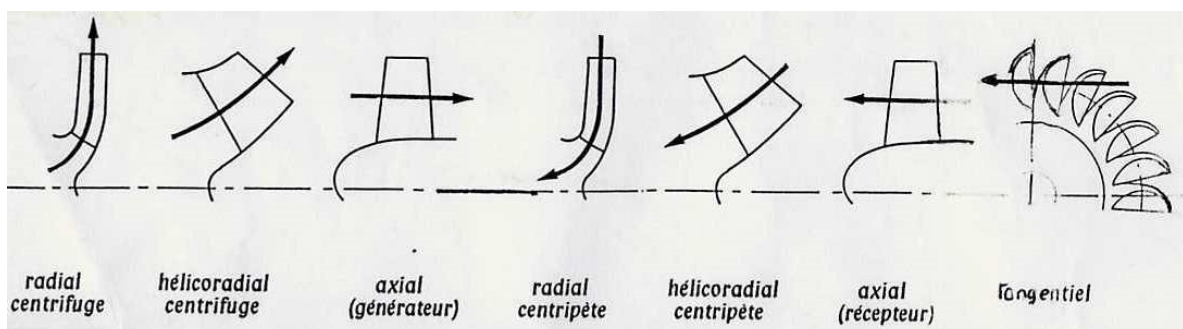


Figure XXII.01 Les différents types d'écoulements internes dans les roues

Le tableau XXII.1 représente les principales familles de turbomachines classées suivant ces trois critères. Cette classification n'est pas exhaustive, en particulier le spécialiste est souvent tenu d'apporter des informations complémentaires sur certains types de machines. Par exemple en précisant si la turbomachine est monocellulaire ou multicellulaire et en distinguant les aubages à action des aubages à réaction.

Turbomachines			Fluide		Nature de l'écoulement			
Désignation	Génératrice	Réceptrice	Incompressible	Compressible	Axial	Radial	Hélico radial	Tangentiel
Compresseurs Soufflantes	*			*	*	*	*	
Ventilateurs	*		*		*	*	*	
Pompes	*		*		*	*	*	
Hélices marines	*		*		*			
Hélices aériennes	*			*	*			
Éoliennes		*	*		*	*		
Turbines Francis		*	*			*	*	
Turbines hélice, Kaplan et groupes bulbes		*	*		*			
Turbines Pelton		*	*					*
Turbines à vapeur		*		*	*	*	*	
Turbines à gaz		*		*	*	*	*	

Tableau XXII.1 Classification des turbomachines

Sur ce tableau, il peut sembler curieux que les ventilateurs et les éoliennes figurent dans la même colonne que les turbomachines hydrauliques, alors qu'ils véhiculent des gaz. Le taux de compression de ces appareils est relativement faible si bien que la pression et la température restent quasiment constantes pendant l'échange d'énergie. Ce qui permet de négliger les petites variations de masse volumique et de considérer le fluide comme incompressible.

Lorsque le fluide véhiculé dans les turbines est un liquide, généralement de l'eau, on dit qu'on a affaire à des turbines hydrauliques.

3 Principe de fonctionnement d'une pompe centrifuge

La machine se raccorde en E et S à deux tuyauteries cylindriques.

- La première, dite conduite d'aspiration, sert à amener le fluide à l'entrée de la pompe.
- La seconde est appelée conduite de refoulement.

La partie active de la machine est constituée par la roue (rotor) qui porte les aubages mobiles (aubes, pales, ailettes). Les aubes sont toutes identiques. En désignant par n le nombre d'aubes, leur écart angulaire est égal à $2\pi/n$.

L'espace compris entre deux aubes mobiles est appelé canal mobile.

Le fluide guidé par la tuyauterie d'aspiration arrive à la bride d'entrée et l'ouïe de la pompe où il se répartit également entre les différents canaux inter-aubes.

L'espace compris entre la bride d'entrée et le bord d'attaque des aubages est le siège d'un écoulement permanent par rapport à un repère fixe, généralement Galiléen. Cette capacité est souvent appelée fond d'aspiration de la pompe.

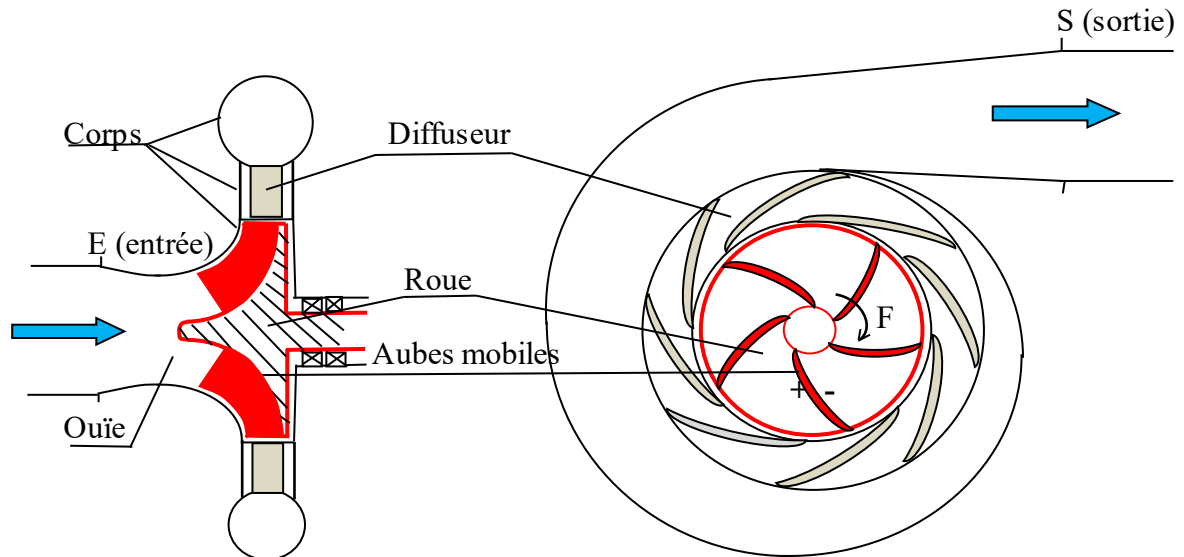


Figure XXII.02 Schéma d'une pompe centrifuge

Du fait du mouvement d'entraînement à vitesse angulaire constante, transmis par le rotor suivant par la flèche F, les aubages exercent des efforts de pression sur le fluide qui se traduisent par l'existence d'une surpression côté intrados et d'une dépression sur l'intrados.

À l'intérieur d'un canal mobile, où a lieu le transfert énergétique, l'écoulement est considéré comme permanent par rapport au repère lié à la roue.

La machine est qualifiée de pompe centrifuge parce qu'à la traversée du rotor, le fluide s'éloigne de l'axe de rotation pour s'écouler, à la sortie de la roue, dans une direction sensiblement perpendiculaire à cet axe.

Le corps de la pompe, encore appelé stator ou enveloppe, porte une couronne d'aubages fixes nommée diffuseur.

L'espace compris entre deux aubages fixes constitue un canal fixe. Ces canaux fixes sont parcourus par un écoulement considéré comme permanent par rapport à un repère fixe.

L'énergie reçue par le fluide au cours de sa traversée dans les canaux mobiles se manifeste par un accroissement de sa pression et de son énergie cinétique.

En ralentissant le fluide, le diffuseur provoque une nouvelle augmentation de la pression. Il assure au sein du fluide une conversion de l'énergie cinétique en énergie piézométrique.

À la sortie du diffuseur, le fluide doit être collecté et conduit vers la bride de refoulement. La partie du corps remplissant cette fonction est appelée volute du fait de sa forme.

La volute contribue également à la conversion de l'énergie cinétique du fluide en énergie piézométrique.

4 Principe d'une turbine centripète

Pour décrire le fonctionnement d'une turbine centripète on prendra l'exemple d'un turbocompresseur de suralimentation équipant un moteur d'automobile.

Conformément à la figure XXII.03, une turbine centripète comporte, en suivant le sens de l'écoulement des gaz :

- une bride d'admission (E)
- une volute (V)
- un distributeur (D)
- une roue mobile en rotation (R)
- un diffuseur (F)
- une bride d'échappement (S)

Le rôle de la volute est d'accélérer le fluide et de transformer son écoulement rectiligne en un flux axisymétrique afin d'alimenter le plus correctement possible l'entrée du distributeur.

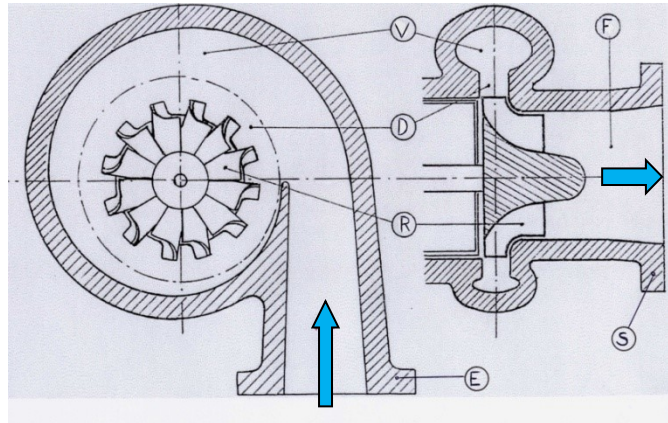


Figure XXII.03 Schéma d'une turbine centripète

D'un point de vue technologique, la volute est souvent réalisée en fonte réfractaire à graphite sphéroïdal.

Le distributeur se substitue à la volute pour continuer l'accélération du fluide. Dans les petites turbines, il est souvent lisse (sans aubages) et de dimension très limitée pour des raisons d'encombrement.

Le distributeur peut posséder des aubages fixes ou à calage variable et être à géométrie variable.

Dans le cas d'un distributeur à aubes on ménage, malgré tout, un petit espace à l'amont de la roue pour éviter les vibrations dues à l'interaction aérodynamique rotor stator. Les différentes techniques de géométrie variable du distributeur et de la volute sont décrites dans les paragraphes qui suivent.

Dans les applications aux moteurs d'automobiles diesel ou essence, la roue est en alliage de nickel chrome molybdène afin de résister à l'oxydation à chaud et aux contraintes mécaniques et thermiques provoquées par des vitesses de rotation supérieures à 200 000 tr/min et par des températures pouvant atteindre 1000°C à l'entrée de la turbine.

La roue est centripète ou hélico-centripète mais toujours ouverte afin de diminuer sa masse et son moment d'inertie. Elle doit être calculée pour qu'au point d'adaptation le fluide sorte axialement afin d'entrer convenablement dans le diffuseur dont la mission est de convertir l'énergie cinétique du fluide en pression.

Dans ces petites turbines de suralimentation, dont la régulation s'effectue par by-pass, la présence du conduit de retour de la soupape ou du clapet de décharge a un effet particulièrement néfaste sur les performances du diffuseur.

L'ensemble constitué par la bride d'entrée, la volute, le distributeur, le diffuseur et la bride de sortie est désigné par corps de la turbine.

5 Turbine à vapeur mono étage

La vapeur entre dans la turbine par une conduite de section circulaire qui débouche dans une capacité qui présente une symétrie de révolution par rapport à l'axe de rotation de la roue. De ce fait, cette capacité porte le nom de tore d'admission.

Son rôle est d'alimenter de façon axisymétrique une couronne d'aubages fixes, appelés aubages distributeurs.

Ces aubages répartissent le fluide vers la roue mobile selon l'angle voulu. Le tracé de ces aubages distributeurs est tel que le fluide subit un accroissement important de sa vitesse. Il y a dans ce cas conversion de l'énergie piézométrique de la vapeur en énergie cinétique. Comme il s'agit d'un écoulement de détente, on utilise également le terme de tuyères pour désigner les distributeurs.

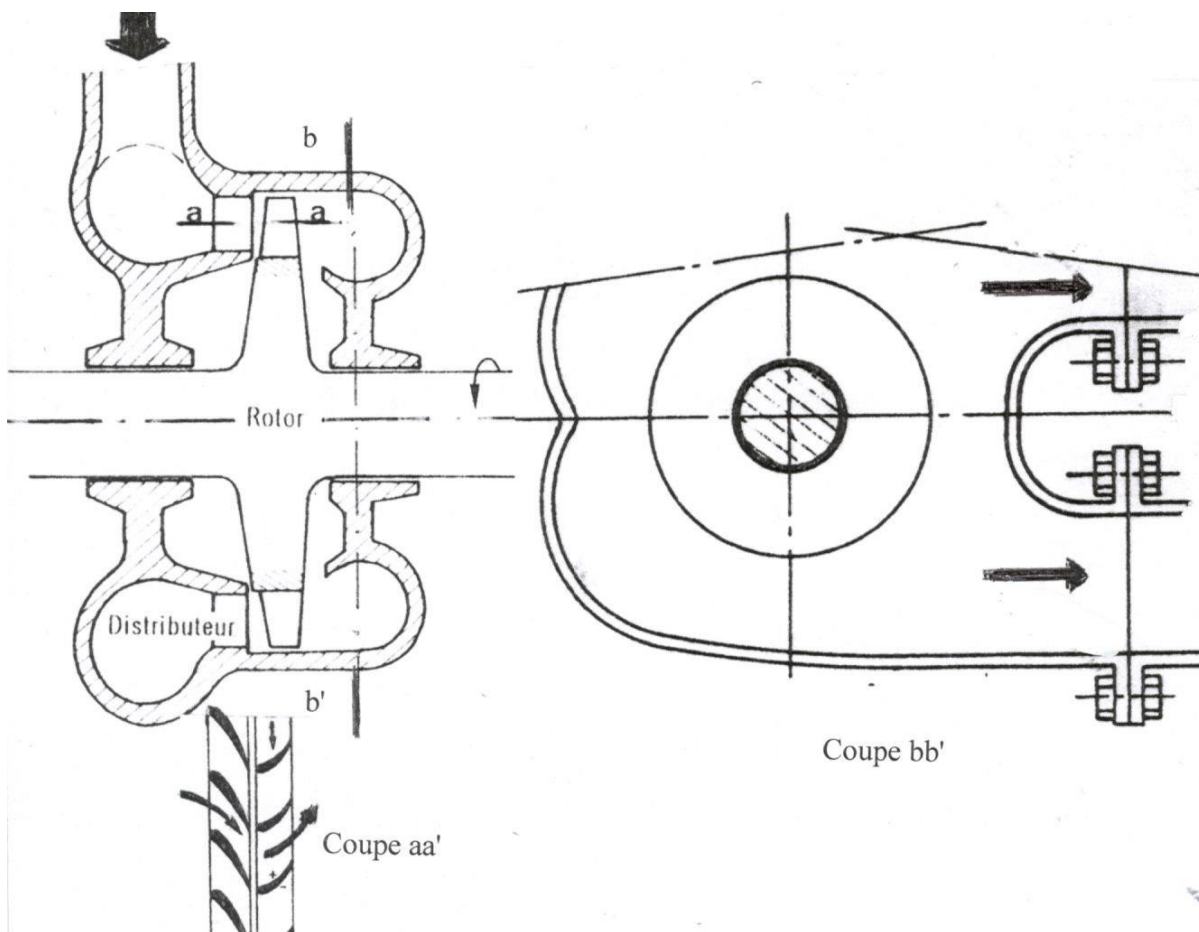


Figure XXII.04 Schéma d'une turbine axiale

La roue mobile porte une couronne d'aubages. Aussi bien dans les distributeurs que dans la roue les trajectoires des particules fluides restent sensiblement sur un cylindre de révolution. Ce qui classe cette turbine dans la catégorie des turbomachines axiales.

En sortant des distributeurs, le fluide vient pousser les aubes mobiles en exerçant un effort provoquant la rotation du rotor. Il y a ainsi l'existence d'une surpression sur l'intrados et d'une dépression sur l'extrados. Ces efforts aérodynamiques produisent un travail moteur, recueilli sur l'arbre de la turbine. Il y a un emprunt d'énergie mécanique au fluide.

À la sortie de la roue, la vapeur détendue est collectée dans une capacité appelée fond d'échappement et conduite au condenseur.

Remarques

On peut imaginer de disposer, sur un même arbre, plusieurs étages en série afin de cumuler les effets de compression ou de détente intéressant un même débit de fluide. Selon que ces machines comporteront un seul ou plusieurs étages, elles seront dites mono ou multicellulaires.

En résumé, on retiendra qu'un étage (ou cellule) de turbomachine comprend d'une manière générale :

- une roue animée d'un mouvement de rotation angulaire à vitesse constante et qui porte une couronne d'aubages mobiles créant l'échange d'énergie mécanique entre le fluide et le rotor.
- un stator qui porte une couronne d'aubages fixes située en aval de la roue dans une turbomachine génératrice et en amont dans une turbomachine réceptrice. Ces aubages fixes sont le siège d'une transformation entre les deux formes piézométrique et cinétique de l'énergie du fluide.

6 Représentation de l'écoulement

Une turbomachine ayant une vitesse de rotation constante et des débits masses égaux à la bride d'entrée et à la bride de sortie génère, malgré tout, des écoulements internes instationnaires. Ceci est dû à la présence des aubages mobiles. Cette instationnarité est parfaitement exacte pour une particule fluide. Par contre, pour l'ensemble d'une masse de fluide contenue à l'intérieur d'une roue, l'écoulement peut être considéré comme stationnaire en moyenne.

Dans l'étude classique des turbomachines nous considérons, en première approximation, que l'écoulement du fluide est permanent dans le stator en prenant un repère (g) lié au corps. Il est également supposé stationnaire dans les canaux mobiles en choisissant un repère (R) lié à la roue.

En d'autres termes, aussi bien pour les aubes fixes que mobiles nous admettrons que l'écoulement est stationnaire. Mais à condition de prendre un repère solide aux aubages fixes et un autre repère pour les aubages mobiles.

Pour passer du repère fixe (g) au repère mobile (R) (ou l'inverse) nous utiliserons la règle de la composition des vitesses, soit la relation (III.13)

$$\vec{V}(M/g) = \vec{V}_e(M/g) + \vec{V}(M/R)$$

Pour simplifier les écritures nous poserons, tout simplement, pour la vitesse d'entraînement :

$$\vec{U} = \vec{V}_e(M/g) = \vec{V}(O/g) + \vec{\omega}(R/g) \wedge \vec{OM}$$

Dans l'étude des turbomachines on considère que le vecteur $\vec{V}(O/g)$ est nulle.

De même pour la vitesse relative nous écrirons : $\vec{W} = \vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R$

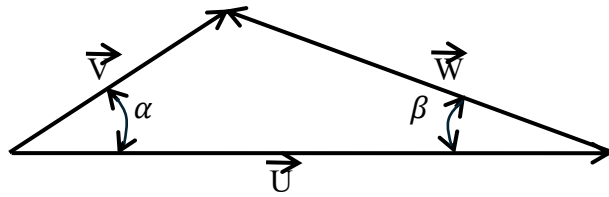


Figure XXI.05 Triangle des vitesses

Si bien que dans le domaine des turbomachines, la composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{V} = \vec{W} + \vec{U} \quad (\text{XXII.01})$$

Ne pas confondre la vitesse relative W et le travail W notés de la même façon pour respecter les usages.

Les indices E et S seront utilisés pour désigner, respectivement, l'entrée et la sortie d'une turbomachine.

Par coutume on prend l'indice "1" pour l'entrée d'une roue et "2" pour la sortie.

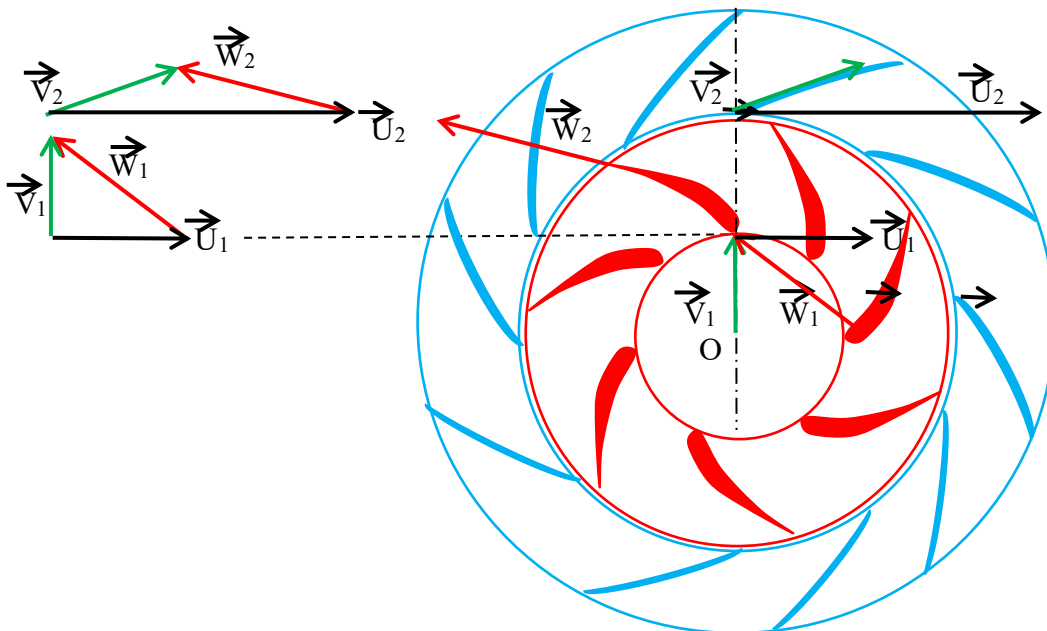


Figure XXII.06 Aubages et triangles des vitesses

Chapitre XXIII

Analyse des échanges d'énergie

Les théorèmes généraux qui régissent le fonctionnement des turbomachines proviennent des principes fondamentaux de la mécanique du solide, mécanique des fluides et de la thermodynamique.

Nous admettrons que les écoulements internes sont unidimensionnels. L'étude en 2D ou en 3D sort du cadre de cet ouvrage.

1 Application du premier principe de la thermodynamique

Pour un système ouvert (chapitre XII) le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$P_I + P_{th} = \frac{d}{dt}(U^* + E_C^* + E_P^*) + \left(u_S + p_S v_S + g z_S + \frac{V_S^2}{2}\right) q_{mS} - \left(u_E + p_E v_E + g z_E + \frac{V_E^2}{2}\right) q_{mE}$$

E désigne l'entrée de la turbomachine et S sa sortie.

Dans cet ouvrage on supposera toujours que le débit masse qui entre dans la turbomachine est égal à celui qui sort et on admettra que l'écoulement est permanent.

$$\frac{d}{dt}(U^* + E_C^* + E_P^*) = 0 \quad q_m = q_{mS} = q_{mE} = \text{constante}$$

Ainsi le premier principe devient :

$$P_I + P_{th} = \Delta \left(h + g z + \frac{v^2}{2} \right) q_m \quad (\text{XXIII.01})$$

P_I est la puissance interne échangée entre la roue (ou les roues) et le fluide à l'intérieur de la turbomachine. Si on désigne par C le couple transmis par le fluide et par P_{fd} la puissance dissipée par frottement de disque on obtient une autre expression de la puissance interne :

$$P_I = \omega C + P_{fd} \quad (\text{ou} \quad |P_I| = \omega |C| - P_{fd}) \quad (\text{XXIII.02})$$

P_{th} est la puissance thermique correspondant aux transferts de chaleur dus à la non adiabaticité de l'écoulement. Pour la plupart des turbomachines les écoulements sont supposés adiabatiques. On rencontre des écoulements non adiabatiques dans les petites turbines de suralimentation des moteurs à combustion interne.

L'enthalpie h et la vitesse V sont les valeurs moyennes dans les brides d'entrée et de sortie de la turbomachine.

La puissance d'une turbine, c'est-à-dire la puissance nécessaire à transmettre à l'accouplement d'une autre machine tel qu'un alternateur ou une turbomachine génératrice, est :

$$P = P_I + P_{méc} \quad (XXIII.03)$$

Où la puissance $P_{méc}$ représente les dissipations externes qui sont, évidemment, toujours positives. Ces dégradations d'énergie sont dues aux résistances passives externes à l'écoulement et provoquées par les paliers, butées et joints. Comme il s'agit de pertes d'origine purement mécanique, on les désigne habituellement par "pertes mécaniques".

On définit également le travail interne en divisant la puissance interne par le débit masse traversant la turbomachine :

$$w_I = \frac{P_I}{q_m} \quad (XXIII.04)$$

Soit :

$$w_I + Q = \frac{S}{E} \left(h + gz + \frac{v^2}{2} \right) \quad (XXIII.05)$$

Rappelons que w_I est le travail interne d'une machine, qu'il ne faut pas confondre avec le travail des forces intérieures noté W_i .

L'énergie d'un fluide diminue lors de son passage dans une turbine. Il s'ensuit que les valeurs de la puissance et du travail sont négatives vis à vis de la thermodynamique. Or le langage usuel ne retient que les valeurs positives de ces grandeurs, ce qui nous conduira souvent à ne considérer que la valeur absolue de la puissance et du travail. Par exemple, pour la puissance et le travail interne, on écrira :

$$|P| = |P_I| - P_{méc} \quad \text{et} \quad |w_I| = \frac{|P_I|}{q_m}$$

2 Application du second principe

Pour un système fermé ou un système ouvert en écoulement permanent l'égalité de Jouguet, limitée aux irréversibilités internes, constitue une forme pratique d'application du second principe de la thermodynamique à l'étude des turbomachines.

Des relations (XV.07) et (XV.08) le second principe de la thermodynamique s'écrit :

$$T ds = \delta Q + \delta f = dh - v dp = dh - \frac{dp}{\rho}$$

Intégrons entre l'entrée "E" et la sortie "S" de la machine :

Soit en posant $\int_E^S \delta f = \xi_{E \rightarrow S}$

$$\underbrace{Q}_{E \rightarrow S} = h_S - h_E - \int_E^S \frac{dp}{\rho} - \xi_{E \rightarrow S} \quad (XXIII.06)$$

Le terme $\xi_{E \rightarrow S}$ représente la dégradation énergétique dans la turbomachine.

En reportant cette valeur de $\underbrace{Q}_{E \rightarrow S}$ dans la relation (XXIII.05) on obtient :

$$w_I = \int_E^S \frac{dp}{\rho} + \frac{V_S^2 - V_E^2}{2} + g(z_S - z_E) + \xi_{E \rightarrow S} \quad (\text{XXIII.07})$$

Remarques :

- La disparition de la quantité de chaleur $\underbrace{Q}_{E \rightarrow S}$ dans cette expression ne signifie pas que les évolutions sont adiabatiques puisqu'on a procédé par substitution.
- Il va de soi que l'intégration de $\int_E^S \frac{dp}{\rho}$ conduira à des expressions différentes suivant la nature des évolutions à l'intérieur de la machine.
- Le débit masse véhiculé par la turbomachine est : q_m . Du fait de la présence des fuites internes le débit masse passant dans la roue q_r sera :

$$\begin{aligned} q_r &> q_m \text{ pour une turbomachine génératrice} \\ q_r &< q_m \text{ pour une turbomachine réceptrice} \end{aligned}$$

Pour ce débit q_r on peut écrire la relation (XXIII.07) entre l'entrée (1) et la sortie (2) de la roue. Soit en négligeant la variation d'énergie potentielle :

$$w_a = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \xi_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{XXIII.08})$$

Le travail w_a correspond à l'échange d'énergie entre le fluide et l'arbre de la turbomachine et $\xi_{1 \rightarrow 2}$ comptabilise les pertes dans la roue (ou les roues pour une machine multicellulaire).

3 Écoulement dans une roue de turbomachine

Du théorème de l'énergie cinétique relation (IV.24)

$$W_e^* + W_i = \Delta E_c^*$$

Il nous faut expliciter chacun de ces termes.

Désignons par (g) le repère galiléen et par (R) le repère lié à la roue. Sous forme différentielle l'énergie cinétique dans le repère lié à la roue s'écrit en un point M :

$$dE_c^* = \vec{\gamma}(M/g) \cdot \vec{V}(M/R) = \vec{\gamma}(M/g) \cdot \vec{W}$$

De la composition des accélérations ; relation (III.14) :

$$\vec{\gamma}(M/g) = \vec{\gamma}(O/g) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_r \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{W} + \vec{\gamma}(M/R)$$

$\vec{\gamma}(O/g) = \vec{0}$ puisqu'on considère que dans les turbomachines que le point O est fixe.

Nous avons donc :

$$dE_c^* = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{W} + \vec{\gamma}(M/R) \right] \cdot \vec{W} dt$$

Dans l'étude des turbomachines nous supposons toujours que la vitesse de rotation est constante, il s'ensuit que :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$$

Donc :

$$dE_c^* = [\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OM})] \cdot \underbrace{\vec{W} dt}_{d\overline{OM}} + \underbrace{[2\vec{\omega} \wedge \vec{W}] \cdot \vec{W} dt}_0 + \underbrace{\frac{d\vec{W}}{dt} \cdot \vec{W} dt}_{\vec{W} \cdot d\vec{W}}$$

Mais :

$$\vec{U} = \vec{\omega} \wedge \overline{OM}$$

$$[\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OM})] \cdot d\overline{OM} = (d\overline{OM} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\vec{\omega} \wedge \overline{OM}) = -\vec{U} \cdot d\vec{U} = -\frac{dU^2}{2}$$

Il s'ensuit :

$$dE_c^* = -\frac{dU^2}{2} + \frac{dW^2}{2} = d\left(\frac{W^2 - U^2}{2}\right)$$

Le travail des forces extérieures et intérieures, conserve dans le mouvement relatif la même forme que celle établie pour le mouvement galiléen. C'est-à-dire :

$$\delta W_e^* + \delta W_i = -\frac{dp}{\rho} - g dz - \delta \xi$$

Pour un canal mobile, en négligeant la variation d'énergie potentielle est en considérant les vitesses moyennes à l'entrée et à la sortie de la roue on obtient :

$$\frac{2}{1} \Delta \left(\frac{W^2 - U^2}{2} \right) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \xi_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (\text{XXIII.09})$$

On désigne souvent cette expression par théorème de Barré de Saint Venant (ou de Bernoulli) généralisé au mouvement relatif.

4 Travail sur l'arbre de la roue

Des relations (XXIII.08) et (XXIII.09) nous obtenons une expression du travail W_a en fonction de la composition des vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue.

$$w_a = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} \quad (\text{XXIII.10})$$

Mis sous cette forme le travail sur l'arbre, en fonction de la composition des vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue, revêt une forme pédagogique.

Elle permet de voir immédiatement qu'une machine radiale bénéficiera du terme en $\frac{U_2^2 - U_1^2}{2}$ ce qui ne sera pas le cas dans une machine axiale puisque $U_2 = U_1$.

Dans un repère lié à la roue, le terme $-\frac{W_2^2 - W_1^2}{2}$ montre que dans une machine génératrice, il faudra ralentir le fluide en cours de compression. Ce sera l'inverse dans une machine de détente.

La figure XXIII.01 représente les triangles de vitesse pour des turbomachines de compression et de détente.

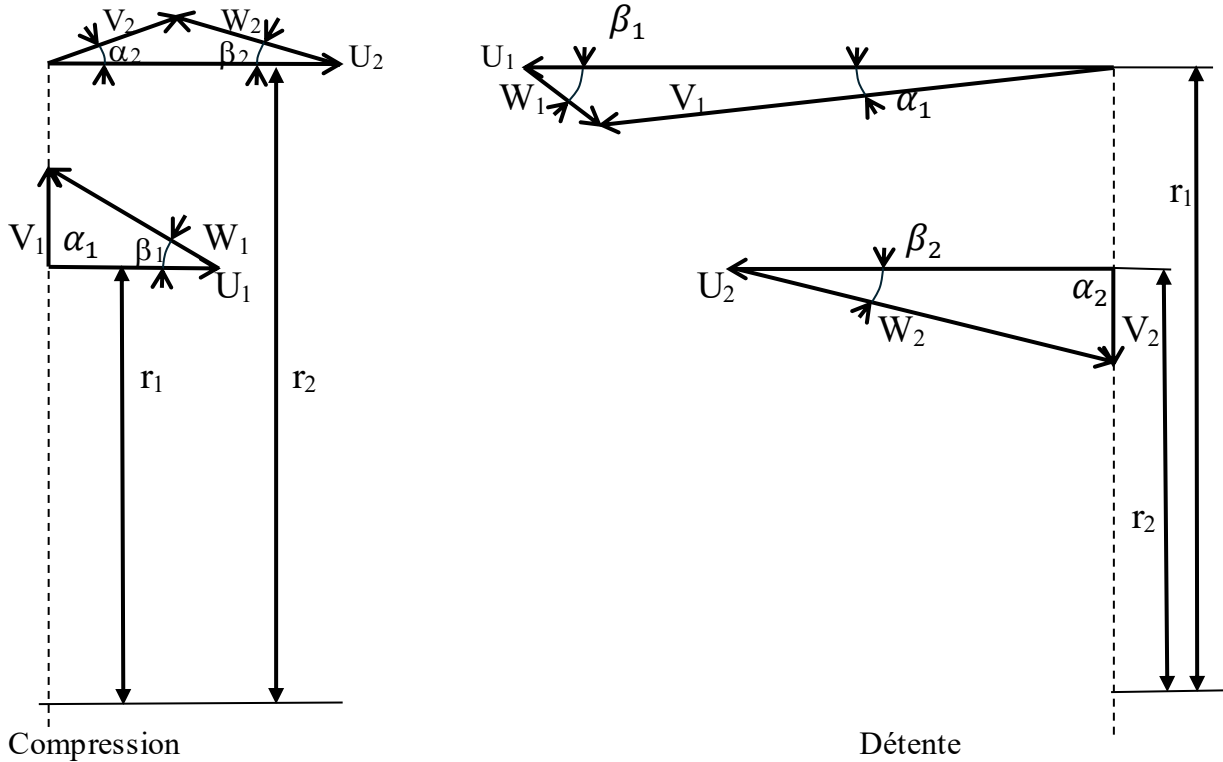


Figure XXIII.01 Triangle des vitesses des roues de turbomachines

5 Théorème d'Euler

5.1 Première démonstration

Les angles α et β doivent satisfaire les relations :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = UV \cos \alpha$$

$$\vec{U} \cdot \vec{W} = UW \cos(\pi - \beta)$$

Des considérations purement géométriques permettent d'écrire :

$$\vec{W} = \vec{V} - \vec{U}$$

En élevant au carré on obtient :

$$W^2 = V^2 + U^2 - 2\vec{U} \cdot \vec{V}$$

Écrivons cette relation à l'entrée et à la sortie de la roue.

$$\left. \begin{aligned} W_1^2 &= V_1^2 + U_1^2 - 2U_1V_1 \cos \alpha_1 \\ W_2^2 &= V_2^2 + U_2^2 - 2U_2V_2 \cos \alpha_2 \end{aligned} \right\} \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} - U_2V_2 \cos \alpha_2 + U_1V_1 \cos \alpha_1$$

Ainsi la relation (XXIII.10) peut s'écrire :

$$w_a = U_2V_2 \cos \alpha_2 - U_1V_1 \cos \alpha_1 \quad (\text{XXIII.11})$$

Cette relation est souvent désignée par **équation d'Euler**.

En négligeant les frottements de disques, la puissance fournie ou reçue par une roue de turbomachines peut s'écrire :

$$\begin{aligned} P_a &= q_r w_a = q_r (U_2V_2 \cos \alpha_2 - U_1V_1 \cos \alpha_1) \\ &= q_r \omega (r_2V_2 \cos \alpha_2 - r_1V_1 \cos \alpha_1) \end{aligned}$$

Ce qui permet de déduire l'expression du couple C :

$$C = \frac{P_a}{\omega} = q_r (r_2V_2 \cos \alpha_2 - r_1V_1 \cos \alpha_1) \quad (\text{XXIII.12})$$

5.2 Deuxième démonstration

Pour évaluer le couple exercé par le fluide sur la roue, on applique le théorème des moments des quantités de mouvements. D'après ce théorème, le moment résultant des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation de la roue est égal à la dérivée par rapport au temps des moments des quantités de mouvement.

Tout d'abord pour le moment des forces extérieures, considérons un tube de courant dans un aubage mobile. Les efforts exercés sur ce tube de courant, provoque un couple $d\vec{C}$, et se décompose en :

- des forces de pression s'exerçant sur les extrémités du tube de courant constitué par les surfaces de révolution dA_1 et dA_2 . Les lignes d'action de ces forces passent par l'axe de rotation et par conséquent le moment est nul.
- des forces de pression exercées par le milieu extérieur sur le tube de courant.

Pour l'ensemble du fluide contenu dans la roue il est évident que le couple C s'identifie au couple que les aubages exercent sur le fluide. En effet, pour deux tubes de courant accolés les forces latérales s'annulent puisqu'elles sont égales et opposées. Seuls subsistent les efforts latéraux exercés par les parois des aubages sur le fluide.

Pour déterminer la dérivée par rapport au temps du moment des quantités de mouvement utilisons la relation (XI.08) :

$$\vec{M}_o F_{ext} = \vec{C} = \frac{D}{Dt} \iiint_V (\vec{OM} \wedge \vec{V}) \rho dV$$

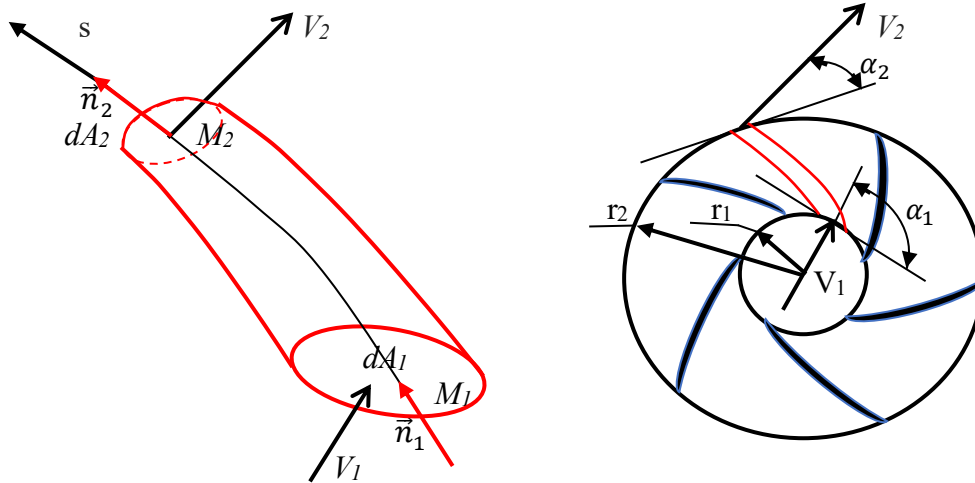


Figure XXIII.02 Tube de courant dans un aubage mobile

Et de la même façon qu'au chapitre (XI) paragraphe 4, nous pouvons écrire :

$$\vec{C} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} \rho) dV + \iint_A (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA.$$

Par hypothèse, l'écoulement est permanent dans la roue, la relation (XI.08) devient :

$$\vec{C} = \iint_A (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Désignons par :

A_1 la surface intérieure de la roue correspondant au petit rayon r_1 et par A_2 celle au rayon extérieur r_2

$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ les normales aux surfaces A_1 et A_2 dirigées suivant l'abscisse curviligne « s ».

$$\vec{C} = \iint_{A_2} (\overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{V}_2) \rho (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2) dA_2 - \iint_{A_1} (\overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{V}_1) \rho (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1) dA_1$$

Puisque l'écoulement est permanent, et que le débit qui passe dans la roue est q_r nous avons :

$$\rho_2 (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2) dA_2 = \rho_1 (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1) dA_1 = dq_r$$

Il s'ensuit :

$$\vec{C} = \iint_{A_2} (\overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{V}_2) dq_r - \iint_{A_1} (\overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{V}_1) dq_r \quad (\text{XXIII.13})$$

Désignons par $\vec{e}_3$ un vecteur unitaire porté par l'axe de la roue et multiplions scalairement la relation (XXIII.13) par $\vec{e}_3$. Nous avons ainsi :

$$\vec{C} \cdot \vec{e}_3 = C \quad (\overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{e}_3 = r_2 V_2 \cos \alpha_2 \quad (\overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{V}_1) \cdot \vec{e}_3 = r_1 V_1 \cos \alpha_1$$

La relation (XXIII.13) devient :

$$C = \iint_{A_2} r_2 V_2 \cos \alpha_2 dq_r - \iint_{A_1} r_1 V_1 \cos \alpha_1 dq_r$$

Dans le cas hypothétique où tous les filets fluides seraient identiques (ou tout simplement en considérant les valeurs moyennes) on retrouve la relation (XXIII.12)

$$C = (r_2 V_2 \cos \alpha_2 - r_1 V_1 \cos \alpha_1) q_r$$

Remarques.

- Pour une turbomachine comportant n cellules sur le même arbre nous aurions évidemment :

$$C = \sum_{j=1}^n C_j \quad \text{avec} \quad C_j = \iint_{A_{2j}} r_{2j} V_{2j} \cos \alpha_{2j} dq_{rj} - \iint_{A_{1j}} r_{1j} V_{1j} \cos \alpha_{1j} dq_{rj}$$

- Extérieurement aux canaux mobiles, la roue comporte des surfaces inactives. Ces surfaces sont soumises aux frottements du fluide et sont responsables d'une dégradation énergétique que l'on désigne, dans la profession, par perte par frottements de disques.

6 Evolutions polytropiques

Les diverses évolutions que nous considérons, relativement élémentairement, sont des transformations idéales qu'il est difficile à réaliser pratiquement. C'est le cas notamment pour les évolutions isothermes et isentropiques.

Conformément à la relation (XXIII.07), pour déterminer le travail reçu ou cédé par une turbomachine il est nécessaire d'évaluer :

$$\int_E^S \frac{dp}{\rho}$$

Cette intégrale doit être, comme on le sait, déterminée en suivant les états physiques réels du fluide dans la traversée de la machine. Mais nous sommes dans l'impossibilité de connaître l'équation représentative de la véritable évolution $p = f(\rho)$. Si bien qu'on remplace, arbitrairement, la loi réelle par une courbe partant de E pour aboutir en S de façon à satisfaire la relation :

$$\frac{p_E}{\rho_E^k} = \frac{p_S}{\rho_S^k}$$

Cette courbe $\frac{p}{\rho^k} = \text{constante}$ est appelée une polytrophe. L'exposant k est désigné par coefficient polytropique. La loi réelle coïncide donc avec la polytrophe à l'entrée E et à la sortie S de la turbomachine.

On remplace ainsi la loi réelle par une approximation.

Les évolutions isobares, isochores, isothermes et isentropiques constituent des cas particuliers des évolutions polytropiques suivant la valeur de l'exposant polytropique K. En effet pour :

$k=0$ on a une isobare.

$k=1$ on a une isotherme.

$k=\gamma$ on a une isentropique.

$k=\infty$ on a une isochore.

L'expression $\frac{p}{\rho^k} = p v^k = \text{constante}$ fournit des relations de formes analogues à celles obtenues pour les évolutions isentropiques, relation (XIII.07) :

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{p_f}{p_i}\right)^{\left(\frac{k-1}{k}\right)} = \left(\frac{\rho_f}{\rho_i}\right)^{(k-1)} = \left(\frac{v_i}{v_f}\right)^{(k-1)}$$

7 Travail polytropique

Si dans la relation (XXIII.07) nous retranchant les pertes $\xi_{E \rightarrow S}$ à la valeur du travail interne, on obtient le travail polytropique.

$$w_p = w_I - \xi_{E \rightarrow S} = \int_E^S \frac{dp}{\rho} + \frac{V_S^2 - V_E^2}{2} + g(z_S - z_E) \quad (\text{XXIII.14})$$

Ainsi présenté le travail polytropique mesure l'énergie reçue ou fournie dans une turbomachine qui fonctionnerait sans dégradation énergétique. La puissance correspondante est donc le produit du travail polytropique par le débit masse traversant la machine, soit :

$$P_P = w_p q_m$$

Notons également que les relations (XV.07) et (XXIII.05) permettent de donner une autre expression du travail polytropique :

$$w_P = - \int_{S_E}^{S_S} T ds + h_S - h_E + \frac{V_S^2 - V_E^2}{2} + g(z_S - z_E)$$

Dans les applications usuelles des turbomachines les expressions du travail interne et du travail polytropiques se simplifient. La variation d'énergie cinétique et la variation d'énergie potentielle, entre l'entrée E et la sortie S de la machine sont très souvent négligeables. Et on écrit :

$$w_I = \int_E^S \frac{dp}{\rho} + \xi_{E \rightarrow S}$$

$$w_p = \int_E^S \frac{dp}{\rho}$$

On définit le travail isentropique w_{isen} en appliquant $k = \gamma$ dans l'évaluation de : $\int_E^{S_{isen}} \frac{dp}{\rho}$

8 Représentation graphique

Dans un diagramme entropique, la figure XXIII.03 représentent les aires caractérisant w_{isen} , w_I , w_P et $\xi_{E \rightarrow S}$ pour une turbomachine génératrice.

L'aire A (jaune) représente le travail isentropique w_{isen} .

L'aire B (bleu) plus l'aire A (jaune) constituent le travail polytropique w_p .

L'aire C (rouge) constitue les pertes $\xi_{E \rightarrow S}$.

La somme de l'aire A + l'aire B + l'aire C représente le travail interne w_I .

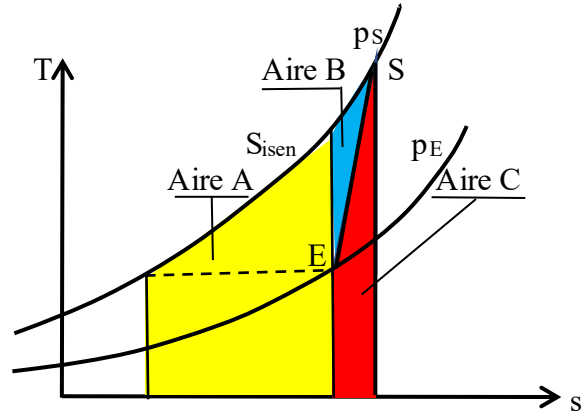


Figure XXIII.03 w_{isen} , w_I , w_p et $\xi_{E \rightarrow S}$

Pour une turbomachine réceptrice la représentation sur le diagramme entropique est plus délicate (Figure XXIII.03). Dans la comptabilisation des travaux et des pertes, l'aire C peut être soit négative ou soit positive.

L'aire A (jaune) représente le travail isentropique w_{isen} .

L'aire B (bleu) plus l'aire A (jaune) constituent le travail polytropique w_p .

L'aire C (rouge) plus l'aire B (bleu) constitue les pertes $\xi_{E \rightarrow S}$.

L'aire A (jaune) moins l'aire C (rouge) représente le travail interne w_I .

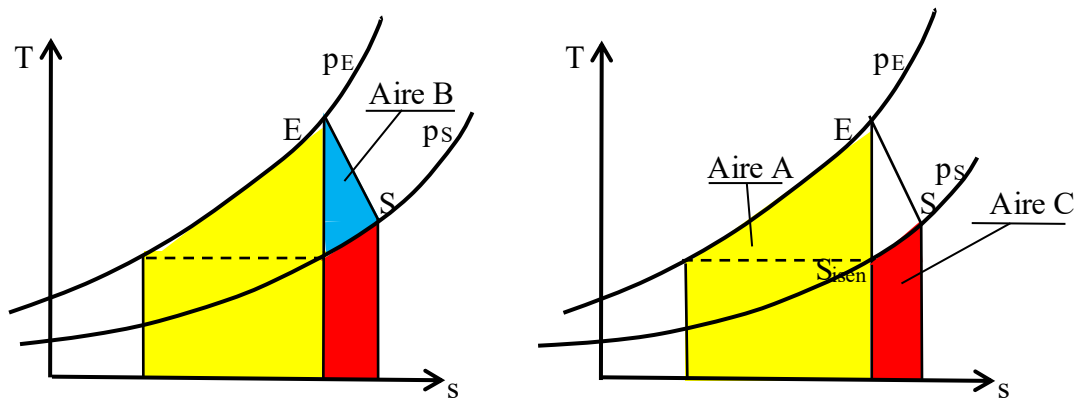


Figure XXIII.03 Représentations de w_{isen} , w_I , w_p et $\xi_{E \rightarrow S}$ pour une turbomachine réceptrice

9 Rendements

9-1 Rendement global

Dans une turbomachine génératrice la puissance fournie (puissance à l'accouplement) est supérieure à la puissance disponible.

$$\eta_g = \frac{P_p}{P}$$

C'est l'inverse pour une machine réceptrice :

$$\eta_g = \frac{P}{P_p}$$

9-2 Rendement mécanique

Pour une turbo machine génératrice le rendement mécanique est le rapport entre la puissance interne et la puissance à l'accouplement.

$$\eta_{\text{méc}} = \frac{P_I}{P}$$

C'est l'inverse pour une machine réceptrice :

$$\eta_{\text{méc}} = \frac{P}{P_I}$$

9-3 Rendement volumétrique

Le rendement volumétrique η_v compare le débit véhiculé par la machine q_m au débit passant réellement dans les aubages mobiles. Ainsi défini ce rendement comptabilise les débits de fuites internes q_f et néglige les fuites externes qui peuvent s'échapper de la machine.

Pour une turbomachine génératrice le rendement volumétrique est :

$$\eta_v = \frac{q_m}{q_m + q_f}$$

Et pour une machine réceptrice :

$$\eta_v = \frac{q_m - q_f}{q_m}$$

9-4 Rendement isentropique

Ainsi que nous l'avons déjà précisé les écoulements dans les turbomachines sont généralement adiabatiques. Dans ces conditions il peut être intéressant de comparer la machine réelle à une turbomachine idéale qui serait le siège d'une évolution isentropique.

Les transferts de chaleur avec le milieu extérieur étant nuls, la relation (XXIII.05) devient en négligeant les variations d'énergie cinétique entre l'entrée et la sortie de la turbo machine :

$$w_I = h_{iS} - h_{iE}$$

Le rendement isentropique peut être évalué à l'aide d'un diagramme de Mollier.

$$\eta_s = \frac{h_{iS_s} - h_{iE}}{h_{iS} - h_{iE}}$$

Dans l'éventualité d'un gaz est idéal parfait ce rendement deviendrait :

$$\eta_s = \frac{T_{iS_s} - T_{iE}}{T_{iS} - T_{iE}}$$

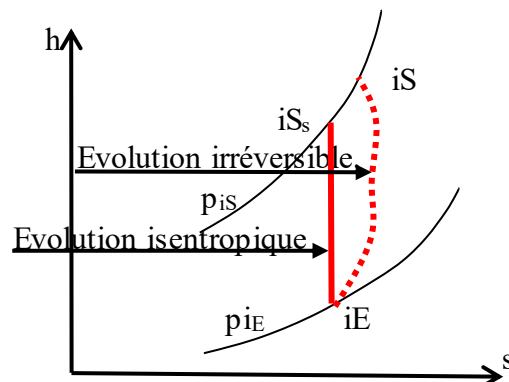


Figure XXIII.04 Evolutions adiabatiques

Soit encore :

$$\eta_s = \frac{1 - \left(\frac{p_s}{p_E}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - \frac{T_s}{T_E}}$$

9-5 Rendement polytropique

Le rendement polytropique a pour rôle de rendre compte de la non adiabaticité de l'écoulement et de l'ensemble des pertes internes. Par conséquent en supprimant la perte mécanique dans l'expression du rendement global on obtient l'expression du rendement polytropique.

Pour une turbo machine génératrice :

$$\eta_P = \frac{w_P}{w_I} = \frac{w_p}{w_p + \zeta_{E \rightarrow S}} = \frac{P_P}{P_I}$$

Pour une turbomachine réceptrice :

$$\eta_P = \frac{w_I}{w_P} = \frac{|w_p| - \zeta_{E \rightarrow S}}{|w_p|} = \frac{P_I}{P_P}$$

Remarquons également que le rendement global est le produit du rendement mécanique par le rendement polytropique $\eta_g = \eta_{\text{méc}} \cdot \eta_P$.

Le rendement polytropique possède des propriétés qui le font physiquement préférer au rendement isentropique. Il rend compte directement des pertes internes réelles, au sens du second principe de la thermodynamique.

En associant en série plusieurs étages de même rendement polytropique, la machine multicellulaire ainsi constituée aura pour rendement polytropique celui des étages individuels.

On peut résumer ces diverses qualités en disant que le rendement polytropique est un critère de la qualité technique d'un type de machine. Pour un compresseur il est indépendant du taux de compression.

Chapitre XXIV

Pompes centrifuges

La description sommaire d'une pompe centrifuge a été effectuée au Chapitre XXII consacré aux généralités sur les turbomachines.

1. Notations

Pour repérer une particule fluide, s'écoulant à l'intérieur d'une pompe centrifuge, nous utiliserons les notations ci-dessous notées sur la figure XXIV.01.

- E Entrée pompe
- 1 Entrée roue
- 2 Sortie roue et entrée diffuseur.
- 3 Sortie diffuseur et entrée volute
- S Sortie pompe

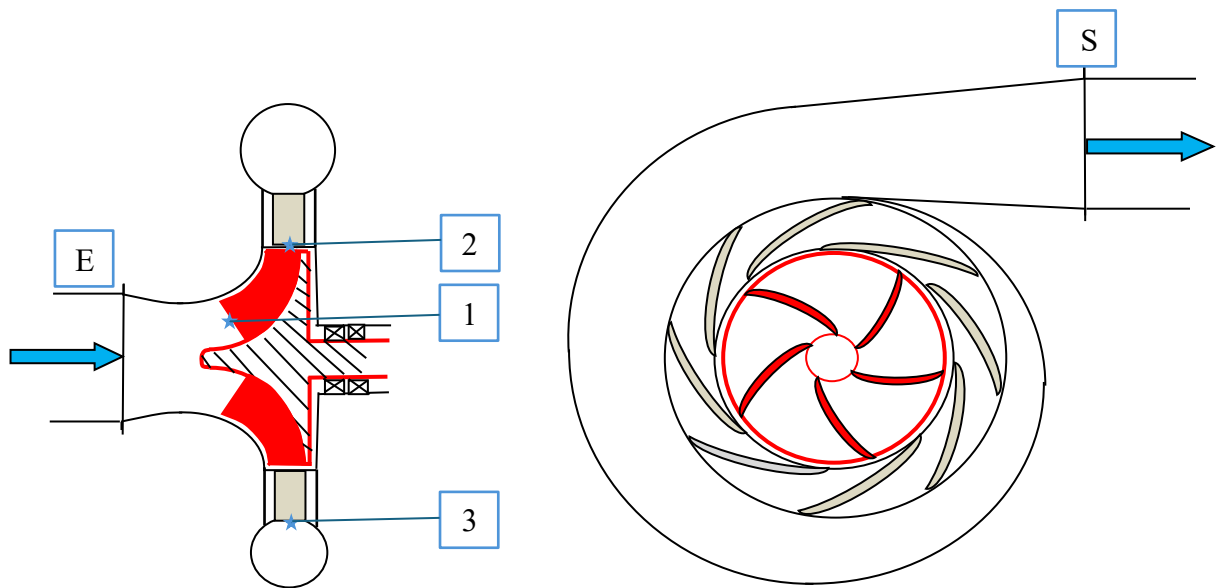


Figure XXIV.01 Notations

2. Hauteur manométrique

Lors de l'établissement de la formule de Bernoulli, au chapitre XXI, il a été défini la charge du fluide $H = \frac{v^2}{2g} + h + \frac{p}{\rho g}$ qui est exprimée en mètres de fluide (on dit parfois colonne de fluide).

Dans les stations de pompage et dans de nombreux domaines de l'hydraulique, on préfère utiliser cette unité pour une question de commodité.

Ainsi on définit la hauteur manométrique H d'une pompe comme étant le travail polytropique exprimée en mètres de fluide. Le volume massique étant constant la relation (XXIII.14) devient pour une pompe :

$$H = \frac{w_P}{g} = \frac{p_S - p_E}{\rho g} + \frac{V_S^2 - V_E^2}{2g} + g(z_S - z_E) \quad (\text{XXIV.01})$$

3 Hauteur théorique

On définit également la hauteur théorique H_{th} comme étant le travail sur l'arbre w_a exprimé en mètres de fluide. Soit :

$$H_{th} = \frac{w_a}{g} \quad (\text{XXIV.02})$$

4 Rendement hydraulique

Le rendement hydraulique d'une pompe est égal au rapport :

$$\eta_h = \frac{H}{H_{th}}$$

5 Répartition des pressions et de l'énergie cinétique

La connaissance des caractéristiques du fluide aux différents endroits de la pompe nous permet de déduire l'évolution de la pression et de l'énergie cinétique. En négligeant les termes de pesanteur, comme il est d'usage dans les turbomachines, la relation de Bernoulli entre l'entrée de la pompe E et l'entrée de la roue 1 s'écrit :

$$\frac{V_E^2}{2g} + \frac{p_E}{\rho g} = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + \xi_{E \rightarrow 1}$$

Bien que n'ayant pas changé les notations, il est évident que la perte de charge ξ est exprimée ici en mètres de fluide.

De la relation (XXIII.08) on déduit :

$$\frac{w_a}{g} + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + \xi_{1 \rightarrow 2}$$

Appliquons la relation de Bernoulli successivement de $2 \rightarrow 3$, et $3 \rightarrow S$

Soit :

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} = \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} + \xi_{2 \rightarrow 3}$$

$$\frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} = \frac{V_S^2}{2g} + \frac{p_S}{\rho g} + \xi_{3 \rightarrow S}$$

Ces relations nous permettent de donner l'allure des diverses énergies en fonction des points caractéristiques que nous avons précisées ci-dessus.

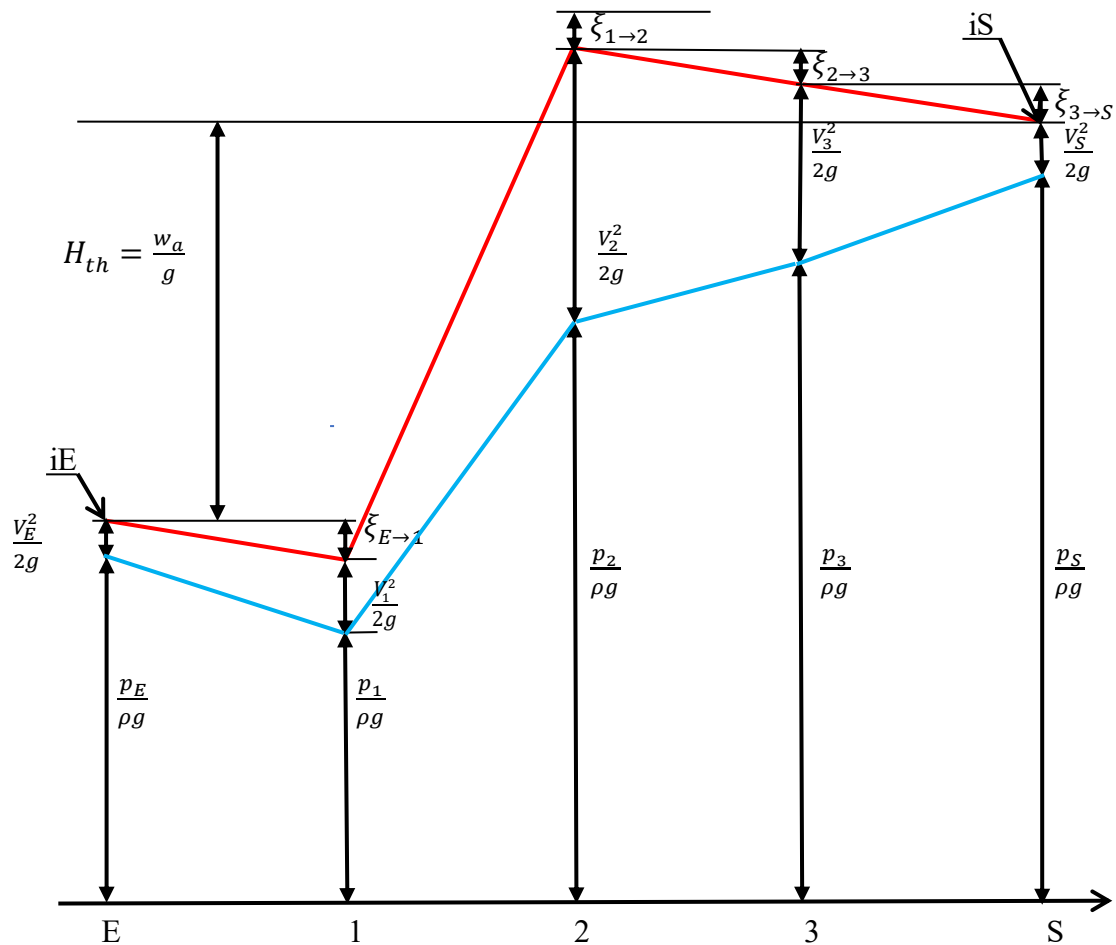


Figure XXIV.02 Evolution de la pression et de l'énergie cinétique

6 Relations entre la hauteur théorique H_{th} et le débit volume q_v d'une pompe

Dans le but d'établir les relations entre la hauteur théorique et le débit volume, examinons la déformation des triangles des vitesses lorsque le débit varie en maintenant constante la vitesse de rotation de la roue.

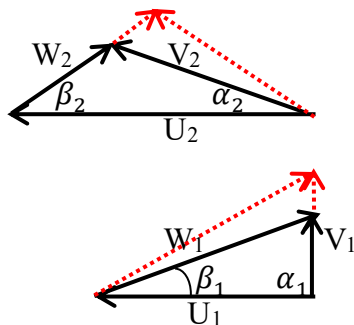


Figure XXIV.03
Variation débit

Supposons que le débit croisse, dans ces conditions la vitesse V_1 augmente. La direction de W_1 est modifiée d'où les pertes par choc à l'entrée de la roue.

A la sortie, la direction du fluide est imposée par l'angle β_2 des aubages. La direction de la vitesse relative W_2 ne change pas et sa norme augmente avec le débit. Par contre la direction de la vitesse absolue V_2 est modifiée et il s'ensuit des pertes par choc à l'entrée du diffuseur ou de la volute.

D'une façon tout à fait analogue à l'exercice XXIV.01, traité à la fin de ce chapitre, appliquons l'équation d'Euler en considérant le débit de la roue. Ainsi nous avons :

$$H_{th} = \frac{U_2}{g} \left[U_2 - \frac{q_v}{2\eta_v \pi r_2 l_2 \tan \beta_2} \right]$$

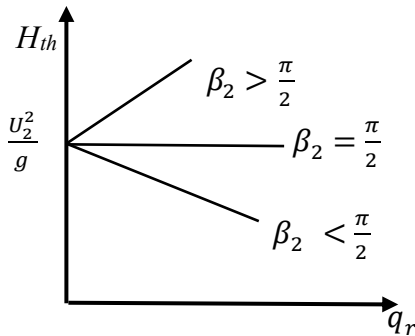


Figure XXIV.04 H_{th} en fonction de β_2

Soit une relation de la forme :

$$H_{th} = A\omega^2 + B\omega q_r \quad (\text{XXIV.03})$$

A vitesse de rotation constante, la hauteur théorique varie linéairement avec le débit. La pente de la droite sera positive ou négative suivant le signe de $\tan \beta_2$.

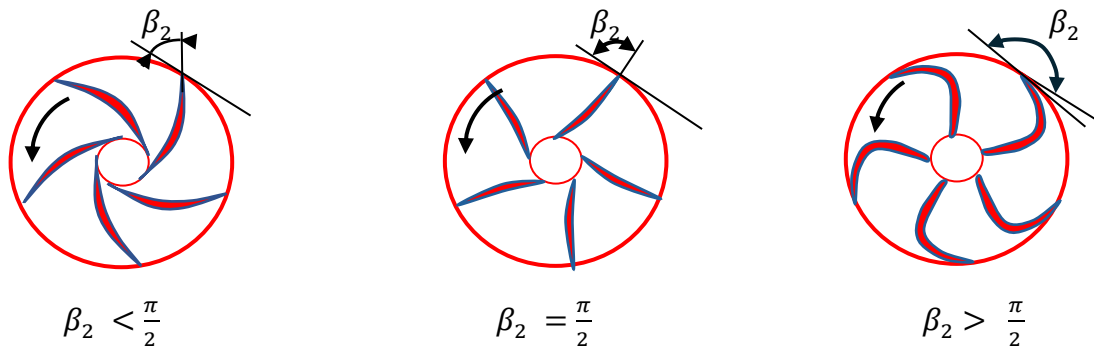


Figure XXIV.05 Forme des roues de pompe en fonction de l'angle β_2

Pour des raisons de stabilité de fonctionnement et de rendement, les roues des pompes centrifuges ont des aubes couchées en arrière. Sauf dans quelques cas particuliers d'utilisation.

7 Courbes caractéristiques

En enlevant de la droite $H_{th} = f(q_r)$ les pertes aérodynamiques $\xi_{aéro}$, c'est-à-dire la somme $\xi_{E \rightarrow 1} + \xi_{1 \rightarrow 2} + \xi_{2 \rightarrow 3} + \xi_{3 \rightarrow S}$, on déduit la hauteur manométrique H puisque :

$$H = H_{th} - \xi_{aéro}$$

Le terme $\xi_{aéro}$ peut également se décomposer en pertes par frottement et en pertes par incidence.

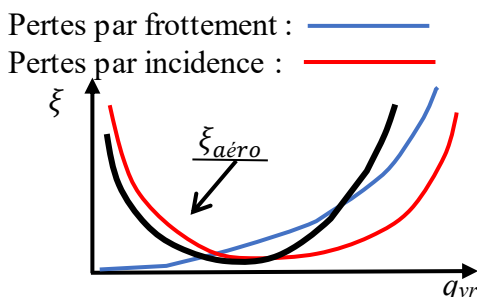


Figure XXIV.06 Pertes dans la roue

u débit d'adaptation le fluide pénètre dans la roue avec un angle très proche de celui des aubages. Les pertes par incidence sont alors minimales mais en dehors de ce régime elles croissent de part et d'autre suivant une courbe d'allure parabolique.

Les pertes par frottement varient sensiblement comme le carré du débit.

On a ainsi tous les éléments pour construire la courbe de la hauteur manométrique H en fonction du débit q_{vr} qui passe dans la roue.

La relation (XXIV.03) montre, qu'à vitesse constante la hauteur théorique H_{th} en fonction du débit dans la roue est une droite. En déduisant de la hauteur théorique les pertes aérodynamiques on obtient la hauteur manométrique.

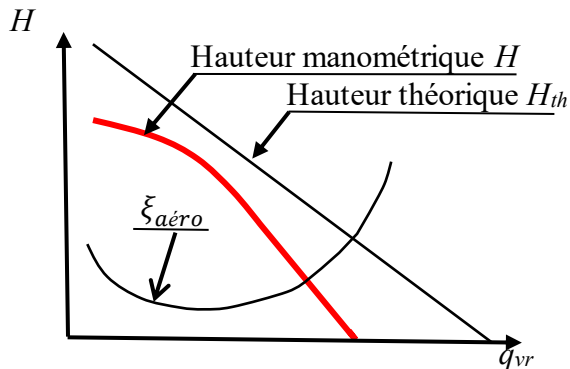


Figure XXIV.07 Hauteur manométrique

Remarquons que q_{vr} est le débit volume qui traverse la roue et non celui qui est fourni par la pompe q_v . Pour obtenir la courbe utile H en fonction de q_v , il faut translater la courbe $H(q_{vr})$ en comptabilisant le débit de fuite.

Le rendement global (XXIII. 16) permet d'écrire pour une pompe :

$$\eta_g = \frac{\rho g q_v H}{P} \quad (\text{XXIV.04})$$

P est la puissance à l'accouplement (XXIII. 03).

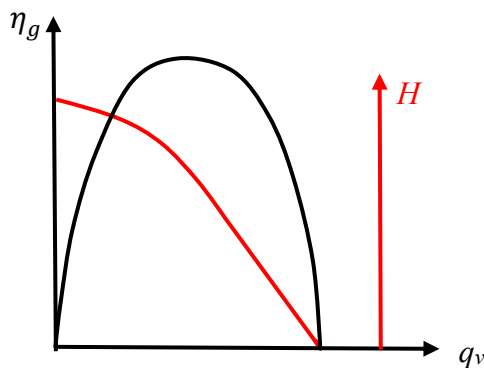


Figure XXIV.08
Courbe constructeur

Ce rendement est nul pour $q_v = 0$ et $H=0$.

Il est maximum au point d'adaptation pour lequel les incidences sur les aubes sont faibles (inférieures à $\pm 5^\circ$).

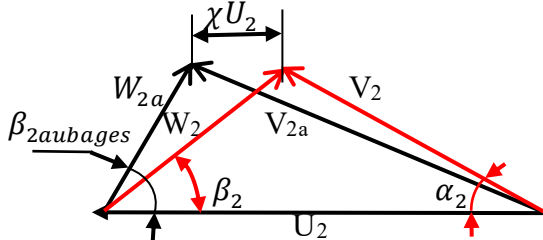
Pour utiliser correctement une pompe (centrifuge ou non) il est indispensable de disposer des courbes caractéristiques du constructeur **Figure XXIV.08**.

Il faudra en outre disposer des caractéristiques de la pompe vis-à-vis de la cavitation qui sera évoquée lors d'un prochain chapitre.

8 Déviation, influence du nombre des aubes

Jusqu'à présent, nous avons supposé que le fluide sortait de la roue avec l'angle $\beta_{2aubages}$ des aubages.

Ceci serait exact si le nombre d'aubes était infini. On a évidemment intérêt à limiter le nombre d'aubes pour ne pas augmenter la puissance dissipée par frottement dans les canaux mobiles.



On accepte un écart entre l'angle moyen de sortie des filets fluides et l'angle $\beta_{2aubages}$ conformément à la figure XXIV.09.

Cette différence est appelée la déviation angulaire.

Figure XXIV.09 Déviation

Elle dépend du nombre d'aubes, de l'angle $\beta_{2aubages}$ et plus généralement de la forme des aubages.

La grandeur χU_2 est représentative de la perte d'énergie fournie au fluide.

Il existe des relations empiriques pour calculer la déviation. La plus connue est celle de Stodola qui donne la valeur du χ .

$$\chi = \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2aubages}$$

Z étant le nombre d'aubes.

9 Diffuseurs

Ainsi qu'il a été déjà évoqué, les diffuseurs, en ralentissant le fluide, provoquent une nouvelle augmentation de la pression. Ils assurent au sein du fluide une conversion de l'énergie cinétique en énergie piézométrique.

Les diffuseurs peuvent comporter des aubes ou être lisse, c'est-à-dire sans aubes.

Si la largeur d'un diffuseur est constante, l'équation de débit conduit à la relation suivante :

$$r_2 V_2 \sin \alpha_2 = r_3 V_3 \sin \alpha_3 \quad (\text{XXIV.05})$$

10 Diffuseurs lisses

Puisqu'il n'y a pas d'aubes, l'action du fluide est nul en négligeant le frottement sur les parois lisses du diffuseur. En vertu du théorème d'Euler (relation XXIII.12) :

$$r_2 V_2 \cos \alpha_2 = r_3 V_3 \cos \alpha_3.$$

Et de la relation (XXIV.05) nous déduisons que :

$$\tan \alpha_3 = \tan \alpha_2 = \text{constante.}$$

Et par suite :

$$r_2 V_2 = r_3 V_3 = r V = \text{constante} \quad (\text{XXIV.06})$$

Les trajectoires, dans un diffuseur lisse de largeur constante, sont des spirales logarithmiques.

Pour le montrer considérons un point M défini dans le repère ci-dessous par : $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}(\theta)$

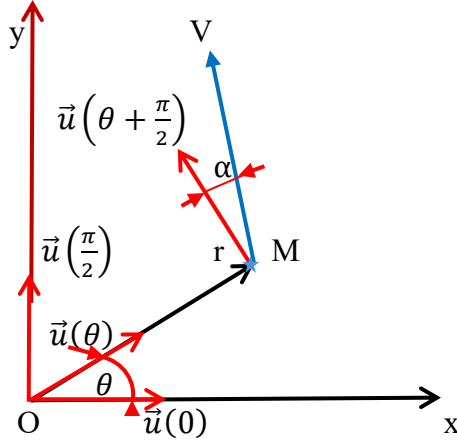


Figure XXIV.10
Définition du repère

De ces deux dernières relations nous déduisons :

$$\frac{dr}{dt} = V \sin \alpha$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = V \cos \alpha$$

Soit encore :

$$\frac{dr}{r} = a d\theta \text{ puisque } \tan \alpha = \text{constante}$$

Et en intégrant on obtient le résultat recherché :

$$r = K e^{a\theta}$$

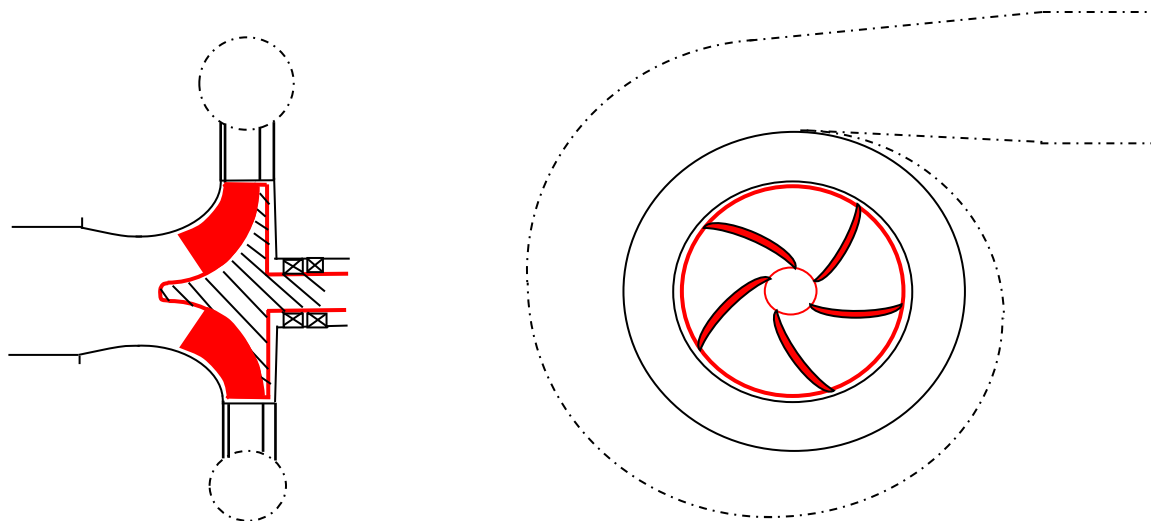


Figure XXIV.11 Diffuseurs lisses

11 Diffuseurs à aubes

Dans un diffuseur à aubes il y a, évidemment, un couple qui s'exerce sur les aubes :

$$C = q_m(r_3 V_3 \sin \alpha_3 - r_2 V_2 \sin \alpha_2) \neq 0$$

Si la largeur du diffuseur est constante la relation (XXIV.05) s'écrit :

$$r_2 V_2 \sin \alpha_2 = r_3 V_3 \sin \alpha_3$$

Pour ralentir davantage le fluide il faut donc que :

$$\alpha_{3 \text{ avec aubes}} > \alpha_{3 \text{ sans aube}} \quad \text{pour que} \quad V_{3 \text{ avec aubes}} < V_{3 \text{ sans aube}} .$$

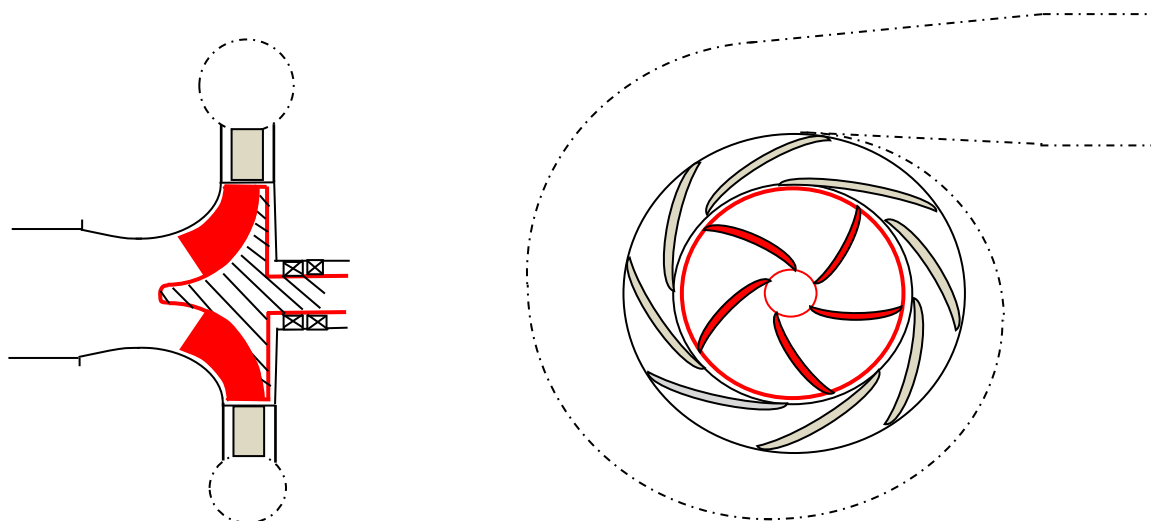


Figure XXIV.12 Diffuseurs à aubes

Exercice XXIV.01

Soit un débit d'eau $q_v = 2500 \text{ m}^3/\text{h}$ et une hauteur manométrique $H = 148 \text{ m}$ le point de régime nominal d'une pompe centrifuge de caractéristiques :

- Vitesse de rotation $N = 1480 \text{ tr/min}$
- Rayon extérieure de la roue $r_2 = 324 \text{ mm}$
- Largeur à la sortie de la roue $l_2 = 43 \text{ mm}$
- Angle de sortie $\beta_2 = 28^\circ 18'$

1 - Sachant que la vitesse V_1 est dirigée radialement ($\alpha_1 = 90^\circ$), que le rendement volumétrique $\eta_v = 0,95$, calculer le rendement hydraulique de la pompe.

2 - A la sortie de la roue le fluide pénètre dans un diffuseur, il en sort au rayon r_3 avec la vitesse V_3 sous l'angle α_3 . Quelle est la variation de son énergie cinétique dans les cas suivants :

A) diffuseur lisse.

B) diffuseur à aubes.

On donne :

$r_3 = 450 \text{ mm}$ et $l_3 = l_2$.

Pour le diffuseur à aubes $\alpha_3 = 16^\circ$.

3 - On suppose que le diffuseur à aubes est responsable de 30 % des pertes hydrauliques à ce régime nominal. On précise que la masse volumique de l'eau est : $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Calculer l'augmentation de pression qu'il permet de réaliser.

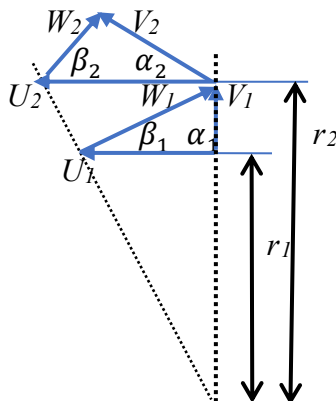
Corrigé

1 - De la relation (XXIII.11) nous avons :

$$w_a = U_2 V_2 \cos \alpha_2 - U_1 V_1 \cos \alpha_1 = U_2 V_2 \cos \alpha_2, \text{ puisque } \alpha_1 = 90^\circ.$$

Au rayon r_2 la vitesse périphérique est :

$$U_2 = \frac{2\pi r_2 N}{60} = \frac{\pi \times 0,324 \times 1480}{30} = 50,2 \text{ m/s}$$



Le débit volume q_{vr} de la roue doit satisfaire la relation :

$$q_{vr} = 2\pi r_2 l_2 V_2 \sin \alpha_2 = 2\pi r_2 l_2 W_2 \sin \beta_2$$

Par ailleurs nous avons :

$$U_2 - W_2 \cos \beta_2 = V_2 \cos \alpha_2 = U_2 - \frac{q_{vr}}{2\pi r_2 l_2 \tan \beta_2}$$

Il s'ensuit :

$$w_a = U_2 \left[U_2 - \frac{q_{vr}}{2\pi r_2 l_2 \tan \beta_2} \right]$$

Compte tenu du rendement volumétrique et de la relation (XXIV.02) nous déduisons :

$$H_{th} = \frac{U_2}{g} \left[U_2 - \frac{q_v}{2\eta_v \pi r_2 l_2 \tan \beta_2} \right]$$

$$H_{th} = \frac{50,2}{9,81} \left(50,2 - \frac{\frac{2500}{3600}}{2 \times 0,95 \times 3,14 \times 0,324 \times 0,043 \times \tan(28^\circ 18')} \right)$$

$$H_{th} = 177,65 \text{ m}$$

D'où le rendement hydraulique :

$$\eta_h = \frac{H}{H_{th}} = \frac{148}{177,65} = 0,83$$

2 - Il faut déterminer les caractéristiques du fluide à la sortie de la roue, c'est-à-dire à l'entrée du diffuseur.

$$\left. \begin{aligned} W_2 \sin \beta_2 &= \frac{q_v}{2\pi \eta_v r_2 l_2} = V_2 \sin \alpha_2 \\ \frac{g H_{th}}{U_2} &= V_2 \cos \alpha_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan \alpha_2 = \frac{U_2 q_v}{2\pi \eta_v r_2 l_2 g H_{th}}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{50,2 \times \frac{2500}{3600}}{2 \times 0,95 \times 3,14 \times 0,324 \times 0,043 \times 9,81 \times 177,65} = 0,2406 \Rightarrow \alpha_2 = 13^\circ 32'$$

Et par suite :

$$V_2 = \frac{g H_{th}}{U_2 \cos \alpha_2} = \frac{9,81 \times 177,65}{50,2 \times \cos 13^\circ 32'} = 35,7 \text{ m/s}$$

A) L'équation de débit s'écrit :

$$q_v = 2\pi r_3 l_3 V_3 \sin \alpha_3 = 2\pi r_2 l_2 V_2 \sin \alpha_2 = 2\pi r_2 l_3 V_2 \sin \alpha_2 \Rightarrow r_3 V_3 \sin \alpha_3 = r_2 V_2 \sin \alpha_2.$$

Et de la relation (XXIV.06) on déduit :

$$V_3 = \frac{r_2 V_2}{r_3} = \frac{0,324 \times 35,7}{0,450} = 25,7 \text{ m/s}$$

La variation d'énergie cinétique dans le diffuseur lisse est donc :

$$\frac{V_3^2 - V_2^2}{2} = \frac{25,7^2 - 35,7^2}{2} = -307 \text{ J/kg}$$

B) L'équation de débit pour le diffuseur à aubes permet de déduire la vitesse V_{3^*} :

$$V_{3^*} = \frac{r_2 V_2 \sin \alpha_2}{r_3 \sin \alpha_3} = \frac{0,324 \times 35,7 \times \sin 13^\circ 32'}{0,450 \times \sin 16^\circ} = 21,8 \text{ m/s}$$

La variation d'énergie cinétique dans le diffuseur à aubes est :

$$\frac{V_{3^*}^2 - V_2^2}{2} = \frac{21,8^2 - 35,7^2}{2} = -399 \text{ J/kg}$$

3 - La perte hydraulique du diffuseur est donc :

$$\xi_{2 \rightarrow 3^*} = 0,3 \times (177,65 - 148) = 8,9 \text{ m}$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 2 et 3 :

$$\frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} = \frac{P_{3^*}}{\rho g} + \frac{V_{3^*}^2}{2g} + \xi_{2 \rightarrow 3^*}$$

Et par suite :

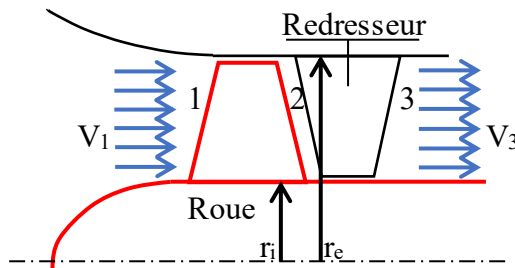
$$\frac{P_{3^*} - P_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_{3^*}^2}{2g} - \xi_{2 \rightarrow 3^*} = \frac{35,7^2 - 21,8^2}{2g} - 8,9$$

$$\frac{P_{3^*} - P_2}{\rho g} = 31,84 \text{ m} \Rightarrow P_{3^*} - P_2 = 31,84 \times 1000 \times 9,81 = 312350 \text{ Pa}$$

Chapitre XXV

Pompes hélices

Une pompe hélice mono étage comporte :



- un canal d'admission.
- une roue munie d'un nombre réduit de pales (5 à 10).
- un redresseur fixe et muni d'un nombre de pales plus élevées que ceux de la roue (10 à 20).
- un canal de sortie.

Figure XXV.01 Pompe hélice

Dans ce type de turbomachine, il est nécessaire d'étudier les conditions d'équilibre radial des différents filets fluides. Dans les pompes centrifuges les conditions d'équilibre sont automatiquement réalisées.

1 Triangle des vitesses

Les calculs sont conduits pour que tous les filets fluides, compris entre le rayon intérieur r_i et le rayon extérieur r_e , reçoivent la même énergie au point d'adaptation. Cela implique que le travail massique w_a reste constant $\forall r \in]r_i, r_e[$. En d'autres termes il ne faut pas que w_a soit fonction de r .

Sachant que l'angle $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ la relation (XXIII.11) devient :

$$w_a = U_2 V_2 \cos \alpha_2 = \text{constante}$$

La répartition des pressions à l'intérieur d'une pompe hélice est tout à fait similaire à celle d'une pompe centrifuge. Par contre, pour obtenir l'accroissement de pression dans la roue, on ne bénéficie pas du terme caractérisant la force centrifuge puisque : $U_1 = U_2$.

$$\begin{aligned} w_a &= \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \xi_{1 \rightarrow 2} \\ &= \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \underbrace{0}_{\frac{U_2^2 - U_1^2}{2}} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} \end{aligned}$$

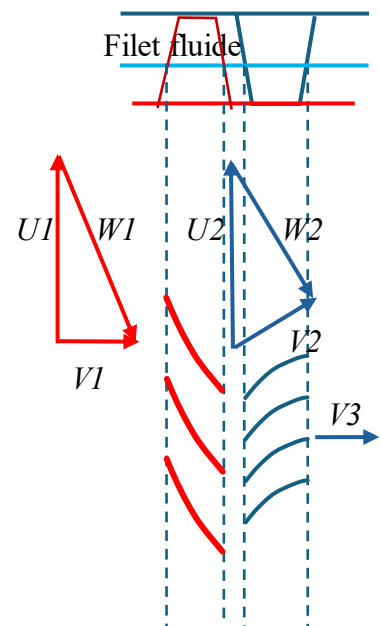


Figure XXV.02 Filet fluide

On obtient une augmentation de pression uniquement par ralentissement des vitesses relatives. Les pompes hélices comportent relativement peu d'aubes et il s'ensuit que les filets fluides sont mal guidés. Cette particularité rend délicat le tracé des machines de compression axiale. Sur la figure XXV.03 on a superposé le triangle des vitesses à l'entrée des aubes avec celui de la sortie.

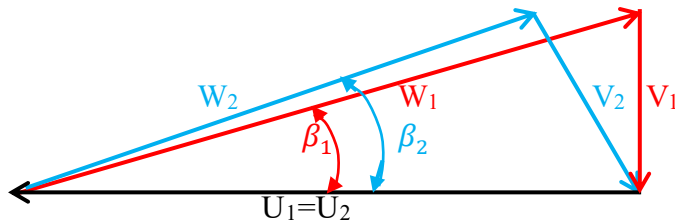


Figure XXV.03 Triangle des vitesses

Les risques de décollements sont favorisés par des ralentissements des vitesses trop brusques et par des changements de direction des fluides trop importantes. Il faut donc que la différence des angles $\beta_2 - \beta_1$ soit faible.

Pour surmonter cette difficulté que on fait appel à une généralisation de la théorie de l'aile d'avion appliquée aux aubes considérées comme des surfaces portantes placées dans un courant.

2 Action du fluide sur les aubes

2-1 Théorème des quantités mouvement

Dans ce but, considérons une grille d'aubes et appliquons le théorème des quantités de mouvements un canal fluide entourant un petit élément d'aubes, d'épaisseur dr .

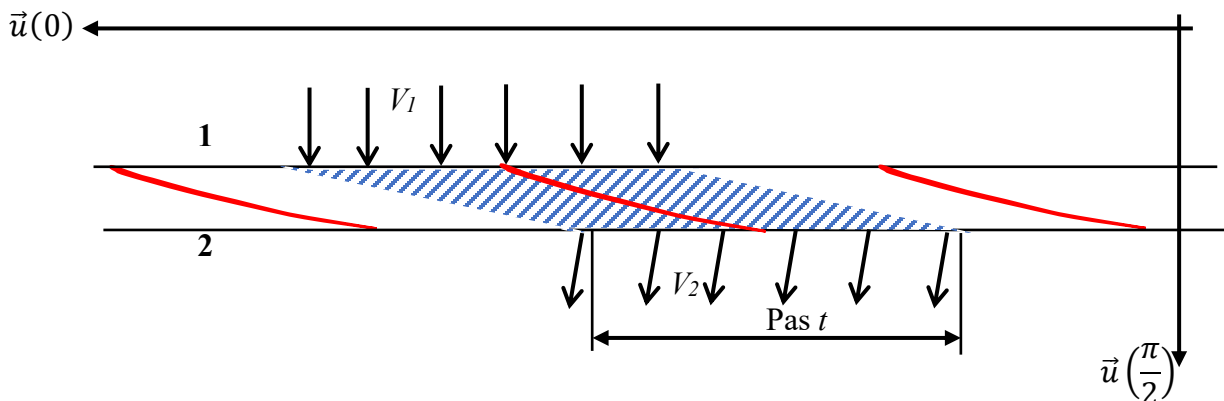


Figure XXV.04 Grille d'aubes

Conformément à la figure XXV.04, ce canal est limité par deux lignes de courant distantes d'un pas t et par les plans d'entrée et de sortie respectivement notée 1 et 2.

Soit :

$$(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) dq_m = (p_1 - p_2) t d\vec{r} \vec{u} \left(\frac{\pi}{2} \right) + dR \{ \text{aube} \rightarrow \text{fluide} \} \quad (\text{XXV.01})$$

Remarquons que nous pouvons écrire :

$$\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{U} + \vec{W}_2 - (\vec{U} + \vec{W}_1) = \vec{W}_2 - \vec{W}_1$$

$$\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = W_2 \vec{u}(\beta_2) - W_1 \vec{u}(\beta_1)$$

Et par suite la relation (XXV.01) devient :

$$\left(W_2 \vec{u}(\beta_2) + W_1 \vec{u}(\beta_1) \right) dq_m = (p_1 - p_2) t dr \vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) + dR \{ \text{aube} \rightarrow \text{fluide} \} \quad (\text{XXV.02})$$

Que nous pouvons mettre sous une autre forme en tenant de compte du théorème de Bernoulli en mouvement relatif pour une pompe hélice (XXIII.09) :

$$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \xi_{1 \rightarrow 2} = 0$$

La relation (XXV.02) devient :

$$dR \{ \text{fluide} \rightarrow \text{aube} \} = \left(\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + \xi_{1 \rightarrow 2} \right) \rho t dr \vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(W_2 \vec{u}(\beta_2) - W_1 \vec{u}(\beta_1) \right) dq_m \quad (\text{XXV.03})$$

Puisque qu'en vertu de la loi de l'action et réaction nous avons :

$$\vec{dR} \{ \text{aube} \rightarrow \text{fluide} \} = - \vec{dR} \{ \text{fluide} \rightarrow \text{aube} \}$$

2-2 Propriété des triangles quelconques

Les propriétés de la médiane, dans les triangles quelconques, seront utiles pour transformer plus simplement la relation (XXV.03).

Pour cela, considérons out d'abord un petit élément fluide d'épaisseur dr entourant une aube (figure XXV.04) et exprimons le débit :

$$dq_m = \rho t W_1 \sin \beta_1 dr = \rho t W_2 \sin \beta_2 dr = \rho t W_\infty \sin \infty dr. \quad (\text{XXV.04})$$

$$\text{Ce qui permet de déduire que : } W_1 \sin \beta_1 = W_2 \sin \beta_2 = W_\infty \sin \beta_\infty \quad (\text{XXV.05})$$

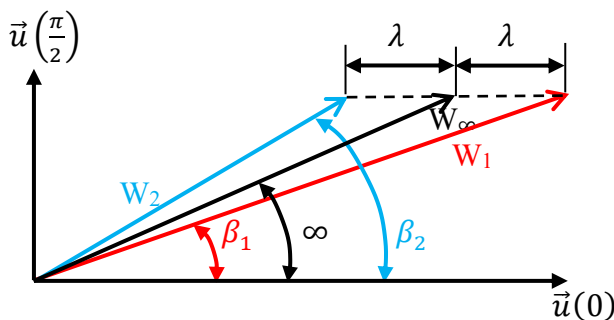


Figure XXV.05 Médiane W_∞

Ainsi nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} W_1 \vec{u}(\beta_1) &= W_\infty \vec{u}(\infty) + \lambda \vec{u}(0) \\ W_2 \vec{u}(\beta_2) &= W_\infty \vec{u}(\infty) - \lambda \vec{u}(0) \\ W_1^2 &= W_\infty^2 + \lambda^2 + 2W_\infty \lambda \cos \infty \\ W_2^2 &= W_\infty^2 + \lambda^2 - 2W_\infty \lambda \cos \infty \end{aligned}$$

Retranchons ces deux premières relations :

$$W_1 \vec{u}(\beta_1) - W_2 \vec{u}(\beta_2) = 2\lambda \vec{u}(0) \quad (\text{XXV.06})$$

Ajoutons la troisième et quatrième de ces relations :

$$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = -2 W_\infty \lambda \cos \infty \quad (\text{XXV.07})$$

On désigne souvent ces résultats par théorème de la médiane.

2-3 Efforts sur les aubes

Utilisons les relations (XXV.04), (XXV.06) et (XXV.07) dans l'expression de l'action de l'aube sur le fluide (XXV.03) :

$$\vec{dR}\{\text{fluide} \rightarrow \text{aube}\} = (-2W_\infty \lambda \cos \infty + \xi_{1 \rightarrow 2}) \rho t dr \vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\lambda \vec{u}(0) \rho t W_\infty \sin \infty dr$$

En négligeant la perte $\xi_{1 \rightarrow 2}$ cette expression devient :

$$\vec{dR}\{\text{fluide} \rightarrow \text{aube}\} = -2W_\infty \lambda \rho t \left(-\sin \infty \vec{u}(0) + \cos \infty \vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) dr = -2W_\infty \lambda \rho t \vec{u}\left(\infty + \frac{\pi}{2}\right) dr$$

Nous pouvons mettre cette relation d'une autre forme en multipliant la relation (XXV.06) par $\vec{u}(0)$ nous avons : $-2\lambda = W_2 \cos \beta_2 - W_1 \cos \beta_1$, soit :

$$\vec{dR}\{\text{fluide} \rightarrow \text{aube}\} = W_\infty (W_2 \cos \beta_2 - W_1 \cos \beta_1) \rho t \vec{u}\left(\infty + \frac{\pi}{2}\right) dr = dR \vec{u}\left(\infty + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{XXV.08})$$

Ainsi, pour une tranche de fluide d'épaisseur dr , l'action du fluide sur l'aube est perpendiculaire à la vitesse $\vec{W}_\infty$.

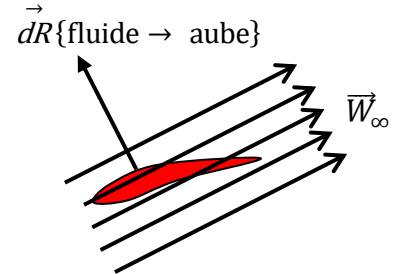


Figure XXV.06 Action du fluide sur une aube

3 Théorie sommaire de l'aile d'avion

Toujours en négligeant $\xi_{1 \rightarrow 2}$, l'analyse dimensionnelle permet d'exprimer dR de la façon suivante :

$$dR = \frac{1}{2} \rho W_\infty^2 C_z dA \quad (\text{XXV.09})$$

C_z est appelé coefficient de portance ou encore coefficient de sustentation.

A est une surface arbitraire qu'on appelle surface de référence.

Dans notre cas on prendra : $dA = l dr$

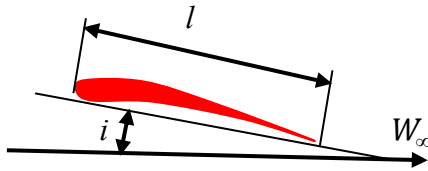


Figure XXV.07 Corde l et incidence i

l est la corde de l'aile

dr est toujours l'épaisseur d'un petit élément fluide entourant l'aile.

On définit également l'angle d'incidence " i " formé par la direction de W_∞ et de la corde l

Dans le domaine des turbomachines, on a coutume de poser : $W \cos \beta = W_u$ et pour $W_2 \cos \beta_2 - W_1 \cos \beta_1$ ont écrit tout simplement ΔW_u au lieu de ΔW_u . Ainsi la relation (XXV.08) permet d'écrire :

$$dR = W_\infty \Delta W_u \rho t dr \quad (\text{XXV.10})$$

Des relations (XXV.9) et (XXV.10) nous déduisons :

$$\frac{1}{2} \rho W_\infty^2 C_z l dr = W_\infty \Delta W_u \rho t dr$$

D'où la relation fondamentale :

$$C_z \frac{l}{t} = 2 \frac{\Delta W_u}{W_\infty} \quad (\text{XXV.11})$$

Si on ne néglige pas les pertes $\xi_{1 \rightarrow 2}$ la force élémentaire $\vec{dR}$ n'est plus perpendiculaire à $W_\infty \vec{u}(\infty)$ car il y a une composante tangentielle R_x due au frottement. On définit également un coefficient de traînée que l'on désigne par C_x .

Ainsi nous avons :

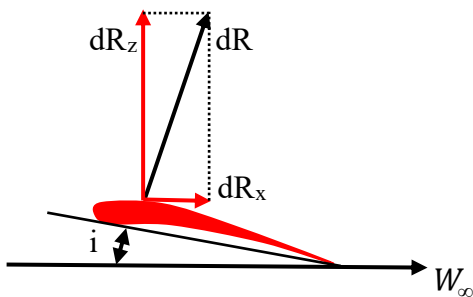


Figure XXV.08 Portance et traînée

$$dR_z = \frac{1}{2} \rho W_\infty^2 C_z l dr$$

$$dR_x = \frac{1}{2} \rho W_\infty^2 C_x l dr$$

R_z est la portance.

R_x est la traînée.

A l'aide d'une balance aérodynamique, on mesure les composantes R_z et R_x pour diverses incidences " i ". Ce qui permet de déduire expérimentalement C_z et C_x en fonction de l'incidence " i ". La figure XXV.09 représente l'allure de ces courbes.

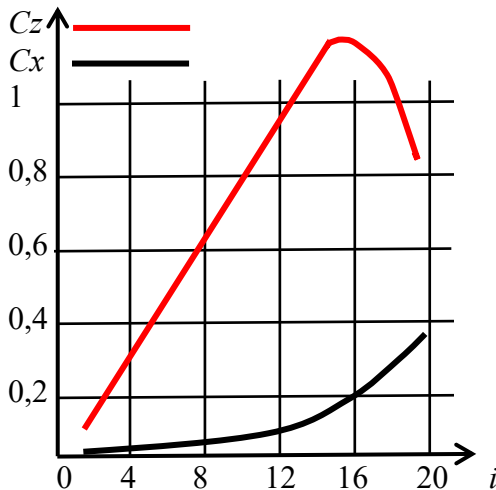
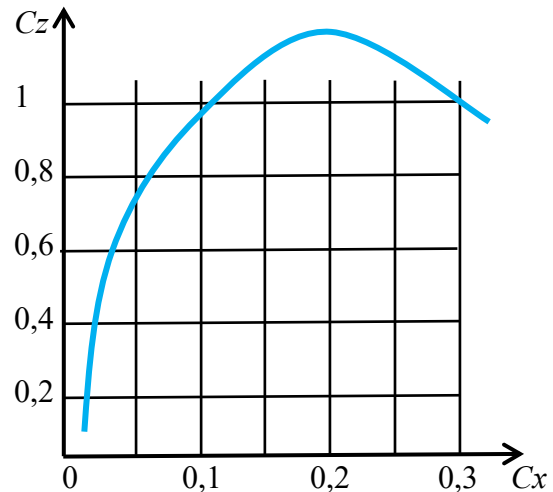
Figure XXV.09 C_x et C_z en fonction de i 

Figure XXV.10 Finesse

La finesse d'une aile est le rapport $\frac{C_z}{C_x}$, la traînée est faible lorsque la finesse est grande.

Les avions de ligne ont des finesesses comprises entre 16 et 18. Une aile de planeur a souvent une finesse comprise entre 27 et 32 ce qui est excellent, mais certains planeurs récents peuvent atteindre 60.

On ne peut pas prendre n'importe quelle valeur du C_z . L'apparition des premiers décollements importants sur l'aube se situe vers 1,2 et on ne dépasse guère cette valeur. D'autre part il existe une valeur optimale du C_x voisines de 0,8, qui correspond à la finesse maximale.

On remarquera que le minimum du C_x se trouve au voisinage de l'incidence de sustentation, ce qui semble assez normal.

L'application de la théorie des ailes d'avion, au calcul des roues de turbomachines hélices, consiste essentiellement à assimiler en première approximation, la polaire d'un profil disposé en grille à celle du même profil placé dans un courant plan.

L'étude des différences entre le comportement du profil en grille est celui du même profil disposé dans un courant plan constitue le problème délicat des interactions.

4 Tracé au rayon r

Lorsqu'on connaît le triangle des vitesses à un rayon donné on peut déterminer l'aubage de la façon suivante :

A - Choix d'un profil.

B - On prend le C_z optimal ou légèrement inférieur. L'incidence est alors lue sur la polaire et on peut caler le profil sous cet angle par rapport à la direction de W_∞ .

C - La détermination du serrage des pales est obtenue par la relation XXV.11 :

$$C_z \frac{l}{t} = 2 \frac{\Delta W_u}{W_\infty}$$

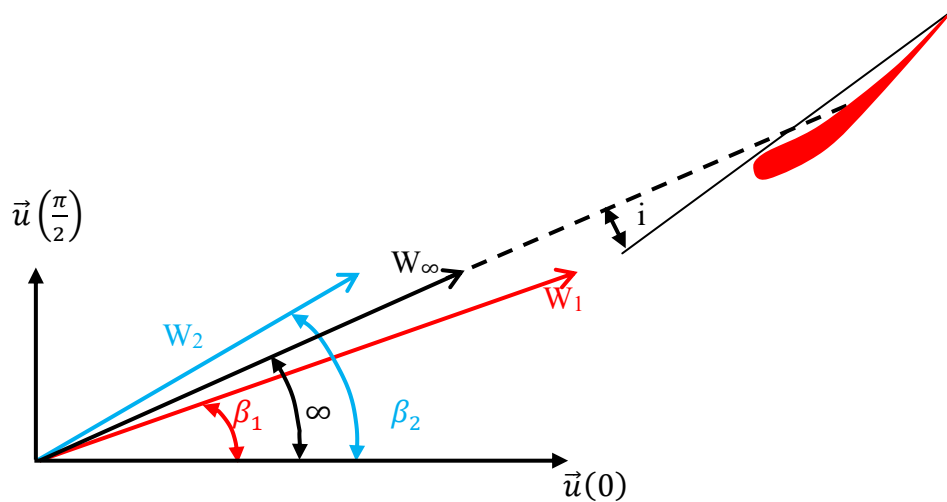


Figure XXV.11 Calage de l'aube au rayon r

5 Équilibre des différents filets

Recherchons les conditions d'équilibre des différents filets d'une machine axiale. Spécialement celles qui correspondent au maintien d'un même filet sur un cylindre concentrique à l'axe au rayon r . Pour cela considérons une roue comprise entre deux cylindres de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e conformément à la figure XXV.12.

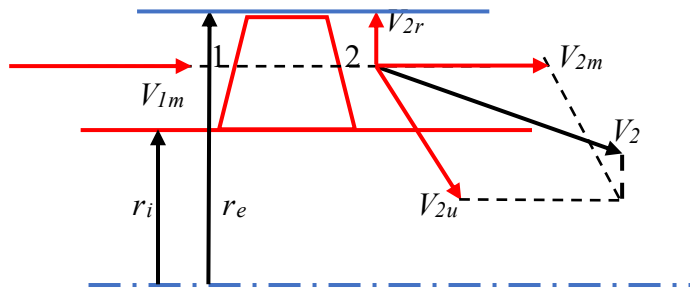


Figure XXV.12 Étude d'un filet fluide

Supposons qu'à l'amont de la roue les filets soient tous sur des cylindres concentriques à l'axe de rotation. Les filets fluides qui étaient à l'amont sur un cylindre de rayon r pourront être à l'aval sur un cylindre de rayon différent. Au voisinage de la roue, les filets ne resteront pas sur un cylindre. Les vitesses auront une composante radiale. Par exemple la vitesse V_2 pourra avoir trois composantes V_{2m} , V_{2u} et V_{2r} .

En raison de la proximité des parois la composante radiale V_{2r} ne pourra jamais prendre de valeur importante. Nous pouvons donc la négliger dans l'équation de mouvement.

De la relation (III.16) et du principe fondamental de la mécanique (IV.13) on déduit l'équation de mouvement suivant le rayon r :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V_u^2}{r} \quad (\text{XXV.12})$$

Cette équation exprime les différences de pression qu'il existe entre les filets fluides afin d'équilibrer l'action des forces centrifuges consécutives au mouvement giratoire.

Pour simplifier, nous supposons qu'en amont de la roue tous les filets fluides ont la même énergie, la même pression p_1 et la même vitesse V_1 . Nous admettrons également que :

- la vitesse V_1 est axiale.
- le travail w_a n'est fonctions que de r .
- $\frac{d\xi_{1 \rightarrow 2}}{dr} = 0$.

Nous disposons des trois relations ci-dessous pour résoudre le problème de la répartition des filets fluides en aval de la roue.

a) La relation (XXIII.08) appliquée à une pompe permet d'écrire :

$$w_a = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \xi_{1 \rightarrow 2}$$

En écrivant que : $V_2^2 = V_{2u}^2 + V_{2m}^2$ (puisque'on néglige V_{2r}) cette relation peut s'écrire :

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_{2u}^2 + V_{2m}^2}{2} = w_a + \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} - \xi_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{XXV.13})$$

b) Dans une pompe hélice, lorsque la vitesse V_1 est axiale ($\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$), l'équation d'Euler devient :

$$w_a = U_2 V_2 \cos \alpha_2 = U_2 V_{2u} \quad (\text{XXV.14})$$

c) En 2 la relation (XXV.12) devient :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{V_{2u}^2}{r} \quad (\text{XXV.15})$$

En tenant compte des hypothèses, dérivons la relation (XXV.13) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial r} + V_{2u} \frac{\partial V_{2u}}{\partial r} + V_{2m} \frac{\partial V_{2m}}{\partial r} = \frac{dw_a}{dr}$$

Compte tenu de (XXV.15), cette relation devient :

$$\frac{V_{2u}^2}{r} + V_{2u} \frac{\partial V_{2u}}{\partial r} + V_{2m} \frac{\partial V_{2m}}{\partial r} = \frac{dw_a}{dr}$$

Remarquons que V_{2u} est fonction du rayon r , puisque : $V_{2u} = \frac{w_a}{U_2} = F_1(r)$

il s'ensuit que : $V_{2m} \frac{\partial V_{2m}}{\partial r} = F_2(r)$, ce qui permet de déterminer V_{2m} à une constante près. On peut calculer cette constante avec l'équation du débit volume q_v :

$$q_v = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r V_{2m} dr$$

Nous avons ainsi tous les éléments pour construire le triangle des vitesses à chaque rayon.

Exercice XXV.01.

Déterminer la vitesse V_{2m} dans les deux cas hypothétiques suivants :

- a) $w_a =$ égale à une constante quelle que soit le rayon r*
- b) $w_a = Kr$*

Corrigé

a) Puisque $w_a = K$ nous avons :

$$V_{2u} = \frac{w_a}{U_2} = \frac{K}{r}$$

il s'ensuit donc :

$$\frac{\partial V_{2u}}{\partial r} = -\frac{K}{r^2}$$

De la relation (XXV.16) on déduit :

$$\frac{K^2}{r^3} - \frac{K^2}{r^3} + V_{2m} \frac{\partial V_{2m}}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{2m} = \text{constante}$$

Ainsi si $w_a = K$, la vitesse débitante est constante et ceci quelle que soit r .

b) $w_a = Kr$. On procède d'une façon analogue au cas précédent.

$$V_{2u} = \frac{w_a}{U_2} = \frac{Kr}{\omega r} = K_1$$

De la relation (XXV.16) avec $\frac{\partial w_a}{\partial r} = K$ on déduit :

$$V_{2m} \frac{\partial V_{2m}}{\partial r} = K - \frac{K_1^2}{r}$$

Si $w_a = Kr$, la vitesse débitante serait :

$$\frac{V_{2m}^2}{2} = Kr - K_1^2 \ln r + K_2$$

6 Tracé des aubages

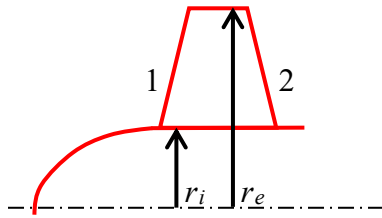
Le choix des aubages est le même que celui développé au paragraphe 4 (tracé au rayon r).

A – Choix d'un profil.

B – On prend le C_z optimal ou légèrement inférieur. L'incidence est alors lue sur la polaire et on peut caler le profil sous cet angle par rapport à la direction de W_∞ .

C – La détermination du serrage des pales est obtenue par la relation :

$$C_z \frac{l}{t} = 2 \frac{\Delta W_u}{W_\infty}$$



Traçons, pour le profil choisi, le triangle des vitesses au rayon intérieur r_i et au rayon extérieur r_e .
Choisissons une loi simple :

$$w_a = U_2 V_{2u} = \text{constante } K$$

Figure XXV.13 Rayon de la roue

Cette loi implique, comme nous l'avons vu, que la vitesse débitante reste également constante quelle que soit le rayon r .

$$C_z \frac{l}{t} = 2 \frac{\Delta W_u}{W_\infty} = 2 \frac{\Delta V_u}{W_\infty} = 2 \frac{V_{2u}}{W_\infty}$$

$$t = \frac{2\pi r}{Z}$$

Z étant le nombre d'aubes. Ces deux relations permettent de déterminer la corde l :

$$l = 4 \frac{\pi r}{Z C_z} \frac{V_{2u}}{W_\infty}$$

Avec ces hypothèses réalistes la corde est de la forme :

$$l = \frac{\text{Constante}}{W_\infty}$$

On voit ainsi que lorsque le rayon augmente, la corde diminue.

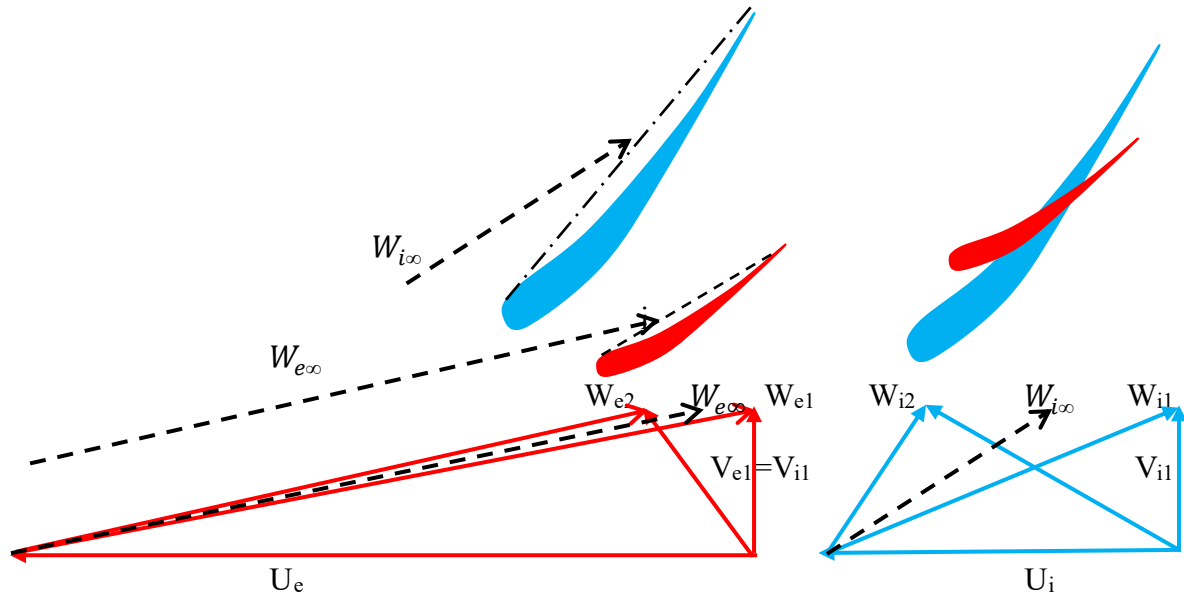


Figure XXV.14 Calage des aubes de la roue au rayon r_i et au rayon r_e

7 Courbes caractéristiques

De la relation XXV.11, on déduit le coefficient de portance, soit :

$$C_z = 2 \frac{t \Delta W_u}{l W_\infty}$$

Au-dessous de $C_z = 0,8$ la portance est trop faible et les pertes par frottement relativement importantes.

Au-delà de $C_z = 1,2$ la portance est exagérée et il y a des risques de décrochage.

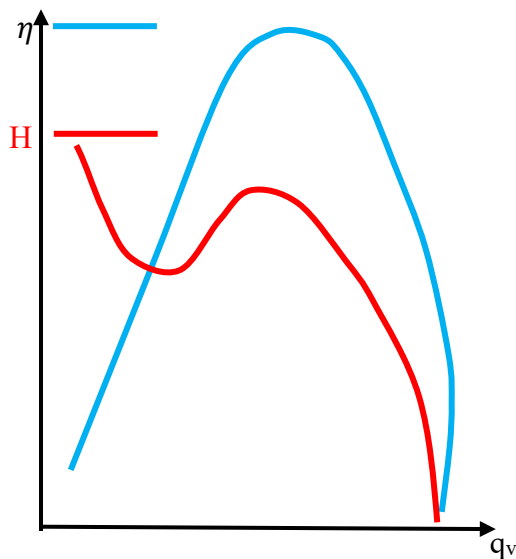


Figure XXV.15
Courbes caractéristiques

On voit donc que, connaissant le triangle des vitesses, cette loi va nous permettre de déterminer le pas optimum t . C'est-à-dire en définitive, le nombre des aubes qui sont nécessaires.

Lorsque le débit se réduit, la hauteur fournie par chaque filet fluide augmente et le coefficient de portance se met à croître. Il arrive un moment où des décollements apparaissent sur l'extrados des profils d'aubes.

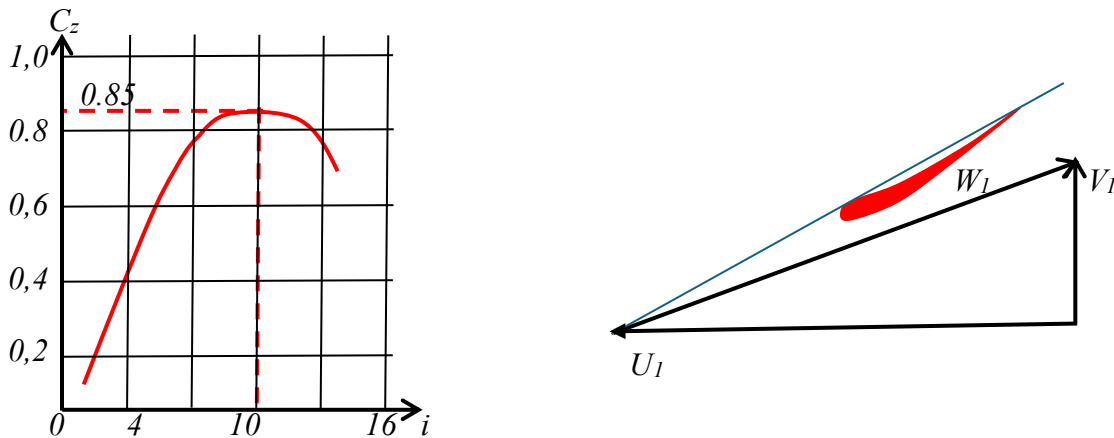
La courbe H présente alors un maximum en général assez aigu, à gauche duquel apparaissent des fonctionnements instables.

Parfois, on loge à l'intérieur du moyeu un mécanisme commandé de l'extérieur afin de faire pivoter l'aube autour de son axe radial. Le but étant d'obtenir des caractéristiques de fonctionnement permettant de conserver un rendement acceptable sur une large plage.

Exercice XXV.02

(On appelle ventilateurs des turbomachines génératrices à fluide compressible donnant des rapports de compression inférieurs à 1,2. Tous les calculs de construction et de fonctionnement peuvent être conduits comme s'il s'agissait d'un fluide incompressible, c'est-à-dire comme une pompe).

Un ventilateur axial (hélice) a une roue comportant 10 aubes, dont le C_z en fonction de l'angle d'incidence i est donné par la courbe ci-dessous.



Le point de fonctionnement normal a été déterminé à partir des données suivantes :

Vitesse de rotation $N=270$ tr/min.

Débit d'air traversant la roue $q_{vr}=250$ m³/s

Masse volumique de l'air $\rho_{air}=1,293$ kg/m³.

Masse volumique de l'eau $\rho_{H_2O}=1000$ kg/m³

$i = 10^\circ$ sur toute la largeur des aubes.

Vitesse d'entrée de l'air $V_1=50$ m/s. Cette vitesse est axiale et constante sur toute la hauteur des aubes.

Rendement hydraulique de la roue $\eta_h=0,92$ sur toute la hauteur des aubes.

Hauteur manométrique fournie par la roue $H = 368$ mm de colonne d'eau quel que soit le rayon r .

1 - Sachant que le rayon intérieur du rotor est $r_i=1$ m, calculer pour le point de fonctionnement normal en négligeant l'épaisseur des aubes :

1-1. Le rayon extérieur r_e .

1-2. La puissance.

1-3. La corde des aubes aux rayons r_i , et r_e .

2 - On fait varier le débit de manière à avoir $V_1=35$ m/s puis $V_1=65$ m/s.

2-1. Calculer pour ces deux valeurs du débit, les nouveaux angles d'incidence aux rayons r_i , et r_e .

2-2. Montrer qu'en modifiant de manière adéquate le calage des pales, on peut pour ces deux valeurs du débit, conserver un C_z pratiquement constant et

sensiblement égale à 0,85. Donner la valeur des angles de calage lorsque $V_1=35$ m/s puis à 65 m/s

3 - Les modifications de calage précédentes étant réalisées, calculer pour r_i , r_m et r_e et pour les vitesses $V_1=35$ m/s et 65 m/s, les hauteurs théoriques fournies par le ventilateur.

Corrigé.

1

1-1. Puisque la vitesse V_1 n'est pas fonction du rayon, nous avons :

$$q_{vr} = \pi(r_e^2 - r_i^2)V_1 \text{ soit :}$$

$$r_e = \sqrt{\frac{q_{vr}}{\pi V_1} + r_i^2} = \sqrt{\frac{250}{\pi \cdot 50} + 1^2} = 1,61 \text{ m}$$

1-2. Puissance

Remarquons que le Δp_{Totale} fourni par le ventilateur doit satisfaire la relation :

$$\Delta p_{\text{Totale}} = \rho_{\text{air}} g H_{\text{air}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} g H_{\text{H}_2\text{O}}$$

$$H = H_{\text{air}} = \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}} H_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{air}}} = \frac{1000 \times 0,368}{1,293} = 284,61 \text{ m}_{\text{air}}$$

De la relation XXIV.04 nous déduisons :

$$P = \frac{\rho g q_v H}{\eta_h} = \frac{1,293 \times 9,81 \times 250 \times 284,61}{0,92} = 981000 \text{ W}$$

1-3. La corde

La relation XV.11 permet de déterminer la corde :

$$l = 2 \frac{t}{C_z} \frac{\Delta W_u}{W_\infty}$$

Dans notre cas l'entrée est axiale, si bien que cette relation devient :

$$l = 2 \frac{t}{C_z} \frac{V_{2u}}{W_\infty}$$

Avec :

$$H = 284,61 \text{ m}_{\text{air}} \quad w_a = \frac{gH}{\eta_h} = 3034,8 \quad t = \frac{2\pi r}{10} = 0,628r$$

$$U = \frac{2\pi r N}{60} = 101,58 r \quad V_{2u} = \frac{w_a}{U_2} = \frac{29,876}{r}$$

$$W_{\infty} = \left(V_1^2 + \left(U - \frac{V_{2U}}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(50^2 + \left(101,58 r - \frac{29,876}{2r} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Nous avons tous les éléments pour déterminer la corde en fonction du rayon r , soit tous calculs effectués :

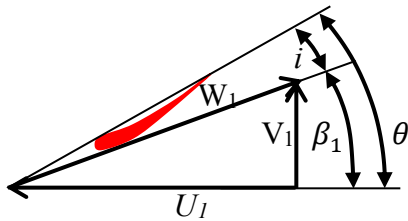
$$l = \left(1,2815 + \left(2,299 r - \frac{0,338}{r} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Au rayon $r_i = 1 \text{ m}$, la corde $l = 0,442 \text{ m}$

Au rayon $r_e = 1,61 \text{ m}$, la corde $l = 0,272 \text{ m}$

2

2-1. Conformément à la figure ci-dessous, désignons par θ l'angle formé par $i + \beta_1$



Le calage des aubes étant fixe il s'ensuit que l'angle $\theta = \beta_1 + i$ est constant pour un rayon r donné. Tout d'abord, calculons l'angle θ au régime normal de fonctionnement au rayon r_i et r_e en sachant que :

$$\beta_1 = \text{Arc t g} \left(\frac{V_1}{U} \right) = \text{Arc t g} \left(\frac{V_1}{101,58r} \right)$$

r	1 m	$1,61 \text{ m}$
Incidence i	10°	10°
β_1	26°	17°
$\theta = \beta_1 + i$	36	27

Nous avons tous les éléments pour calculer l'incidence aux vitesses $V_1 = 35 \text{ m/s}$ et $V_2 = 65 \text{ m/s}$.

V_1	35 m/s		65 m/s	
r	1 m	$1,61 \text{ m}$	1 m	$1,61 \text{ m}$
θ	36°	27°	36°	27°
$\beta_1 = \text{Arc t g} \left(\frac{V_1}{101,58r} \right)$	19°	12°	$32,6^\circ$	$21,7^\circ$
Incidence $i = \theta - \beta_1$	$17,2^\circ$	$14,9^\circ$	$3,6^\circ$	$5,3^\circ$

2-2. Sur la courbe donnée dans l'énoncé, nous voyons que les variations du C_z sont très faibles autour de l'angle d'incidence $i=10^\circ$.

Pour $V_1 = 35 \text{ m/s}$, on peut réduire l'angle de calage des pales de 6° . Et pour $V_1 = 65 \text{ m/s}$ on peut augmenter cet angle de calage de $5,5^\circ$

V_1	35 m/s		65 m/s	
r	1 m	1,61 m	1 m	1,61 m
θ	30°	21°	$41,5^\circ$	$32,5^\circ$
$\beta_1 = \text{Arc t g} \left(\frac{V_1}{101,58r} \right)$	19°	12°	$32,6^\circ$	$21,7^\circ$
Incidence $i = \theta - \beta_1$	11°	9°	$8,96^\circ$	$10,8^\circ$

A ces angles d'incidence i correspondent des valeurs des C_z voisines de 0,85.

3

Nous avons : $w_a = UV_{2U}$ avec $U=101,58 r$

Il faut expliciter le terme V_{2U} . Pour cela nous disposons des deux relations suivantes :

$$W_\infty = \frac{2tV_{2u}}{C_z l} \quad W_\infty = \left(V_1^2 + \left(U - \frac{V_{2U}}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

En regroupant ces deux termes élevés au carré nous obtenons :

$$\frac{4t^2}{C_z^2 l^2} V_{2U}^2 = V_1^2 + \left(U - \frac{V_{2U}}{2} \right)^2$$

C'est-à-dire une équation du second degré en V_{2U} :

$$\left(\frac{4t^2}{C_z^2 l^2} - \frac{1}{4} \right) V_{2U}^2 + UV_{2U} - (V_1^2 + U^2) = 0$$

Pour simplifier les écritures posons :

$$A = \left(\frac{4t^2}{C_z^2 l^2} - \frac{1}{4} \right) \quad \text{et} \quad C = (V_1^2 + U^2)$$

Soit : $AV_{2U}^2 + UV_{2U} - C = 0$ qui admet comme racines $V_{2u} = \frac{-U \pm \sqrt{U^2 + 4AC}}{2A}$. Seule la racine positive à une signification compatible avec le problème.

V_1	35 m/s		65 m/s	
r	1 m	1,61 m	1 m	1,61 m
$t = 0,628 r$	0,628	0,272	0,628	0,272
$A = \left(\frac{4t^2}{C_z^2 l^2} - \frac{1}{4} \right)$	10,94	76,33	10,94	76,33
$U = 101,58 r$	101,58	163,54	101,58	163,54
$C = (V_1^2 + U^2)$	11543,5	27970,3	11543,5	27970,3
$V_{2u} = \frac{-U + \sqrt{U^2 + 4AC}}{2A}$	28,2	18	32,1	19,1
$w_a = UV_{2u}$	2864,5	2943.7	3260.7	3123.6
$H_{th} \text{ en } m \text{ d'air}$	292	300	332,4	318,4